Методы

рѣшеній ариѳметическихъ задачъ

съ

историческими примѣчаніями

и

подробнымъ рѣшеніемъ типическихъ задачъ

составилъ

Р. Киричинскій,

преподаватель Бѣльской гимназіи.

Ревель, 1890 г.

Типографія Егора Михельсона. Малая Американская улица, д. № 463.

Практическая ариѳметика на ряду съ легкими вопросами представляетъ столь сложные и трудные вопросы, что для рѣшенія ихъ одинъ какой-нибудь методъ оказался бы слишкомъ недостаточнымъ. Поэтому, есть у нея главные, такъ сказать, общеупотребительные методы для изслѣдованія связи причинъ и слѣдствій; есть у нея еще рядъ разныхъ вспомогательныхъ пріемовъ, имѣющихъ цѣлью въ нѣкоторыхъ случаяхъ облегчить работу изслѣдованія, въ другихъ уяснить связь между данными въ задачѣ.

Я имѣлъ въ виду уяснить сущность методовъ, употребляемыхъ при рѣшеніяхъ ариѳметическихъ задачъ, и указать, къ какого рода вопросамъ лучше всего прилагается данный методъ. Примѣры взяты мною изъ сборника ариѳметическихъ задачъ Верещагина. При объясненіи характера каждаго метода я считалъ полезнымъ сообщить историческія свѣдѣнія.

Конечно, знаніе этихъ методовъ не служитъ еще ручательствомъ успѣшнаго рѣшенія всѣхъ ариѳметическихъ задачъ, но оно указываетъ пути, слѣдуя которымъ удобнѣе всего добиться истины.

1. Объ анализѣ.

Когда требуется найти отвѣтъ на предложенный вопросъ, то сначала ищутся условія, изъ которыхъ искомый результатъ можетъ быть выведенъ какъ непосредственное слѣдствіе. Если эти условія даны въ задачѣ, то мы и опредѣляемъ отвѣтъ. Если же предложенная задача не можетъ быть рѣшена непосредственно, необходимо сначала отыскать эти новыя условія, изъ которыхъ какъ слѣдствіе выводится искомый результатъ. Значитъ данную задачу мы замѣняемъ другой, въ которой искомый результатъ долженъ удовлетворять новымъ условіямъ, изъ которыхъ вытекаютъ условія предложенной задачи. Предложенная задача будетъ, очевидно, рѣшена, если замѣнившая ее новая задача рѣшается непосредственно. Если же эта вторая задача не можетъ быть рѣшена непосредственно, то, примѣняя тѣ же разсужденія, замѣняемъ ее третьей задачей, гдѣ искомый результатъ долженъ удовлетворять новымъ условіямъ, изъ которыхъ, какъ непосредственное слѣдствіе, вытекаютъ условія второй. Такъ поступаемъ до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ задачѣ, которая рѣшается непосредственно по извѣстнымъ даннымъ.

Отсюда видно, что методъ, названный анализомъ *), состоитъ въ установленіи цѣпи предложеній, начинающейся съ того, что желаютъ найти, и кончающейся извѣстнымъ. Цѣпь составляется при этомъ такими предложеніями, изъ которыхъ каждое, начиная съ перваго, должно быть необходимымъ слѣдствіемъ послѣдующаго. Откуда происходитъ, что первое является слѣдствіемъ послѣдняго и потому столь же истинно, какъ послѣднее.

Предложенія, составляющія цѣпь, не опредѣлены точнымъ образомъ, а потому выборъ ихъ можетъ быть сдѣланъ съ большею или меньшею разборчивостью, и иногда, вмѣсто того, чтобы приблизиться къ рѣшенію задачи,

*) Этотъ методъ принадлежитъ древнимъ философамъ-геометрамъ, но прилагается ко всѣмъ изслѣдованіямъ изъ области чистаго умозрѣнія. Первые слѣды его мы находимъ въ «Началахъ» Евклида, но кажется, что великому геометру нельзя приписать его изобрѣтеніе. Проклъ въ своихъ комментаріяхъ говоритъ, что «Платонъ ввелъ методы доказательствъ, изъ которыхъ аналитическій самый лучшій изъ всѣхъ; онъ его сообщилъ ученику своему Леодаму, который поэтому сдѣлалъ въ Геометріи много открытій». Хотя въ сочиненіяхъ Платона не упоминается объ этомъ методѣ, но вѣроятно, что Платонъ, въ одно и то же время философъ и геометръ, указывалъ на многія очень важныя вещи по части геометріи, для которыхъ не нашелъ мѣста въ сочиненіяхъ своихъ по философіи. Вѣроятность еще усиливается тѣмъ, что разныя изобрѣтенія, ему приписываемыя, отличаются величіемъ и общностью, вполнѣ согласными съ тѣмъ, что можно было ожидать отъ столь глубокаго и возвышеннаго ума.

См. Исторію математики Ващенко-Захарченко и Дюгамель: Методы умозрительныхъ наукъ.

можетъ оказаться, что мы удаляемся. Очевидно, что опредѣленнаго правила для этого быть не можетъ и выборъ связывающихъ величинъ зависитъ отъ проницательности рѣшающаго и условій задачи. Положимъ, напримѣръ, что ищется разстояніе отъ Петербурга до Москвы. Это разстояніе будетъ намъ извѣстно, если будемъ знать скорость поѣзда и число часовъ, которое поѣздъ употребитъ, чтобы пройти отъ Петербурга въ Москву. Но искомое разстояніе можно опредѣлить иначе, именно, зная разстояніе отъ Петербурга до промежуточной станціи на этой линіи и зная разстояніе отъ этой станціи до Москвы. Такимъ образомъ одинъ и тотъ же результатъ мы можемъ получить изъ различныхъ условій.

Когда случится, что извѣстный вопросъ можетъ быть разложенъ на нѣсколько другихъ, способныхъ разбираться независимо одинъ отъ другаго, тогда очевидно, сначала слѣдуетъ подставить эти частные вопросы на мѣсто предложеннаго; этимъ путемъ послѣдній вопросъ будетъ приведенъ къ болѣе простымъ.

2. О синтезѣ.

Если изъ даннаго предложенія станемъ выводить непосредственныя слѣдствія, изъ этихъ слѣдствій — новыя слѣдствія и такъ далѣе, то можетъ случиться, что между этими слѣдствіями окажутся новыя истины, до сихъ поръ неизвѣстныя. Такой методъ открытія новыхъ истинъ древніе назвали синтезомъ. Такимъ образомъ синтезъ можетъ служить только къ открытію такихъ истинъ, которыя заранѣе необозначены; имъ можно открыть истины случайно.

Примѣненіе этого метода къ рѣшенію задачъ производится слѣдующимъ образомъ: изъ данныхъ въ задачѣ условій выводятся слѣдствія, изъ этихъ новыя слѣдствія и такъ далѣе, пока не придемъ къ искомому результату. Такимъ образомъ связывающія величины (вспомогательныя) подчинены только одному условію, а именно, чтобы изъ нихъ, какъ непосредственное слѣдствіе, вытекалъ искомый результатъ. А это условіе недостаточно для обозначенія, какія именно слѣдствія изъ данныхъ въ задачѣ условій приведутъ къ искомому результату.

Если имѣется въ виду сообщить другимъ извѣстное уже рѣшеніе задачи, то можно слѣдовать этому пути, потому что знаютъ, отъ какой извѣстной проблемы слѣдуетъ отправиться для того, чтобы вывести рѣшеніе всѣхъ промежуточныхъ проблемъ. Этому методу слѣдуютъ при изложеніи доказательства какой либо теоремы.

3. Сравненіе анализа и синтеза.

Слѣдуя аналитическому методу, мы ищемъ, какія величины должны быть извѣстны для полученія искомаго результата. Послѣ этого перваго шага дѣлаемъ другой ему подобный т. е. вмѣсто требуемаго результата стараются найти такой, изъ котораго требуемый могъ бы быть выведенъ, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ извѣстнымъ величинамъ. Не то бываетъ при употребленіи синтеза: тамъ мы не имѣемъ опредѣленной точки исхода, такъ какъ совершенно не знаемъ, какое изъ извѣстныхъ предложеній можетъ привести къ искомому результату; только случай можетъ натолкнуть насъ послѣ большаго или меньшаго числа безплодныхъ попытокъ на нужное предложеніе. Это свойство синтеза должно быть признано весьма важнымъ его недостаткомъ. Слѣдовательно, синтетическій методъ негоденъ къ открытію способа рѣшенія задачъ; имъ можно пользоваться только для систематическаго способа рѣшенія задачъ. Одинъ только аналитическій методъ можетъ быть пригоденъ для изобрѣтенія способа рѣшенія, хотя и онъ не даетъ ручательства за несомнѣнный успѣхъ.

Изъ 85 дестей бумаги сдѣланы тетради, въ 6 листовъ каждая. Всѣ эти тетради были потомъ проданы по 7 копѣекъ. Сколько получено прибыли отъ продажи всѣхъ тетрадей, если продавцу десть бумаги стоила 21 к.?

4. Анализъ.

Чтобы опредѣлить прибыль, нужно знать: А) за сколько онъ продалъ всѣ тетради и Б) сколько ему стоили тетради.

Значитъ рѣшеніе данной задачи мы свели къ рѣшенію двухъ другихъ, коихъ слѣдствіемъ есть данная задача. Первая изъ этихъ задачъ такъ читается:

А) Изъ 85 дестей бумаги сдѣланы тетради, въ 6 листовъ каждая. За сколько проданы эти тетради, если одну тетрадь продавали по 7 коп.?

Вторая задача слѣдующая:

Б) Изъ 85 дестей бумаги сдѣланы тетради. Опредѣлить стоимость тетрадей, если десть бумаги стоила 21 коп.

Нѣтъ сомнѣнія, что обѣ эти задачи проще предложенной. Разсмотримъ каждую изъ нихъ въ отдѣльности.

