

~~14643.~~ B7404.

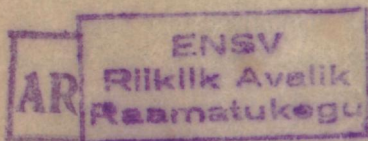
~~VIII, 860.~~

Studien  
über die  
**Schwingungsgesetze der Stimmgabel**  
und über die  
**electromagnetische Anregung.**

Eine  
zur Erlangung des Grades eines  
**Magisters der Physik**  
der Physiko - Mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität Dorpat  
vorgelegte Abhandlung

von

**Friedrich Heerwagen.**



129 535

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Ordentliche Opponenten:

Doc. Mag. Th. Moliën. — Prof. Dr. A. Kneser. — Prof. Dr. Arthur v. Oettingen.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1890.



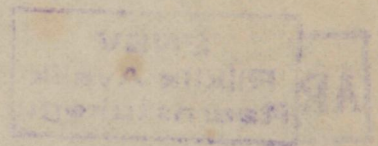
2



Gedruckt mit Bewilligung der physiko-mathematischen Fakultät.  
Dorpat, den 22. August 1890.

Nr. 138.

Prodekan Prof. Dr. Carl Schmidt.





## Einleitung.

Obschon die Stimmgabel wol das meistbenutzte Instrument der physikalischen Akustik ist, obschon ihre Schwingungen als hervorragendstes Beispiel reiner Sinusschwingungen angesehen werden, mangelt es doch zur Zeit noch immer an einer genauen Untersuchung ihrer Schwingungsgesetze, speciell der Dämpfung, der Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude, und des Verhaltens der Gabel bei electromagnetischer Anregung. Zwar die Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahl sind, veranlasst zumeist durch die Bedürfnisse der Praxis, in den Jahren 1874—1884 in hohem Maasse ausgebildet worden <sup>1)</sup>, und Hand in Hand mit diesen Arbeiten ging auch die Untersuchung des Einflusses der Temperatur auf die Tonhöhe der Gabeln. Bei den meisten Arbeiten über Tonhöhe und Temperaturcoefficient ist keine Rücksicht genommen auf die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude, obschon die Variation derselben bei den vorkommenden Amplituden die Fehlergrenze übersteigt. Für die Bedürfnisse der musikalischen Praxis freilich ist diese Variation in der That verschwindend klein; so kam es, dass das Vorhandensein derselben überhaupt erst nachgewiesen wurde, als Lissajous <sup>2)</sup> die nach ihm benannte Differentialmethode zur Vergleichung zweier Schwingungszahlen erfand. Lissajous beschränkte sich darauf zu constatiren, dass, wenn man eine Stimmgabel von sehr hoher Amplitude abschwingen lasse, mit der Abnahme der Amplitude eine geringe Zunahme der Schwingungszahl verbunden sei. Diese Angabe ist seither von verschiedenen Autoren bestätigt worden. Ueber die Art und Weise aber, wie die Schwingungszahl von der Amplitude abhängt, ich meine, welche Function der Amplitude die Schwingungszahl sei, darüber sind nur wenige, und nicht ganz übereinstimmende Angaben vorhanden.

---

1) Poske, Pogg. Ann. 152, 448. 1874. — A. Mayer, Americ. Journ. of Science, (3) 14, 512. 1877. Mem. of the U. S. Nat. Acad. Vol. III, 45. 1884. — R. Koenig, Wied. Ann. 9, 394. 1880. — M'Leod u. Clarke, Phil. Trans. 171, I, 1. 1880. — Michelson, Americ. Journ. of Science (3) 25, 61. 1883.

2) Lissajous, Sur l'étude optique des mouvements vibratoires. Ann. chim. phys. (3) 51 147. 1857.



Für Transversalschwingungen von Stabstäben, welche an einem Ende befestigt waren, hat F. Braun <sup>1)</sup> auf theoretischem Wege das Gesetz hergeleitet, die Schwingungszahl sei nur von den geraden Potenzen der Amplitude, vornehmlich vom Quadrate derselben, abhängig. Zugleich bringt Braun experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Behauptung. Freilich ist die Genauigkeit seiner Messungen nur gering. Für Stimmgabeln giebt Poske <sup>2)</sup> einige Beobachtungsreihen. Poske's Beobachtungsweise bestand in der optischen Vergleichung einer abschwingenden und einer constant erregten Gabel. Das Abschwingen geschah immer von nahezu der gleichen Anfangsamplitude ab, und die Art der Amplitudenabnahme wurde durch vorhergehende Versuche ermittelt. Poske selbst erklärt die Genauigkeit seiner Beobachtungen für mangelhaft; immerhin ist sein Schluss ausreichend bewiesen, dass die Tonänderung wesentlich von der ersten Potenz der Amplitude abhängt. Dagegen giebt Ettingshausen <sup>3)</sup> an, dass die Tonänderung dem Quadrate der Amplitude proportional sei. Ettingshausen vergleicht ebenfalls die zu untersuchende Gabel mit einer constant erregten, doch hat er leider genauere Bestimmungen nur bei selbstthätiger electromagnetischer Anregung der Versuchsgabel gemacht. Die verschiedenen Amplituden wurden erzeugt theils durch Veränderung der Elementenzahl, welche zum Betriebe der Gabel diente, theils durch Verstellung des Quecksilbernapfes der Gabel bei ungeänderter Stromquelle. Die Schwingungszahl einer frei schwingenden Gabel wird aber durch die electromagnetische Selbstanregung in complicirter Weise modificirt, sie ist abhängig nicht nur von der Amplitude der Gabel, sondern auch von der Stromstärke und der Stellung des Quecksilbernapfes. Dadurch verlieren die von Ettingshausen mitgetheilten Zahlen (p. 345) sehr an Werth. Trägt man zudem die von Ettingshausen beobachteten Schwingungszahlen und Amplituden in Coordinatenpapier ein, so lehrt schon der Anblick, dass auch ein lineares Glied in dem Ausdrücke für die Schwingungszahl vorhanden sein muss, welches bei den kleineren Amplituden das quadratische weit überwiegt. Eine graphische Darstellung von Ettingshausen's Beobachtungsreihe auf p. 362, welche an einer frei abschwingenden Gabel ausgeführt ist, zeigt ebenfalls einen erheblich von einer Geraden abweichenden Verlauf. Die von Ettingshausen angewandten Amplituden waren sehr gross, bis zu 11 *mm*, bei einer  $Ut_{-1}$  Gabel von 360 *mm* Zinkenlänge.

Ueber die Dämpfung der Stimmgabelschwingungen lagen bis zum J. 1883 nur gelegentliche Beobachtungen von Poske <sup>4)</sup> vor, welcher die Abnahme der Ampli-

1) F. Braun, Ueber elast. Schwing. deren Ampl. nicht  $\infty$  klein sind. Pogg. Ann. 151, 5 u. 250. 1874.

2) Poske, Ueber d. Bestimm. d. absoluten Schwingungszahl eines Tones u. d. Abhängigkeit d. Tonhöhe v. d. Amplitude. Pogg. Ann. 152, 448. 1874.

3) Ettingshausen, Ueber den stroboscopischen Stimmgabelapparat. Pogg. Ann. 156. 337. 1875.

4) Poske, Pogg. Ann. 152, 465. 1874.



tude maass, um hernach bei der Vergleichung der Tonhöhen einer abschwingenden und einer constant erregten Gabel, die zugehörigen Amplituden auffinden zu können. Für eine Lissajous'sche Microscopgabel fand Poske Constanz des logarithmischen Decrementes; für eine andere, unbelastete Gabel von ca. 220 Schwingungen giebt Poske eine Tabelle, welche eine sehr starke Zunahme des Decrementes mit der Amplitude aufweist. Von der kleinsten bis zur grössten beobachteten Amplitude verdoppelt sich das Decrement. Versucht man eine graphische Darstellung, so zeigt es sich, dass innerhalb der Fehlergrenzen das Decrement durch eine lineare Function der Amplitude dargestellt werden kann. Zu demselben Zwecke wie Poske hat auch Ettingshausen die Amplituden einer abschwingenden Gabel gemessen, und seine Resultate in Form einer Curve <sup>1)</sup> niedergelegt, ohne jedoch aus denselben die Decremente zu berechnen. Zwar sind die Einheiten der Amplitude und der Zeit für jene Curve nicht ausdrücklich angegeben, doch geht aus dem Vergleich der Curve mit den Col. I und II der Tabellen auf p. 362 und 363 hervor, dass die Einheit des Abscissenmaasstabes gleich 2 sec, die Einheit der Ordinate ein Scaltheil (= 0.745 mm) ist. Damit gründe ich auf Ettingshausen's Fig. 4 die folgende Tabelle:

Zu dem Amplituden- intervall	finde ich die Abscissendistanzen:		$z = \frac{1a_1 - 1a_2}{t_2 - t_1}$		Mittlere Amplitude.
	gestrichelte Curve (Abschwingen in Luft)	ausgezogene Curve (Contactstift in Hg)	Luft	Quecksilber	
12—6	4.9 = 9.8 sec.	4.4 = 8.8 sec.	0.071	0.079	9
10—5	4.5 = 9.0	4.7 = 9.4	77	74	7.5
8—4	5.2 = 10.4	5.8 = 11.6	67	60	6
6—3	6.6 = 13.2	7.0 = 14.0	53	50	4.5
4—2	7.7 = 15.4	7.6 = 15.2	45	46	3

Man sieht, dass auch hier ein wenigstens annähernd geradliniger Verlauf des Decrementes stattfindet. Die Decremente beider Reihen steigen aber erst langsamer, dann rascher an, bei der grössten Amplitude wieder langsamer. Col. II liefert sogar eine Umkehr.

Wead <sup>2)</sup> machte die Dämpfung der Stimmgabelschwingungen zum Gegenstande einer besonderen Abhandlung. Letztere wurde mir jedoch erst bekannt, nachdem meine eigenen Untersuchungen über den vorliegenden Gegenstand bereits zu einem gewissen Abschlusse gekommen waren (1885). Wead brachte ein wenig Antimonpulver auf das Zinkenende der zu untersuchenden Gabel, und maass die Amplituden

1) Pogg. Ann. 156, Taf. III, Fig. 4.

2) Wead, The Energy and Coefficient of Damping of a Tuning Fork. Americ. Journ. of Science. (3) 26, 177. 1883.



mit Microscop und Ocularmicrometer. Zur Zeitmessung diente „a stop watch“, deren Zählwerk durch Druck auf einen Knopf ein- und ausgeschaltet werden konnte, sie gab Achtelsekunden an. Die Gabeln wurden mit einem Bogen angestrichen, und es wurde die Zeit beobachtet, in welcher die Amplitude von  $z'$  auf  $z''$  sinkt. Dann ist das doppelte Decrement  $x = 2 (\log. \text{ nat } z' - \log. \text{ nat } z'') / t$ . Jedes derartige Intervall wurde mehrere Male beobachtet. Nach einem mitgetheilten Beispiele zu urtheilen, sind die Beobachtungsfehler recht bedeutend, bis zu  $1/2 \text{ sec.}$  weichen bei einem Intervall von  $10 \text{ sec.}$  ( $z' = 12, z'' = 6$ ) die Zahlen vom Mittel ab. Wead ist erstaunt über das unerwartete Resultat, dass  $x$  so stark mit der Amplitude variiert, doch es zeigen alle die von ihm untersuchten 6 Gabeln (von  $Ut_2$  bis  $Ut_5$ ) dasselbe Verhalten. Die Beobachtungen lassen sich sehr gut durch Formeln darstellen, wenn man setzt

$$x = a + b \frac{z' + z''}{2}$$

Um nun aus dieser Formel und der Gleichung  $z = Ae^{-\frac{1}{2}xt}$  die Amplituden für irgend eine Zeit  $t$  zu erhalten, benutzt Wead ein Verfahren successiver Annäherung. Er meint,  $x$  könne nicht als einfache Funktion der Zeit dargestellt werden. Wir werden jedoch späterhin sehen, dass dies sehr wohl möglich ist. Wead bemerkte auch, dass das Decrement in hohem Grade von der Art der Befestigung der Gabel abhängig sei. Ja sogar bei gleicher Montirung kamen beträchtliche Differenzen vor.

In neuester Zeit untersuchte noch L. J a c o b s o n <sup>1)</sup> die Abnahme der Schwingungsamplituden bei ausklingenden Stimmgabeln. Er liess die Gabel mittelst einer Schreibspitze auf einem mit berusstem Papier überzogenen rotirenden Cylinder ihre Schwingungscurve aufzeichnen, und maass letztere mit Microscop und Ocularmicrometer aus. Die Decremente nahmen mit abnehmender Amplitude zu. Andere Versuche, bei denen die Gabel auf einem schwach berussten blank polirten Cylinder schrieb, ergaben Constanz des Decrementes bei kleinen Amplituden. Diese Versuche können nicht als einwurfsfrei betrachtet werden, denn es ist unstatthaft, ein neues Bewegungshinderniss von unbekannter Wirkung einzuführen, wenn man die Dämpfung studiren will. Dieser Einwand trifft nicht die Versuche Stefanini's <sup>2)</sup>, welcher die Amplituden photographisch registrierte. Stefanini findet, dass Amplitude  $a$  und Zeit  $t$  nicht durch das bekannte Gesetz  $a = a_0 e^{-at}$  verknüpft seien, sondern dass man setzen müsse  $a = a_0 e^{-at^m}$ , wo  $m$  ein Exponent, welcher zwischen 0.94 und 0.84 liegt. Die Originalarbeit ist mir leider nicht zugänglich gewesen, daher ich auch nicht weiss, wie weit der Autor Geltung für diese Formel beansprucht. Denn sobald  $a$  und  $a_0$  als unabhängige Constanten betrachtet werden sollen, wie es doch den Anschein hat, so statuirt dieselbe eine höchst merkwürdige Abhängigkeit

1) L. Jacobson, Archiv f. Physiologie, 1887, 476.

2) Stefanini, Beibl. 13, 871. 1889. Aus Atti. R. Acc. Lucchese 25, 307. 1889.



des Decrementes von der Anfangsamplitude. Bei Torsionsschwingungen von Drähten ist freilich ein geringer Einfluss der Anfangsamplitude auf die Decremente beobachtet worden <sup>1)</sup>, doch Stefanini's Formel besagt: Das anfängliche Decrement ist beim Abschwingen von jeder beliebigen Anfangsamplitude immer dasselbe. Ich selbst habe, veranlasst durch die angeführten Arbeiten von Schmidt und Braun u. Kurz, 1885 nach einer Abhängigkeit der Stimmgabeldecremente von der Anfangsamplitude gesucht, jedoch war eine solche überhaupt nicht nachzuweisen. Ich kann mir Stefanini's Formel nur erklären, wenn der Autor stets mit derselben Anfangsamplitude experimentirt hat, und auch dann scheint die Zweckmässigkeit der Formel fraglich zu sein.

Was nun weiter das Verhalten der Stimmgabeln bei electromagnetischer Anregung betrifft, so wird allgemein angenommen, dass dasselbe Lord Rayleigh's <sup>2)</sup> Theorie befolge. Rayleigh setzt, wie üblich, die Bewegungsgleichung der Stimmgabel in folgender Form an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x = 0 \quad 1)$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$x = A e^{-xt} \cos(\sqrt{4\pi^2 m^2 - x^2} \cdot t - \gamma) \quad 2)$$

Wirkt auf die Stimmgabelzinken eine periodische Kraft, so wird die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x = J \cos 2\pi nt \quad 3)$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$x = A e^{-xt} \cos(\sqrt{4\pi^2 m^2 - x^2} \cdot t - \gamma) + \frac{J \sin \varepsilon}{4\pi n x} \cos(2\pi nt - \varepsilon) \quad 4)$$

$$\text{wo } \tan \varepsilon = \frac{nx}{\pi(m^2 - n^2)} \quad 5)$$

Das erste Glied hat die Periode  $\sqrt{4\pi^2 m^2 - x^2}$ , das zweite hat die Periode  $2\pi n$ . Mit der Zeit verschwindet das erste Glied, wegen des Factors  $e^{-xt}$ , und die Stimmgabel geräth in einen Zustand stationärer Schwingungen, welcher ausgedrückt ist durch

$$x = \frac{J \sin \varepsilon}{4\pi n x} \cos(2\pi nt - \varepsilon) \quad 6)$$

1) Schmidt, Wied. Ann. 2, 241. 1877. — W. Braun u. A. Kurz, Rep. d. Phys. 17, 244. 1881.

2) Rayleigh, Theory of Sound. I. Cap. 3. London 1877.



Die Schwingungen der Gabel haben mit dem Verlaufe der Kraft einen Phasenunterschied  $\varepsilon$ , welcher von Null bis zu einer halben Periode sich erstrecken kann. Die Phasendifferenz liegt zwischen 0 und  $90^\circ$ , so lange  $m - n > 0$ , zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$ , wenn  $m - n < 0$ ; für  $m = n$  wird die Phasendifferenz gleich  $90^\circ$ , und alsdann wird die Amplitude der erzwungenen Schwingung ein Maximum. Dieses Maximum tritt also ein, wenn die Periode der Kraft mit der Periode übereinstimmt, in welcher die Stimmgabel schwingen würde, wenn keine Dämpfung da wäre. Die Maximalamplitude ist um so grösser, je geringer die Dämpfung ist. Andererseits muss bei kleinerer Dämpfung auch die Differenz  $m^2 - n^2$  kleiner gemacht werden, wenn derselbe Bruchtheil der Maximalamplitude erreicht werden soll. Die Uebereinstimmung dieser Theorie der erzwungenen Schwingungen mit der Erfahrung ist in den grössten Zügen schon von Mach<sup>1)</sup> nachgewiesen worden. Später haben E t t i n g s h a u s e n<sup>2)</sup> und L a s k e<sup>3)</sup> durch genaue Messungen an schwingenden Magneten die Uebereinstimmung von Theorie und Experiment dargethan. Das logarithmische Decrement änderte sich bei diesen Versuchen nicht mit der Amplitude, und die Schwingungsdauer war ebenfalls fast völlig constant, so dass die Aenderung derselben mit der Amplitude die Beobachtungsfehler kaum überstieg. Da somit die freien Schwingungen nach der Differentialgleichung 1) vor sich gingen, konnte auch kein anderes Resultat erwartet werden. Mit der Anwendung der Theorie auf die Stimmgabel steht es anders. Da die Dämpfung ihrer Schwingungen nur klein ist, wird man erwarten müssen, dass die Abhängigkeit der Schwingungszahl von der Amplitude sich schon sehr bemerklich machen wird. Denn aus Gl. 6 folgt

$$\tan \varepsilon = \frac{x}{2\pi(m-n)\left(1 + \frac{m-n}{2n}\right)} \quad 7)$$

Also ist die Differenz der Schwingungszahlen  $m$  und  $n$  für die Phasendifferenz maassgebend. Ferner zeigt es sich, dass die Decremente bei der Stimmgabel durchaus nicht constant sind, sondern in hohem Maasse von der Amplitude abhängen. Endlich ist die Kraftwirkung eines intermittirenden Stromes, welcher eine Stimmgabel in Bewegung setzt, kein einfacher Cosinus der Zeit. Zwar findet R a y l e i g h es zulässig, ihn als solchen zu betrachten<sup>4)</sup>. Aber gerade hierin liegt ein Mangel seiner Theorie, wie meine Beobachtungen zeigen werden.

1) M a c h, Zur Theorie der Pulswellenzeigner. Wien. Ber. 46, 157. 1862. — Ueber die Gesetze des Mitschwingens. Wien. Ber. 47, 33. 1863.

2) E t t i n g s h a u s e n, Messungen über das Mitschwingen. Wien. Ber. 79, 215. 1879. od. Rep. d. Phys. 15, 489. 1879.

3) L a s k e, Messungen üb. d. Mitschwingen f. d. Fall starker Dämpfung. Wien. Ber. 82, 1011. 1880.

4) „When an intermittent current is sent through the wire, a periodic force acts upon the fork. This force is not expressible by a simple circular function; but may be expanded by F o u r i e r 's theorem in a series of such functions, having periods  $\tau$ ,  $\frac{1}{2}\tau$ ,  $\frac{1}{3}\tau$ , &c. If any of these, of not too



Ueber die erzwungenen Stimmgabelschwingungen liegen Versuche von La Cour<sup>1)</sup> vor, welche beweisen, dass die Phasen der durch einen intermittirenden Strom in Bewegung gesetzten Gabel bei starker Verstimmung derselben um  $90^\circ$  nach beiden Seiten, je nach dem Vorzeichen der Verstimmung, von jener Phase abweichen, in welcher die Gabel bei geringster Verstimmung zugleich mit der grössten Amplitude schwingt. Ausserdem hat La Cour sich experimentell davon überzeugt, dass in der That die Periode der erzwungenen Schwingung identisch mit der Periode der Kraft ist.

Die Resultate der Theorie sind von Ettingshausen<sup>2)</sup> dazu benutzt worden, um Schlüsse auf die Verzögerung des Magnetismus in den Stimmgabel-Electromagneten gegenüber dem erregenden Strome zu machen. Setzt man, wie Ettingshausen dies thut, die Anwendbarkeit jener einfachen Theorie auf die electromagnetische Stimmgabel voraus, so gelangt man aber bei näherer Betrachtung der experimentellen Ergebnisse zu Widersprüchen. Um dies nachzuweisen, muss ich etwas näher auf jene Arbeiten Ettingshausen's eingehen, soweit sie hier für uns von Interesse sind. In einer Versuchsreihe werden dort in den Stromkreis einer selbstthätigen electromagnetischen Stimmgabel die Electromagnete einer zweiten Gabel eingeschaltet. Versetzt man die erstere Gabel — nennen wir sie die primäre — in Schwingungen, so geräth die zweite, secundäre Gabel ebenfalls in Bewegung. Durch sorgfältiges Abstimmen wird die Amplitude der secundären Gabel zu einem Maximum gemacht, und es wird Folgendes beobachtet: Sei durch die punctirte Curve  $ss's''$ , Fig. 1, welche der Einfachheit wegen als Sinuscurve gezeichnet ist, der periodische Verlauf des Stromes, welcher die Electromagnete erregt, dargestellt, so stellt die ausgezogene Curve  $ss's''$  die gleichzeitige Bewegung der oberen Stimmgabelzinke der primären Gabel dar. Die obere Zinke der secundären Gabel beschreibt dann eine Curve  $pp'p''$ , welche eine gewisse Phasendifferenz  $sp/ss''$  gegen die erste Curve hat. Das maximale Mitschwingen der secundären Gabel trat ein, wenn  $sp/ss'' = 0.070$  war. Die benutzten Gabeln machten 32 Schwingungen pro Secunde. Da nun, schliesst der Autor, nach Helmholtz<sup>3)</sup> für das Maximum des Mitschwingens die Phasendifferenz zwischen Kraft und Bewegung  $90^\circ$  beträgt, so ist die magnetische Kraft, welche auf die Gabel wirkt, durch die Curve  $qq'$  darzustellen, wenn  $pq = \frac{1}{4} pp''$  ist. Der Grad der Verstimmung, bei welchem das maximale Mit-

small amplitude, be nearly isochronous with the fork, the latter will be caused to vibrate; otherwise the effect is insignificant. In what follows we will suppose that it is the complete period  $\tau$  which nearly agrees with that of the fork, and consequently regard the series expressing the periodic force as reduced to its first term. In order to obtain the maximum vibration, the fork must be carefully tuned by a small sliding piece or by wax, until its natural period (without friction) is equal to that of the force." (Theory of Sound, I, pag. 56).