Разборъ задачи А.

Чтобы опредѣлить, за сколько проданы тетради, нужно знать: 1) число тетрадей, 2) по чемъ продавали одну тетрадь.

Второе изъ этихъ чиселъ дано въ задачѣ; именно сказано, что одну тетрадь продавали по 7 коп.

Стало быть, рѣшеніе задачи А сводится къ рѣшенію слѣдующей задачи:

Сколько сдѣлано тетрадей, по 6 листовъ каждая, изъ 85 дестей бумаги?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, нужно знать:

Разборъ задачи Б.

Чтобы опредѣлить стоимость тетрадей, нужно знать: 1) число всѣхъ дестей и 2) стоимость одной дести.

Оба эти числа даны въ задачѣ.

1) число всѣхъ дестей, 2) число листовъ въ одной тетради.

Оба эти числа даны въ задачѣ.

Такимъ образомъ, исходя отъ искомой величины, мы пришли къ величинамъ, даннымъ въ задачѣ.

5. Синтезъ.

Въ задачѣ дано число дестей бумаги, изъ которой сдѣланы тетради, и число листовъ въ каждой тетради. Эти числа намъ нужно знать для того, чтобы опредѣлить число тетрадей. Дѣйствительно, обративъ 85 дестей въ листы, получимъ 2040 листовъ; раздѣливъ это число на 6, получимъ число тетрадей: 2040 : 6 = 340 тетрадей.

Число тетрадей и цѣну, за которую продавали одну тетрадь, намъ нужно знать для того, чтобы опредѣлить, за сколько проданы всѣ тетради; именно, умноживъ 7 коп. на 340, получимъ 23 руб. 80 коп.

Стоимость одной дести намъ нужно знать для того, чтобы опредѣлить стоимость всей бумаги; именно, умноживъ 21 коп. на 85, получимъ 17 р. 85 коп.

Число, показывающее, за сколько были проданы всѣ тетради, и стоимость всей бумаги намъ нужно знать для того, чтобы опредѣлить прибыль; именно, вычтя 17 руб. 85 коп. изъ 23 руб. 80 коп., получимъ 5 р. 95 к. Столько получено прибыли. Рѣшимъ болѣе сложную задачу.

Нѣкто шелъ по почтовому тракту изъ Старой Руссы въ Холмъ три дня: въ первый день онъ прошелъ $^2/_7$ всей дороги, во второй 0,8 оставшейся части, а въ третій ему пришлось сдѣлать на 14 верстъ менѣе, нежели онъ сдѣлалъ въ первый день. Опредѣлить длину почтовой дороги между Старою Руссою и Холмомъ.

6. Анализъ.

Чтобы однимъ дѣйствіемъ опредѣлить длину дороги, нужно знать: А) часть искомой длины, выраженную дробью и Б) сколькимъ верстамъ равняется эта часть.

Дѣйствительно, зная часть неизвѣстнаго, выраженную дробью и зная, сколькимъ единицамъ равняется эта часть, мы узнаемъ дѣленіемъ величину неизвѣстнаго.

Такимъ образомъ мы свели рѣшеніе данной задачи къ двумъ слѣдующимъ задачамъ:

А) Нѣкто прошелъ въ первый день $^2/_7$ всей дороги, во второй 0,8 оставшейся части, а въ третій день остальную часть пути. Узнать, на какую часть всего пути онъ прошелъ менѣе въ третій день, чѣмъ въ первый?

Б) На сколько верстъ болѣе онъ прошелъ въ первый день, чѣмъ въ третій?

Отвѣтъ на этотъ вопросъ мы находимъ въ условіи задачи: «въ третій день онъ сдѣлалъ на 14 верстъ менѣе, чѣмъ въ первый».

Значитъ намъ предстоитъ рѣшить только задачу А.

Разборъ задачи А.

Чтобы однимъ дѣйствіемъ опредѣлить, на какую часть пути онъ прошелъ болѣе въ первый день, чѣмъ въ третій, нужно знать: 1) какую часть пути онъ прошелъ въ первый день и 2) какую часть пути онъ прошелъ въ третій день.

Отвѣтъ на первый изъ этихъ вопросовъ мы находимъ въ условіи задачи: «въ первый день онъ прошелъ $^2/_7$ всей дороги».

Значитъ рѣшеніе задачи А сводится къ слѣдующей:

Нѣкто прошелъ въ первый день $^2/_7$ всей дороги, во второй 0,8 оставшейся части, а въ третій день остальную часть пути. Узнать, какую часть пути онъ прошелъ въ третій день?

Чтобы однимъ дѣйствіемъ опредѣлить, какую часть пути онъ прошелъ въ третій день, нужно знать, какую часть пути онъ прошелъ въ первый и во второй день вмѣстѣ.

Значитъ рѣшеніе предъидущей задачи сводится къ слѣдующей:

Нѣкто прошелъ въ первый день $^2/_7$ всей дороги, во второй 0,8 оставшейся части. Узнать, какую часть пути онъ прошелъ въ два дня?

Чтобы однимъ дѣйствіемъ опредѣлить, какую часть пути онъ прошелъ въ два дня, нужно знать: 1) какую часть пути онъ прошелъ въ первый день и 2) какую часть пути онъ прошелъ во второй день.

Отвѣтъ на первый изъ этихъ вопросовъ мы находимъ въ условіи задачи: «въ первый день онъ прошелъ $^2/_7$ всей дороги».

Чтобы отвѣтить на второй вопросъ, т. е. опредѣлить, какую часть пути онъ прошелъ во второй день, нужно знать: 1) какая часть пути осталась непройденной послѣ перваго дня и 2) какую часть этого остатка онъ прошелъ во второй день.

Отвѣтъ на второй изъ этихъ вопросовъ мы находимъ въ условіи задачи: «во второй день онъ прошелъ 0,8 оставшейся части».

Отвѣтъ на первый вопросъ мы получимъ, вычтя $^2/_7$ изъ 1.

Такимъ разсужденіемъ мы пришли отъ неизвѣстнаго числа верстъ къ извѣстнымъ, даннымъ въ задачѣ.

Примѣчаніе.

Вникая въ сущность этого разсужденія, легко замѣтить, что она состоитъ въ постановкѣ вопроса: «Что нужно знать, чтобы однимъ дѣйствіемъ опредѣлить искомую величину». Этимъ самый сложный вопросъ приводится къ болѣе простымъ? Конечно невсегда легко бываетъ отвѣтить на этотъ вопросъ, иногда даже невозможно; поэтому то методъ и называется только средствомъ искать истину, а не средствомъ навѣрно найти истину.

7. Синтезъ.

Въ задачѣ дано, какую часть пути путешественникъ прошелъ въ первый день. Это намъ надо знать для того, чтобы опредѣлить, какую часть пути онъ долженъ пройти въ остальные два дня. Дѣйствительно, вычтя $^{2}/_{7}$ изъ 1, найдемъ, что осталось пройти $^{5}/_{7}$ всего пути.

Это число намъ нужно знать для того, чтобы опредѣлить, какую часть пути онъ прошелъ во второй день; именно, умноживъ $^{5}/_{7}$ на 0,8, получимъ $^{4}/_{7}$ всего пути.

Части пути, пройденныя въ первый и во второй день намъ нужно знать для того, чтобы опредѣлить, какую часть пути онъ прошелъ въ первые два дня; сложивъ $^{2}/_{7}$ и $^{4}/_{7}$, получимъ $^{6}/_{7}$ всего пути.

Это число намъ нужно знать для того, чтобы опредѣлить, какую часть пути онъ прошелъ въ третій день; дѣйствительно, вычтя $^{6}/_{7}$ изъ 1, найдемъ, что въ третій день онъ прошелъ $^{1}/_{7}$ всего пути.

Часть пути, пройденную въ третій день намъ нужно знать для того, чтобы опредѣлить, на какую часть всего пути онъ прошелъ болѣе въ первый день, чѣмъ въ третій; вычтя $^{1}/_{7}$ изъ $^{2}/_{7}$, узнаемъ, что въ первый день онъ прошелъ болѣе, чѣмъ въ третій на $^{1}/_{7}$ всего пути.

Это число намъ нужно знать для того, чтобы опредѣлить, какая часть всего пути равняется 14 верстамъ.

Часть неизвѣстнаго пути, выраженную дробью, и число, показывающее, сколькимъ верстамъ равняется эта часть, нужно знать для того, чтобы опредѣлить число верстъ. Дѣйствительно, раздѣливъ 14 верстъ на $^{1}/_{7}$, получимъ 98 верстъ. Таково искомое разстояніе.

Такимъ образомъ при синтетическомъ рѣшеніи нужно давать отвѣтъ на вопросъ: «*для чего нужно знать эти числа*». Этими вопросами числа подвергаются обсужденію въ порядкѣ обратномъ тому, который соблюдался въ анализѣ.

Примѣчаніе. Аналитическій и синтетическій подробный разборъ задачи очень полезенъ при первоначальномъ обученіи: учащійся привыкаетъ къ правильному разсужденію и къ сознательному производству дѣйствій съ данными числами. *При этомъ очень важно то, что учащійся имѣетъ готовые вопросы, отвѣтъ на которые онъ можетъ дать самостоятельно, если только задача не требуетъ особенной изобрѣтательности.*

При дальнѣйшемъ обученіи можно нѣсколько сократить этотъ разборъ и письменно изложить синтетическое рѣшеніе, примѣрно, въ такой формѣ:

Такъ какъ въ первый день путешественникъ прошелъ $^{2}/_{7}$ всей дороги, то осталось еще итти $1 - {}^{2}/_{7} = {}^{5}/_{7}$. Во второй день онъ прошелъ 0,8 оставшейся части т. е. ${}^{5}/_{7} \cdot 0{,}8 = {}^{4}/_{7}$ всего пути; значитъ, въ первые два дня онъ прошелъ ${}^{4}/_{7} + {}^{2}/_{7} = {}^{6}/_{7}$, поэтому въ третій день онъ прошелъ $1 - {}^{6}/_{7} = {}^{1}/_{7}$ т. е. меньше чѣмъ въ первый день на ${}^{2}/_{7} - {}^{1}/_{7} = {}^{1}/_{7}$ всего пути. Слѣдовательно, $^{1}/_{7}$ всего пути равняется, по условію задачи, 14 верстамъ, а весь путь 14 вер. 7 = 98 верстъ.

Какъ выше было замѣчено, не всегда легко отвѣтить на вопросъ: «Что нужно знать для опредѣленія искомой величины?» Иногда мы теряемся въ массѣ отвѣтовъ и не находимъ того, какой намъ нуженъ. Въ виду этого придуманы разные способы, слѣдуя которымъ можно получить вѣрное рѣшеніе. Разборомъ этихъ способовъ мы теперь займемся.

8. Методъ пропорціональнаго дѣленія *).

Положимъ, что данное число нужно раздѣлить на нѣсколько частей, которыя должны находиться между собою въ извѣстномъ отношеніи. Для этого выразимъ всѣ части въ доляхъ одной и сложимъ полученныя числа. Такимъ образомъ мы узнаемъ, сколько равныхъ частей должно заключаться въ данномъ числѣ. Раздѣливъ данное число на полученную сумму, мы узнаемъ, сколько единицъ заключаетъ въ себѣ каждая равная часть. Помноживъ теперь на это число члены отношенія, мы узнаемъ, сколькимъ единицамъ равняется каждая искомая часть даннаго числа.

Этимъ методомъ рѣшаются задачи, въ которыхъ дана сумма нѣсколькихъ чиселъ и ихъ отношеніе; требуется найти каждое изъ этихъ чиселъ.

Мы начнемъ разборъ съ простѣйшаго случая, когда дана сумма двухъ чиселъ и ихъ частное.

Найти два числа, сумма которыхъ 80, а частное 3.

Рѣшеніе:

Краткое отношеніе большаго числа къ меньшему равно 3, стало-быть большее число содержитъ 3 такія части, какихъ меньшее одну. Поэтому во всей суммѣ четыре равныя части, а одна часть равняется $80 : 4 = 20$; это и есть меньшее число, большее равно $20 . 3 = 60$.

Повѣрка $20 + 60 = 80$.

Въ этой задачѣ обѣ связи между искомыми числами, т. е. сумма и частное, выражены явно. Разсмотримъ теперь такія задачи, въ которыхъ одна связь, или обѣ выражены не явно.

Сумма двухъ чиселъ равна 1. Найти эти числа, зная, что $^1/_2$ перваго равна $^1/_3$ втораго.

Рѣшеніе:

Отношеніе перваго числа къ второму равняется $^2/_3$. Стало-быть, если второе число заключаетъ въ себѣ одну равную часть, то первое содержитъ $^2/_3$ такихъ же частей; поэтому въ суммѣ заключается $^2/_3 + 1 = {^5/_3}$ равныхъ частей. Одна часть равняется $1 : {^5/_3} = {^3/_5}$; это и есть второе число, а первое $= {^3/_5} . {^2/_3} = {^2/_5}$.

*) Въ средніе вѣка этотъ методъ имѣлъ различныя названія; Видманъ называетъ его «Regula lucri». Для характеристики какъ задачъ, такъ и способа рѣшенія приведу примѣръ, заимствованный у Видмана. «Левъ, собака и волкъ пожираютъ овцу. Левъ можетъ съѣсть овцу въ 1 часъ, волкъ въ 4 часа, а собака въ 6 часовъ. Спрашивается, въ какое время они съѣдятъ овцу всѣ трое вмѣстѣ». Рѣшеніе. «Умножь 1 часъ на 4 и на 6, получишь 24. Цѣлое 24-хъ есть 24, четверть 24 есть 6, шестая часть 24 есть 4. Сложи 24 съ 6 и съ 4, получишь 34; раздѣли 24 на 34, получишь 12/17 часа. Это и есть искомое время. Widmann, Behede und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschaft, 1489.

Повѣрка $^2/_5 \cdot {}^1/_2 = {}^1/_5$; $^3/_5 \cdot {}^1/_3 = {}^1/_5$.

Задача. За стаканъ и кружку заплатили 1 руб. Еслибъ стаканъ стоилъ на 15 коп. дороже, и кружка на 5 коп. дешевле, тогда стаканъ стоилъ бы дороже кружки въ 10 разъ. Что стоитъ каждая вещь?

Рѣшеніе:

Если къ цѣнѣ стакана прибавимъ 15 к., а отъ цѣны кружки отнимемъ 5 к., то кружка и стаканъ будутъ стоитъ не 1 р., а 1 р. 10 к. Но, по условію задачи, отношеніе между цѣною стакана и цѣною кружки равно 10, стало-быть въ 110 коп. заключается 11 равныхъ частей; одна часть равняется $^{110}/_{11}$ к. $=$ 10 к., а другая 100 к. Таковы были бы стоимости стакана и кружки; поэтому дѣйствительная стоимость стакана 10 к. $+$ 5 к. $=$ 15 к., а стоимость кружки $=$ 100 к. — 15 к. $=$ 85 к.

Повѣрка 15 к. $+$ 85 к. $=$ 100 к.

Задача. Братъ мой имѣетъ на столько болѣе 72 руб., насколько я имѣю менѣе 60 руб. и у него столько двугривенныхъ, сколько у меня гривенниковъ. Сколько денегъ имѣетъ каждый?

Рѣшеніе:

Сумма нашихъ денегъ равняется 132 руб.; но изъ втораго условія слѣдуетъ, что у меня вдвое менѣе денегъ, чѣмъ у брата. Стало-быть всего у насъ 3 равныя части, а одна часть равняется 132 р. : 3 $=$ 44 р.; столько было у меня, а у брата 44 р. $\times$ 2 $=$ 88 р.

Повѣрка 88 р. — 72 р. $=$ 16 р.; 60 р. — 44 р. $=$ 16 р.

Рѣшимъ теперь нѣсколько задачъ, въ которыхъ число слагаемыхъ болѣе двухъ.

Задача. Для нѣкотораго торговаго предпріятія трое внесли капиталы: второй внесъ 0,6 того, что внесъ первый, и третій 0,75 того, что внесли первый и второй вмѣстѣ.

Предпріятіе доставило имъ 336 рублей прибыли. Сколько прибыли досталось каждому?

Рѣшеніе:

Положимъ, что первый внесъ единицу; по условію задачи второй внесъ 0,6, а третій $(1 + 0{,}6) \times 0{,}75 = 1{,}2$. Слѣдовательно всѣ трое внесли: $0{,}6 + 1 + 1{,}2 = 2{,}8$ равныхъ частей. Прибыль съ одной части равняется 336 р. : 2,8 $=$ 120 руб. Поэтому первый получилъ 120 руб., второй 120 р. $\times$ 0,6 $=$ 72 р., третій 120 р. $\times$ 1,2 $=$ 144 р.

Повѣрка 120 р. $+$ 72 р. $+$ 144 р. $=$ 336 р.

Задача. Веревка, длиною въ 5 футовъ 2 дюйма, разрѣзана на три части: длина первой относится къ длинѣ второй, какъ 3 : 5, а длина второй къ длинѣ третьей, какъ 2 : 3. Найти длину каждой части веревки.

Рѣшеніе:

Примемъ длину первой части равною единицѣ, тогда длина второй части будетъ $^5/_3$. Но если длина второй части выражается числомъ 2, то длина третьей части выразится числомъ 3; поэтому, если длина второй части будетъ единица, то длина третьей $^3/_2$, а если длина второй части $^5/_3$, то длина третьей

$^3/_2 \times {}^5/_3 = {}^5/_2$. Итакъ, 62 дюйма нужно раздѣлить пропорціонально числамъ: 1, $^5/_3$, $^5/_2$ или 6, 10, 15 т. е. если въ первомъ кускѣ 6 равныхъ частей, то во второмъ такихъ же частей 10, а въ третьемъ 15. Значитъ, въ цѣлой веревкѣ 31 равная часть. Раздѣливъ 62 дюйма на 31, узнаемъ, сколькимъ дюймамъ равняется одна равная часть.

Итакъ первая часть $= \frac{62 \text{ д.}}{31} \times 6 = 12$ д.; вторая часть $= \frac{62 \text{ д.}}{31} \times 10 = 20$ д.; третья часть $\frac{62 \text{ д.}}{31} \times 15 = 30$ д.

Повѣрка 12 д. + 20 д. + 30 д. = 62 д.

Аналогично предыдущимъ рѣшаются задачи, въ которыхъ данное число нужно раздѣлить обратно пропорціонально даннымъ числамъ.

Задача. Три брата получили въ наслѣдство 5640 руб. Раздѣлить эту сумму обратно пропорціонально ихъ возрасту, если старшему 20 лѣтъ, среднему 15 лѣтъ, а младшему 12 лѣтъ.

Рѣшеніе:

По условію задачи первая часть должна относиться къ второй, какъ 15 : 20 или, что все равно, какъ 3 : 4; вторая часть къ третьей должна относиться, какъ 12 : 15, или 4 : 5. Значитъ всѣ три части должны относиться, какъ 3 : 4 : 5. Такъ какъ сумма членовъ этого отношенія 12, то заключаемъ, что первый получилъ $\frac{5640 \text{ р.}}{12} \times 3 = 1410$ р., второй $\frac{5640 \text{ р.}}{12} \times 4 = 1880$ р., третій $\frac{5640 \text{ р.}}{12} \times 5 = 2350$ р.

Повѣрка 1410 р. + 1880 р. + 2350 р. = 5640 р.