1) La Cour, Das phonische Rad. Deutsch von Kareis. Leipzig 1880.

2) Ettingshausen, Pogg. Ann. 156, 337. 1875. — Pogg. Ann. 159, 51. 1876.

3) Tonempfindungen, p. 609.



schwingen eintrat, wurde in der Weise ermittelt, dass man jede der Gabeln für sich mit einem Strome, welcher an dem Rheometer den gleichen Ausschlagswinkel hervorrief, wie der früher durch die Electromagnete beider Gabeln geschickte Strom, selbstthätig betrieb, und nun die Dauer der stroboscopischen Schwingung einer Gabel, durch die andere betrachtet, bestimmte. Das Maximum des Mitschwingens trat bei den Gabeln  $Ut_{-1}$  ( $n = 32$ ) dann ein, wenn die primäre in der Secunde etwa  $\frac{1}{50}$  Schwingung mehr machte, als die secundäre. Ausserdem wurde die Schwingungsamplitude der jetzt selbstthätigen Gabel gemessen, und mit jener verglichen, welche beim Mitschwingen beobachtet war. Die Amplitude der mitgenommenen Gabel war im Allgemeinen etwas kleiner, als für den Fall der selbstthätigen Unterbrechung bei gleicher Stromintensität. Das Verhältniss beider Amplituden war im Mittel 0.94; in einigen Fällen gelang es, die Amplitude der mitgenommenen Gabel gleich oder sogar ein wenig grösser zu bekommen. Wurde die mitgenommene Gabel merklich weniger, oder aber stärker verstimmt, so war die Intensität des Mitschwingens erheblich schwächer, während gleichzeitig der Phasenunterschied der beiden Gabeln sich rasch änderte. Als die Amplitude der stark verstimmt mitgenommenen Gabel nur etwa  $\frac{1}{5}$  von jener betrug, welche sie beim stärksten Mitschwingen angenommen hatte, war der Phasenunterschied  $sp/ss'' = 0.25$ . Fast die gleichen Zahlen findet E t t i n g s h a u s e n auch für Gabeln von 64 und 128 Schwingungen. Erstere ergaben  $sp/ss'' = 0.091$ , das Amplitudenverhältniss war 0.87, die günstigste Verstimmung war  $\frac{1}{20}$  Schwingung, um welche die secundäre Gabel tiefer gestimmt sein musste. Änderte man die Verstimmung, so nahm die Amplitude der mitgenommenen Gabel ab, während die Phasendifferenz rasch grösser wurde, und bei sehr schwachem Mitschwingen nahe den Werth 0.22 annahm. Bei den Gabeln von 128 Schwingungen war die Phasendifferenz  $sp/ss'' = 0.124$ , die Amplitude der mitgenommenen Gabel meist grösser als die der selbstthätigen. In derselben Arbeit untersucht E t t i n g s h a u s e n auch, ob durch die selbstthätige electromagnetische Anregung die Schwingungszahl einer Stimmgabel sich ändert, und findet an einer  $Ut_{-1}$ -Gabel, dass für kleine Amplituden die Schwingungszahl der electromagnetischen Gabel grösser, für grössere Amplituden aber kleiner ist, als die Schwingungszahl der mit gleicher Amplitude frei schwingenden Gabel. Zum Schluss weist der Autor noch darauf hin, dass für den Mechanismus der Selbstanregung die Verzögerung des Magnetismus wesentlich sei, bringt dies aber nicht mit der Theorie der erzwungenen Schwingungen in Verbindung. In der zweiten Arbeit bestimmt E t t i n g s h a u s e n dieselben „Phasendifferenzen bei der Maximalamplitude“ zu 0.115 für die  $Ut_{-1}$ -Gabel, zu 0.086 für die  $Ut_1$ -Gabel. Diese Versuche unterschieden sich von den früheren dadurch, dass die Zinken der mitschwingenden Stimmgabel kräftig magnetisirt waren.

Rayleigh hat die Theorie der erzwungenen Schwingungen auch auf die selbstthätige electromagnetische Stimmgabel angewendet. Wenn die auf die Gabel wirkende Kraft nur von der Stellung jener abhinge — davon, ob der Strom geschlossen oder geöffnet ist — so würde die bei dem Durchgange durch eine Lage



geleistete Arbeit wieder verbraucht, so dass nach einer vollständigen Periode nichts übrig wäre, wodurch die Wirkung der reibenden Kräfte compensirt werden könnte. Zwei Ursachen aber verzögern die magnetische Kraft. Erstens wird der Strom nicht in dem Augenblicke geschlossen, in welchem die Gabel ihre Ruhelage passirt, sondern der Contact zwischen Stift und Quecksilber wird erst nach Verlauf einer gewissen Zeit vollkommen; ebenso wird, wenn der Stift das Quecksilber verlässt, der Contact durch Adhäsion eines Quecksilberfadens verlängert. Zweitens aber braucht der Selbstinduction wegen der Magnetismus eines Electromagnetes eine gewisse Zeit sowohl zum Entstehen, als auch zum Vergehen. Diese beiden Gründe verzögern die Kraft der Electromagnete hinter jener, welche nur der Stellung der Gabel allein entsprechen würde. Wenn die magnetische Kraft nur von der Lage der Gabel abhinge, so müsste die Phase ihrer ersten harmonischen Componente als um  $180^\circ$  vor der Phase der eigenen Schwingung der Gabel voraus angesetzt werden. Die erwähnte Verzögerung vermindert diesen Vorsprung. Daher weicht auch die wirkliche Tonhöhe  $n$  der selbstthätigen electromagnetischen Gabel von der natürlichen Tonhöhe  $m$  derselben innerhalb eines nicht unbedeutenden Bereiches ab, entsprechend der Gleichung 7:

$$\tan \varepsilon = \frac{x}{2\pi(m-n)\left(1 + \frac{m-n}{2n}\right)}$$

$\varepsilon$  ist in diesem Falle eine vorgeschriebene Phasendifferenz, welche von der Natur des Contactes und der Art des zeitlichen Verlaufes des Magnetismus in den Electromagneten abhängt.

Soweit geht R a y l e i g h auf diese Frage ein. Liegt also die Verzögerung des Magnetismus  $\varphi$  zwischen  $0$  und  $90^\circ$ , so ist  $\tan \varepsilon$  negativ, da  $\varepsilon = 180^\circ - \varphi$ . Also ist auch  $m - n < 0$ , das heisst: Die Schwingungszahl  $n$  der selbstthätigen electromagnetischen Gabel ist grösser, als die Schwingungszahl derselben Gabel, wenn sie nur unter dem Einflusse ihrer elastischen Kräfte schwingt. Ist dagegen die Verzögerung  $\varphi > 90^\circ$ , so ist  $\tan \varepsilon > 0$ ,  $m > n$ , d. h.: Die selbstthätige electromagnetische Anregung vermindert in diesem Falle die Schwingungszahl der Gabel.

E t t i n g s h a u s e n hat, wie referirt, bei kleinen Amplituden eine Tonerhöhung, bei grossen eine Tonerniedrigung durch die electromagnetische Anregung gefunden. Daraus wäre zu schliessen, dass bei kleinen Amplituden, also bei schwachen Strömen, die Verzögerung des Magnetismus zwischen  $0$  und  $90^\circ$ , bei starken Strömen zwischen  $90$  und  $180^\circ$  liegt. Vergleichen wir mit letzterem das Ergebniss, welches aus den Beobachtungen erzwungener Schwingungen hergeleitet wurde, so findet Uebereinstimmung statt. Denn grosse Stromstärken kamen zur Anwendung, und die Verzögerung betrug über  $90^\circ$ , nämlich  $90^\circ + sp/ss'' \cdot 360$ . Für schwächere Ströme ist aber die Verzögerung nicht direct bestimmt worden, so dass hier die Controle fehlt.

Gegen eine Verzögerung des Magnetismus, welche grösser als  $90^\circ$  ist, sprechen



aber andere Gründe. Beetz <sup>1)</sup> hat eine Reihe sehr sorgfältiger Versuche über den zeitlichen Verlauf des Magnetismus in Eisenkernen angestellt. Darnach nimmt beim Oeffnen des magnetisirenden Stromes auch der Magnetismus eines massiven Eisenkernes sehr rasch ab. Das Anwachsen des Magnetismus beim Stromschluss geht erst langsam, dann rascher vor sich; schliesslich nähert sich der Magnetismus asymptotisch seinem Grenzwerte. Die absoluten Zeiten, welche Beetz angiebt, sind für uns von geringer Bedeutung, da dieselben in nicht näher bekannter Weise von den Dimensionen der Electromagnete abhängen. Wichtig ist für uns insbesondere das steile Abfallen des Magnetismus nach Oeffnung des Stromes. Wenn es auch unbekannt ist, an welchem Punkte der ansteigenden Curve die Unterbrechung eintritt, so sieht man doch soviel, dass jedenfalls der grössere Theil der magnetischen Kraft vor der Unterbrechung wirksam ist. In einem ganz extremen Falle würde der Verlauf der magnetischen Intensität innerhalb einer Periode nach den Versuchen von Beetz etwa der in Fig. 2 dargestellte sein. Die punctirte Fortsetzung der linken Grenzcurve giebt den Verlauf an, wie er bei bleibendem Stromschluss stattfinden würde. Denkt man sich nun diese Curve nach Fourier's Satz in eine Sinusreihe entwickelt, und zieht blos das erste periodische Glied in Betracht, so würde man die gestrichelte Sinuslinie erhalten. Auf die Phase derselben kommt es uns hier allein an, und ich meine man sieht leicht ein, dass das Maximum dieser Welle in jedem Falle zeitlich vor der Oeffnung des Stromes liegen muss, auch im extremsten Falle der Verzögerung. Denn wir wissen durch Beetz, dass die Curve der Abnahme des Magnetismus immer eine sehr viel steilere ist, als die des Anwachsens.

Pflichtet man diesen Ausführungen bei, so folgt daraus, dass die Verzögerung des Magnetismus immer weniger als ein viertel Phase, d. i. also weniger als  $90^\circ$  betragen muss. Als gegentheilige Thatsache können die Schlüsse, welche E t t i n g s h a u s e n aus den Beobachtungen der Phasendifferenz bei erzwungenen Maximalamplituden zieht, nicht angeführt werden. Einmal liegt bei E t t i n g s h a u s e n's Beobachtungsverfahren die Möglichkeit vor, dass die Phasendifferenz  $sp/ss''$  in der That negativ war, und nur durch ein Versehen positiv angenommen wurde. Wichtiger aber ist der Einwand, dass die mitgenommene Gabel wol gar nicht das Maximum der Amplitude hatte. Setzt man überhaupt die Giltigkeit der Theorie voraus — und das kann man in dieser Frage — so muss vielmehr die Beobachtung, dass bei selbstthätiger Anregung die Amplitude der Gabel grösser wurde als bei der erzwungenen Schwingung mit gleicher Stromstärke, zu dem Schlusse führen, dass bei den erzwungenen Schwingungen, welche zur Beobachtung gelangten, die Phase der Kraft noch ungünstiger war, d. h. mehr von  $90^\circ$  abwich, als bei der selbstthätigen Anregung. Ferner, die Phasendifferenz zwischen magnetischer Kraft und erzwungener Schwingung bewegt sich nach der Theorie zwischen den Grenzen  $0$  und  $180^\circ$ . Die Grenzwerte treten ein, wenn die eigene Schwingungszahl der mitgenommenen Gabel

1) Beetz, Pogg. Ann. 105, 497. 1858.



beträchtlich grösser, resp. kleiner ist, als die der Kraft. E t t i n g s h a u s e n beobachtete in einem Falle, wo das Mitschwingen bereits sehr schwach war, wo also die Grenze fast ganz erreicht sein musste, die Phasendifferenz  $sp/ss' = 0.22$ , während für die Maximalamplitude  $0.091$  gefunden wurde. Hieraus glaube ich schliessen zu können, dass in der That die Verzögerung nur den Betrag  $0.22 = 79^\circ$  erreicht hat. Wenn somit das Vorkommen von Verzögerungen grösser als  $90^\circ$  in gewissem Grade unwahrscheinlich ist, so entsteht die neue Frage, wie denn die bei grossen Amplituden von E t t i n g s h a u s e n beobachtete Tonerniedrigung durch selbstthätige electromagnetische Anregung zu erklären sei, welche doch nach R a y l e i g h's Theorie auf eine Verzögerung grösser als  $90^\circ$  schliessen lässt. Ich glaube auf Grund meiner Versuche weiterhin eine befriedigende Antwort hierauf geben zu können.

Noch in einem Punkte berührt E t t i n g s h a u s e n die Theorie der erzwungenen Schwingungen. Dieselbe lehrte, dass das Maximum des Mitschwingens eintrete, wenn  $m = n$  sei. Dann ist die Schwingungszahl der secundären Gabel

$$m' = \sqrt{n^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}, \quad 8)$$

also kleiner als  $n$ . E t t i n g s h a u s e n findet, dass seine Gabeln Maximalamplituden erreichen, wenn sie:  $Ut_{-1}$  um  $1/50$ ,  $Ut_1$  um  $1/20$  Schwingung tiefer gestimmt waren, als die primäre Gabel. Das Vorzeichen ist richtig, und somit wird eine Bestätigung der Theorie hierin erblickt. Orientiren wir uns aber über den Betrag der Verstimmung, welchen die Theorie verlangt! Da  $x$  sehr klein gegen  $n$ , hat man  $m' = n - x^2/8\pi^2n$ , und die Verstimmung wird

$$\Delta_n = \frac{x^2}{8\pi^2n} \quad 9)$$

Auf p. 5 habe ich die  $x$  für E t t i n g s h a u s e n's  $Ut_{-1}$ -Gabel berechnet. Der grösste Werth der Tabelle,  $x = 0.08$  gehörte zur mittleren Amplitude  $a = 9$ . Die Amplitude des Mitschwingens ist nicht angegeben, doch mag sie noch so gross gewesen sein; man verzehnfache jenes  $x$ , und die theoretische Verstimmung ist immer noch kleiner, als die Beobachtungsfehler der Messungen. Eine Bestätigung der Theorie findet also hier nicht statt, doch werden die beobachteten Verstimmungen dadurch ausreichend erklärt, dass sie für die selbstthätig und mit grösserer Amplitude schwingende secundäre Gabel gelten, während doch die Messung an der frei abschwingenden Gabel bei einer Amplitude gleich der der erzwungenen Schwingung hätte angestellt werden müssen. Die nachstehenden Zahlen, berechnet aus Gl. 9, mögen zum Beweise des Gesagten dienen; sie zeigen, wie gering der Einfluss der Dämpfung auf die Eigenperiode der Stimmgabeln ist.

Wenn $x =$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	Verstimmung, beob. von E t t i n g s h a u s e n
sinkt die Ampl. auf $1/10$ in	<sup>sec</sup> 23.0	11.5	5.8	3.8	2.9	2.3	
und es ist $10^3 \Delta_{32} =$	0.004	0.016	0.063	0.142	0.253	0.396	20
$10^3 \Delta_{64} =$	0.002	0.008	0.032	0.071	0.127	0.198	50



So gering ist der Einfluss, dass man es als völlig nutzlos bezeichnen muss, wollte man denselben überhaupt beachten und in Rechnung setzen. Die Decremente, für welche obige Tabelle berechnet ist, sind ganz ausserordentlich gross für eine Stimmgabel; um dies der Vorstellung zugänglich zu machen, habe ich in die Tabelle die Zeiten aufgenommen, welche bei jedem  $x$  die Amplitude braucht, um auf  $\frac{1}{10}$  ihres Anfangswerthes zu sinken. Zur Zählung der Schwebungen, welche eine solche Gabel mit einer constant erregten Vergleichsgabel macht, oder zur Bestimmung der stroboscopischen Schwingungsdauer  $\theta = \frac{1}{m-n}$  beider Gabeln ist kaum ein grösseres Intervall brauchbar, als das in der Tabelle angeführte. Es ist aber ganz unmöglich, in 2-3 Secunden die Differenz zweier Schwingungszahlen auf 0.4 Tausendstel Schwingung genau festzustellen, und noch weniger ist in 23 sec eine Bestimmung auf 4 Milliontel möglich. Die Tonänderungen  $\Delta_n$  sind Grössen, welche allemal weit unter der Fehlergrenze auch der subtilsten Messungen liegen, und sie liegen um so weiter, je geringer die Dämpfung ist. Die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude zumal setzt allen Bestrebungen, welche auf Nachweis der Grösse  $\Delta_n$  gerichtet sind, ein Ziel. Die Amplitudenänderung  $\Delta a$ , welche einer Tonänderung  $\Delta_n$  entspricht, ist in allen Fällen so gering, dass selbst eine 10 und 100 fache Verfeinerung der Messinstrumente dieselbe kaum aufdecken würde. Man muss daher immer, auch bei den allergenauesten Versuchen, die Schwingungszahlen  $m'$  und  $m$  als identisch betrachten, und dies wird im Folgenden stets der Fall sein.

### Eigene Versuche.

Meine Untersuchungen gliedern sich vornehmlich in 2 Abschnitte. Sie haben zum Gegenstande erstens die freischwingende Stimmgabel, und behandeln deren Dämpfung und die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude. Zweitens suchte ich zu entscheiden, wie weit man berechtigt sei, Rayleigh's Theorie der erzwungenen Schwingungen (vgl. oben p. 7) auf die electromagnetische Stimmgabel anzuwenden. Hierzu untersuchte ich zunächst, ob die beiden Constanten, welche in Rayleigh's Formeln auftreten, ob Decrement und freie Schwingungszahl nicht durch die Einwirkung des Electromagnetes Veränderungen unterworfen würden, welche bisher unbeachtet geblieben. Ich erregte den Electromagnet der secundären Gabel durch constante Ströme, und fand in der That erhebliche Aenderungen im Verhalten der Gabel. Dann endlich untersuchte ich Phasen und Amplituden erzwungener Schwingungen, in welche die secundäre Gabel versetzt wurde.

Auch zeitlich zerfallen meine Versuche in 2 getrennte Gruppen. Ein Theil derselben wurde im Jahre 1885, ein anderer Theil 1890 angestellt. Die Fragen des zweiten Abschnittes habe ich zwar auch i. J. 1885 bereits untersucht, doch nicht mit der erforderlichen Vollständigkeit und Genauigkeit. Auf den Resultaten



jener Untersuchung fassend, stellte ich 1890 neue wohl vorbereitete Versuche an, nach einer Verbesserung des Apparates. Diese sind es, welche vornehmlich im zweiten Abschnitte beschrieben werden sollen. Die Apparate waren bei den neueren Versuchen nicht ganz dieselben wie bei den älteren, doch stimmte die Versuchsanordnung in allen wesentlichen Punkten überein.

Die von mir untersuchten Stimmgabeln entnahm ich einem grossen, von R. Koenig in Paris gearbeiteten Satze electromagnetischer Gabeln, welche mit verstellbaren Laufgewichten versehen waren. Zur Beobachtung der Schwingungen diente das Lissajous'sche Verfahren. Jede Gabel trug an dem Ende einer Zinke einen Spiegel, dessen Gewicht durch den Contactstift und Zusatzstücke an der anderen Zinke genau aequilibrirt war. Die Gabeln waren in schweren eisernen Gestellen festgeschraubt, die eine Gabel,  $G_I$ , konnte in verticaler, die andere,  $G_{II}$ , in horizontaler Ebene schwingen. An der Wand des Zimmers waren — vgl. Fig. 3 — 4 Consolen  $C_I$ ,  $C_{II}$ ,  $C_{III}$ ,  $C_{IV}$  befestigt, von diesen trug  $C_{II}$  die horizontal schwingende Gabel  $G_{II}$ .  $G_I$  stand auf einem massiven eichenen Tische, welcher fest auf dem cementirten Fussboden ruhte. Eine feine Oeffnung im Schirme  $D$  wurde (vermitteltst eines Spiegelchens) von der Lampe  $L$  beleuchtet, das Licht wurde vom Spiegel der Gabel I reflectirt, fiel auf den Spiegel von  $G_{II}$ , und gelangte nach nochmaliger Reflexion in das Fernrohr  $F$ , welches seinen Platz auf  $C_I$  hatte. Das Fernrohr war mit einem Ocularmicrometer versehen, bestehend aus einer dünnen Glasplatte, in welche ein feines Coordinatennetz geritzt war. Ein Schirm  $T$  schützte  $G_{II}$  vor einer Erwärmung durch die Lampe. Letztere konnte nicht direct hinter das Diaphragma  $D$  gestellt werden, weil dann die aufsteigende warme Luft die Beobachtung des Galvanometers  $G$ , welches in der Ecke auf der Console  $C_{III}$  stand, unmöglich machte. Später (1890) setzte ich  $D$  und  $L$  zusammen auf einen starken Dreifuss an den mit  $B$  bezeichneten Ort, und stellte die Gabeln wie in der schematischen Fig. 4. Bei richtiger Justirung erscheint im Fernrohre genau im Nullpunkte des Coordinatennetzes eine hell leuchtende, scharf begrenzte, runde Scheibe, deren Durchmesser fast 0.1 beträgt, in Theilen des Ocularmicrometers. Ich fand, dass bei dieser Grösse des Bildchens die Beobachtungen am sichersten waren. Schwingt  $G_I$  allein, so erscheint im Fernrohre eine verticale Lichtlinie, welche genau mit der  $y$ -Axe des Micrometers coincidiren muss.  $G_{II}$  allein giebt eine Linie, welche mit der  $x$ -Axe zusammenfällt. Auf diese Justirungen habe ich stets die allerhöchste Sorgfalt verwendet.