Иногда приходится дѣлить данное число на части, пропорціональныя числамъ не одного только ряда, а двухъ и больше. Покажемъ, какъ надо поступать въ такомъ случаѣ.

Задача. За провозъ трехъ грузовъ по желѣзной дорогѣ заплачено всего 18 руб. 25 коп.

Первый грузъ въ 148 пудовъ былъ перевезенъ на 125 верстъ, второй въ 200 пудовъ на 111 верстъ и третій въ 74 пуда на 180 верстъ. Сколько стоилъ провозъ каждаго груза?

Рѣшеніе:

Работа перевозки 148 пудовъ на разстояніи 125 верстъ равносильна работѣ перевозки 148 $\times$ 125 пудовъ на разстояніи одной версты; работа перевозки 200 пудовъ на разстояніи 111 в. равносильна работѣ перевозки 200 $\times$ 111 пуд. на разстояніи одной версты и наконецъ 74 $\times$ 180 пудовъ перевезено на разстояніи одной версты. Такъ какъ прежнюю работу мы замѣнили новой работой, въ которой всѣ грузы перевезены на одинаковое разстояніе, то стоимость перевозки каждаго груза будетъ зависѣть только отъ числа пудовъ. Поэтому 18 руб. 25 коп. надо раздѣлить пропорціонально числамъ: 148 $\times$ 125, 200 $\times$ 111, 74 $\times$ 180. Значитъ.

провозъ перваго груза стоилъ $\frac{18{,}25 \text{ р.}}{37.\ 25 \quad 10.\ 111 \quad 74.\ 9} \times 37 \times 25 = 6{,}25$ руб. провозъ втораго груза стоилъ $7^1/_2$ р., а третьяго 4,5 р.

Повѣрка 6,25 р. + 7,5 р. + 4,5 р. = 18,25 р.

Примѣчаніе. Плата за перевозку грузовъ пропорціональна вѣсу груза и разстоянію перевозки. Поэтому въ данномъ случаѣ нужно было 18 р. 25 к. раздѣлить пропорціонально числамъ 148, 200, 74 и пропорціонально числамъ 125, 111, 180. Но мы видѣли, что для этого нужно 18,25 р. раздѣлить пропорціонально числамъ: 148 × 125, 200 × 111, 74 × 180.

Обобщая этотъ случай, мы получимъ слѣдующее правило*): Чтобы раздѣлить число на части, пропорціональныя числамъ двухъ отношеній, нужно перемножить соотвѣтственные члены отношеній и произвести потомъ простое пропорціональное дѣленіе.

Методомъ пропорціональнаго дѣленія рѣшаются также задачи, въ которыхъ по разности двухъ чиселъ и ихъ отношенію требуется найти эти числа.

Задача. Разность двухъ чиселъ равняется 24, а отношеніе 4. Найти эти числа.

Рѣшеніе:

Большее число содержитъ въ себѣ четыре такія части, какихъ меньшее одну часть; слѣдовательно большее число на три части больше меньшаго и по условію задачи, эти три части равняются 24, поэтому одна часть равняется 24 : 3 = 8. Это и есть меньшее число, а большее равняется 8 × 4 = 32.

Повѣрка 32 — 8 = 24.

Задача. Два мальчика купили одинаковое число перьевъ; но первый платилъ за 3 дюжины 18 к., а второй за 4 дюж. 16 к.; сколько каждый купилъ перьевъ, если первый заплатилъ болѣе втораго на 24 к,?

Рѣшеніе.

Разность двухъ чиселъ выражена явно и равняется 24, а отношеніе выражено не явно; поэтому найдемъ сперва отношеніе этихъ чиселъ. Изъ условій задачи слѣдуетъ, что первый платилъ за дюжину 6 к., а второй 4 к. т. е. первый платилъ въ $^3/_2$ раза болѣе втораго. Значитъ, всякій разъ какъ первый платилъ 3 к., второй платилъ 2 к., но первый заплатилъ болѣе втораго на 24 к., стало-быть первый уплатилъ 24 к. × 3 = 72 к., а второй 24 к. × 2 = 48 к. За дюжину первый платилъ 6 к., слѣдовательно онъ купилъ 72 : 6 = 12 дюжинъ; столько же купилъ и второй, ибо они купили одинаковое число.

Повѣрка 48 : 4 = 12 дюжинъ; 72 к. — 48 к. = 24 к.

Задача. Пароходъ идетъ по теченію рѣки со скоростью 24 версты въ часъ, а противъ теченія 16 верстъ. Опредѣлить разстояніе между двумя пристанями, зная, что пароходъ отъ нижней до верхней идетъ 4-мя часами долѣе, чѣмъ отъ верхней до нижней?

*) Обобщеніе неполное. Такъ, напр., слѣд. задача не подходитъ подъ это обобщеніе: На одной изъ трехъ мельницъ можно измолоть въ 5 часовъ 7 четвертей ржи, и на другой въ 4 часа 6 четвертей, на третьей въ 3 часа 5 четвертей. Если требуется измолоть 68 четв., то по скольку четв. надо отправить на каждую мельницу, чтобы всѣ онѣ могли приготовить требуемую муку одновременно? Ред.

Рѣшеніе:

Въ этой задачѣ разность и отношеніе искомыхъ чиселъ выражены не явно, поэтому начнемъ рѣшеніе съ опредѣленія этихъ величинъ. Еслибъ пароходъ плылъ противъ теченія рѣки столько же времени, сколько онъ употребляетъ, чтобъ проплыть отъ верхней до нижней пристани, то онъ сдѣлалъ бы на 64 версты менѣе. Но скорость парохода по теченію въ $^{24}/_{16}$ или $^{3}/_{2}$ раза болѣе скорости противъ теченія, т. е. въ первомъ случаѣ скорость болѣе, чѣмъ во второмъ на 1 часть, и эта часть равняется 64 верстамъ. Слѣдовательно по теченію пароходъ проходитъ 64 версты $\times$ 3 = 192 версты; таково разстояніе между пристанями.

Повѣрка $^{192}/_{24}$ = 8 ч., $^{192}/_{16}$ = 12 ч.; 12 ч. — 8 ч. = 4 ч.

9. Методъ введенія средне-ариѳметическаго.

Этотъ методъ основывается на слѣдующей теоремѣ. Если каждое изъ двухъ чиселъ уменьшимъ въ одинаковое число разъ, то во столько же разъ уменьшится и разность между этими числами. Поэтому уменьшивъ сумму двухъ чиселъ вдвое, мы получимъ средне-ариѳметическое, которое отличается отъ обоихъ чиселъ на половину первоначальной разности. Зная эту разность, мы легко можемъ найти каждое число; для полученія меньшаго числа нужно изъ средне-ариѳметическаго вычесть полуразность, а для полученія большаго числа къ средне-ариѳметическому нужно прибавить полуразность.

Методъ введенія средне-ариѳметическаго прилагается къ такимъ задачамъ, въ которыхъ требуется найти два числа по ихъ суммѣ и разности.

Задача. Куплены двѣ головы сахару, изъ которыхъ одна была на 2 фунта 48 золотн. тяжелѣе другой, а вѣсъ обѣихъ равнялся 34 фунт. 16 золотн. Сколько денегъ заплачено за каждую голову, если 16 золотниковъ сахару цѣнились по 3 копѣйки?

Рѣшеніе:

Еслибы обѣ головы сахару были одинаковы, то каждая изъ нихъ вѣсила бы 34 ф. 16 з. : 2 = 17 ф. 8 з. Но одна изъ нихъ тяжелѣе другой на 2 ф. 48 з.; слѣдовательно одна больше, а другая меньше 17 ф. 8 з. на 1 ф. 24 з. Поэтому вѣсъ большей равнялся 17 ф. 8 з. + 1 ф. 24 з. = 18 ф. 32 з., а вѣсъ меньшей 17 ф. 8 з. — 1 ф. 24 з. = 15 ф. 80 з. Такъ какъ 16 золотн. стоило 3 к., а въ большей головѣ сахару 16 золотн. содержится 110 разъ, то она стоила 3 к. $\times$ 110 = 3 р. 30 к.; меньшая голова сахару стоила 3 к. $\times$ 95 = 2 р. 85 к.

Повѣрка 3 р. 30 к. + 2 р. 85 к. = 6 р. 15 к.; 3 к. (34 ф. 16 з. : 16 з.) = 6 р. 15 к.

Задача. Нѣкто имѣетъ два капитала, отданные въ ростъ по 4%, всего 1200 рублей. Съ перваго капитала онъ получаетъ процентныхъ денегъ на 10 рублей болѣе, чѣмъ съ втораго. Какъ великъ каждый капиталъ?

Рѣшеніе:

Еслибы капиталы были равны, то каждый изъ нихъ равнялся бы 600 р. Въ дѣйствительности же они не равны и процентныя деньги съ одного на 10 р. больше процентныхъ денегъ съ другаго; но 10 р. процентныхъ денегъ получается съ капитала въ 250 р., значитъ одинъ капиталъ больше другаго на 250 р. Поэтому большій капиталъ получимъ, прибавивъ 125 р. къ 600 р. т. е. 725 р. а меньшій капиталъ равняется 600 р. — 125 р. = 475 р.

Повѣрка. Процентныя деньги съ 725 р. равняются 4 р. $\times$ 7,25 = 29 р., а съ 475 равняются 4 р. $\times$ 4,75 = 19 р., разность и будетъ 10 р.

10. Методъ остатковъ *).

Принципъ этого метода слѣдующій: Вычтя изъ даннаго количества ту часть его, которая, по условіямъ задачи, оказалась результатомъ нѣкоторыхъ предшествующихъ фактовъ, мы получимъ остатокъ, который будетъ результатомъ остальныхъ предшествующихъ фактовъ. Если этотъ остатокъ будетъ зависѣть только отъ одной причины, то, зная эту зависимость, мы въ состояніи будемъ опредѣлить причину. Слѣдовательно, этотъ методъ приложимъ въ тѣхъ случаяхъ, когда послѣдовательнымъ вычитаніемъ мы уничтожаемъ дѣйствіе нѣкоторыхъ причинъ и можемъ дойти до остатка, представляющаго собою результатъ только одной причины.