Sind die beiden Gabeln in Ruhe, so sind  $L_I$  und  $L_{II}$  in Fig. 4 die virtuellen Bilder des leuchtenden Punctes  $L$ , erzeugt von den Spiegeln  $S_I$  und  $S_{II}$ . Das Objectivglas  $O$  des Fernrohres  $F$  entwirft endlich bei  $B$  in der Ebene des Micrometers ein reelles Bild, welches mit dem Ocular beobachtet wird. Schwingt eine der Gabeln,  $G_{II}$  etwa, so wird bei einer Elongation des Zinkenendes gleich  $e$  das virtuelle Bild  $L_{II}$  nach  $L_{II}'$  verschoben sein, und zwar ist, wie aus der Fig. 4 ersichtlich,

$$L_{II} L_{II}' = 2\alpha (d_1 + d_2) \quad (10)$$



wenn  $\alpha$  der Winkel ist, um welchen sich bei der Elongation  $e$  der Spiegel gedreht hat <sup>1)</sup>. Bezeichnet  $f$  die Brennweite des Fernrohrobjectives, so ist die Verschiebung des reellen Bildchens

$$B B' = L_{II} L_{II}' \cdot \frac{f}{d_1 + d_2 + d_3 - f} = \frac{2a(d_1 + d_2)f}{d_1 + d_2 + d_3 - f} \quad (11)$$

Auf 1 mm gingen 4.412 Theile des Micrometers, also entspricht einer Winkelamplitude  $\alpha$  der Stimmgabel  $G_{II}$  in Theilen des Micrometers die Amplitude

$$a = \alpha \frac{8.824(d_1 + d_2) \cdot f}{d_1 + d_2 + d_3 - f} \quad (12)$$

Die Brennweite des Beobachtungsfernrohres war  $f = 455$  mm, also ist

$$a = \alpha \frac{4015(d_1 + d_2)}{d_1 + d_2 + d_3 - f} \quad (13)$$

und der Bogenwerth eines Theilstriches ist in Graden

$$\frac{\alpha^\circ}{a} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 - f}{4015(d_1 + d_2)} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 - f}{70.08(d_1 + d_2)} \quad (14)$$

Ebenso ist für  $G_I$

$$\frac{\beta^\circ}{b} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 - f}{70.08 d_1} \quad (15)$$

Diese Formeln gelten in gleicher Weise für die beiden in den Figg. 3 und 4 skizzirten Anordnungen der Apparate. Bei den Versuchen v. J. 1885 war

$$\beta^\circ = 0.0371 b \quad \text{und} \quad \alpha^\circ = 0.0315 a,$$

1890 dagegen war

$$\beta^\circ = 0.0302 b \quad \text{und} \quad \alpha^\circ = 0.0265 a.$$

Schwingen nun beide Gabeln, so wird der Lichtpunct im Fernrohre zu einer Linie ausgezogen. Die Bewegung der horizontalen Componente sei gegeben durch

$$x = a \cdot \cos(2\pi mt - \phi), \quad (16)$$

1) Ist die Länge der Stimmgabelzinke gleich  $l$ , so ist  $\alpha = \frac{e}{c \cdot l}$ , wo  $c$  ein echter Bruch ist. Für einen prismatischen Stab, welcher an einem Ende festgeklemmt ist, giebt Rayleigh (Theory of Sound § 179) die Gleichung der Schwingungcurve an. Aus dieser Gleichung folgt  $c = 0.726$ . Besondere Versuche, welche ich an einer Stimmgabel von 327 mm Zinkenlänge anstellte, um mich von der Proportionalität der Grössen  $\alpha$  und  $e$  bei verschiedenen Amplituden zu überzeugen, ergaben mir  $c = 0.70$ , in genügender Uebereinstimmung mit dem theoretischen Werthe.



die der verticalen Componente durch

$$y = b \cdot \cos 2\pi nt \quad 17)$$

Ist  $m = n$ , so erhält man durch Elimination von  $t$  die Gleichung der von dem Lichtpuncte durchlaufenen Linie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cdot \cos \phi = \sin^2 \phi \quad 18)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Dieselbe geht für  $\phi = 0$  und  $\phi = 180^\circ$  in eine gerade Doppellinie über, denn es wird dann

$$\left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \quad 19)$$

Stimmen  $m$  und  $n$  nicht genau überein, so kann die resultirende Bahncurve des Lichtpunctes aufgefasst werden als Ellipse mit veränderlicher Phasendifferenz. Die Zeit, in welcher die Ellipse sämtliche Phasendifferenzen von  $0$  bis  $360^\circ$  durchläuft, nenne ich mit E t t i n g s h a u s e n die „stroboscopische Schwingungsdauer“ der Gabeln gegen einander, und bezeichne diese Grösse mit  $\theta$ . Zwischen den Schwingungszahlen der Gabeln besteht dann die Relation

$$m - n = \frac{1}{\theta} \quad 20)$$

Durch Registriren der Zeitmomente, in welchen die Phasendifferenz  $0$  oder  $180^\circ$ , wo also die Ellipse in eine gerade Linie übergeht, kann  $\theta$  sehr genau bestimmt werden. Jene Zeiten nenne ich die U m k e h r z e i t e n der Ellipse.

Zu den Zeitbestimmungen diente mir ein astronomischer Registrirapparat, von F u e s s in Berlin gearbeitet. Derselbe bestand aus 2 Morse-Schreibern, welche neben einander montirt waren, und auf demselben Papierstreifen ihre Marken verzeichneten. Ein Uhrwerk bewegte das Papier mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $1 \text{ cm.}$  pro Secunde vorwärts. Eine Pendeluhr mit Quecksilbercompensation bewirkte jede Secunde einen vorübergehenden Stromschluss, durch welchen der eine Morse-Schreiber in Thätigkeit gesetzt wurde. Den Tasterschlüssel zum zweiten Schreiber hielt ich bei den Beobachtungen in der Hand. Die registrirten Zeitpunkte konnten hernach mittelst eines Micrometers auf Zehntelsekunden genau abgelesen werden, die Hundertstel waren noch bequem zu schätzen.

Die vertical schwingende Gabel  $G_1$  diente mir als Vergleichsgabel, durch electromagnetische Selbstanregung hielt ich sie auf constanter Amplitude. Der Contactstift war an der unteren Zinke befestigt, und berührte stets in der Ruhelage gerade das Quecksilberniyeau. Der Electromagnet befand sich zwischen den Zinken der Gabel. Die untere Zinke trug auf einem isolirenden Hartgummiplättchen noch



einen zweiten Unterbrecher, bestehend aus einem gebogenen Kupferdraht, dessen beide Enden in *Hg*-Näpfe tauchten. Die Näpfe waren durch Hartgummi von ihrem Halter isolirt. Die Quecksilberhöhen wurden so regulirt, dass der längere Schenkel des Drahtes stets in das *Hg* eintauchte, der kürzere aber, welcher mit einer Platinspitze versehen war, in der Ruhelage das *Hg* gerade berührte. Die richtige Stellung erkennt man am besten daran, dass schon beim leisesten Anschlagen der Gabel der Unterbrecher wirken muss. Zu einem Napfe dieser Vorrichtung führte vom Elemente *E* die Leitung — Fig. 3a — vom anderen Napfe ging dieselbe weiter zum Electromagnet der zweiten Gabel. Dann führte dieselbe an der Wand zurück zu einem bequemen Quecksilberschlüssel *S*, welcher auf  $C_I$  befestigt war, und von diesem durch einen einfachen Rheostat wieder zum Elemente *E*. Auch die Stromleitung der selbstthätigen  $G_I$  enthielt einen solchen Schlüssel und Rheostat, welche in der Zeichnung fortgelassen sind, um Ueberfüllung zu vermeiden. Befindet sich nun  $G_I$  in Thätigkeit, und schliesst man den zweiten Stromkreis, so wird durch den beschriebenen Unterbrecher ein intermittirender Strom hergestellt, welcher den Electromagnet von  $G_{II}$  erregt in einer Periode, welche mit der Periode der selbstthätigen Gabel I vollkommen identisch ist. Eine Reaction des secundären Stromkreises auf den Gang der selbstthätigen primären Gabel ist hierbei vollständig ausgeschlossen. Dies war bei *E t t i n g s h a u s e n*'s Versuchen nicht der Fall, wo der Electromagnet von *G* einfach in den Stromkreis von  $G_I$  eingeschaltet wurde. Sind  $G_I$  und  $G_{II}$  nahe gleich gestimmt, so wird  $G_{II}$  in ergiebige Mitschwingungen versetzt, denen man durch passende Wahl der Stromstärke eine beliebig hohe Amplitude ertheilen kann. Diese Art der Anregung ist zugleich äusserst geeignet zum Studium der freien Schwingungen von  $G_{II}$ . Im geeigneten Moment wird der Strom geöffnet, die Gabel schwingt ab, und man kann Dämpfung und stroboscopische Schwingungsdauer gegen  $G_I$  untersuchen.

Zur Messung der Stromstärken in den beiden Kreisen diente ein Spiegelgalvanometer, welches im Nebenschluss eingeschaltet werden konnte. Die eine Zweigleitung ist in Fig. 3b angedeutet. Die Drähte führen zu einem Doppelcommutator, Fig. 5, und sind dort mit  $G_I +$  und  $-$ , resp. mit  $G_{II} +$  und  $-$  in Verbindung. Zwei Drähte  $D_1$  und  $D_2$ , an welche die Galvanometerleitung angeschlossen ist, sind mit je einem Napfe jedes Commutators verbunden. Zwei Kupferbügel, von einem Ebonitbrettchen mit Glasgriff getragen, gestatten eine beliebige Leitung durchs Galvanometer zu schliessen, zu commutiren, zu öffnen. Ob die Zweigleitungen geöffnet sind, oder nicht, hat auf die Stromstärke im Hauptstrome keinerlei merklichen Einfluss. Die Aenderung konnte höchstens 1—2 Millionstel der gesamten Stromstärke ausmachen.

Das Galvanometer stand auf der Console  $C_{III}$ , Fig. 3a. 1885 benutzte ich ein aperiodisches Galvanometer von *E d e l m a n n*, 1890 ein solches von *H a r t m a n n & B r a u n*. Das Ablesefernrohr mit der Scala befand sich auf einer Console  $C_{IV}$ , Fig. 3b.  $C_{III}$  und  $C_{IV}$  waren in solcher Höhe angebracht, dass ich, von



meinem Platze vor  $F$  aufstehend, bequem das Galvanometer ablesen, und zugleich den Commutator handhaben konnte, welcher neben dem Ablesefernrohr stand. Um den Einfluss der Stimmgabelectromagnete auf das Galvanometer zu vermindern, verstärkte ich durch einen permanenten Magnet die Richtkraft des Erdmagnetismus. Bei der stärksten Erregung der Electromagnete änderte sich die Ruhelage höchstens um 0.3 Scaltheile. Die Aenderung der Richtkraft, welche allein Fehler in der Strommessung veranlassen kann, war also gewiss zu vernachlässigen. Der Reductionsfactor des Galvanometers war für Messungen an beiden Stromkreisen stets auf die gleiche Grösse gebracht, und betrug

1890 :	100	Scaltheile	Doppelausschlag =	0.609	Ampère
1885 :	„	„	=	1.05	„

Als primäre und secundäre Gabel benutzte ich 1885 die beiden grössten Gabeln des Koenig'schen Bestecks. Die grösste, Zinkenlänge 385 mm, Theilung für die Laufgewichte von 64 bis 92 v. s., benutzte ich als secundäre Gabel. Zuerst hielt ich die Laufgewichte am Ende der Theilung, nahe dem Stiel, später entfernte ich dieselben ganz. In diesem Zustande bestimmte ich die Schwingungszahl der freien Gabel bei kleiner Amplitude zu  $n = 46.57$  Ganzschwingungen pro Secunde. Die nächste Gabel, Zinkenlänge 327 mm, Theilung für die Laufgewichte von 91—128 v. s., benutzte ich als primäre Gabel. Die Laufgewichte standen sehr nahe an den Zinkenenden, hatten aber nach beiden Seiten Spielraum für Verstimmungen von einigen Zehntelschwingungen gegen  $G_{II}$ .

1890 diente die grosse Gabel, Laufgewichte nahe den Enden, als  $G_I$ , und als  $G_{II}$  eine gleiche Gabel, welche neuerdings von Koenig bezogen war. Die Laufgewichte dieser Gabel standen genau auf 64 v. s. Ich hatte den Spiegel durch ein Zusatzstück genau auf dasselbe Gewicht gebracht, welches der Messingknopf besass, welcher vom Fabrikanten in die für den Spiegel bestimmte Bohrung eingeschraubt war. Es war also die Schwingungszahl  $n = 32$ . Dass die Theilung bis auf wenige Hundertstel richtig war, davon hatte ich mich durch optische Vergleichen der neuen Gabel mit der alten überzeugt — letztere ohne Laufgewichte, gerade so wie 1885 montirt.

## I. Die Dämpfung der Stimmgabelschwingungen und die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude.

Die Untersuchung der Tonhöhen einer abschwingenden Gabel erfordert die Kenntniss der Amplitude als Function der Zeit. Die Theorie, welche von der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x = 0 \quad 1)$$



ausgeht, lehrt, dass die jeweilige Amplitude gefunden werde aus der Gleichung

$$a = Ae^{-xt} \quad 21)$$

$A$ , die Anfangsamplitude zur Zeit  $t = 0$ , kann jedesmal beobachtet werden.  $x$ , das auf die Zeiteinheit bezogene logarithmische Decrement, oder Decrement schlechtweg, kann vorher bestimmt werden. Sind 2 Amplituden  $a_1$  und  $a_2$  zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  beobachtet, so findet man:

$$x = \frac{\ln a_1 - \ln a_2}{t_2 - t_1} \quad 22)$$

$x$  ist nach dieser Theorie eine von der Amplitude unabhängige Constante.

Zur Bestimmung des Decrements verfuhr ich folgendermaassen. Während die Stimmgabel von einer grossen Amplitude abschwang, registrierte ich die Zeitmomente, in welchen die Amplitude ganzzahlige Werthe hatte. Anfangs führte ich dies in der Art aus, dass ich die zu untersuchende Gabel sich selbstthätig electromagnetisch anregen liess, und den Strom unterbrach, sobald eine passend grosse Amplitude erreicht war. Der „leuchtende Punct“ im Fernrohre hatte, wie erwähnt, einen Durchmesser von etwa 0.1, in Theilen des Ocularmicrometers. Die Bisection dieses Scheibchens durch einen Coordinatenstrich liess sich mit ausgezeichnete Schärfe beobachten. Die Lichtlinie, oder das Lichtband, um die Erscheinung richtiger zu bezeichnen, welche man im Fernrohre erblickt, ist nämlich nicht von gleichmässiger Helligkeit. Entsprechend der Geschwindigkeit, welche die Gabelzinke an jeder Stelle besitzt, ist, wenn nur eine Gabel schwingt, in der Mitte die Lichtstärke am schwächsten, an den Enden aber ist die runde Oeffnung des Diaphragma's vollkommen scharf begrenzt zu erblicken. Wenn also ein Theilstrich des Micrometers die Mitte dieses kleinen Kreises durchschnitt, notirte ich mittelst des Tasterschlüssels, welchen ich in der Hand hatte, den Zeitmoment auf dem Papierstreifen des Registrirapparates.

Bei meinen ersten Versuchen über die Dämpfung war die Schwingungszahl von  $G_I$   $n = 45.0$ . Die grosse Gabel  $G_{II}$  trug noch die Laufgewichte, nahe dem Stiel, ihre Schwingungszahl war  $n = 45.2$ . Auch  $G_{II}$  hatte ich in einer verticalen Schwingungsebene montirt, um die Selbstanregung mit Quecksilbercontact benutzen zu können. Jede Gabel liess ich 4 Mal abschwingen, und registrierte 2 Mal die Durchgänge der Amplitude indem ich das obere Ende der Lichtlinie in's Auge fasste, 2 Mal indem ich das untere Ende beobachtete. Nimmt man die Mittel aus den Durchgangszeiten, so ist ein etwaiger geringer Fehler in der Einstellung der Ruhelage auf den Nullpunct eliminirt. Da der Anfangspunct der Zeitählung für die Bestimmung der Decremente keine Bedeutung hat, so zählte ich bei jeder Beobachtungsreihe die Zeit von demjenigen Secundenpuncte des Registrirpapiere, welcher unmittelbar vor der ersten notirten Amplitude lag.



Tab. I giebt für die beiden Gabeln die beobachteten Amplituden und die Mittelwerthe der zugehörigen Zeiten. Col. 3 und 7 enthalten die Decremente von einer Amplitude zur nächsten.

Tab. I. (4/V 1885).

$G_I$				$G_{II}$			
$b^1)$	$t$	$10^3 x$ beobachtet	$10^3 x$ berechnet	$a^1)$	$t$	$10^3 x$ beobachtet	Diff.
	<i>sec</i>				<i>sec</i>		
13	0·48	19·0	18·8	8	0·91	124	
12	4·70	18·1	18·1	7	1·99	115	9
11	9·50	17·3	17·4	6	3·33	109	6
10	15·01	16·9	16·7	5	5·01	105	4
9	21·25	15·8	16·0	4	7·13	95	10
8	28·71	14·8	15·3	3	10·16	78	17
7	37·74	14·7	14·6	2	15·35		
6	48·20	14·0	13·9				
5	61·25						
0			10·0				

Man vergegenwärtige sich, auf welchen Grad von Genauigkeit diese Decremente Anspruch erheben können. Es ist

$$x = \frac{la_1 - la_2}{t_2 - t_1} = \frac{l(a_2 + 1) - la_2}{t_2 - t_1}$$

Also in erster Annäherung  $x = 1/a_2(t_2 - t_1)$ . Findet das Abschwingen langsam statt, wie bei  $G_I$ , so ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers  $\pm \Delta a$  beim Registriren der Amplitudendurchgänge für alle Amplituden gleich zu setzen. Diese Fehler wirken auf  $x$  vornehmlich in der Weise, dass der Zähler 1 im obigen Bruche einen wahrscheinlichen Fehler  $\pm \Delta a \cdot \sqrt{2}$  erhält. Bei einem grösseren Decremente, wie  $G_{II}$  es aufweist, sind die Beobachtungen der grösseren Amplituden wesentlich ungenauer, als die der kleineren, es werden die Decremente noch unsicherer.

In obiger Tabelle fällt vor allen Dingen auf die starke Zunahme der Decremente mit der Amplitude. Trägt man die Decremente von  $G_I$  als Ordinaten auf zu den mittleren Amplituden als Abscissen, so zeigt sich derselbe ausgesprochen geradlinige Verlauf, welchen wir schon bei Poske's und Wead's Beobachtungen kennen lernten. Die einer Geraden entsprechenden Werthe von  $x$  habe ich der obigen Tabelle in Col. 4 beigefügt. Die grösseren Amplituden der  $G_{II}$  liessen wegen ihrer raschen Abnahme keine einigermaßen genauen Beobachtungen zu. Der relative

1) Bei diesen Beobachtungen war noch nicht die definitive Aufstellung vorhanden. Die Umrechnungsfactoren der Amplituden auf Bögen waren hier für  $G_I: \frac{\beta^0}{b} = 0\cdot0353$ ; für  $G_{II}: \frac{a^0}{a} = 0\cdot0305$ .



(procentische) Fehler ihrer Decremente ist daher grösser, als dies bei  $G_I$  der Fall war. Der Verlauf der entsprechenden Curve ist aus den beigefügten Differenzen ersichtlich. Es wird kaum gestattet sein, die Beobachtungen durch eine lineare Interpolationsformel darzustellen.

Was nun die absoluten Werthe anlangt, so sind die für  $G_{II}$  gefundenen Decremente ungefähr 8 Mal so gross, wie die von  $G_I$  bei gleichen Amplituden. Für  $G_I$  folgt aus der Geraden der Grenzwert  $x_0 = 0.010$ . Ich wiederhole, dass  $G_I$  die Laufgewichte ganz am Ende der Zinken trug, während  $G_{II}$  ziemlich auf ihren höchsten Ton gestellt war, um eine Gleichheit der Schwingungszahlen beider Gabeln zu erreichen. Spätere Versuche erst haben mich erkennen lassen, dass diese Stellung der Laufgewichte die Ursache der grossen Dämpfung der  $G_{II}$  war. Doch davon später.

Zunächst ging aus den Resultaten dieser beiden Beobachtungsreihen die Nothwendigkeit hervor, die Giltigkeit der linearen Formel für die Decremente in strengerer Weise zu prüfen. Auch *Wead* hatte das Gesetz aufgestellt  $x = x_0 (1 + \alpha \cdot a)$ , aber er vermochte nicht,  $\alpha$  als Function der Zeit explicite darzustellen. Doch ist dies Problem schon vor Jahren von *Gronau*<sup>1)</sup> behandelt worden, und *O. E. Meyer*<sup>2)</sup> hat *Gronau's* Gesetz für die Abnahme der Schwingungsweiten von Pendeln bestätigt gefunden.

Dem einfachen Dämpfungsgesetze

$$a = A e^{-xt} \quad (21)$$

gehört die Differentialgleichung zu

$$\frac{da}{dt} = -xt \quad (23)$$

*Gronau* setzt  $x_0 (1 + \alpha a)$  für  $x$  ein, verlangt also eine lineare Abhängigkeit des Decrementes von der Amplitude. Die neue Differentialgleichung

$$\frac{da}{dt} = -x_0 a (1 + \alpha a) \quad (24)$$

liefert das Integral

$$C - x_0 t = t \frac{a}{1 + \alpha a} \quad (25)$$

$$e^C e^{-x_0 t} = \frac{a}{1 + \alpha a} \quad (26)$$

Wenn für  $t = 0$   $a = A$ , so ist

$$e^C = \frac{A}{1 + \alpha A} = B \quad (27)$$

1) *Gronau*, Ueber die Bewegung schwingender Körper im widerstehenden Mittel. Gymnasialprogramm, Danzig 1850. War mir trotz vielfacher Bemühungen nicht zugänglich.

2) *O. E. Meyer*, Pendelbeobachtungen. *Pogg. Ann.* 142, 481. 1871.



Wir werden später die beiden Formen der Constanten,  $B$  und  $C = \log nat B$  gebrauchen. Aus

$$Be^{-x_0 t} = \frac{a}{1 + aa} \quad (28)$$

folgt

$$a = \frac{Be^{-x_0 t}}{1 - aBe^{-x_0 t}} \quad (29)$$

Wir sahen, dass bei geringer Dämpfung jeder Beobachtung von  $a$  der gleiche wahrscheinliche Fehler zukomme. Will man nach der oben entwickelten Formel  $a$  als Function von  $t$  nach der Methode der kleinsten Quadrate darstellen, so ist die Summe der auszuführenden Rechnungen kaum zu überwältigen. Die Einführung von Näherungswerthen für die 3 Constanten  $B$ ,  $x_0$ ,  $a$ , die darauf folgende Berechnung der Coefficienten für die wahrscheinlichsten Correctionen jener Näherungswerthe verursacht schon so viel Rechnung bis zur blossen Aufstellung der Correlatengleichungen, dass ich dies Verfahren nach einmaliger Anwendung fallen liess. Im Hinblick darauf, dass die Bestimmungen der Dämpfung zugleich den Zweck hatten, zur Prüfung der Theorie erzwungener Mitschwingungen zu dienen, war aber eine möglichst genaue Kenntniss der ins Spiel tretenden Constanten durchaus erforderlich. Auch war es aus demselben Grunde wichtig, die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Constanten kennen zu lernen, welche nur bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erhalten werden.

Indem ich von Gl. 25 statt von Gl. 29 ausging, ist es mir gelungen, die Methode der kleinsten Quadrate in aller Strenge auf meine Beobachtungen anzuwenden, und zugleich eine grosse Vereinfachung der Rechnungen zu erzielen. Wir hatten

$$C - x_0 t = la - l(1 + aa) \quad (25)$$

Hat die Beobachtung von  $a$  einen Fehler  $\Delta$ , so sind Beobachtungen und wahrscheinlichste Werthe von  $C$ ,  $x_0$ ,  $a$ , verbunden durch solche Gleichungen:

$$C - x_0 t = la + \frac{\Delta}{a} - l(1 + aa) - \frac{a\Delta}{1 + aa} \quad (30)$$

$$C = x_0 t + l \frac{a}{1 + aa} + \frac{\Delta}{a + aa^2} \quad (31)$$

Liegen nun für die Constanten Näherungswerthe vor:  $C'$ ,  $x_0'$ ,  $a'$ , und bezeichnen wir deren wahrscheinlichste Correctionen mit  $C''$ ,  $x_0''$ ,  $a''$ , so folgt aus obiger Gleichung, unter Vernachlässigung höherer Potenzen der Correctionen:

$$C' + C'' = x_0' t + x_0'' t + l \frac{a}{1 + a'a} - \frac{a'' a}{1 + a'a} + \frac{\Delta}{a + a'a^2} \quad (32)$$

$$C'' - x_0'' t + \frac{a}{1 + a'a} a'' = x_0' t + l \frac{a}{1 + a'a} - C' + \frac{\Delta}{a + a'a^2} \quad (33)$$



Der Rest, welcher nach Einführung der Näherungswerthe in Gl. 25 verbleibt, ist

$$x_0 t + l \frac{a}{1 + \alpha' a} - C = N \quad (34)$$

Endlich ist

$$(a + \alpha' a^2) \cdot C'' - (a + \alpha' a^2) t \cdot x'' + a^2 \cdot \alpha'' = (a + \alpha' a^2) N + \Delta \quad (35)$$

Durch Ausgleichung dieser Correlaten erhält man also direct die Fehler  $\Delta$  der beobachteten Amplituden. Der Vorthheil, welchen dieses Verfahren für die numerische Rechnung bietet, liegt darin, dass die beobachteten Amplituden stets kleine ganze Zahlen sind, zwischen 1 und 16. Hierdurch wird die Aufstellung der nöthigen Coefficienten wesentlich vereinfacht.  $la$  und  $l(1 + \alpha'a)$  konnte ich stets ohne Interpolation einer Tafel der natürlichen Logarithmen entnehmen. Von anderweitigen Rechnungshilfsmitteln haben mir namentlich Crelle's Multiplicationstafeln, sowie vielfach auch die Thomas'sche Rechenmaschine die besten Dienste geleistet. Ich will noch erwähnen, dass ich die Coefficienten in den Correlatengleichungen stets dreiziffrig nahm, um zu den Productbildungen die Crelle'schen Tafeln benutzen zu können. Controlrechnungen habe ich überall angestellt, wo sich nur die Möglichkeit für solche darbot.

Ich kehre zu meinen Versuchen zurück. Am 31/V 85 machte ich in der gleichen Weise, wie vorhin beschrieben, abermalige Beobachtungen der  $G_1$ . Die Gabel war in der Zwischenzeit aus dem Gestelle herausgenommen, und wol nicht genau ebenso wie früher festgeschraubt worden. Wenigstens kann man keine andere Erklärung dafür geben, dass die Decremente in Tab. II so sehr viel grösser sind, als die früheren in Tab. I.

Tab. II. (31/V 1885).

Beob. $G_1$		$10^3 x$	$100 \cdot \Delta a$	
$b$	$t$			
				$10^3 x_0 = 18.09$ $\pm 19$
12	<sup>sec</sup> 0.00	29.8	- 1.11	
11	2.92	28.0	+ 0.69	$\alpha = 0.05362$
10	6.32	27.9	- 0.24	$\pm 182$
9	10.10	26.2	+ 1.61	
8	14.59	25.0	+ 0.98	$B = 7.292$
7	19.93	24.4	- 0.55	
6	26.24	22.9	- 0.38	$\epsilon^1) = \pm 0.0158$
5	34.20	22.7	- 2.35	
4	44.02	22.2	- 0.77	$r = \pm 0.0107$
3	56.95		+ 2.34	

1) Ich bezeichne durchweg: Mittlerer Fehler einer Beobachtung mit  $\epsilon = \pm$   
Wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung mit  $r = \pm$



Auf diese Beobachtungsreihe wendete ich die Meth. d. kl. Quadr. an in der zuerst erwähnten Weise — von Gl. 29 ausgehend; das Resultat ist in der Tabelle aufgeführt. Der Gang der Fehler von  $a = 7$  abwärts fällt zwar auf, ist aber zu klein, um auf eine Abweichung von Gronau's Gesetz schliessen zu lassen.

Als secundäre, mitschwingende, Gabel sollte späterhin die grosse Stimmgabel benutzt werden, es musste also speciell für diese die Dämpfung genauer studirt werden. Die Gabel musste dabei in horizontaler Ebene schwingen, konnte also nicht in gewöhnlicher Weise in selbstthätige Schwingungen versetzt werden. Die Platincontacte, welche für diesen Fall der Montirung der Gabel beigegeben sind, setzen den Schwingungen einen neuen, beträchtlichen Widerstand entgegen. Ich machte einige Versuche, bei welchen ich die Gabel in dieser Weise anregte, fand aber die Dämpfung so gross, dass die Beobachtung der grösseren Amplituden ganz unmöglich wurde. Darauf stellte ich eine Selbstanregung der Gabel her, indem ich einen dickeren Platindraht statt des ursprünglichen Contactstiftes an der Gabelzinke befestigte, und den Quecksilbernapf so anschraubte, dass der Draht gerade über ihn hinweg gehen konnte. In den Napf goss ich soviel  $Hg$ , dass dasselbe eine hohe Kuppe bildete. Schwang die Gabel, so fuhr der Platinstift in die Kuppe, und schloss und öffnete so den Strom. Durch richtige Einstellung des Drahtes erreichte ich es bald, dass derselbe bei seiner Bewegung gar kein Quecksilber mit sich riss. Doch das Verhalten der Gabel wurde hierdurch nur wenig gebessert. Und dabei blieb die Dämpfung nicht nur sehr gross, sondern war auch von einer Inconstanz, welche durch kein Mittel zu beseitigen schien. So gaben 2 Beobachtungen, welche um eine Stunde aus einander lagen, zwischen den Amplituden 2 und 1 die Decremente 0·17, resp. 0·13; zwischen 3 und 2: 0·24, resp. 0·17. Allen Beobachtungsreihen war jener merkwürdige Character eigen, welchen die aus Etti $ng$ shausen's Curve berechneten Decremente zeigten: erst langsames, dann steileres, dann wieder langsames Anwachsen mit der Amplitude. Um ein Beispiel zu geben, theile ich gleich die erste derartige Beobachtungsreihe mit. Die Zeiten sind diesmal Mittelwerthe aus 8 auf einander folgenden Registrirungen.

Tab. III ( $G_{II}$ , 8/VI 1885).

$a =$	6	5	4	3	2	1
$t =$	0·52	1·06	1·69	2·65	4·95	10·55
$x =$	0·338	·345	·300	·176	·124	

In Fig. 6 findet der Leser auch eine graphische Darstellung dieser Decremente.

Bisher trug die untersuchte Stimmgabel immer noch ihre Laufgewichte. Endlich entfernte ich dieselben versuchsweise, so dass die Gabel nur noch durch Spiegel und Gegengewicht belastet war, welche sich ganz am Ende der Zinken befanden.



Das Resultat war, dass jetzt beim Abschwingen die Amplituden der grossen Gabel ( $G_{II}$ ) auch langsam abnahmen, wie jene der kleineren ( $G_I$ ), welche ihre Laufgewichte nahe den Zinkenenden trug. Fortan benutzte ich die Gabel stets ohne Laufgewichte. Ueber den Einfluss, welchen die Stellung der Laufgewichte auf die Dämpfung ausübt, habe ich aber später noch besondere Versuche an  $G_I$  angestellt. Ich verschob von einer Beobachtungsreihe zur andern die Gewichte um einige Centimeter weiter zum Stiel der Gabel hin, und fand dabei ein sehr starkes Anwachsen der Decremente. Die kleine Tab. IV wird dies Verhalten zur Genüge illustriren.

Tab. IV ( $G_I$ , Zinkenlänge 327 mm. 27/VII 1885).

Abstand der Laufgewichte vom Zinkenende:	49 <sup>mm</sup>	88	120	198
Schwingungszahl nach der Theilung:	46.5	50.5	55.5	63.5 (höchster Ton)
Zeit, in welcher die Amplitude von 8 auf 3 sinkt:	33.1 <sup>sec</sup>	24.3	6.7	4.1

Es ist dies eine sehr eigenthümliche Erscheinung; die Erklärung wird wol darin zu suchen sein, dass in den entfernteren Lagen die Laufgewichte an Stellen kommen, in denen die Durchbiegung der Zinken bei den Schwingungen immer grösser wird. Die Laufgewichte liegen auf einer längeren Strecke den Stimmgabelzinken an, und müssen dann erheblich zur Dämpfung der Schwingungen beitragen. Wir werden später sehen, wie sich ein analoger Einfluss der Laufgewichtstellung auch auf die Aenderung der Schwingungszahl mit der Amplitude geltend macht.

Als ich die Laufgewichte entfernte, hatte die Gabel über 2 Wochen unbenutzt gestanden; ich liess sie jetzt mehrere Stunden mit grosser Amplitude schwingen, wobei zur Selbstanregung wieder der seitlich in die Quecksilberkuppe fahrende Platindraht diente. Dazwischen liess ich die Gabel auch einige Male abschwingen. Am folgenden Tage war die Gabel noch 1½ Stunden im Gange, ehe ich die Beobachtungen zur Bestimmung des Decrementes machte. Dies geschah, um jedenfalls die Decremente zu erhalten, welche dem Endzustande der Gabel entsprachen; wenn nämlich auch für die Stimmgabel eine „Accommodation“ vorhanden ist, wie man sie bei den Torsionsschwingungen von Drähten beobachtet hat<sup>1)</sup>. Ich registrirte dann, analog dem früheren Verfahren, zwei Mal die Amplitudendurchgänge auf der rechten Seite des Lichtstreifens, zwei Mal die auf der linken. Dann folgten Beobachtungen über die Aenderung der Schwingungszahl mit der Amplitude, und eine Stunde nach jener ersten eine zweite Beobachtungsreihe zur Bestimmung der Dämpfung, bei welcher ich die Gabel zwei Mal abschwingen liess. Tab. V enthält die Mittelwerthe der beobachteten Zeiten, sowie die aus denselben berechneten Decremente  $x$ .

1) Streintz, Pogg. Ann. 153, 387. 1874. — Schmidt, Wied. Ann. 2, 48. 1877. — W. Braun und A. Kurz, Carl's Repert. f. Physik. 15, 561. 1879.



Tab. V. ( $G_{II}$ , 3/VII 1885).

$a$	$t$	$10^3 x$	$a$	$t$	$10^3 x$
	<i>sec</i>			<i>sec</i>	
13	0·00	32·4	13	0·00	33·1
12	2·47	32·5	12	2·41	36·1
11	5·15	32·2	11	4·83	29·6
10	8·11	29·9	10	8·04	31·1
9	11·63	29·7	9	11·43	30·9
8	15·60	27·6	8	15·25	28·8
7	20·43	27·8	7	19·87	27·9
6	25·99	25·4	6	25·41	27·2
5	33·17	25·8	5	32·11	25·3
4	41·83	24·9	4	40·91	26·2
3	53·37	23·7	3	51·89	26·1
2	70·46	23·2	2	67·40	25·5
1	100·41		1	94·57	

Wieder ist eine Differenz vorhanden zwischen den Resultaten der beiden Beobachtungsreihen, welche die Fehlergrenzen weit übersteigt! Ich stellte am 6/VII 1885 neue Beobachtungen an. Vor dem Beginne derselben war die Gabel anderthalb Stunden in Gang gewesen. Jetzt begann ich auch einige Beobachtungsreihen mit kleineren Amplituden, um zu sehen, ob ein Einfluss der Anfangsamplitude auf die Grösse des Decrementes nachzuweisen sei. Die erste Beobachtungsreihe,  $G_{II}$  von  $A = 13$  abschwingend, ergab die Decremente um 10% kleiner, wie in Tab. V, 1. Beobachtungen mit der Anfangsamplitude  $A = 8$ , welche unmittelbar folgten, liessen keinen Unterschied der Decremente erkennen. Nach anderthalb Stunden neue Beobachtungen von  $A = 13$  ab. Decremente 5% grösser, als bei der ersten Beobachtungsreihe. Unmittelbar darauf Abschwingen von  $A = 7$ , dann von  $A = 6$ , endlich wieder von  $A = 13$ . Nur die letzte Beobachtungsreihe lässt eine kleine Aenderung des Decrementes, eine Steigerung von 2% ungefähr, gegenüber den drei vorhergehenden Reihen erkennen, welche unter sich vollkommen übereinstimmen. Die Anfangsamplitude hat also keinerlei nachweisbaren Einfluss auf die Decremente. Einige Tage später gaben 2 Bestimmungen wieder etwas abweichende Decremente — es war also immer noch eine Inconstanz vorhanden.

Mittlerweile hatte ich auch die Aenderung der Schwingungszahl von  $G_{II}$  mit der Amplitude untersucht, und zwar in der Weise, dass ich die stroboscopischen Schwingungsdauern der abschwingenden  $G_{II}$  gegen die constant erregte  $G_I$  registrirte. Hierbei nun stellte sich die Nothwendigkeit heraus, die beim Abschwingen herrschenden Amplituden in genauerer Weise bestimmen zu müssen, als dies aus der notirten Anfangsamplitude und den vorher berechneten Decrementen



möglich war. Ich versuchte daher, ob es mir nicht gelingen möchte, Amplitudendurchgänge und stroboscopische Schwingungsdauern gleichzeitig zu registriren. Und in der That, nach vielfachen Uebungen war ich im Stande, dem Wechsel der Erscheinungen mit genügender Schnelligkeit zu folgen, um gute Beobachtungen zu erlangen. Ein Experiment verlief jetzt in folgender Weise:  $G_I$  wurde durch electromagnetische Selbstanregung auf constanter Amplitude erhalten. Dann wurde  $G_{II}$  unter Benutzung der auf p. 18 beschriebenen Stromleitung in Mitschwingungen versetzt. Wenn man in passenden Augenblicken den Strom öffnet und schliesst, so kann man auch bei grösserer Verstimmung der Gabeln hohe Anfangsamplituden der mitgenommenen Gabel  $G_{II}$  erreichen. Ich öffnete den Strom, und überliess die Gabel dem freien Abschwingen in einem solchen Augenblicke, wo eine Umkehr der Ellipse womöglich zwischen der ersten und zweiten Amplitude, welche ich registriren konnte, stattfinden musste. Ich registrirte dann mit dem Tasterschlüssel alle die Zeitmomente, wo die horizontale Amplitude ganzzahlige Werthe hatte, und ebenso alle die Umkehrzeiten der Ellipse. Die Amplituden beobachtete ich abwechselnd rechts und links. In meinem Journal notirte ich, welches die erste und welches die letzte registrirte Amplitude gewesen. Ein Missverständniss in der Deutung der Punkte beim nachherigen Ablesen der Beobachtungen vom Registrirpapier ist völlig ausgeschlossen. Der Verlauf der Amplitudenabnahme mit der Zeit ist seinem Character nach ja bekannt, die Umkehrzeiten der Ellipse sind nahe aequidistant. Durch Differenzenbildung kann man leicht controliren, zu welcher der beiden neben einander herlaufenden Beobachtungsreihen ein Punct gehört. Kamen zwei Punkte nahe an einander zu liegen, so notirte ich überdies im Beobachtungsjournal ihre Bedeutung. Manchmal freilich kam es auch vor, dass ein Amplitudendurchgang und eine Umkehr der Ellipse zeitlich so nahe an einander lagen, dass nur das eine Phänomen registriert werden konnte, weil es nicht möglich war, die Aufmerksamkeit rasch genug wieder auf das folgende zu concentriren. Solch eine angenäherte Coincidenz sieht man schon einige Secunden vor dem Eintritte derselben voraus. Ich registrirte dann dasjenige Phänomen, welches für die Vollständigkeit seiner Beobachtungsreihe von grösserer Wichtigkeit war. Die Anwendung dieses Verfahrens erfordert natürlich eine mit rigoroser Sorgfalt justirte Coincidenz der resp. Schwingungsebenen der Gabeln mit den verticalen und horizontalen Nulllinien des Ocularmicrometers, denn es kommt die horizontale Amplitude bald im oberen, bald im unteren Theile des Gesichtsfeldes zur Beobachtung.

Da  $G_{II}$  durch Mitschwingen erregt wurde, war das Quecksilbergefäss dieser Gabel jetzt überflüssig geworden. Am 13/VII 85 machte ich zuerst Beobachtungen, bei welchen das Quecksilbergefäss noch die alte Stellung hatte. Sodann entfernte ich dasselbe, und machte sofort eine neue Beobachtungsreihe. Die Decremente der zweiten Reihe waren um 7—8% kleiner als die der ersten. Der Widerstand, welchen das *Hg* der Bewegung entgegengesetzt hatte, musste die Ursache dieser Differenz sein. Ich war geneigt, die Inconstanz der Dämpfung, welche sich in den bis-



herigen Beobachtungen immer noch gezeigt hatte, allein auf Rechnung etwas verschiedener Stellungen des Quecksilbers zu setzen, und glaubte nunmehr mit der völligen Entfernung desselben auch den letzten Grund für eine solche Inconstanz beseitigt zu haben. Wenn es sich nun auch in der Folge zeigte, dass dennoch von einem Tage zum andern Variationen der Grössen  $x_0$  und  $\alpha$  stattfanden, welche die Beobachtungsfehler weit überstiegen, so hatte die Entfernung des  $Hg$  doch die Wirkung, dass Beobachtungen zu Anfang und zu Ende eines Termines stets genügend übereinstimmende Werthe für  $x_0$  und  $\alpha$  ergaben.

Aus den Beobachtungen berechnete ich die Constanten in der oben (p. 24) angegebenen Weise; stets liessen sie sich gut durch jene Formeln darstellen, und ich habe nie weiter Abweichungen von Gronau's Dämpfungs-gesetz gefunden. Als Beispiel theile ich in Tab. VI eine der von mir berechneten Beobachtungsreihen mit; weiter unten in Tab. VII findet der Leser die Umkehrzeiten, welche zur selben Beobachtungsreihe gehören.

Tab. VI. ( $G_{II}$ , 30/VII 1885).

$a$	$t$		Correlaten (rechte Seite = 100 $N$ )				$\Delta =$ 100 $\Delta \alpha$
14	0.37	Näherungs- werthe:	$27.7 (100 C'') - 1.0 (1000 x_0'') + 19.6 (1000 \alpha') = + 2.1$				- 1.6
13	3.28		24.8	8.1	16.9	+ 1.2	- 0.4
12	6.36		22.1	14.0	14.4	- 4.8	+ 5.9
11	10.39	$x_0' = 10^{-3} \cdot 13$	19.5	20.2	12.1	+ 3.9	- 2.6
10	14.60		17.0	24.8	10.0	+ 3.0	- 1.7
9	19.50	$\alpha' = 0.07$	14.7	28.6	8.1	+ 3.1	- 1.7
8	24.99		12.5	31.2	6.4	- 0.5	+ 1.7
7	31.93	$C' = 1.96$	10.4	33.3	4.9	+ 2.3	- 1.2
6	39.74		8.5	33.9	3.6	- 1.9	+ 2.8
5	50.24		6.8	33.9	2.5	+ 1.7	- 1.1
4	63.24		5.1	32.4	1.6	+ 0.8	- 0.5
3	81.56		3.6	29.6	0.9	+ 3.0	- 3.0
2	106.10		2.3	24.2	0.4	- 4.2	+ 3.9
$C = 1.9721$			$10^3 x_0 = 13.099 \pm 0.165$		$\alpha = 0.06832 \pm 0.00243$		

Wir haben weiter die Abhängigkeit der Schwingungszahl von der Amplitude zu untersuchen. Dies geschieht am bequemsten und am genauesten durch Differentialbeobachtungen, indem man die zu untersuchende Gabel mit einer constant erregten vergleicht. Nennt man die stroboscopische Schwingungsdauer, also die Zeit, in welcher die eine Gabel der andern um eine ganze Schwingung vorangeht,  $\theta$ , so ist die Differenz der Schwingungszahlen beider Gabeln

$$m - n = \pm \frac{1}{\theta} \quad (36)$$



Statt der langen Bezeichnung „Differenz der Schwingungszahlen“ will ich fortan kürzer „Verstimmung“ schreiben, und soll dieselbe dem Vorzeichen nach immer die Differenz  $m - n$  bedeuten. Mit  $n$  war die constante Schwingungszahl der Vergleichsgabel  $G_1$  bezeichnet worden,  $m$  ist die Schwingungszahl der zu untersuchenden  $G_2$ . Hat man beim Abschwingen der Gabel die Umkehrzeiten der Ellipse registriert, so ist die Differenz je zweier auf einander folgender Umkehrzeiten  $\theta/2$ . Das jedesmalige Vorzeichen der Verstimmung findet man nach der einfachen Regel: Wächst  $\theta$  mit abnehmender Amplitude, so ist  $m - n$  negativ zu nehmen, nimmt  $\theta$  ab, so ist  $m - n$  positiv. Diese Regel folgt aus der Beobachtung, dass bei kleiner werdender Amplitude die Schwingungszahl der Stimmgabel zunimmt.