Задача. Куплено въ первый разъ 12 фунт. сахару и 6 фунт. чаю и заплачено было 14 руб. 40 коп.; во второй разъ по той же цѣнѣ было куплено 15 фунт. чаю и 12 фунт. сахару, что стоило 32 руб. 40 к. По чемъ покупали фунтъ сахару?

Рѣшеніе.

Во второй разъ заплачено на 18 руб. больше, чѣмъ въ первый потому, что куплено на 9 фунтовъ чаю больше, чѣмъ въ первый разъ; слѣдовательно фунтъ чаю стоитъ 2 рубля. Вычтя изъ 14 руб. 40 к. стоимость шести фунтовъ чаю т. е. 12 руб., получимъ 2 руб. 40 к. Столько заплачено за 12 фунтовъ сахару; слѣдовательно за одинъ фунтъ сахару платили 2 руб. 40 к. : 12 = 20 к.

Повѣрка. 2 р. 15 + 20 к. 12 = 32 р. 40 к.

Задача. Въ первый разъ было куплено 5 аршинъ полотна и 15 аршинъ холста и за все это заплачено 9 руб. 25 к. Въ другой разъ по тѣмъ же самымъ цѣнамъ, какъ и въ первый разъ, куплено 10 арш. полотна и 7 аршинъ холста и въ этотъ разъ заплачено 15 руб. 5 к. По чемъ цѣнили аршинъ полотна и аршинъ холста?

Рѣшеніе:

Если за 5 арш. полотна и 15 арш. холста уплачено 9 р. 25 к., то
за 10 арш. полотна и 30 арш. холста уплатятъ 18 р. 50 к.,
но по второму условію за 10 арш. полотна и 7 арш. холста уплачено 15 р. 5 к.

---

*) См. Систему логики Миля т. 1 стр. 454.

Вычтя 15 р. 5 к. изъ 18 р. 50 к., мы узнаемъ, насколько въ первомъ случаѣ уплатили бы больше, чѣмъ во второмъ и это потому, что въ первомъ случаѣ было бы куплено холста на 23 аршина больше; число аршинъ полотна въ обоихъ случаяхъ одинаково. Поэтому за одинъ аршинъ холста платили (18 р. 50 к. — 15 р. 5 к.) : 23 = 15 к., а за 7 аршинъ холста платили 15 к. $\times$ 7 = 105 к.; слѣдовательно 10 аршинъ полотна стоили 15 р. 5 к. — 1 р. 5 к. = 14 р., а одинъ аршинъ полотна стоилъ 14 : 10 = 1 р. 40 к.

Повѣрка. 1 р. 40 к. 5 + 15 к. 15 = 9 р. 25 к.

Изъ этого примѣра видно, что если непосредственнымъ вычитаніемъ не уничтожается одна изъ причинъ, то нужно соотвѣтственнымъ умноженіемъ такъ измѣнить данныя въ задачѣ величины, чтобы вычитаніемъ можно было уничтожить одну причину. Если же этого нельзя сдѣлать, то данный методъ къ этой задачѣ не приложимъ.

11. Методъ приведенія къ единицѣ.

Методъ приведенія къ единицѣ*) состоитъ въ сравненіи данныхъ величинъ съ однородными имъ единицами и въ измѣненіи посредствомъ этого сравненія той данной величины, которая однородна съ неизвѣстной величиной: значитъ къ единицѣ приводятся тѣ наименованія, двѣ величины которыхъ извѣстны. Методъ этотъ допускаетъ наиболѣе широкое примѣненіе въ особенности тамъ, гдѣ съ увеличеніемъ причины въ нѣсколько разъ, во столько же разъ увеличивается или уменьшается производимое ею дѣйствіе. Чтобы легче представить себѣ зависимость между величинами, нужно всѣ данныя величины написать въ двухъ строкахъ, но при томъ такъ, чтобы однородныя величины находились въ одномъ столбцѣ и были выражены въ одинаковыхъ мѣрахъ, потому что числа, соотвѣтствующія этимъ размѣрамъ, при вычисленіи дѣлятся.

Задача. Пятнадцать работниковъ и 12 работницъ, занимаясь ежедневно по 10 часовъ 30 минутъ, сняли съ поля хлѣбъ въ 12 дней. Во сколько дней 21 работникъ и 8 работницъ, занимаясь въ день по 8,4 часа, уберутъ хлѣбъ съ поля, длина котораго относится къ длинѣ перваго, какъ 0,3 : $^1/_5$, и котораго ширина относится къ ширинѣ перваго, какъ 0,51 : 0,5(6), — если при этомъ извѣстно, что сила мужчины относится къ силѣ женщины, какъ 0,2(6) : 0,1(9)?

Рѣшеніе:

Схема	15 рбк.	12 рбт.	$10^1/_2$ ч.	12 д.	0,2	0,5(6).
	21 »	8 »	8,4 »	x »	0,3	0,51.

---

*) Развитіемъ этого метода мы обязаны Дистервегу, который при рѣшеніи задачъ вовсе не пользовался тройнымъ правиломъ и пропорціями, а только методомъ приведенія къ единицѣ. По его мнѣнію пользоваться пропорціями при рѣшеніи ариѳметическихъ задачъ излишне, такъ какъ безъ нихъ можно обойтись, а примѣненіе пропорцій, особенно сложныхъ, большинству изучающихъ начальную ариѳметику непонятно. Diesterweg u. Heuser. Method. Handbuch. (Истина, нынѣ сознаваемая всѣми опытными педагогами. Ред.)

Такъ какъ сила мужчины относится къ силѣ женщины, какъ 4 : 3, то трое мужчинъ сдѣлаютъ такую работу, какую 4 женщины; слѣдовательно работа 12 женщинъ равносильна работѣ 9 мужчинъ, а работа 8 женщинъ равносильна работѣ 6 мужчинъ.

Поэтому предыдущая задача приводится къ слѣдующей:

$$\begin{array}{lllll}
24 \text{ рабк.} & 10^1/_2 \text{ ч.} & 12 \text{ д.} & 0{,}2 & 0{,}5\ (6) \\
27 \text{ »} & 8{,}4 \text{ »} & x \text{ »} & 0{,}3 & 0{,}51 \\
\hline
1 \text{ »} & 10^1/_2 \text{ ч.} & 12.24 \text{ д.} & 0{,}2 & 0{,}5\ (6) \\
1 \text{ »} & 1 \text{ »} & 12.24.10^1/_2 \text{ д.} & 0{,}2 & — 0{,}5\ (6) \\
1 \text{ »} & 1 \text{ »} & \dfrac{12.24.10^1/_2}{0{,}2} \text{ д.} & 1 & — 0{,}5\ (6) \\
1 \text{ »} & 1 \text{ »} & \dfrac{12.24.10^1/_2}{0{,}2.0{,}5\ (6)} \text{ д.} & — 1 & — 1 \\
27 \text{ »} & 1 \text{ »} & \dfrac{12.24.10^1/_2}{0{,}2.0{,}5\ (6).27} \text{ д.} & — 1 & 1 \\
27 \text{ »} & 8{,}4 \text{ »} & \dfrac{12.24.10^1/_2}{0{,}2.0{,}5\ (6).27.8{,}4} \text{ д.} & — 1 & 1 \\
27 \text{ »} & 8{,}4 \text{ »} & \dfrac{12.24.10^1/_2.0{,}3}{0{,}2.0{,}5\ (6).27.8{,}4} \text{ д.} & — 0{,}3 & — 1 \\
27 \text{ »} & 8{,}4 \text{ »} & \dfrac{12.24.10^1/_2.0{,}3.0{,}51}{0{,}2.0{,}5\ (6).27.8{,}4} \text{ д.} & — 0{,}3 & — 0{,}51
\end{array}$$

$$x = \frac{12.24.10^1/_2.0{,}3.0{,}51}{0{,}2.0{,}5\ (6).27.8{,}4} \text{ дней} = 18 \text{ дней.}$$

Послѣ достаточнаго навыка въ пріемѣ разсужденія при рѣшеніи подобныхъ задачъ, можно и сразу всѣ условія (первой строки) задачи приводить къ единицѣ, такимъ образомъ:

[redacted]

Такъ какъ капиталъ, процентныя деньги и время величины пропорціональныя между собою, то этимъ методомъ можно пользоваться для нахожденія одной изъ этихъ величинъ по другимъ даннымъ.

Задача. Сколько прибыли получится съ 2450 рублей, отданныхъ въ ростъ по 6% на 0,666 . . . года?

Рѣшеніе

съ 100 р. 1 г. 6 р. п.
» 2450 » $^2/_3$ » x »

1 р. 1 г. $\frac{6}{100}$ р. п.

1 р. $^2/_3$ г. $\frac{6.2}{100.3}$ р. п.

2450 р. $^2/_3$ г. $\frac{6.2.2450}{100.3}$ р. п.

$$x = \frac{6.2.2450}{100.3} = 98 \text{ рублей прибыли.}$$

Точно также рѣшаются обратныя задачи.

Методъ приведенія къ единицѣ прилагается къ опредѣленію коммерческаго учета, такъ какъ коммерческій учетъ пропорціоналенъ вексельной суммѣ, времени до срока и процентамъ, по которымъ учитывается вексель *).

Задача. Найти учетъ съ векселя въ 5200 рублей, уплаченнаго съ учетомъ по $7^1/_2$% за 10 мѣсяцевъ до срока.

Рѣшеніе.

Такъ какъ коммерческій учетъ производится съ вексельной суммы, то говоримъ:

Со 100 руб., уплачиваемыхъ за 12 мѣсяцевъ до срока, учитываемъ $\frac{15}{2}$ руб.