Die Beobachtungen, welche ich anfangs noch an der mit Laufgewichten versehenen Gabel anstellte, ergaben eine ungemein starke Aenderung der Verstimmung mit der Amplitude.  $G_2$  brachte ich damals noch durch Selbstanregung auf die gewünschte Anfangsamplitude. Ich registrierte dann zunächst einige Umkehrzeiten der Ellipse, solange die Gabel selbstthätig auf constanter Amplitude blieb, unterbrach sodann im Augenblicke einer Umkehr den Strom, und registrierte zugleich diesen Moment. Die folgenden Umkehrzeiten registrierte ich, so lange die Ellipse deutlich genug war. Diese Beobachtungen wiederholte ich, und bildete Mittelwerthe. Vorher und nachher beobachtete ich die Amplitudenabnahme der abschwingenden Gabel, und entwarf dann in Millimeterpapier eine Curve, die Amplituden als Function der Zeit darstellend. Bei den vorigen Beobachtungen hatte ich die Anfangsamplitude notirt: mit Hilfe eines Planimeters ermittelte ich dann die zu jeder stroboscopischen Halbschwingung gehörige mittlere Amplitude. Dies ist ein recht umständliches Verfahren, und doch sind die Resultate nur wenig zuverlässig.

Fig. 7 illustriert das Ergebniss einer derartigen Beobachtungsreihe. Abscissen sind die Amplituden, Ordinaten die Verstimmungen. Die Kreuzchen geben die Beobachtungen an, die bei electromagnetischer Selbstanregung beobachtete Verstimmung bei  $\alpha = 8.0$  ist durch einen Kreis besonders gekennzeichnet. Die Schwingungszahl scheint in den Fehlergrenzen als lineare Function der Amplitude darstellbar zu sein, die Tonänderung beträgt im mitgetheilten Beispiel etwa 0.024 Schwingungen für die Einheit der Amplitude.

Ich erwähnte bereits den immensen Einfluss, welchen die Stellung der Laufgewichte auf die Dämpfung der Stimmgabelschwingungen hat. Einen gleichen Einfluss übt diese Stellung auch auf den Betrag der Tonänderung mit der Amplitude aus. Denn nachdem die Laufgewichte entfernt waren, änderte sich die Schwingungszahl derselben Gabel pro Einheit der Amplitude nur noch um 0.0003 Schwingungen.

Graphische Darstellungen zeigten, dass auch jetzt die Abnahme der Schwingungszahl der Amplitude proportional sei. Um nun die Methode der kleinsten



Quadrate auch auf die Beobachtungen der Umkehrzeiten anwenden zu können, muss zuerst ein analytischer Ausdruck für diese Zeiten aufgestellt werden.

Die Schwingungszahl der Vergleichsgabel  $G_I$  ist bei jeder Beobachtungsreihe constant =  $n$ . Die Schwingungszahl der zu untersuchenden Gabel  $G_{II}$  ist von der Amplitude abhängig und ist jeweil

$$m = m_0 - p \cdot a \quad (37)$$

Die Amplitude  $a$  ist selbst eine Function der Zeit, und zwar war

$$a = \frac{Be^{-x_0 t}}{1 - \alpha Be^{-x_0 t}} \quad (29)$$

Folglich ist die Anzahl von Schwingungen, welche  $G_{II}$  seit der Zeit  $t = 0$  vollführt hat

$$M = \int_0^t (m_0 - p \cdot a) dt = m_0 t - p \cdot \int_0^t \frac{Be^{-x_0 t}}{1 - \alpha Be^{-x_0 t}} dt \quad (38)$$

$$M = m_0 t - p \cdot \frac{1}{\alpha x_0} l \frac{1 - \alpha Be^{-x_0 t}}{1 - \alpha B} \quad (39)$$

Gegenstand der Beobachtung ist die Differenz der von beiden Gabeln vollführten Schwingungen:

$$M - nt = \delta + \eta \quad (40)$$

$\delta$  bedeute eine jeder Beobachtungsreihe eigenthümliche Constante, nämlich die Differenz, welche von  $t = 0$  ab bis zur ersten Umkehrzeit entstanden ist. Die Beobachtung der Umkehrzeiten  $t_0, t_1, t_2, \dots$  liefert dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta \pm 0 &= M_{(t_0)} - n \cdot t_0 \\ \delta \pm 0.5 &= M_{(t_1)} - n \cdot t_1 \\ \delta \pm 1 &= M_{(t_2)} - n \cdot t_2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (41)$$

Wir haben also:

$$\eta = (m_0 - n) t - p \frac{1}{\alpha x_0} l \frac{1 - \alpha Be^{-x_0 t}}{1 - \alpha B} - \delta \quad (42)$$

Ich stellte nun die Versuche an, wie auf p. 28 beschrieben. Dann wurden  $\alpha, x_0, B$ , aus den Amplitudendurchgängen gefunden, welche mit den Umkehrzeiten zugleich registrirt waren. Die Gl. 42 enthält die 3 unbekanntenen Constanten  $(m_0 - n), p, \delta$ , in linearer Form, letztere können also nach der Meth. d. kl. Quadr. gefunden werden. Streng genommen sollte man die Summe der Fehlerquadrate von  $t$  zu einem Minimum machen, doch kann man ebensogut die Fehler der  $\eta$  ausgleichen, da  $\eta$  und  $t$  sich doch sehr nahe proportional ändern. Alle meine Beobachtungen liessen sich gut nach Gl. 42 darstellen, in den Grenzen der von mir benutzten Amplituden war also stets die Schwingungszahl als lineare Function der Amplitude zu betrachten. Die in Tab. VII mitgetheilten Beobachtungen geben ein Beispiel hierfür.



Tab. VII. ( $G_{II}$ , 30/VII 1885).

$\eta$	$t$	$\int a dt$	$10^3 \Delta\eta$	
0	<sup>sec</sup> 6·36	83·0	+ 0·1	$10^3 (m_0 - n) = 29·021$ $\pm 39$
1	43·48	390·8	- 1·0	
1·5	61·57	478·0	+ 1·9	$10^3 p = 0·2542$ $\pm 76$
2	79·26	541·1	- 0·8	
2·5	96·91	588·6	- 0·6	
3	114·49	624·8	+ 0·4	$\delta = 0·16345$

Ein Uebelstand aber machte sich auch hier bemerkbar. Der Amplituden-coefficient  $p$  hielt sich nicht constant. Beobachtungen, welche an verschiedenen Tagen angestellt wurden, ergaben Zahlen, die in einem extremen Falle um das 10fache des wahrscheinlichen Fehlers differirten! Es ist mir nicht gelungen, die Ursache dieser eigenthümlichen Inconstanz aufzufinden, und dieselbe ist um so befremdlicher, als die Beobachtungen sich durchweg der Formel 42 auf's beste fügten. Nachdem ich aber mit den Laufgewichten die referirten Erfahrungen gemacht habe, glaube ich, dass auch jetzt noch die Inconstanz der Dämpfung und die des Coefficienten  $p$  einen gemeinsamen Grund haben. Die Gabel war wol auf's beste festgeschraubt, und das Stativ sowie die Tische massiv und fest genug, und doch kann hier allein der Mangel zu suchen sein.

Ich gebe in der nachfolgenden Tab. VIII eine Uebersicht über die Werthe von  $x_0$ ,  $\alpha$ ,  $p$ , welche ich aus verschiedenen Beobachtungsreihen berechnet habe, damit der Leser den Betrag der Variationen dieser Constanten kennen lernt. Jeder Zahl füge ich ihren wahrscheinlichen Fehler bei.

Tab. VIII. (1885).

Beobachtungs-Datum & Nr.	$10^3 x_0$	$\alpha$	Welche Ampl. beob.	$10^3 p$	$10^3 (m_0 - n)$	Anzahl der beob. Umkehrz.
20/VII 1	14·70	0·0587	13-1	0·2947	- 53·307	11
	$\pm 9$	$\pm 12$	4 fehlt	$\pm 85$	$\pm 46$	
6	14·76	0·0604	13-1	0·3205	+ 101·547	20
	$\pm 22$	$\pm 29$		$\pm 188$	$\pm 99$	
12	15·12	0·0551	13-1	0·2345	+ 43·675	8
	$\pm 14$	$\pm 18$		$\pm 82$	$\pm 43$	
26/VII 1	13·76	0·0705	13-1	0·3118	+ 54·543	16
	$\pm 17$	$\pm 26$		$\pm 66$	$\pm 24$	
11	14·04	0·0680	13-2	0·3593	+ 40·501	11
	$\pm 19$	$\pm 27$	8 fehlt	$\pm 21$	$\pm 29$	
30/VII 1	13·10	0·0683	14-2	0·2542	+ 29·021	6
	$\pm 16$	$\pm 24$		$\pm 76$	$\pm 39$	
5	13·38	0·0670	14-1	0·2362	+ 28·031	8
	$\pm 17$	$\pm 25$		$\pm 78$	$\pm 33$	



Man sieht, die Variationen der 3 Constanten  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\rho$  sind sehr merklich. Doch da jede einzelne Beobachtungsreihe sich so gut den Formeln anpasste, wird es gestattet sein, das Resultat dieses Abschnittes dahin zusammenzufassen, dass Schwingungszahl und Decrement der Stimmgabel als lineare Functionen der Amplitude angesehen werden müssen.

## II. Die electromagnetische Anregung der Stimmgabel.

Es war zu erwarten, dass, wenn die Gabel unter dem Einflusse eines intermittirenden Stromes schwingt, zu der im vorigen Abschnitte behandelten Dämpfung, welche durch innere Reibung und Luftreibung hervorgebracht wird, noch ein gewisser Betrag hinzukommen würde, verursacht durch Inductionswirkung des Electromagnets auf die sich bewegenden Stimmgabelzinken. Dieser, von der erregenden Stromstärke abhängige Antheil der Dämpfung kann aber nicht gefunden werden bei Anwendung eines intermittirenden Stromes, denn letzterer wirkt durch die periodischen Stösse direct auf die Amplitude ein, so dass das zu beobachtende Phänomen in ganz unberechenbarer Weise beeinflusst wird. Um aber doch eine Vorstellung zu bekommen von der Grösse dieser Dämpfung durch den Electromagnet, untersuchte ich den Einfluss, welchen der durch einen constanten Strom erregte Electromagnet auf die Stimmgabelschwingungen ausübt. Dazu war eine geringe Aenderung der Stromleitungen erforderlich. Während bisher der Electromagnet von  $G_{II}$  direct mit dem zweiten Quecksilbernapf des Unterbrechers an  $G_I$  verbunden war, führte ich jetzt von beiden Stellen Drähte zu einer Wippe, welche ich neben das Beobachtungsfernrohr stellte. Die Wippe verband ich ferner direct mit dem galvanischen Element, und schaltete in diese Verbindung einen Rheostaten ein. In einer Lage der Wippe ging dann der Strom in der gewöhnlichen Weise vom Element durch den Unterbrecher zum Electromagnet von  $G_{II}$ , wurde also intermittirend gemacht. Dieser Strom gestattete, die nöthige Anfangsamplitude der  $G_{II}$  durch Mitschwingen zu erzwingen. Beim Umlegen der Wippe wurde der Unterbrecher ausgeschaltet, und der Strom (durch den Rheostaten) bleibend geschlossen; die Gabel schwang also unter dem Einflusse des constant erregten Electromagnetes ab. Die Intensität des constanten Stromes wurde jedesmal vor und nach dem Abschwingen am Galvanometer abgelesen, und das Mittel aus den höchstens um 0.2 Scaltheile differirenden Ausschlägen genommen. Ich registrirte auch hier Amplitudendurchgänge und Umkehrzeiten zusammen, und rechnete nach den im vorigen Abschnitt mitgetheilten Methoden.  $G_I$  war während der Dauer der Versuche ununterbrochen selbstthätig im Gange. Das Resultat meiner Versuche war, dass nicht allein das Decrement, sondern zugleich auch die Schwingungszahl von  $G_{II}$  hierdurch verändert wurde, und zwar wuchs das Decrement proportional dem Quadrate der Stromstärke, und die Schwingungszahl nahm ab, ebenfalls proportional dem Quadrate der Stromstärke.



Dieselben Versuche stellte ich auch 1890 an, wo eine andere  $Ut_{-1}$ -Gabel von Koenig als  $G_{II}$  benutzt wurde, welche am Ende der Zinken Laufgewichte trug, und die Schwingungszahl  $m = 32$  hatte. Die nachfolgenden Tabellen enthalten die Resultate meiner Beobachtungen an dieser Gabel. Wir betrachten am zweckmässigsten jede der vier Constanten  $x_0$ ,  $\alpha$ ,  $(m_0 - n)$ ,  $p$ , für sich.

Ich muss hier noch eine Bemerkung einschalten über die Einheit, in welcher ich  $x$ ,  $m - n$  und  $p$  hinfort ausdrücken will. Alle drei sind kleine Grössen, und ich habe es sehr bequem gefunden, eine tausendmal kleinere Einheit für dieselben zu benutzen. Diese Einheit nenne ich das Milli, und bezeichne sie mit  $M$ . Da ihre Dimension  $T^{-1}$  ist, so kommt dies der Benutzung einer Zeiteinheit von tausend Secunden gleich.

*Discussion von  $x_0$ .* Ist  $x_i$  das Decrement, welches bei einer erregenden Stromstärke  $i$  beobachtet wird, so versuchte ich den Ansatz:

$$x_{oi} = x_0 + \gamma i^2 \quad (43)$$

Berechnet man nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den beobachteten Decrementen die Werthe  $x_0$  und  $\gamma$ , so ergibt die Rückberechnung eine sehr gute Uebereinstimmung, wie dies aus Tab. IX hervorgeht.

Tab. IX. (10/II 1890).

Beob.- Nr.	$i$	$i^2$	$x_{oi}$ gefunden.	$\Delta$ (ber. nach 43 minus gefunden).	$x_0 = \frac{M}{7.755}$ $\pm 32$
1	0.000	0.000	$7.795 \pm 0.066$	-0.61	$\gamma = 3.713$ $\pm 60$
7	0.000	0.000	7.782      66	-0.42	
2	0.421	0.177	8.407      93	+0.06	$\epsilon = \pm 1.14$ $r = \pm 0.77$
6	0.844	0.712	10.253      76	+1.91	
3	1.122	1.259	12.577      166	-0.89	
5	1.485	2.205	16.276      283	-1.17	
4	1.730	2.993	19.047      478	-0.37	

Die Einheit der Stromstärke ist 100 Scaltheile = 0.609 Ampère. Die Fehler  $\Delta x_{oi}$  sind ausgedrückt in Theilen des wahrscheinlichen Fehlers jeder einzelnen Bestimmung. Bei einer grossen Zahl von Beobachtungen wäre also  $r = \pm 1$  zu erwarten. Da jedoch  $r$  sogar kleiner als 1 gefunden wird, so ist die Uebereinstimmung der Formel 43 mit der Erfahrung sehr befriedigend zu nennen. Der durch die Inductionswirkung des Electromagnetes verursachte Zuwachs des Decrementes unendlich kleiner Schwingungen ist also dem Quadrate der Stromstärke proportional.

*Discussion von  $\alpha$ .* Die Constante  $\alpha$  schien bei den Versuchen v. J. 1885 sich gar nicht zu ändern unter dem Einflusse des Electromagnetes. Jetzt aber geht



aus Tab. X eine sehr merkliche Aenderung hervor.  $\alpha$  nimmt erst ab, dann wieder zu mit wachsender Stromstärke. Man kann eine Formel aufstellen

$$(\alpha x_0)_i = (\alpha x_0) + \delta i^2 \quad (44)$$

und kann die Constanten mit kleinsten Quadraten berechnen.

Tab. X. (10/II 1890).

Beob.- Nr.	$i^2$	$\alpha$	$\alpha x_0$	$\Delta$	$\overset{M}{(\alpha x_0)} = 0.4239$ $\pm 48$
1	0.000	$0.05322 \pm 137$	$\overset{M}{0.4148} \pm 113$	+ 0.81	
7	0.000	5629 138	4380 113	- 1.26	$\delta = 0.1308$
2	0.177	5267 179	4428 158	+ 0.27	$\pm 83$
6	0.712	5044 117	5172 126	- 0.02	
3	1.259	4454 204	5602 267	+ 1.07	$\varepsilon = \pm 1.03$
5	2.205	4360 263	7096 445	+ 0.06	$r = \pm 0.69$
4	2.993	4858 392	9253 782	- 1.42	

Die Uebereinstimmung der Formel mit den Beobachtungen ist recht gut, wie Tab. X zeigt. Doch darf es nicht befremden, dass  $r = \pm 0.69$  so klein ist. Die wahrsch. Fehler von  $\alpha x_0$ , welche die Einheit für  $\Delta$  abgegeben haben, sind berechnet aus den Einzelfehlern der Factoren, als ob die Bestimmungen von  $\alpha$  und  $x_0$  unabhängig von einander wären. Dies ist aber gar nicht der Fall, daher sind die wahrsch. Fehler in der vierten Colonne jedenfalls zu hoch gegriffen, und hierdurch ist  $r$ , welches auf eine Beobachtung vom wahrsch. Fehler  $\pm 1$  bezogen ist, zu niedrig geworden.

Bei diesen Versuchen war also das Decrement darstellbar durch die Gleichungen

$$x = \overset{M}{7.755} + \overset{M}{3.713} i^2 + \left[ \overset{M}{0.4239} + \overset{M}{0.1308} i^2 \right] a$$

$$\pm 32 \quad \pm 60 \quad \left[ \pm 48 \quad \pm 83 \right]$$

oder

$$x = \overset{M}{7.755} + \overset{M}{0.4239} a + \left[ \overset{M}{3.713} + \overset{M}{0.1308} a \right] \cdot i^2$$

$$\pm 32 \quad \pm 48 \quad \left[ \pm 60 \quad \pm 83 \right]$$

Bei jeder Stromstärke wächst also das Decrement proportional der Amplitude, und bei jeder Amplitude wächst das Decrement proportional dem Quadrate der Stromstärke.

*Discussion von (m — n).* Die Verstimmung und den Coefficienten  $p$  konnte ich bei meinen neueren Versuchen nicht mehr mit kleinsten Quadraten aus dem Beobachtungsmaterial berechnen. Es war mir nämlich nicht möglich, die Amplitude der Vergleichsgabel  $G_1$  vollkommen constant zu erhalten, und dieser Umstand brachte



eine Unsicherheit in die Deutung der stroboscopischen Schwingungsdauern, welche eine exacte Rechnung unmöglich machte. Durch sorgfältige Reinigung der Contactspitze und Beschwerung des Stimmgabelstatives mit grossen Bleiklotzen gelang es wenigstens, die Schwankungen in engen Grenzen zu halten. Während der ganzen Dauer der in diesem Abschnitt mitgetheilten Beobachtungen — dieselben erstreckten sich sogleich auch auf die erzwungenen Schwingungen — war die höchste Amplitude der Vergleichsgabel  $b = 12.3$ , die niedrigste  $b = 9.9$ . Während der einzelnen Beobachtungsreihe, d. h. während eines Abschwingens von  $G_{II}$ , betrug die Variation nur wenige Zehntel. Es gelang mir, auch diese Schwankungen noch messend zu verfolgen, und ihren störenden Einfluss fortzucorrigiren. Ich verfuhr so: Vor dem Beginn und nach Beendigung einer Beobachtungsreihe notirte ich immer die Amplitude von  $G_I$ . Während des Abschwingens kommen nur Variationen in den Zehnteln vor. Zwischen den einzelnen Zeitmomenten, welche registriert werden müssen, den Amplitudendurchgängen und Umkehrzeiten, hat man immer Zeit genug, um die Zehntel der Amplitude  $b$  abzulesen, in's Journal kann man sie aber nicht eintragen. Ich notirte diese Zehntel mit Hilfe des Tasterschlüssels auf dem Papierstreifen des Registrirapparates. 10 Punkte dicht hintereinander bedeuteten — 0, 11 Punkte — 1, 2 Punkte — 2, u. s. f. Ich gewöhnte mich bald an diese neue Complication des Registrirverfahrens, und war bestrebt, stets möglichst oft  $b$  zu notiren. Beim Ablesen der Beobachtungen erhält man also nun für jede stroboscopische Halbschwingung einen mittleren Werth von  $b$ , welcher hernach zur Reduction auf einen Normalwerth dient. Die mittlere Amplitude von  $G_{II}$  berechnete ich für jede stroboscopische Halbschwingung nach der Formel

$$a = \frac{l(1 - aBe^{-\alpha_0 t_2}) - l(1 - aBe^{-\alpha_0 t_1})}{\alpha_0(t_2 - t_1)} \quad 45)$$

Jede Halbschwingung liefert einen Werth der Verstimmung

$$m_a - n = \frac{2}{t_2 - t_1} \quad 46)$$

wenn  $t_1$  und  $t_2$  zwei aufeinander folgende Umkehrzeiten der Ellipse sind. Ich hatte die stroboscopische Schwingungsdauer so gewählt, dass die Fehler in Zeit, welche beim Registriren begangen wurden, auf  $m - n$  keinen merklichen Einfluss ausübten gegenüber der Unsicherheit, welche aus dem Fehler entsprang, mit dem die  $b$  noch behaftet waren.

Zunächst trug ich nun für jede Beobachtungsreihe die uncorrigirten  $m - n$  als Ordinaten zu den  $a$  als Abscissen auf. Da zeigte es sich nun, dass ich zum Glück über eine Beobachtungsreihe verfügte, welche zur exacten Berechnung von  $p$  geeignet war. In Tab. XI theile ich dieselbe mit, und gebe zugleich das Resultat der Berechnung an, sowie die Fehler in  $\eta$ , welche bei der Ausgleichung übrig bleiben.



Tab. XI. (10/II 1890, Nr. 14).