съ 1 руб., уплачиваемыхъ за 12 мѣсяцевъ до срока, учитываемъ въ сто разъ меньше, или $\frac{15}{2.100}$ руб.

съ 1 руб., уплачиваемаго за 1 мѣсяцъ до срока, учитываемъ $\frac{15}{2.100.12}$ руб.

съ 5200 руб., » » » » $\frac{15.5200}{2.100.12}$ руб.

съ 5200 руб., уплачиваемыхъ за 10 мѣсяцевъ до срока, учитываемъ $\frac{15.5200.10}{2.100.12}$ руб. = 325 руб.

Такъ какъ учетъ съ векселя составляетъ 325 руб., то владѣлецъ его получилъ только 5200 руб. — 325 руб. = 4875 руб.

*) Изобрѣтеніе векселя приписываютъ Евреямъ (Savary. Der vollkommene Handelsmann, 1676 стр. 223), которые, будучи изгнаны въ 7 вѣкѣ изъ Франціи, поселились въ Ломбардіи, гдѣ стали распространять свое изобрѣтеніе. Италіянцы ввели охотно въ употребленіе вексель. Гибелины, изгнанные изъ Ломбардіи, принесли это изобрѣтеніе въ Амстердамъ, откуда оно распространилось по всей Европѣ.

Если желаемъ непосредственно вычислить сумму, уплаченную по векселю, то разсуждаемъ слѣдующимъ способомъ:

Со 100 руб., уплачиваемыхъ за 12 мѣсяцевъ до срока, учитываемъ $\frac{15}{2}$ руб.

со 100 руб., уплачиваемыхъ за 1 мѣсяцъ до срока, учитываемъ $\frac{15}{2.12}$ руб.

со 100 руб., уплачиваемыхъ за 10 мѣсяцевъ до срока, учитываемъ $\frac{15.10}{2.12}$ р. $=$ $\frac{25}{4}$ руб.

Такимъ образомъ, вмѣсто того, чтобы въ срокъ уплатить 100 руб., мы уплачиваемъ за 10 мѣсяцевъ до срока 100 руб. — 6 руб. 25 к. $=$ 93 р. 75 к.

Вмѣсто того, чтобы уплатить въ срокъ 1 руб., мы уплачиваемъ за 10 мѣсяцевъ до срока $\frac{93,75}{100}$ руб. $=$ 0,9375 р.

Наконецъ, вмѣсто того, чтобы уплатить въ срокъ 5200, мы уплачиваемъ за 10 мѣсяцевъ до срока въ 5200 разъ больше, чѣмъ 0,9375 руб., или 4875 руб.

Опредѣляя стоимость векселя непосредственно, мы вычислили сначала процентныя деньги со ста за извѣстное время и узнали, сколько уплачивается вмѣсто ста рублей.

Такъ нужно поступать потому, что капиталъ съ процентными деньгами или капиталъ безъ процентныхъ денегъ, время и прибыль величины непропорціональныя между собою, но капиталъ пропорціоналенъ капиталу съ процентными деньгами. Это замѣчаніе нужно имѣть въ виду во всѣхъ вопросахъ, въ которыхъ входитъ капиталъ съ процентными деньгами, а въ частности въ тѣхъ задачахъ, въ которыхъ требуется опредѣлить стоимость векселя или валюту векселя.

Задача. Нѣкоторый капиталъ, будучи въ оборотѣ по 6%, черезъ 1 годъ 2 мѣсяца обратился вмѣстѣ съ процентными деньгами въ 3424 рубля. Найти капиталъ.

Рѣшеніе:

Такъ какъ капиталъ съ процентными деньгами, время и капиталъ величины непропорціональныя между собою, то нельзя сказать:

100 руб. по истеченіи 12 мѣсяцевъ обращаются въ 106 руб.
x » » 14 » » 3424 руб.,

а необходимо вычислить сначала процентныя деньги со 100 руб. за 14 мѣсяцевъ.

Со 100 руб. въ 12 мѣсяцевъ получается прибыли 6 руб.

» 100 » » 1 » » $\frac{6}{12}$ руб.

» 100 » » 14 » » $\frac{6}{12}.14$ руб. $=$ 7 р.

Слѣдовательно 100 р. по истеченіи 14 мѣсяцевъ обращаются въ 107 р.
x » » 14 » 3424 р.

$\frac{100}{107}$ р. 1 р.

$\frac{100.3424}{107}$ р. 3424 р.

Искомый капиталъ равняется $\frac{100 \times 3424}{107}$ р. $=$ 3200 руб.

Чтобы сдѣлать повѣрку, рѣшимъ обратную задачу: «Въ какую сумму обратится по прошествіи 1 года 2 мѣсяцевъ капиталъ въ 3200 руб., отданный по 6%?

Рѣшеніе:

1 руб. капитала, отданнаго по 6%, приноситъ въ годъ 0,06 руб.,

1 » » » » » 1 мѣсяцъ $\frac{0{,}06}{12}$ руб.

1 » » « » » 14 мѣсяцейъ $\frac{0{,}06 \times 14}{12}$ руб.

Такимъ образомъ, 1 руб. капитала черезъ 14 мѣсяцевъ обратится въ 1 руб. $+$ 0,07 руб., и слѣдовательно, капиталъ въ 3200 руб., по истеченіи того же времени, обратится въ сумму, въ 3200 разъ большую, или 1,07 руб. $\times$ 3200 $=$ 3424 руб.

Итакъ, чтобы опредѣлить сумму, въ которую обратится капиталъ по истеченіи даннаго времени, слѣдуетъ умножить сотую часть процентовъ на время оборота капитала, придать къ этому произведенію единицу, и полученную сумму умножить на капиталъ.

Задача. По векселю за 8 мѣсяцевъ 10 дней до срока уплачено 2700 рублей съ учетомъ математическимъ по $5^1/_3$%. Опредѣлить валюту векселя.

Рѣшеніе:

Такъ какъ математическій учетъ есть процентныя деньги на сумму, уплачиваемую по векселю, то говоримъ:

100 руб. въ 12 мѣсяцевъ приносятъ $\frac{16}{3}$ руб.

100 » » 1 » » $\frac{16}{3.12}$ руб.

100 » » $8^1/_3$ » » $\frac{16.25}{3.12.3}$ руб.

Слѣдовательно, 100 руб. уплачиваются вмѣсто валюты, равной 100 руб. $+ \frac{100}{27}$ руб. $= \frac{2800}{27}$ руб.

1 руб. уплачивается вмѣсто валюты, въ 100 разъ меньшей, или $\frac{2800}{27 \times 100}$ руб., 2700 руб. уплачивается вмѣсто валюты, въ 2700 разъ большей, или $\frac{2800 \text{ р.} \times 2700}{27.100} = 2800$ руб.

Методомъ приведенія къ единицѣ рѣшаются также задачи, въ которыхъ по сколько угодно даннымъ величинамъ, — если отношеніе каждой изъ нихъ къ слѣдующей извѣстно, — опредѣляется отношеніе первой величины къ послѣдней, а въ частности такого рода задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить отношеніе монетъ или мѣръ двухъ странъ, если извѣстны отношенія этихъ монетъ или мѣръ къ монетамъ или мѣрамъ другихъ странъ. Такія задачи называются задачами на цѣпное правило, хотя, какъ мы увидимъ, онѣ рѣшаются очень просто и безъ знанія «цѣпнаго правила» *).

Задача. Куплено для варенья 5,32 килогр. крыжовнику, и получившійся изъ него сокъ составилъ $^4/_7$ его вѣса. Сокъ былъ смѣшанъ въ равномъ ему вѣсовомъ количествѣ съ сахаромъ, и затѣмъ смѣсь была сварена и очищена, вслѣдствіе чего сокъ потерялъ $\frac{3}{152}$ своего вѣса. Послѣ этого варенье было разлито въ горшки, изъ которыхъ каждый вмѣщалъ 1,149 лит. Требуется узнать, сколько горшковъ было наполнено вареніемъ, зная, что литръ варенья вѣситъ столько же, сколько 1,25 лит. воды?

Рѣшеніе.

Изъ 7 килогр. крыжовнику получается 4 килогр. соку

» 1 » » » $\frac{4}{7}$ » »

» 5,32 » » » $\frac{4}{7}.5{,}32$ килогр. соку

Изъ 1 килогр. соку получается 2 килогр. смѣси

» $\frac{4}{7}.5{,}32$ килогр. соку получается $2.\frac{4}{7}.5{,}32$ килогр. смѣси

Изъ 1 килогр. смѣси получается $\frac{149}{152}$ килогр. варенья

» $2.\frac{4}{7}.5{,}32$ килогр. смѣси получается $\frac{149}{152}.2.\frac{4}{7}.5{,}32$ килогр. варенья

1 килогр. варенья занимаетъ $\frac{1}{1{,}25}$ литра

$\frac{149}{152}.2.\frac{4}{7}.5{,}32$ килогр. варенья займутъ $\frac{1}{1{,}25}.\frac{149}{152}.2.\frac{4}{7}.5{,}32$ литра

1 литръ помѣщается въ $\frac{1}{0{,}149}$ горшка

$\frac{1}{1{,}25}.\frac{149}{152}.2.\frac{4}{7}.5{,}32$ литра помѣстятся въ $\frac{1}{0{,}149}.\frac{1}{1{,}25}.\frac{149}{152}.2.\frac{4}{7}.5{,}32$ горшкахъ.

Слѣдовательно, искомое число горшковъ равняется $\frac{1}{0{,}149}.\frac{1}{1{,}25}.\frac{149}{152}.2.\frac{4}{7}.5{,}32$ горшкамъ $=$ 32 горшкамъ.