$\eta$	$t$	$m - n$	$a$	$b$	$10^3 \Delta \eta$	
0	1.72	<sup>M</sup> 18.88	13.12	12.2	- 0.24	$m_0 - n = + 21.0470$ $\pm 76$
0.5	28.20	19.50	9.35	12.2	+ .22	
1	53.84	19.94	6.95	12.2	+ .61	$p = 0.16375$ $\pm 118$
1.5	78.91	20.19	5.29	12.2	- .27	
2	103.67	20.36	4.10	12.2	- .59	
2.5	128.23	20.49	3.22	12.2	- .19	$10^3 \varepsilon = \pm 0.49$ $10^3 r = \pm 0.33$
3	152.63	20.65	2.55	12.2	+ .50	
3.5	176.84	20.65	2.03	12.16	- .06	Im Mittel ist $\theta = 50 \text{ sec}$ , also die Beobachtungsfehler in Zeit
4	201.05	20.59	1.63	12.1		
4.5	225.34	20.57	1.31	12.1		
5	249.65	20.57	1.05	12.07		$\varepsilon_t = \pm 0.025^{\text{sec}}$ $r_t = \pm 0.017^{\text{sec}}$
5.5	273.96					

Zur Rechnung, welche darauf ausging, einen genauen Werth von  $p$  zu erhalten, konnten natürlich nur die Beobachtungen bis  $\eta = 3.5$  benutzt werden, solange  $b$  constant geblieben war. Die Colonne  $\Delta \eta$  beweist, wie genau die Beobachtungen, und wie gut sie sich der Formel 42 anschliessen. Für alle weiteren Reductionen beobachteter Verstimmungen auf  $a = 0$  benutzte ich nun den Coefficienten  $p = 0.164$ .

Ferner war es erforderlich, um alle  $m - n$  auf eine Normalamplitude der Vergleichsgabel  $G_1$  zu reduciren, den Coefficienten  $dn/db = -q$  zu ermitteln. Ich benutzte hierzu alle Verstimmungsbeobachtungen der frei abschwingenden Gabel, über welche ich verfügte. In jeder einzelnen Reihe reducirte ich alle die beobachteten  $m - n$  (z. B. Col. 3 in Tab. XI) auf  $m_0 - n$ , nach der Formel  $m_0 - n = m - n + 0.164a$ . Für jede Reihe bildete ich aus diesen Zahlen ein Mittel, ebenso das Mittel der Amplitude  $b$ , welches dazu gehörte.

Die Beobachtungen erzwungener Schwingungen i. J. 1885 hatten mir gezeigt, dass es ein zu primitives Verfahren sei, die Verstimmung durch Verschieben der Laufgewichte auf  $G_1$  zu ändern. Für meine neueren Versuche liess ich deshalb an einem Laufgewichte eine Schraube anbringen, welche das Gewicht parallel der Stimmgabelzinke durchsetzte, und durch eine Contramutter in jeder beliebigen Stellung festgehalten werden konnte. Die Ganghöhe der Schraube betrug  $0.5 \text{ mm}$ , durch Ausbohren war ihr Gewicht so regulirt, dass eine Verschiebung derselben um eine Umdrehung eine Aenderung der Tonhöhe um  $1 M$  verursachen musste. Das umgearbeitete Laufgewicht mit Schraube und Contramutter war durch Abfeilen einer Kante wieder genau auf das ursprüngliche Gewicht zurückgebracht. Die Laufgewichte selbst blieben nun bei allen meinen Beobachtungen unverändert an derselben Stelle festgeschraubt, und die Verstimmungen wurden



nur durch die Verstellung der Schraube geändert. Ist nun  $S$  die Anzahl von Schraubhöhen, um welche der Schraubenkopf von der Seitenfläche des Laufgewichtes absteht, so kann für die Schwingungszahl von  $G_1$  die Formel aufgestellt werden

$$n = n_0 - q \cdot b + v \cdot S \quad 47)$$

Die Schwingungszahl von  $G_{II}$  ist stets ungeändert  $m_0$ , also konnte ich aus den in der folgenden Tabelle aufgeführten Beobachtungen die Constanten  $q$  und  $v$  berechnen.

Tab. XII. (10/II 1890).

Beob.- Nr.	$S$	$m_0 - n$	$b$
		$M$	
1	42	- 15·07	9·96
7	42	- 14·18	10·39
8	42	- 13·78	10·58
9	30	- 1·20	11·07
12	22	+ 9·44	12·48
13	10	+ 21·19	12·30
14	10	+ 20·98	12·17
15	28	+ 3·08	12·10
17	32	- 1·18	11·80
18	35	- 3·93	11·87
19	42	- 10·83	11·84
20	42	- 11·08	11·62

Ich fand  $q = 2 \cdot 261 \pm 0 \cdot 074$ , und  $v = 0 \cdot 9650 \pm 0 \cdot 0050$ .

Nun erst war es möglich, zur Berechnung der Versuche mit constant erregtem Electromagnet zurückzukehren. Aus jeder stroboscopischen Halbschwingung hatte ich  $m - n$  berechnet, jetzt reducirte ich mit  $q = 2 \cdot 26$  auf  $b = 10 \cdot 2$  als Normalamplitude. Diese reducirten Verstimmungen trug ich nun als Ordinaten auf zu den mittleren Amplituden  $a$  als Abscissen. In jedem Diagramm zog ich eine gerade Linie, welche die Beobachtungen möglichst gut wiedergab, und erhielt aus jeder Geraden den Amplitudencoefficienten  $p$ , (Tab. XIII, Col. 2) welcher bei der betreffenden Stromstärke vorhanden war. Für die freiabschwingende Gabel, d. i. für  $i = 0$ , hatten wir schon  $p_0 = 0 \cdot 164$ . Diese  $p$  trug ich in Coordinatenpapier ein, zu  $i^2$  als Abscisse. Die beste Gerade hatte die Gleichung  $0 \cdot 164 + 0 \cdot 050 i^2$ . Die hiermit berechneten Zahlen stehen auch in der Tab. XIII. In den ursprünglichen Diagrammen, welche  $m - n$  als Function von  $a$  enthielten, tilgte ich nunmehr die Geraden, welche für Tab. XIII die  $p$  geliefert hatten. Ich zog neue Linien, welche die berechneten  $p$  zu Richtungsconstanten hatten. Auch diese schlossen sich gut den Beobachtungen an, und dienen nun zur Ermittlung der  $m_0 - n$ . Tab. XIV enthält die Resultate.



Tab. XIII. (10/II 1890).

$i^2$	$P$ aus den Diagr.	$P$ berechnet $0.164 + 0.050 i^2$	$\Delta$
0.000	$M$ 0.164	0.164	
0.177	0.18	0.173	-0.007
0.712	0.185	0.200	+ .015
1.259	0.23	0.227	- .003
2.205	0.30	0.274	- 0.26
2.993	0.30	0.314	+ .014

Tab. XIV. (10/II 1890).

Beob.- Nr.	$i^2$	$m_{oi} - n$ aus den Diagr.	$m_{oi} - n$ berechnet $-14.62 - 4.14 i^2$	$\Delta$
1	0.000	$M$ -14.51	-14.62	-0.11
7	0.000	14.62	14.62	.00
2	0.177	15.47	15.35	+ .12
6	0.712	17.71	17.57	+ .14
3	1.259	19.95	19.83	+ .12
5	2.205	23.64	23.75	- .11
4	2.993	26.89	27.01	- .12

Eine Formel

$$(m_{oi} - n) = (m_o - n) - \mu i^2 \quad (48)$$

stellt die Beobachtungen gut dar. Wieder durch graphisches Verfahren erhielt ich  $(m_o - n) = -14.62$  und  $\mu = 4.14$ . Die übrig bleibenden Fehler sind, wie aus Tab. XIV ersichtlich, Fehlern von 0.05 in  $b$  aequivalent, übersteigen also nicht die zu erwartenden Grenzen.

Die durch Einwirkung des constant erregten Electromagnetes erzeugte Verminderung der Schwingungszahl ist also dem Quadrate der Stromstärke proportional, und wächst mit der Amplitude. Es ist bei diesen Versuchen:

$$m_i = m - (\mu + \rho \cdot a) i^2 \quad (49)$$

$$\mu = 4.14 \quad \rho = 0.050$$

Die früheren Versuche v. J. 1885 hatten dasselbe Resultat ergeben, nur war dort natürlich der numerische Werth der Coefficienten ein anderer. Ich fand damals, bei anderer Aufstellung, mit anderem Galvanometer und für eine andere Gabel:  $\gamma = 26.92 \pm 0.49$ ;  $\mu = 24.56 \pm 0.09$ ;  $\rho = 0.474 \pm 0.005$ . Da die Constanten grösser waren, war auch ihre Bestimmung leichter, auch hatte ich namentlich nicht mit Inconstanz der Vergleichsgabel  $G_1$  zu kämpfen.

Wie kommt nun diese Aenderung der Schwingungszahl zu Stande?

Für die frei schwingende Stimmgabel setzten wir die Beschleunigung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 m^2 x - 2x \frac{dx}{dt}$$

Wirkt auf die Gabelzinke in ihrer Schwingungsebene ein Magnetpol  $P$  in der Entfernung  $e$  von ihrer Ruhelage, so kommt jetzt, wenn  $i$  die den Magnetismus erzeugende Stromstärke ist, zu obigem Ausdrucke ein Glied hinzu, welches umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von Magnet und Zinke, und direct pro-



portional dem Quadrate <sup>1)</sup> des magnetischen Momentes des Electromagnetes ist. Also erhalten wir jetzt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 m^2 x - 2x \frac{dx}{dt} - \frac{c i^2}{(e+x)^2} \quad 50)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x = -\frac{c i^2}{e^2} + \frac{2c i^2}{e^3} x - \dots \quad 51)$$

Hierbei ist die nach auswärts gerichtete Elongation, bei welcher die Stimmgabelzinke sich vom Magnetpol entfernt, positiv gerechnet. Unter  $x$  ist die durch die Induction vergrösserte Dämpfung zu verstehen. Da nur eine Theorie der Aenderung von  $m_0$  beabsichtigt wird, so ist bei der Entwicklung des „Stromstärkegliedes“, wie man jene Correction nennen könnte, das Glied mit der ersten Potenz allein zu berücksichtigen. Ist  $i = f(t) = \text{const.}$ , wie dies bei den obigen Versuchen der Fall war, so zeigt das erste Glied rechter Hand nur eine Verschiebung der Ruhelage an, hat also für uns weiter keine Bedeutung. Das zweite Glied aber ist nach links zu bringen, die Coefficienten von  $x$  sind zu vereinigen, und das Resultat ist eine neue Schwingungszahl

$$m_i = \sqrt{m^2 - \frac{c i^2}{2\pi^2 e^3}} \\ = m - \mu i^2; \quad \mu = \frac{c}{4\pi^2 e^3 m} \quad 52)$$

Die Theorie verlangt also eine Abnahme der Schwingungszahl proportional dem Quadrate der Stromstärke, wie das Experiment sie auch ergeben hat.

Die Bedeutung der vorstehenden Betrachtungen geht aber weit hinaus über diese Experimente mit constantem Strom. Die Gl. 50 und 51 wurden aufgestellt ohne irgend eine Annahme über die Natur von  $i$ , als Function der Zeit betrachtet. Bei der Erzeugung erzwungener Schwingungen durch einen intermittirenden Strom werden daher diese Gleichungen ebenfalls gültig sein, und die Theorie der electromagnetischen Anregung einer Stimmgabel wird auf dieselben Rücksicht zu nehmen haben, wie wir in der Folge sehen werden.

In der Einleitung bereits reproducirte ich Rayleigh's Theorie. Sie ging aus von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x = J \cos 2\pi n t. \quad 3)$$

Das Integral war:

$$x = \frac{J \sin \varepsilon}{4\pi n x} \cos(2\pi n t - \varepsilon) \quad 6)$$

1) cf. Wiedemann, Lehre v. d. Electricität, 1885. Bd. III, p. 577.



$$\tan \varepsilon = \frac{nx}{\pi(m^2 - n^2)} = \frac{x}{2\pi(m - n) \left(1 + \frac{m-n}{2n}\right)} \quad (7)$$

Die Untersuchungen des ersten Abschnittes haben nun gezeigt, dass weder  $x$ , noch  $m$  von der Amplitude unabhängig sind, wie es doch die obige Theorie voraussetzt. Schon bei den kleinen Amplituden, welche überhaupt zur Anwendung kamen, trat fast eine Verdoppelung des Decrementes ein, gegenüber dem Grenzwerte für  $\alpha = 0$ . Es entsteht die Frage, ob dieser Abhängigkeit der Grössen  $x$  und  $m$  von der Amplitude durch eine Modification der Theorie Rechnung getragen werden könne. An eine Lösung des Problems in geschlossener Form ist dabei natürlich garnicht zu denken, man wird sich mit Näherungsrechnungen zu behelfen haben. Zunächst wäre eine Differentialgleichung aufzustellen, deren Integral den experimentell gefundenen Eigenschaften der Stimmgabel genügt. Chwolson<sup>1)</sup> hat allgemeine Principien aufgestellt, nach welchen man in solchen Fällen zu verfahren hat, doch ist seine Methode hier nicht wohl anwendbar. Sie hat zur Voraussetzung, dass die Amplitude nur einen relativ geringen Einfluss auf Decrement und Schwingungsdauer ausübt. Bei meinen Versuchen aber stieg das Decrement der Stimmgabelschwingungen von  $\alpha = 0$  bis  $\alpha = 15$  fast auf seinen doppelten Betrag. Ich habe eine Lösung des Problems auf einem anderen Wege versucht. Die Rechnungen werden aber dabei so weitläufig dass ich auf die Wiedergabe derselben verzichte, zumal die Giltigkeitsgrenze des Resultates der zahlreichen Vernachlässigungen wegen doch etwas unsicher ist. Ich will nur andeuten, wie ich dabei vorging.

Die Bewegung der Stimmgabel ist nach meinen Versuchen darstellbar durch die Gleichung

$$x = \frac{Be^{-z_0 t}}{1 - aBe^{-z_0 t}} \cdot \cos \left( 2\pi m_0 t - \frac{2\pi p}{az_0} \left[ \frac{1 - aBe^{-z_0 t}}{1 - aB} - \Gamma \right] \right) \quad (53)$$

Die Constanten  $B$  und  $\Gamma$  sind von den Anfangsbedingungen abhängig.

Ich habe nun die betreffenden Rechnungen erst für den Fall  $p = 0$ , dann für den Fall  $\alpha = 0$  gesondert durchgeführt. Wollte man die Veränderlichkeit von Decrement und Schwingungszahl zugleich berücksichtigen, so würden die Formeln gar nicht mehr zu übersehen sein. Ich setze in die Gleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + y \cdot \frac{dx}{dt} + z \cdot x = 0 \quad (54)$$

$x$  und seine Differentialquotienten aus Gl. 53 ein, bestimme  $y$  und  $z$  nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, und ersetze  $B$  und  $\Gamma$  durch  $x$  und seine Derivirten. Dabei geht auch  $t$  aus den Ausdrücken für  $y$  und  $z$  heraus, dieselben werden Functionen von  $x$  und  $dx/dt$ .

1) Chwolson, Allgemeine Theorie der magnetischen Dämpfer. Mém. de l'acad. Imp. de St.-Petersbourg. VII-e Série, Tome XXVIII. 1880.



Die Differentialgleichung für erzwungene Schwingungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{dx}{dt} + zx = J \cos 2\pi nt \quad 55)$$

muss als Integral jedenfalls einen Ausdruck von der Periode  $2\pi n$  haben. Also versuche ich als Lösung zu setzen

$$x = a \cos (2\pi nt - \varepsilon) \quad 56)$$

Berechnet man hiermit  $y$  und  $z$ , welche vorhin als Functionen von  $x$  und  $dx/dt$  gefunden wurden, so folgt das überaus einfache Resultat:

$$\begin{aligned} y &= 2x_0(1 + \alpha a) & z &= 4\pi^2 m_0^2 & \text{für den Fall, wo } p &= 0 \text{ gesetzt war,} \\ \text{und } y &= 2x_0 & z &= 4\pi^2(m_0 - pa)^2 & \text{für den Fall, wo } \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Das heisst also: Für Phasendifferenz und Amplitude bei erzwungenen Schwingungen sind diejenige Verstimmung und dasjenige Decrement maassgebend, welche der erreichten Amplitude zukommen.

Für alle Glieder, welche hierbei vernachlässigt wurden, habe ich die Maximalwerthe, welche dieselben bei meinen Versuchen erreichen konnten, berechnet. Der Betrag der vernachlässigten Glieder war geringer, als der der Beobachtungsfehler der Hauptglieder. Ob freilich derselbe Grad von Annäherung zum Vorschein kommen würde, wenn man die Veränderung von Decrement und Verstimmung zugleich in Rechnung zieht, muss ich dahingestellt sein lassen.

Ferner haben die Versuche mit constant erregtem Electromagnet gezeigt, dass es nicht so ohne weiteres statthaft ist, die auf die Stimmgabel wirkende electromagnetische Kraft durch einen Cosinus der Zeit auf der rechten Seite der Gleichung darzustellen. Wir haben vielmehr — für unendlich kleine Amplituden — die Gleichung gefunden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x = -\frac{c}{e^2} \cdot i^2 + \frac{2c}{e^3} i^2 \cdot x \quad 51)$$

Der intermittirende Strom kann allemal dargestellt werden durch eine Reihe:

$$i = i_0 + \sum_1^{\infty} i_h \cos (2\pi hnt - \varphi_h) \quad 57)$$

$$\text{Also } i^2 = i_0^2 + 2i_0 \sum_1^{\infty} i_h \cos (2\pi hnt - \varphi_h) + \left[ \sum_1^{\infty} i_h \cos (2\pi hnt - \varphi_h) \right]^2 \quad 58)$$

$$\begin{aligned} [\Sigma]^2 &= \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} i_h i_k \cos (2\pi hnt - \varphi_h) \cdot \cos (2\pi knt - \varphi_k) \\ &= \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{i_h i_k}{2} \left\{ \cos (2\pi \overline{h+k} nt - \varphi_h - \varphi_k) + \cos (2\pi \overline{h-k} nt - \varphi_h + \varphi_k) \right\} \quad 59) \end{aligned}$$



Für  $h = k$  folgt aus dem zweiten Cosinus eine Reihe von Gliedern, welche nicht mehr periodisch sind, nämlich  $\sum_1^{\infty} \frac{i_h^2}{2}$ . Für  $h = k + 1$ , für  $k = h + 1$  kommen Glieder von der einfachen Periode  $2\pi n$ :

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{i_{k+1} i_k}{2} \cos(2\pi n t - \varphi_{k+1} + \varphi_k) + \sum_1^{\infty} \frac{i_h i_{h+1}}{2} \cos(-2\pi n t - \varphi_h + \varphi_{h+1}) = \\ = \sum_1^{\infty} i_h i_{h+1} \cos(2\pi n t + \varphi_h - \varphi_{h+1}) = J_1 \cos(2\pi n t - \varphi_1) \end{aligned} \quad (60)$$

Ebenso kommen — nun auch aus dem ersten Cosinus — Glieder von der doppelten, dreifachen Periode u. s. f. Also ist

$$[\Sigma]^2 = \sum_1^{\infty} \frac{i_h^2}{2} + \sum_1^{\infty} J_h \cos(2\pi h n t - \varphi_h) \quad (61)$$

und

$$i^2 = i_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{i_h^2}{2} + \sum_1^{\infty} I_h \cos(2\pi h n t - \Phi_h) \quad (62)$$

wenn

$$I_h \cos(2\pi h n t - \Phi_h) = 2i_0 i_h \cos(2\pi h n t - \varphi_h) + J_h \cos(2\pi h n t - \varphi_h) \quad (63)$$

Dann wird die Differentialgleichung 51:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x = -\frac{c}{e^2} \left( i_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{i_h^2}{2} \right) + \frac{2c}{e^3} \left( i_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{i_h^2}{2} \right) \cdot x + \\ + \left( -\frac{c}{e^2} + \frac{2c}{e^3} x \right) \sum_1^{\infty} I_h \cos(2\pi h n t - \Phi_h) \end{aligned} \quad (64)$$

Das erste Glied bedeutet eine Aenderung der Ruhelage, kommt also nicht weiter in Betracht. Das zweite Glied ist nach links zu bringen, und von  $4\pi^2 m^2 x$  zu subtrahieren. Es bedeutet also eine Aenderung der Eigenperiode der Gabel. Nicht mehr die der freien Gabel zukommende Schwingungszahl  $m$  ist es, deren Differenz mit der Schwingungszahl der periodischen Kraft die Phasendifferenz und Amplitude der erzwungenen Schwingung bestimmt. An Stelle von  $m$  tritt

$$m_i = m - \mu \left( i^2 + \sum_1^{\infty} \frac{i_h^2}{2} \right) \quad (65)$$

Das dritte Glied repräsentirt die periodische Kraft, welche die erzwungenen Schwingungen hervorbringt und unterhält. In demselben kann man  $2c\alpha/e^3$  gegen  $c/e^2$  vernachlässigen, da diese Entwicklungen nur für unendlich kleine Amplituden gültig sein sollen. Ferner kommt von der Cosinusreihe auch nur das erste Glied in Betracht, wenn wir die Festsetzung machen, dass  $m$  nahe gleich  $n$  sei. Dann bleibt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m_i^2 x = -\frac{c}{e^2} I_1 \cos(2\pi n t - \Phi_1) \quad (66)$$



$$\text{wo } I_1 \cos(2\pi nt - \Phi_1) = 2 i_0 i_1 \cos(2\pi nt - \varphi_1) + \sum_1^{\infty} i_h i_{h+1} \cos(2\pi nt + \varphi_h - \varphi_{h+1}) \quad 67)$$

Der Ableitung dieser Formeln lag die Annahme zu Grunde, dass in jedem Augenblicke das in den Stimmgabelzinken inducirte magnetische Moment dem Magnetismus des Electromagnetes proportional sei. Wenn man aber bedenkt, dass die stählernen Stimmgabelzinken jedenfalls eine bedeutende Trägheit im Annehmen und Verlieren des inducirten Magnetismus haben müssen, so erscheint es fraglich, ob die gemachte Voraussetzung gültig ist. Es ist vielmehr wahrscheinlicher, dass der in den Stimmgabelzinken inducirte Magnetismus im Verlaufe einer Schwingung nur eine relativ geringe Oscillation um seinen Mittelwerth, welcher dem  $i_0$  proportional ist, vollführt. Dann aber wäre die Attraction des Electromagnetes nicht mehr schlechtweg proportional  $i^2$ , sondern sie würde sich dem Grenzfall nähern, wo sie proportional  $i \cdot i_0$  ist. In diesem Grenzfall aber nimmt die Differentialgleichung die Form an:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x &= - \frac{c i i_0}{(e+x)^2} = - \frac{c}{e^2} i_0 i + \frac{2c}{e^3} i_0 i x \\ &= - \frac{c}{e^2} i_0^2 + \frac{2c}{e^3} i_0^2 \cdot x - \frac{c}{e^2} i_0 \left(1 - \frac{2x}{e}\right) \sum_1^{\infty} i_h \cos(2\pi hnt - \varphi_h) \end{aligned} \quad 68)$$

Lassen wir wie früher das erste und letzte Glied rechts fort, und nehmen auch von der Cosinusreihe nur das erste Glied, so haben wir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m_i^2 x = - \frac{c}{e^2} i_0 i_1 \cos(2\pi nt - \varphi_1) \quad 69)$$

wo

$$m_i = m_0 - \mu i_0^2$$

Weder die periodische Kraft, noch die Aenderung der Eigenperiode sind in diesem Falle von den höheren Gliedern der Cosinusreihe beeinflusst. Je weniger also der in den Stimmgabelzinken inducirte Magnetismus im Verlaufe einer Schwingung sich von seinem Mittelwerthe entfernt, um so geringer wird auch der Einfluss der höheren Glieder in der Fourier'schen Reihe, welche den Verlauf des Stromes darstellt, auf die Kraft sein, welche die Bewegung der Stimmgabel hervorruft.