---

*) Цѣпное правило ведетъ свое начало изъ Индіи. Широкое распространеніе и примѣненіе оно получило только въ 18-мъ столѣтіи, въ которомъ и названо это правило цѣпнымъ. Видманъ въ 1489 г. называетъ его Regula pagamenti.

Задача. Французскiй купецъ долженъ былъ заплатить въ Петербургѣ 3400 франковъ черезъ Лондонъ. По курсу, рубль стоилъ 32 пенса, и фунтъ стерлинговъ = $25^1/_2$ франкамъ; въ фунтѣ стерлинговъ 240 пенсовъ. Сколько рублей купецъ долженъ заплатить въ Петербургѣ?

Рѣшенiе:

Если $25^1/_2$ франковъ = 1 фунту стерлинговъ,

то 1 франкъ $= \frac{2}{51}$ фунта стерлинговъ.

Слѣдовательно 3400 франковъ $= \frac{2}{51}.3400$ фунтовъ стерлинговъ.

Если 1 фунтъ стерлинговъ = 240 пенсамъ,

то $\frac{2}{51}.3400$ фунтовъ стерлинговъ $= 240.\frac{2}{51}.3400$ пенсамъ.

Если 1 пенсъ $= \frac{1}{32}$ рубля,

то $240.\frac{2}{51}.3400$ пенсовъ $= \frac{1}{32}.240.\frac{2}{51}.3400$ рублямъ = 1000 руб.

Сталобыть французскiй купецъ долженъ былъ заплатить въ Петербургѣ 1000 рублей.

12. Методъ кратнаго измѣненiя.

Методъ кратнаго измѣненiя*) состоитъ въ измѣненiи данной величины въ кратномъ отношенiи для полученiя искомой величины т. е. для полученiя неизвѣстнаго числа, нужно умножить извѣстное число того же рода на отношенiя вторыхъ данныхъ къ первымъ, или на обратныя отношенiя, смотря потому, будутъ ли величины, о которыхъ идетъ рѣчь, прямо или обратно пропорцiональны той величинѣ, которая однородна съ неизвѣстною. Методъ этотъ прилагается въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ прилагается методъ приведенiя къ единицѣ и отличается отъ него тѣмъ, что въ немъ измѣненiе данной величины происходитъ непосредственно, между тѣмъ какъ въ методѣ приведенiя къ единицѣ это измѣненiе дѣлается въ два прiема. Такимъ образомъ методъ кратнаго измѣненiя ведетъ къ цѣли несравненно скорѣе, чѣмъ методъ приведенiя къ единицѣ, но вмѣстѣ съ тѣмъ онъ болѣе трудный для пониманiя, особенно начинающимъ.

---

*) Этотъ методъ былъ извѣстенъ уже древнимъ. Въ среднiе вѣка онъ имѣлъ широкое примѣненiе и назывался: «regula magistralis, regula aurea» въ случаѣ прямыхъ отношенiй и «regula conversa, regula eversa, regula inversa» въ случаѣ обратныхъ отношенiй. См. Clavius, Epitome Arithmeticae Practicae, 1583.

Ризе даетъ слѣдующее правило для рѣшенiй задачъ по этому методу: «То, о чемъ спрашиваютъ, напиши на концѣ, однородную съ нимъ величину напиши спереди, а величину другаго рода напиши въ серединѣ. Умножь величину, стоящую на концѣ, на среднюю величину и полученное произведенiе раздѣли на ту величину, которая стоитъ спереди; въ частномъ получишь искомую величину, которая будетъ наименованiя средней величины. Примѣръ. 12 фунтовъ чаю стоятъ 20 руб., сколько стоятъ 9 фунтовъ такогоже чаю. Согласно этому правилу слѣдуетъ данныя величины написать въ такомъ порядкѣ: 12 ф., 20 р., 9 ф.; искомая величина равняется $\frac{20.9}{12}$ руб. = 15 р. См. Adam Riese. Ein Gerechent Büchlein. 1536.

Для облегченія сравненія данныхъ величинъ, ихъ записываютъ въ двѣ строки такъ, чтобы величины одного наименованія находились одна подъ другой.

Задача. 12 фунтовъ чаю стоятъ 20 руб., сколько стоятъ 9 фунтовъ такого же чаю.

Рѣшеніе.

12 фунт. — 20 руб.
9 » — x »

Стоимость пропорціональна вѣсу. Такъ какъ 9 фунтовъ больше 12 фунтовъ въ отношеніи $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, то искомая стоимость больше 20 руб. въ томъ же отношеніи. Слѣдовательно $x = 20$ руб. $\times \frac{3}{4} = 15$ руб.

Рѣшимъ теперь болѣе сложную задачу, рѣшенную уже нами методомъ приведенія къ единицѣ.

				длина	шир.
	24 рабтк.	$10^1/_2$ ч.	12 д.	0,2	0,5(6)
Схема:	27 »	8,4 »	x »	0,3	0,51.

Число дней обратно пропорціонально числу работниковъ. Поэтому, вводя отношеніе $\frac{24}{27}$, получимъ число дней $12 \times \frac{24}{27}$. Число дней обратно пропорціонально продолжительности дневной работы. Поэтому, вводя отношеніе $10^1/_2 : 8^2/_5 = \frac{5}{4}$, получимъ число дней $\frac{4 \times 8 \times 5}{3 \times 4} = \frac{8.5}{3}$. Наконецъ число дней прямо пропорціонально длинѣ и ширинѣ поля т. е. поверхности поля. Поэтому, вводя отношеніе $\frac{0,3.0,51}{0,2.0,5(6)} = \frac{27}{20}$, получимъ: $x = \frac{8 \times 5 \times 27}{20 \times 3} = 18$ дней.

Примѣчаніе. При составленіи схемы можно сокращать однородныя числа каждой пары на ихъ общихъ дѣлителей, такъ какъ для опредѣленія искомой величины эти числа входятъ только въ отношеніи.

13. Методъ сравненія.

Методъ сравненія состоитъ въ одновременномъ сравненіи цѣнъ обоихъ смѣшиваемыхъ веществъ съ цѣною смѣси. Самостоятельно этотъ методъ не приводитъ къ окончательному рѣшенію задачъ, но вмѣстѣ съ методомъ пропорціональнаго дѣленія прилагается къ такимъ вопросамъ, въ которыхъ по даннымъ: стоимости смѣшиваемыхъ веществъ, количеству и стоимости смѣси требуется опредѣлить количество смѣшиваемыхъ веществъ.

Покажемъ примѣненіе этого метода и расположеніе вычисленій.

Задача. Въ лавкѣ имѣются два сорта чаю: по 2 руб. 80 коп. и по 1 руб. 90 коп. за фунтъ.

По скольку фунтовъ каждаго сорта нужно взять для составленія 27 фунтовъ смѣси, цѣною по 2 руб. 40 коп. за фунтъ?

Рѣшеніе.

$$27\text{ ф.}\ \begin{array}{l|l|l} 2{,}8\text{ р.} & & 0{,}4\text{ р. приб. } 1\text{ р. приб. — } \frac{1}{0{,}4}\text{ ф.} \\ & 2{,}4\text{ р.} & \\ 1{,}9\text{ р.} & & 0{,}5\text{ р. убыт. } 1\text{ р. убыт. — } \frac{1}{0{,}5}\text{ ф.} \end{array} \quad \frac{1}{0{,}4} : \frac{1}{0{,}5} = 5:4.$$

Еслибы каждый фунтъ смѣси стали продавать по цѣнѣ перваго сорта, то получили бы на каждый фунтъ 0,4 руб. прибыли; значитъ 1 руб. прибыли получили бы на $\frac{1}{0{,}4}$ фунта. Наоборотъ, продавая фунтъ смѣси по цѣнѣ втораго сорта, получили бы на каждый фунтъ 0,5 руб. убытку, слѣдовательно 1 руб. убытку на $\frac{1}{0{,}5}$ фунта. Чтобы уравнять убытокъ съ прибылью нужно на каждые $\frac{1}{0{,}4}$ фунта перваго сорта взять $\frac{1}{0{,}5}$ фунта втораго сорта, или вообще нужно смѣшать оба сорта въ отношеніи $\frac{1}{0{,}4} : \frac{1}{0{,}5}$ или $5:4$. Поэтому, раздѣливъ 27 фунтовъ на двѣ части въ указанномъ отношеніи, находимъ что перваго сорта нужно взять $\frac{27\text{ ф.} \times 5}{9} = 15$ ф., а втораго $\frac{27\text{ ф.} \times 4}{9} = 12$ ф.

Повѣрка $\frac{2{,}8\text{ руб.} \times 15 + 1{,}9\text{ руб.} \times 12}{27} = 2{,}4$ руб.

Примѣчаніе. Въ этой задачѣ всѣ четыре величины т. е. стоимости смѣшиваемыхъ веществъ, количество и стоимость смѣси даны явно; но можетъ случиться, что одна изъ этихъ величинъ или всѣ будутъ даны неявно. Въ такомъ случаѣ нужно предварительно вычислить эти четыре величины и потомъ поступать такъ, какъ въ предъидущей задачѣ.

Задача. Требуется составить смѣсь, вѣсомъ въ 36 фунтовъ, изъ двухъ сортовъ соли такъ, чтобы фунтъ этой смѣси безъ прибыли и убытка стоилъ 2,75 копѣйки. Фунтъ перваго сорта стоитъ $4^1/_2$ копѣйки, а цѣна фунта втораго на 50% меньше цѣны фунта перваго. Сколько фунтовъ каждаго сорта должно быть взято для смѣси?

Рѣшеніе:

Въ этой задачѣ не явно дана стоимость одного фунта втораго сорта Вычислимъ ее. По условію задачи цѣна фунта втораго сорта на 50% меньше цѣны фунта перваго сорта, значитъ она равняется половинѣ цѣны перваго сорта т. е. 2,25 копѣйки.