Die Bewegung der primären Gabel, welche den Strom intermittirend macht, sei gegeben durch

$$y = b \cdot \cos 2\pi nt. \quad 70)$$

Dann ist  $\Phi_1$ , resp.  $\varphi_1$ , die Phasendifferenz zwischen der Bewegung dieser Gabel und dem Verlaufe der Kraft.

Macht man die Voraussetzung, dass die Verzögerung des Magnetismus im Electromagnet nur durch Selbstinduction verursacht sei, so bietet die Berechnung der Coefficienten in Fourier's Reihe keine Schwierigkeit. Die  $i_h$  sind bei constanter



Tonhöhe alle dem  $i_0$  proportional, woraus die Berechtigung hergeleitet werden mag, unserer Differentialgleichung die Form zu geben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x_i \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m_i^2 x = -Ci^2 \cos(2\pi nt - \varphi) = Ci^2 \cos(2\pi nt - \varphi - 180^\circ) \quad (71)$$

$$x_i = x + \gamma' i^2 \qquad m_i = m_0 + \mu' i^2 \quad (72)$$

$i$  bezeichnet wie früher die galvanometrische Stromstärke, welche ja mit  $i_0$  identisch ist.  $\gamma'$  und  $\mu'$  sind mit Indices versehen worden, um sie von den Coefficienten  $\gamma$  und  $\mu$  zu unterscheiden, welche für die Versuche mit constantem Strom galten.

Auf Grund dieser Erörterungen war also experimentell zu untersuchen, ob in der That Phasendifferenz und Amplitude der erzwungenen Schwingungen sich berechnen liessen aus den Gleichungen

$$\tan \varepsilon = \frac{x}{2\pi(m-n)\left(1 + \frac{m-n}{2n}\right)} \quad (73)$$

$$a = \frac{Ci^2 \sin \varepsilon}{4\pi n x} \quad (74)$$

Die Phasendifferenz  $\varepsilon$  kann nicht direct beobachtet werden, sondern nur die Differenz der beiden Gabeln  $G_I$  und  $G_{II}$

$$\phi = \varepsilon + \varphi + 180^\circ \quad (75)$$

Schliesst man, während die primäre Gabel  $G_I$  selbstthätig electromagnetisch mit constanter Amplitude schwingt, den Stromkreis von  $G_{II}$ , so wird auch diese Gabel in erzwungene Schwingungen versetzt. Die Beobachtung der Lissajous'schen Ellipse im Fernrohre zeigt, dass die Amplitude von  $G_{II}$  anfangs Schwebungen vollführt, hervorgerufen durch die Existenz freier Schwingungen neben den erzwungenen, wie dies auch von dem vollständigen Integral der Differentialgleichung verlangt wird. Die freie Schwingung verschwindet jedoch mit der Zeit, und es bleibt die erzwungene allein übrig. Der Eintritt dieses Endzustandes kann durch passendes Oeffnen und Schliessen des Stromes wesentlich beschleunigt werden. Amplitude und Phase sind constant geworden, die Ellipse ist unbeweglich. Ihre Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (18)$$

Man erhält für  $x = 0 \dots y_0 = b \sin \phi$

für  $y = 0 \dots x_0 = a \sin \phi$

Liest man also die Amplituden der beiden Gabeln sowie die Durchschnittspunkte der Ellipse mit den Coordinatenaxen am Micrometer ab, so hat man Amplitude und Phase bestimmt, denn es ist



$$\sin \phi = \frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} \quad 76)$$

Sind diese Brüche schon nahe gleich 1, so wird die Bestimmung von  $\phi$  aus dem Sinus ungenau, und man benutzt besser den Cosinus

$$\cos \phi = \frac{x_b}{a} = \frac{y_a}{b} \quad 77)$$

$x_b$  ist die Abscisse für  $y = b$ ,  $y_a$  die Ordinate für  $x = a$ , doch lassen diese Coordinaten sich nicht so scharf ablesen, wie  $x_0$  und  $y_0$ . Bei der Mittelbildung aus den beiden Zahlen für *sin*, resp. *cos* habe ich stets auf ihr ungleiches Gewicht Rücksicht genommen. Um zu erfahren, in welchem Quadranten  $\phi$  liegt, muss stets auch die Lage der Ellipse notirt werden — ob sie nach rechts, ob nach links geneigt. Doch gestattet auch dies noch nicht die Unterscheidung zwischen dem ersten und vierten sowie zwischen dem zweiten und dritten Quadranten. Hierzu ist noch die Kenntniss der Richtung erforderlich, in welcher die Ellipse von dem Lichtpunkte durchlaufen wird. Mit Hilfe eines Stroboscopes constatirte ich durch vorläufige Versuche, in denen verschiedene Stromstärken zur Anwendung kamen, dass im Falle starker Verstimmung ( $\tan \varepsilon$  sehr klein)  $\phi$  zwischen  $180^\circ$  und  $270^\circ$  lag, wenn  $m - n$  positiv war, zwischen  $360^\circ$  und  $450^\circ$  aber, wenn  $m - n$  negativ war. Aber auch ohne diese Versuche hätte bei den späteren Beobachtungsreihen keine Unsicherheit aufkommen können über den Quadranten, in welchen  $\phi$  zu verlegen sei. Die Art, in welcher die Ellipse sich beim Abschwingen verändert, ich meine die fortschreitende Verwandlung der Phase, giebt in Verbindung mit der Kenntniss des Vorzeichens von  $m - n$  stets den Quadranten mit Sicherheit an.

Um zu Phasendifferenz und Amplitude auch die Verstimmung zu erhalten, liess ich  $G_{II}$ , nachdem Stromstärke und Constanten der Ellipse notirt waren, abschwingen. Dabei registrirte ich die Umkehrzeiten der Ellipse, sowie einige Amplitudendurchgänge. Letztere dienten zur Berechnung der Constanten  $B$  in Formel 42.  $x_0$ ,  $a$  und  $p$  waren ja schon vorhanden: also erhält man auch  $m_0 - n$ . Es kam aber vor, dass die Verstimmung so klein war, dass sie nicht mehr gemessen werden konnte nach diesem Verfahren. Hier half bei den neuen Versuchen die Schraube im Laufgewichte von  $G_I$  aus. Aus ihrer Stellung und den benachbarten Beobachtungen konnte  $m_0 - n$  mit Sicherheit interpolirt werden. Es versteht sich, dass da, wo ich beim Abschwingen Umkehrzeiten registrirte, ich auch stets  $b$  notirte. War  $b$  ein wenig anders, als während der erzwungenen Schwingung, so wurde durch Hinzufügung einer Correction  $q \cdot \Delta b$  die Verstimmung während der erzwungenen Schwingung ermittelt. Die Zahlen ( $m_0 - n$ ) in der Tab. XV gelten also alle für diejenige Amplitude von  $G_I$ , welche als Constante der Ellipse notirt war. In der Tabelle ist auch angeführt  $m_a - n$ , erhalten als  $m_0 - n - p \cdot a$ . Wir hatten  $p = 0.164$  gefunden,  $a$  war mit den Constanten der Ellipse notirt. Die



Amplituden  $a$  sind nicht die direct abgelesenen Zahlen; die Stromstärke war nicht immer ganz dieselbe, ich reducirte daher alle Amplituden auf  $i = 0.383$ , unter der Annahme, dass die Amplitude proportional  $i^2$  sei. (Gl. 74). Daher rührt die zweite Decimale der  $a$ . Diese reducirten Zahlen sind in der Tabelle aufgeführt.

Tab. XV. (10/II 1890).

Beob.- Nr.	$\phi$	$a$	$m_0 - n$	$m_a - n$	$m_{ai} - n$	$90 - \varepsilon =$ $270 + \varphi - \phi$ $= 283.3 - \phi$
8	367 <sup>o</sup> .2	2.49	- 13.73	- 14.13	- 14.75	- 83.9
19	365.6	3.17	- 10.69	- 11.21	- 11.85	- 82.3
18	357.9	5.78	- 3.86	- 4.89	- 5.60	- 74.6
9 <sup>c</sup>	347.5	8.38	- 1.57	- 2.95	- 3.62	- 64.2
a	344.9	8.58	- 1.24	- 2.65	- 3.32	- 61.6
b	343.8	8.78	- 1.35	- 2.79	- 3.47	- 60.5
17	342.1	9.16	- 1.18	- 2.72	- 3.41	- 58.8
16	323.1	13.07	+ 1.06	- 1.07	- 1.77	- 39.8
15	295.7	16.76	+ 3.08	+ 0.37	- 0.34	- 12.4
10	289.3	16.99	+ 3.73	+ 0.96	+ 0.23	- 6.0
11	234.8	12.73	+ 6.04	+ 4.01	+ 3.32	+ 48.5
12	208.2	5.47	+ 9.49	+ 8.59	+ 7.94	+ 75.1
13	198.2	2.10	+ 21.19	+ 20.85	+ 20.22	+ 85.1

Man findet in der Tabelle die Beobachtung № 9 mit a, b, c angeführt. Dies hängt so zusammen. Die Ellipse war vollständig constant geworden, und ich hatte die  $a$ ,  $b$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  notirt, als plötzlich eine Veränderung eintrat. Nach erreichter Constanz trat nochmals eine Aenderung ein: so erhielt ich 3 Beobachtungen, welche ich für gleichwerthig halte. Ursache der Veränderung müssen die Schwankungen der Amplitude  $b$  gewesen sein, wodurch  $n$ , also auch die Verstimmung  $m - n$  sich änderte. Der neuen Verstimmung mussten sich dann auch Phasendifferenz und Amplitude anpassen.

Die Resultate dieser Beobachtungen sind in Tafel II graphisch dargestellt. Die beobachteten Phasendifferenzen  $\phi$  dienen als Abscissen, Ordinaten sind in Fig. 8 die Amplituden  $a$ , in Fig. 9 die Verstimmungen  $m - n$ .

Um nun Theorie und Erfahrung vergleichen zu können, bedarf man zuerst noch einer Bestimmung der Grösse  $\varphi$ , welche wir die Verzögerung des Magnetismus nannten. Man kann  $\varphi$  sowohl aus der Curve der Amplituden, als auch aus der Curve der Verstimmungen erhalten. Beide Bestimmungen basiren auf dem Satze der Theorie, dass mit den Grenzwerten  $m - n = \pm \infty$   $a = 0$  und  $\varepsilon = 0$ , resp.  $180^\circ$  verbunden sei. Die Grenzwerte von  $\phi$  sind also  $180^\circ + \varphi$  und  $360^\circ + \varphi$ . Dies graphische Verfahren ist hier allein anwendbar, und man darf es demselben nicht zum Vorwurf machen, dass es eine



Extrapolation involvire. Dadurch, dass letztere an beiden Enden jeder Curve stattfindet, und die constante Differenz von  $180^\circ$  für die 2 Endwerthe von  $\phi$  vorgeschrieben ist, geschieht vielmehr die Ermittlung der Verzögerung  $\varphi$  aus den beiden Curven mit grosser Sicherheit. Ich finde aus Fig. 8 und 9  $\varphi = 13.3^\circ$ .

Meine älteren Versuche v. J. 1885 bestanden aus 3 Beobachtungsreihen, in denen die Stromstärke 1.45, resp. 0.77 und 0.43 Ampère betrug. Die Schwingungszahl der damals benutzten Gabel war grösser,  $n = 46.57$ , auch Contactspitze und Electromagnet nicht ganz dieselben. Die 3 Beobachtungsreihen ergaben das Resultat:  $\varphi = 37.3 - 36.5 - 34.0^\circ$ . Also ändert sich  $\varphi$  jedenfalls nur in sehr geringem Maasse mit der Stromstärke.

Die „beobachtete“ Phasendifferenz  $\varepsilon$  kann man nun erhalten als  $\phi - \varphi - 180^\circ$ . In die Tabelle habe ich aufgenommen nicht  $\varepsilon$ , sondern  $90^\circ - \varepsilon$ ; das ist also der Winkel, um welchen die Phase von  $90^\circ$ , der Phase des maximalen Mitschwingens, abweicht. Man gewinnt hierdurch eine bessere Uebersicht, denn nach der Theorie soll die Verstimmung 0 sein, wenn  $90^\circ - \varepsilon = 0$ , und es sollen Verstimmung und dieser Winkel mit gleichem Vorzeichen zunehmen und abnehmen. Fassen wir nun zunächst das Verhältniss von Phasendifferenz und Amplitude in's Auge.

Fig. 8 giebt die Amplituden als Function der Phasendifferenzen wieder, die Kreuzchen stellen die Beobachtungen dar. Drei Linien sind zum Vergleiche beigelegt. Die gestrichelte Curve ist eine Sinuslinie, welche die grösste der beobachteten Amplituden in sich aufnimmt. Die beiden anderen Curven sind berechnet nach Gl. 74, wobei für  $x$  gesetzt wurde  $x_{ai} = x_{oi} (1 + \alpha a)$ .  $\alpha$  wurde aus den Gleichungen p. 35 gefunden zu  $\alpha = 0.0534$ , und  $x_{oi} = 7.755 + 3.713 \cdot (0.383)^2 = 8.30 M$ . Von den beiden ausgezogenen Curven schliesst sich die untere den kleineren Amplituden bis  $a = 10$  recht gut an, sie ist berechnet mit  $Ci^2/4\pi n x_{oi} = 26.8$ . Die andere, berechnet mit  $Ci^2/4\pi n x_{oi} = 32.4$ , giebt die grösseren Amplituden wieder, nur  $a = 13$  bei  $\phi = 323^\circ$  liegt zwischen den beiden Curven, gerade auf der Sinuslinie. Das Ergebniss ist unbefriedigend für die Theorie, und meine älteren Versuche v. J. 1885 hatten wol eine bessere Uebereinstimmung erwarten lassen. Ich hatte damals 3 Versuchsreihen angestellt bei verschiedenen Stromstärken, welche sich nahe wie 4:2:1 verhielten. In den beiden ersten Reihen konnte die Maximalamplitude nicht erreicht werden. Sie war viel zu gross, und so erhielt ich von der Amplitudencurve nur die beiden Enden. In der Formel 74 war für die erste Beobachtungsreihe  $C/4\pi n = 2.3$ , für die zweite 3.0, für die dritte 2.6. Hiermit ist bewiesen, dass das  $i^2$  in der Gleichung richtig ist, daher reducirte ich auch die neueren Versuche in dieser Weise.  $x_{ai}$  hatte ich, ebenso wie jetzt, aus Versuchen mit constantem Strom berechnet. In der ersten Beobachtungsreihe waren die Bestandtheile des Decrementes  $x_o$  und  $\gamma i^2$  resp. gleich 14.7 und 51.0 — also die electromagnetische Dämpfung viel stärker als die natürliche. In der zweiten Reihe waren die Zahlen 13.9 und 14.3, in der dritten 14.0 und 4.4. Dass die Constan-



ten  $C$  unter diesen Verhältnissen noch so nahe gleich gefunden wurden, ist doch sehr bemerkenswerth. Die dritte Beobachtungsreihe enthielt nun auch die Maximalamplitude im Messungsbereich, doch war sie sehr unvollständig. Der erste Quadrant enthielt nur zwei Beobachtungen, bei  $\varepsilon = 4^\circ$  und  $\varepsilon = 24^\circ$ . Dann fingen erst bei  $\varepsilon = 104^\circ$  die Beobachtungen an häufiger zu werden. Die linke Seite fügte sich nun ganz gut der berechneten Curve, die einzige Beobachtung rechts aber fiel stark heraus. Daraus allein durfte man noch nicht auf eine Asymmetrie der Amplitudencurve schliessen, doch muss ich die Thatsache erwähnen, denn jetzt zeigt in Fig. 8  $\alpha = 12.7$  bei  $\varepsilon = 41.5^\circ$  eine Abweichung in demselben Sinne, und ungefähr von gleichem Betrage. Ich halte es daher für wahrscheinlich, dass die Amplitudencurve nicht symmetrisch ist, und dass sie im ersten Quadranten von  $\varepsilon$  eine stärkere Ausbauchung zeigt, als im zweiten. Vielleicht ist auch das Maximum um einen geringen Betrag in den ersten Quadranten hinein verschoben. Doch sind dies nur Vermuthungen, das vorliegende Material gestattet leider keinen sicheren Schluss in dieser Richtung. Die Verstimmungen, mit welchen man bei diesen Versuchen zu operiren hat, sind so ausserordentlich gering, dass die Inconstanz von  $b$  meine Vorausberechnungen für die Einstellung der Stimmschraube illusorisch machte, denen zufolge die Beobachtungen gleichmässig über das ganze Gebiet vertheilt sein sollten.

Wenden wir uns nun dem Zusammenhange von Phasendifferenz und Verstimmung zu.

Die Theorie lieferte die Formel

$$\tan \varepsilon = \frac{x}{2\pi(m-n) \left(1 + \frac{m-n}{2n}\right)} \quad (73)$$

Im Nenner hatten wir schon früher ein von  $x^2/n$  abhängiges Glied vernachlässigt, weil es weit unterhalb der Genauigkeitsgrenze lag, welche den Bestimmungen von  $(m-n)$  gezogen ist. Man kann aber die Formel noch weiter vereinfachen, denn es ist:

$$\frac{x}{2\pi(m-n) \left(1 + \frac{m-n}{2n}\right)} = \frac{x}{2\pi(m-n)} - \frac{x}{4\pi n}$$

Die Messung von  $\varepsilon$  ist fast bis auf einen ganzen Grad unsicher, also kann der Term  $x/4\pi n$  jedenfalls vernachlässigt werden, so lange er kleiner ist als  $0.001$ , denn ein solcher Fehler in der Tangente würde selbst in den ersten Graden einen Fehler von nur  $1/20^\circ$  in  $\varepsilon$  veranlassen. Bei meinen Versuchen ist diese Vernachlässigung stets weit geringer, wir benutzen also in Zukunft die Formel

$$m - n = \frac{x}{2\pi} \cdot \tan(90^\circ - \varepsilon) \quad (78)$$

Auch hier benutze ich nicht  $\varepsilon$  als Argument, sondern  $90^\circ - \varepsilon$ , wie schon in der Tabelle.



Halten wir uns nun weiter an Fig. 9 bei der Discussion. Die gestrichelte Curve ganz rechts, welche mit  $m_0 - n$  bezeichnet ist, stellt den gefundenen Zusammenhang von Phasendifferenz und Verstimmung dar, wenn man, im Sinne der Rayleigh'schen Theorie, nur die Schwingungszahl für unendlich kleine Schwingungen  $m_0$  in Betracht zieht. Wie augenfällig ist hier die Abweichung von der einfachen Theorie! Wie deutlich zeigt diese Curve, dass die Abnahme der Schwingungszahl mit wachsender Amplitude, eine äusserst kleine Grösse für sich betrachtet, hier entscheidenden Einfluss erlangt auf den Gang der Erscheinungen. Nicht  $m_0 - n = 0$  liefert die günstigste Phase  $\varepsilon = 90^\circ$ , sondern eine Verstimmung von fast  $4M$ . Dieselbe Verstimmung, negativ, macht  $\varepsilon = 165^\circ$ , und bringt die Amplitude auf  $\frac{4}{10}$  der Maximalamplitude herunter. Bei  $m_0 - n = 0$  stellt sich ein  $\varepsilon = 140^\circ$ . Dabei sind die Amplituden noch sehr klein, mit denen ich experimentirte. Meine Maximalamplitude entspricht einer Winkelbewegung des Spiegels von  $0.45^\circ$ ; die lineare Excursion des Zinkenendes ist  $4\text{ mm}$  (Doppelamplitude), bei  $375\text{ mm}$  Zinkenlänge.

Die nächste Curve, bezeichnet mit  $m_a - n$ , trägt der Abhängigkeit der Schwingungszahl von der Amplitude Rechnung. Sie giebt die Verstimmung der secundären Gabel bei der Amplitude der erzwungenen Schwingung an. Aber wie man sieht, reicht auch diese Vervollständigung der Theorie nicht im mindesten aus, es bleibt immer noch eine Verstimmung von  $+1.1M$  bestehen, bei der „günstigsten Phase“  $\varepsilon = 90^\circ$ , und man muss um  $22^\circ$  weiter gehen, um  $m_a - n = 0$  zu erlangen. Diese Differenz ist der Effect der unmittelbaren Einwirkung des Electromagnetes auf die Tonhöhe der untersuchten Gabel, die theoretischen Entwicklungen von p. 42—45 finden hier ihre Bestätigung.

Ich habe noch versucht, ob im Sinne von p. 44 eine Identität von  $\mu$  und  $\mu'$  vorhanden, und habe deshalb in die Tabelle eine Columne ( $m_{ai} - n$ ) aufgenommen, welche nach Gl. 49, p. 39, berechnet ist. Diese Zahlen sind auch in das Diagramm aufgenommen, ihnen entspricht bei jeder Phasendifferenz das dritte, am meisten nach links gelegene Kreuzchen. Ich habe keine Curve hindurch gelegt, um die Figur nicht noch mehr zu überladen. Doch man sieht auch so, dass diese Reduction noch nicht ausreichend gewesen ist. Dies kann nicht Wunder nehmen, denn  $\mu$  ist aus Beobachtungen bei constantem Strom abgeleitet worden, wo die Tonänderung einfach proportional  $v^2$  ist, während hier, bei intermittirendem Strom, nach p. 42 auch die Quadrate der höheren Glieder in der Fourier'schen Reihe mitwirken.

Wir können aber weiter durch eine Parallelverschiebung  $m - n = 0$  mit  $\varepsilon = 90^\circ$  zur Coincidenz gebracht denken, und nun den Versuch machen, nach Gl. 78 berechnete Verstimmungen mit den Beobachtungen zu vergleichen, um den Einfluss der Dämpfung auf die Phasendifferenz zu controliren. Drei berechnete Curven sind in das Diagramm eingezeichnet, sie schneiden natürlich sämtlich die Nulllinie der Ver-



stimmung bei  $\varepsilon = 90^\circ$ . Von den beiden ausgezogenen Linien ist die steilere, bezeichnet mit  $x_{ai}$ , berechnet nach der Formel

$$m - n = \frac{x_{oi}(1 + aa)}{2\pi} \tan(90^\circ - \varepsilon)$$

Es war  $x_{oi} = 8.30$ , wie wir vorhin sahen. Diese Curve ist zu steil, wie man sieht, es muss ein grösseres Decrement in Rechnung gesetzt werden. Die zweite ausgezogene Linie ist berechnet als  $1.52(1 + aa) \tan(90^\circ - \varepsilon)$ ; ihr würde  $x_{oi} = 9.55$  entsprechen. Durch eine Parallelverschiebung kann diese Linie ganz gut mit den Kreuzchen für  $m_{ai} - n$  zur Deckung gebracht werden. Daraus folgt, dass eine Theorie der electromagnetischen Anregung, welche die Abhängigkeit der Schwingungszahl und des Decrementes von der Amplitude, sowie die Veränderung dieser Constanten durch directe Einwirkung des Electromagnetes in Rücksicht zieht, wol geeignet ist, den Gang der Erscheinungen wiederzugeben, in den Genauigkeitsgrenzen meiner Versuche.

Wir haben bisher im Wesentlichen nur die Beobachtungen, welche in der Mitte der Curve liegen, in Betracht gezogen. Bei grösseren Werthen von  $90^\circ - \varepsilon$  ist die Aenderung der Verstimmung mit der Phase so stark, dass diese Beobachtungen an den Enden der Curve nicht dazu dienen können, berechnete und beobachtete Verstimmung zu vergleichen. Doch in anderem Sinne sind sie gut zu verwerthen. Der Abstand der Curve von der Asymptote, also  $\varepsilon$ , resp.  $180^\circ - \varepsilon$  ist gleich  $\text{arc. tang. } \frac{x}{2\pi(m-n)}$ . Welchen Werth man für  $m - n$  einfügt, ist von untergeordneter Bedeutung, die Beobachtungen geben also eine gute Controle für  $x$  ab. Ich habe desshalb in das Diagramm noch eine gestrichelte Linie aufgenommen, welche eine einfache Tangens-Linie ist. Bei kleinen Werthen von  $90^\circ - \varepsilon$  verläuft sie ja auch aequidistant zu den  $m_{ai} - n$ , aber bei der Annäherung an die Asymptoten wird die Abweichung augenfällig. Sollte die Tangens-Linie an den Enden den Beobachtungen sich anschliessen, so würde sie sehr viel steiler verlaufen müssen, würde in der Richtung des Pfeiles die Nulllinie durchschneiden. Man sieht hieraus, wie viel die Zunahme des Decrementes mit der Amplitude dazu beiträgt, die Curve in der Mitte flacher verlaufen zu lassen. Sie erleichtert also das Zustandekommen der „günstigsten Phase“  $\varepsilon = 90^\circ$ .

Schon bei Besprechung der Amplituden erwähnte ich, dass bei meinen alten Versuchen vom Jahre 1885 die Berechnung des Decrementes nach der Formel  $x_{ai} = (x_0 + \gamma i^2)(1 + aa)$  sich bewährt hatte, ohne dass für den intermittirenden Strom eine Vergrösserung von  $\gamma$  nothwendig zu sein schien. Die kleine Tab. XVI möge dies vollends bestätigen. Sie enthält Resultate der Beobachtungsreihe mit stärkstem Strom.



Tab. XVI. (20/VII 1885).

$\varepsilon$	} beobachtet	2·0	1·8	3·0	7·4	173·7	174·6	178·6	179·5
		} berechnet	1·2	2·5	3·6	7·8	173·9	175·4	177·8
Differenz			-·8	+·7	+·6	+·4	+·2	+·8	-·8

Die Phasendifferenzen umfassen nur  $7^\circ$  an beiden Grenzen des Gebietes, doch zeigen die beobachteten und die berechneten Zahlen durch ihre Uebereinstimmung zur Genüge, wie wichtig die Correction der Dämpfung war; war doch das corrigirte  $x_{0i} = 65·7$ , gegen das uncorrigirte  $x_0 = 14·7$ . Dasselbe Resultat gaben die Beobachtungsreihen mit geringerer Stromstärke. Ueberall schien die Reduction mit  $\gamma^2$  ausreichend zu sein. Ueber die Reduction der Verstimmungen wegen des Quadrates der Stromstärke konnte ich damals zu keinem feststehenden Ergebniss gelangen. Ich hatte nur wenige und viel zu ungenaue Beobachtungen der Verstimmung in der Nähe von  $\varepsilon = 90^\circ$ , dazu nur auf der einen Seite der Nulllinie. Dass die uncorrigirte Curve für  $m_a - n$  bei  $\varepsilon = 90^\circ$  noch weit entfernt lag von der Nulllinie war freilich sicher, weiter aber ging das Resultat nicht.

Suchen wir nun zusammenzufassen, was das Studium der erzwungenen Schwingungen uns gelehrt hat. Die einfache Theorie Rayleigh's musste vervollständigt werden, um den Gang der Erscheinungen wiedergeben zu können. Dadurch complicirte sie sich aber in hohem Maasse, und verlor an Uebersichtlichkeit. Eher liess sich an den Curven der Einfluss der neuen Glieder demonstrieren. Die Zunahme des Decrementes mit Amplitude und Stromstärke liess die Curve in der Mitte flacher verlaufen, erleichterte also das Erreichen der „günstigsten Phase“  $\varepsilon = 90^\circ$ . Die Abnahme der Schwingungszahl bewirkte eine Verschiebung der Phasendifferenzen in's Gebiet der positiven Verstimmungen. Es muss also die mitschwingende secundäre Gabel ein wenig zu hoch gestimmt sein, um das Maximum der Amplitude zu erzielen. Je grösser man die Amplitude haben will, je stärker also der Strom ist, welchen man anwendet, um so grösser muss diese „günstigste Verstimmung“ sein. Die einfache Theorie hatte eine andere „günstigste Verstimmung“ verlangt. Die Gabel sollte um  $\frac{x^2}{8\pi^2n}$  zu tief gestimmt werden. Wir haben dies Glied schon lange vernachlässigt, denn es erwies sich viel zu klein, als dass man es je hätte nachweisen können.

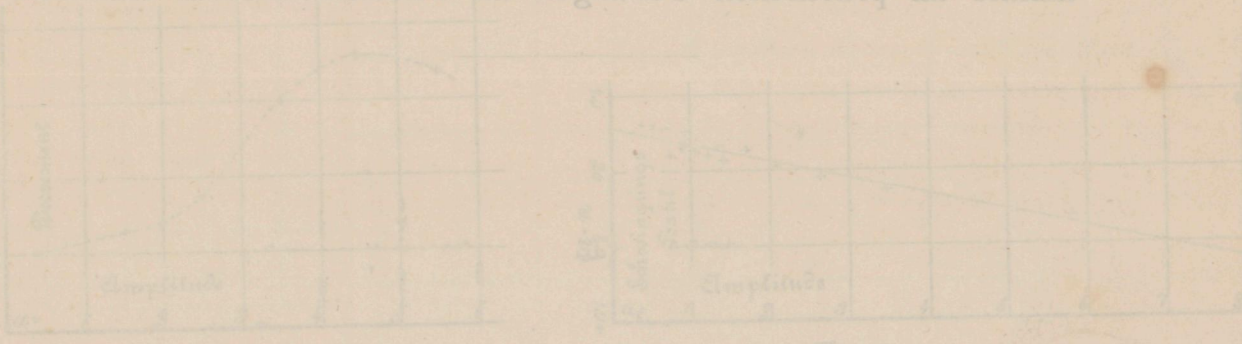
Auch über die electromagnetische Selbstanregung und über die Tonänderung, welche dieselbe verursacht, belehrt uns das Diagramm. In diesem Falle ist eine vorgeschriebene Phasendifferenz vorhanden, dieselbe beträgt  $180^\circ - \varphi$ . Wol immer ist  $\varphi < 90^\circ$ , wenn man nicht besondere Vorrichtungen zur Hilfe nimmt. Eine negative Verstimmung wird also entstehen. Aber es kommt noch hinzu die Tonänderung, welche  $i^2$  proportional, und welche positiv ist. So kann bei einem grösseren Werthe von  $\varphi$  der Fall eintreten, dass  $m - n$  positiv wird, dass bei hinreichend grosser Stromstärke die Schwingungszahl der selbstthätigen



Gabel  $n$  kleiner ist, als die Schwingungszahl  $m$  der freien Gabel bei gleicher Amplitude. Dies ist nach meiner Meinung in Ettingshausen's Versuchen der Fall gewesen, wo dieser Autor bei kleinen Amplituden eine Tonerhöhung, bei grösseren Amplituden, also bei grösserer Stromstärke, dagegen eine Tonerniedrigung durch Selbstanregung fand. Die Verzögerung des Magnetismus war dort gross, auf p. 13 habe ich berechnet  $\varphi = 79^\circ$ . Auch die Ströme waren stark, die Amplituden gross, also alle Bedingungen für das Eintreten dieser Erscheinung vorhanden. Mit meinen Electromagneten hatte ich keine Aussicht, positive Tonänderungen zu erreichen,  $\varphi$  war zu klein. Dass solche möglich sind, auch wenn  $\varphi < 90^\circ$ , ist aber durch meine Versuche mit Sicherheit erwiesen.

Was hier über electromagnetische Anregung auf Grund von Stimmgabeluntersuchungen gesagt ist, muss in ähnlicher Weise für alle nach dem Principe des Neef'schen Hammers construirten Apparate gelten. Es wäre nun eine lohnende Aufgabe, zu untersuchen, wie weit durch passende Wahl der Abmessungen der Electromagnete hier maximale Amplituden bei möglichst geringen Stromstärken zu erzielen sind, indem man einerseits günstige Phase, andererseits geringe dämpfende Wirkung des Electromagnetes erstrebt. Doch hat in jüngster Zeit Dvorák<sup>1)</sup> sich dem Studium dieser Apparate zugewandt, und seinen Bemühungen haben wir bereits Verbesserungen der bisher üblichen Constructionen zu verdanken.

- 1) Dvorák, Ueber die Wirkung der Selbstinduction bei electromagnetischen Stromunterbrechern. Wien. Ber. 98, II a, 55. 1889.  
 „ Zur Theorie und Praxis des electrischen Läutewerkes und verwandter Apparate. Z.-S. f. Instrumentenkunde, 10, 43, 1890.





## Thesen.

---

1. Eine reine Zahl ist nicht von der nullten Dimension, sondern von der Dimension 1.
  2. Bei der Bestimmung absoluter Schwingungszahlen sind die Fehler im Gange der Uhr und in der Function ihres die Secundenmarken erzeugenden Contactes mehr als bisher zu berücksichtigen.
  3. Es giebt kein „mechanisches Aequivalent des Lichtes“.
  4. Es ist wünschenswerth, dass durch internationale Uebereinkunft ein gesetzlicher Factor für das Verhältniss der Calorie zu den vom Eiscalorimeter eingesogenen Grammen Quecksilber festgestellt werde.
  5. Es ist nicht möglich, einen Körper in adiathermaner Hülle einer adiabatischen Zustandsänderung zu unterwerfen.
  6. Auf das Beiwort „absolut“ hat nur ein solches Maassystem Anspruch, dessen Einheiten durch logische Beziehungen allein aus den Grundeinheiten abgeleitet sind — diesen Bedingungen entspricht das electricisch-magnetische cm. gr. sec.-System nicht.
  7. Den Studirenden der exacten Naturwissenschaften sollte an der Universität weitgehende Gelegenheit geboten werden zur Theilnahme an practischen Uebungen im wissenschaftlichen Rechnen.
-



Heerwagen, Schwingungsgesetze der Stimmgabel und electromagnetische Anregung

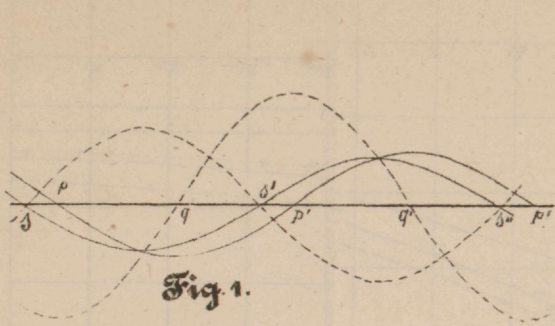


Fig. 1.

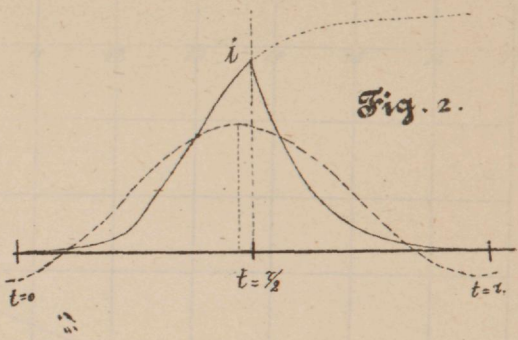


Fig. 2.

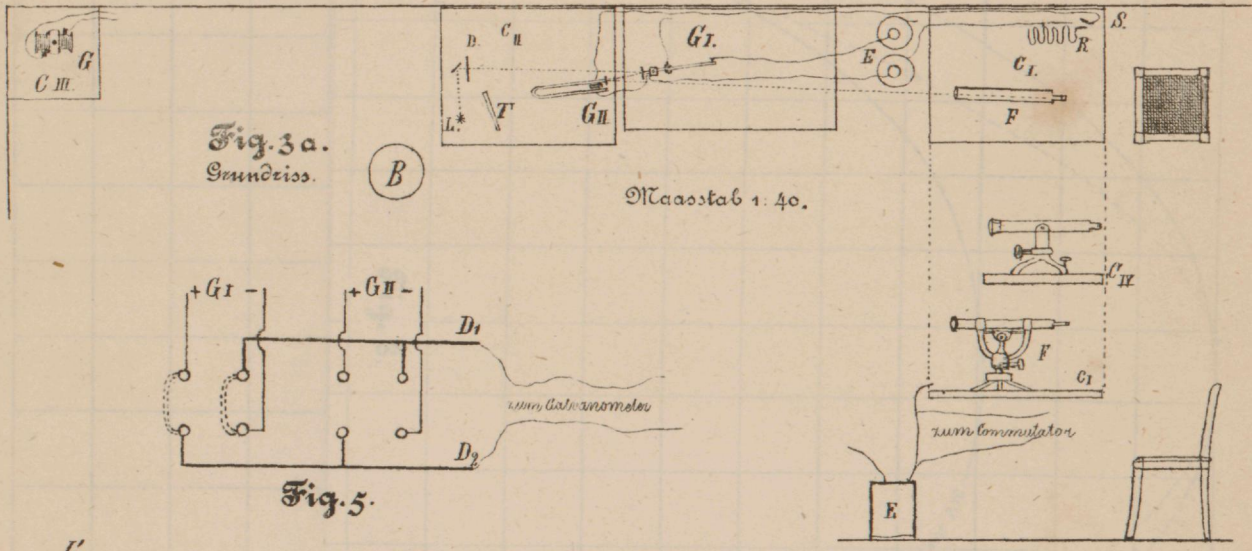


Fig. 3a.  
Grundriss.

Maassstab 1. 40.

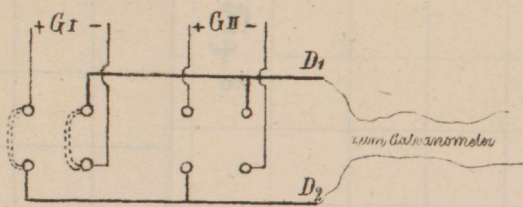


Fig. 5.

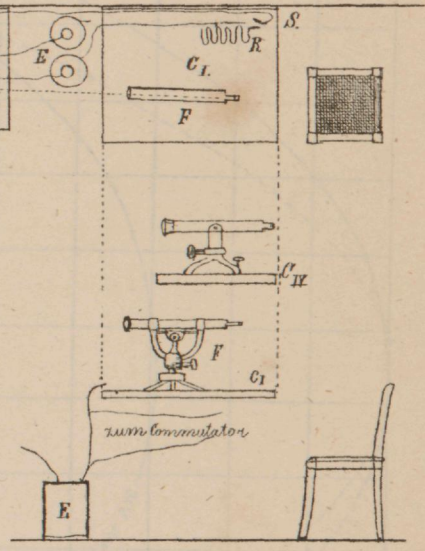


Fig. 3b.  
Aufsicht.

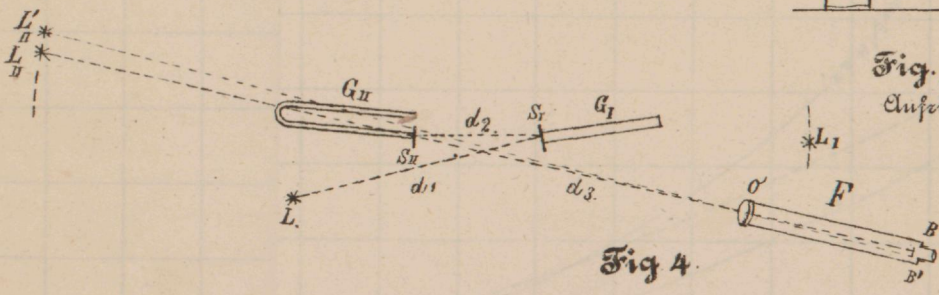


Fig. 4.

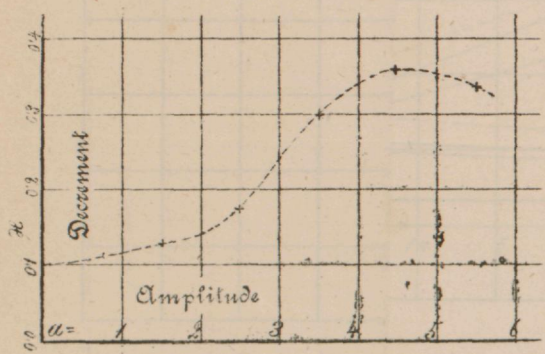


Fig. 6.

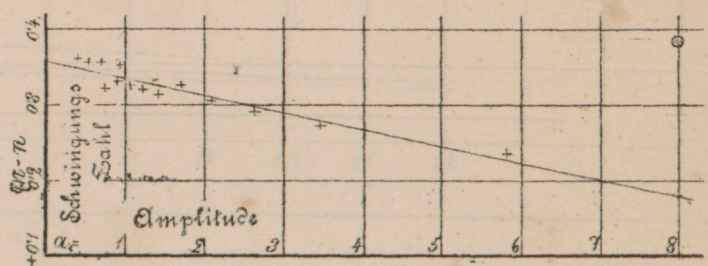


Fig. 7.



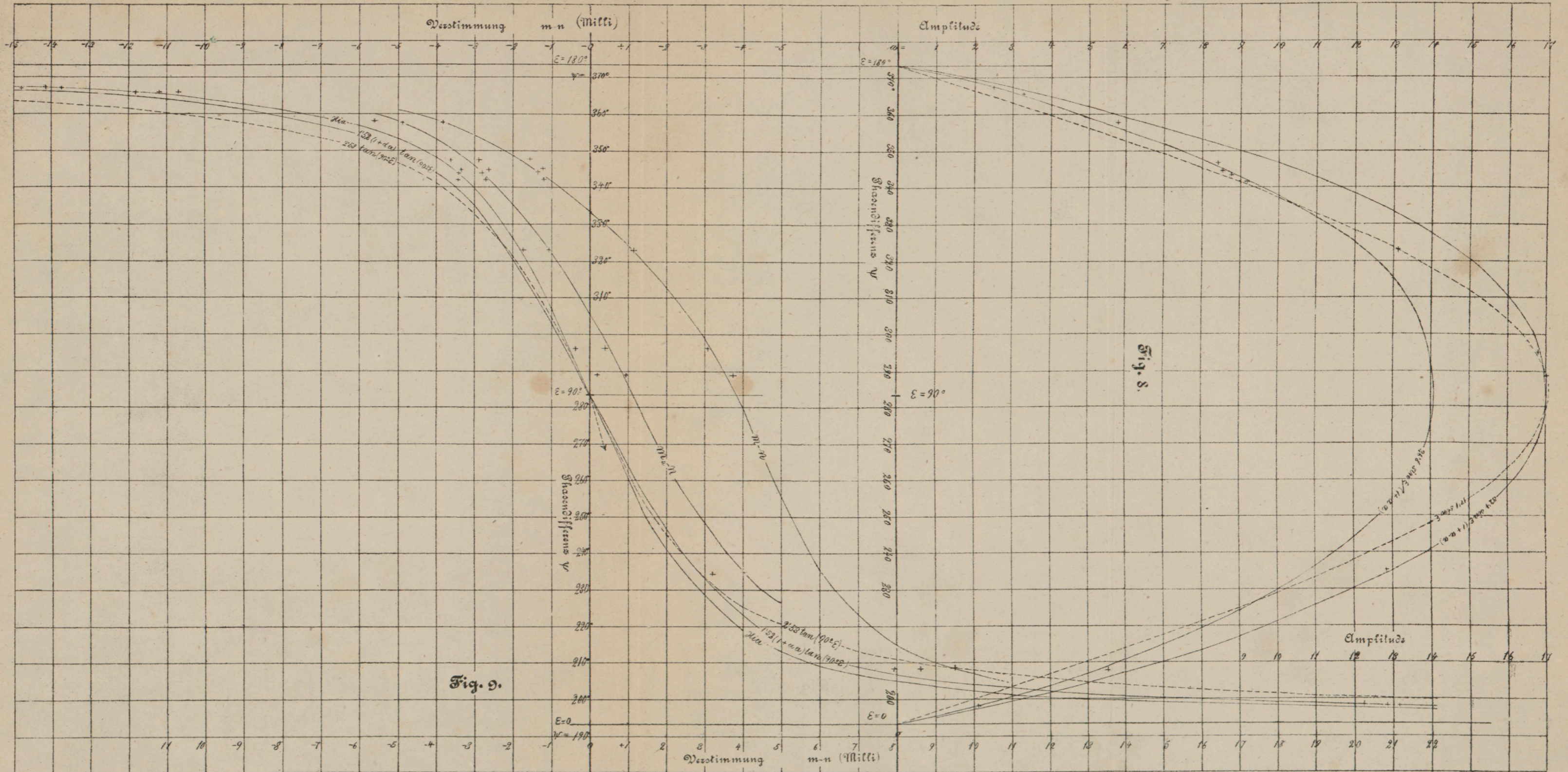


Fig. 8.

Fig. 9.



Arhiivikirjasto ja kirjanduskeskus





890 B  
A P Heerwagen