Поэтому схема рѣшенія будетъ слѣдующая:

$$36\text{ ф.}\ \left.\begin{array}{l} 4{,}5\text{ к.} \\ \\ 2{,}25\text{ к.} \end{array}\right\} 2{,}75\text{ к.} \ \left|\ \begin{array}{l} 1{,}75\text{ к. приб. } 1\text{ к. приб. на } \frac{1}{1{,}75}\text{ ф.} \\ \\ 0{,}5\text{ к. убыт. } 1\text{ к. убыт. на } \frac{1}{0{,}5}\text{ ф.} \end{array}\right.$$

Вмѣсто отношенія $\frac{1}{1{,}75} : \frac{1}{0{,}5}$ можно взять отношеніе $2:7$. Значитъ перваго сорта надо взять $\frac{36}{9}$ ф. $\times$ 2 = 8 ф., а втораго $\frac{36}{9}$ ф. $\times$ 7 = 28 ф.

Повѣрка $\frac{4{,}5 \text{ к.} \cdot 8 + 2{,}25 \text{ к.} \cdot 28}{36} = 2{,}75$ к.

Задача. Чайный торговецъ составилъ 90 фунтовъ смѣси изъ двухъ сортовъ чаю: фунтъ перваго сорта ему самому стоилъ 2 руб. 50 коп., а фунтъ втораго на 36% дешевле фунта перваго.

Продавъ всю смѣсь за 200 рублей, купецъ получилъ $11\frac{1}{9}$% прибыли. Сколько фунтовъ того и другаго сорта было положено въ смѣсь?

Рѣшеніе:

Въ этой задачѣ даны не явно: цѣна одного фунта втораго сорта и цѣна одного фунта смѣси.

Опредѣлимъ сначала обѣ эти величины. Фунтъ втораго сорта на 36% дешевле фунта перваго, значитъ цѣна фунта втораго сорта $= \frac{64}{100}$ цѣны фунта перваго сорта т. е. 1 р. 60 к. Чтобы опредѣлить цѣну одного фунта смѣси, такъ разсуждаемъ:

$\frac{1000}{9}$ рублей купецъ получилъ вмѣсто 100 р.

200 » » » » x

---

1 рубль купецъ получилъ вмѣсто $\frac{900}{1000}$ р.;

а 200 рублей » » » $\frac{900}{1000} \cdot 200$ руб. = 180 руб.

Значитъ фунтъ смѣси стоилъ $\frac{180}{90}$ р. = 2 рубля. Такимъ образомъ схема рѣшенія будетъ слѣдующая:

90 ф.	2,5 р.	2 р.	0,5 р. приб.	1 р. приб. на $\frac{1}{0{,}5}$ ф.
	1,6 р.		0,4 р. убыт.	1 р. убыт. на $\frac{1}{0{,}4}$ ф.

Вмѣсто отношенія $\frac{1}{0{,}5} : \frac{1}{0{,}4}$ можемъ взять отношеніе 4 : 5. Слѣдовательно перваго сорта было $\frac{90 \times 4}{9}$ ф. = 40 ф., а втораго сорта $\frac{90 \times 5}{9}$ ф. = 50 ф.

Повѣрка $\frac{2{,}5 \text{ р.} \times 40 + 1{,}6 \text{ р.} \times 50}{90} = 2$ р.

Методомъ сравненія въ соединеніи съ методомъ приведенія къ единицѣ рѣшаются задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить количество смѣси по данньмъ: стоимости смѣшиваемыхъ веществъ и смѣси, и количеству одного изъ смѣшиваемыхъ веществъ.

Задача. Изъ двухъ сортовъ чаю: въ 2 руб. 65 коп. и въ 1 руб. 80 коп. за фунтъ, составлена смѣсь, цѣною по 2 руб. 10 копѣекъ за фунтъ. Опредѣлить вѣсъ всей смѣси, зная, что въ составъ ея вошло втораго сорта $8^1/_2$ фунтами больше, нежели перваго.

Рѣшеніе.

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}65 \text{ р.} \\ \\ 1{,}8 \text{ р.} \end{array}\right\} 2{,}1 \text{ р.} \left|\begin{array}{ll} 0{,}55 \text{ р. приб.} & 1 \text{ р. приб. на } \dfrac{1}{0{,}55} \text{ ф.} \\ \\ 0{,}3 \text{ р. убыт.} & 1 \text{ р. убыт. на } \dfrac{1}{0{,}3} \text{ ф.} \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{55} : \frac{1}{30} = 6 : 11.$$

Еслибы каждый фунтъ смѣси продавать по цѣнѣ перваго сорта, то получили бы на каждый фунтъ 0,55 р. прибыли; слѣдовательно 1 р. прибыли на $\frac{1}{0{,}55}$ ф. Наоборотъ, продавая фунтъ смѣси по цѣнѣ втораго сорта, мы получили бы 0,3 р. убытку; слѣдовательно 1 р. убытку на $\frac{1}{0{,}3}$ ф. Чтобы не получить ни прибыли, ни убытку, нужно на каждые $\frac{1}{0{,}55}$ ф. перваго сорта брать $\frac{1}{0{,}3}$ ф. втораго сорта или, упростивъ это отношеніе, найдемъ, что на 6 ф. перваго сорта нужно взять 11 ф. втораго сорта, т. е. на 17 ф. смѣси втораго сорта нужно взять 5 фунтами болѣе, чѣмъ перваго; слѣдовательно, если втораго сорта болѣе перваго на одинъ фунтъ, то смѣси надо $\frac{17}{5}$ ф., а если втораго сорта болѣе перваго на $8^1/_2$ ф., то смѣси надо въ $8^1/_2$ разъ болѣе, т. е. $\frac{17}{5}$ ф. $\times 8^1/_2 =$ 28,9 фунтовъ.

Повѣрка. Перваго сорта было $\frac{28{,}9 \text{ ф.} \times 6}{17} = 10{,}2$ ф.; втораго сорта $\frac{28{,}9 \text{ ф.} \times 11}{17} = 18{,}7$ ф., 18,7 ф. — 10,2 ф. $= 8^1/_2$ ф.

Если требуется распредѣлить смѣсь трехъ сортовъ, то, кромѣ стоимостей единицы вѣса каждаго изъ смѣшиваемыхъ веществъ, вѣса и цѣны смѣси, нужно имѣть еще одну данную величину, напримѣръ, отношеніе вѣсовъ двухъ сортовъ, вошедшихъ въ смѣсь.

Безъ этого добавочнаго условія задача будетъ неопредѣленной.

Задача. Смѣшано три сорта чаю: въ $2^1/_2$ рубля, въ 2 р. 20 к. и въ 1 руб. 60 коп. фунтъ, и получено 68 фунтовъ смѣси, цѣною по 1 руб. 90 коп. фунтъ; при этомъ число фунтовъ перваго сорта относилось къ числу фунтовъ втораго, какъ 3 : 4. Сколько фунтовъ чаю третьяго сорта вошло въ эту смѣсь?

Рѣшеніе.

На 7 фунтовъ перваго и втораго сорта шло 3 фунта перваго сорта и 4 фунта втораго сорта. Но 3 ф. перваго сорта стоили $2^1/_2$ руб. $\times 3 = 7{,}5$ руб.; а 4 ф. втораго сорта стоили 2,2 руб. $\times 4 = 8{,}8$ руб. Слѣдовательно 7 ф. смѣси изъ перваго и втораго сорта стоили: 7,5 р. + 8,8 р.

$= 16{,}3$ р., а потому одинъ фунтъ стоилъ: $\frac{1630}{7}$ к. $= 232^6/_7$ коп.

Такимъ образомъ мы свели данную задачу къ слѣдующей: «Смѣшано два сорта чаю: въ $232^6/_7$ копѣйки и въ 1 р. 60 коп. фунтъ, и получено 68 фунтовъ смѣси, цѣною по 1 руб. 90 коп. фунтъ. Сколько фунтовъ чаю втораго сорта вошло въ эту смѣсь?

68 ф.	$232^6/_7$ к.	190 к.	$42^6/_7$ к. приб.	1 к. приб. на $\frac{7}{300}$ ф.
	160 к.		30 к. убыт.	1 к. убыт. на $\frac{1}{30}$ ф.

Вмѣсто отношенія $\frac{7}{300} : \frac{1}{30}$ можемъ взять отношеніе $7:10$. Значитъ, на 17 фун. смѣси нужно взять втораго сорта 10 ф.; на 1 ф. смѣси нужно втораго сорта $\frac{10}{17}$ ф., а 68 ф. смѣси нужно взять втораго сорта $\frac{10 \text{ ф.} \times 68}{17}$ $= 40$ ф.

Повѣрка. Если третьяго сорта пошло 40 ф., то перваго и втораго 68 ф. — 40 ф. $=$ 28 ф. Раздѣливъ 28 ф. въ отношеніи $3:4$, найдемъ, что перваго сорта было 12 ф., а втораго 16 ф. Стоимость одного фунта смѣси равняется: $\frac{2^1/_2 \text{ р.} \times 12 + 2{,}2 \text{ р.} \times 16 + 1{,}6 \text{ р.} \times 40}{68} = 1{,}9$ р.

Задача. Изъ трехъ сортовъ муки: въ 12 коп., въ 10 коп. и въ $8^1/_2$ коп. за фунтъ, требуется составить смѣсь въ 2 пуда, цѣною по 9 копѣекъ за фунтъ. Сколько фунтовъ каждаго сорта должно взять для составленія смѣси?

Рѣшеніе.

Задача неопредѣленна, потому что можно уравнять прибыль съ убыткомъ при весьма разнообразныхъ отношеніяхъ между количествами отдѣльныхъ сортовъ. Мы ограничимся разысканіемъ только нѣкоторыхъ, наиболѣе удобныхъ способовъ рѣшенія.

Сравнивая цѣны сортовъ болѣе дорогихъ, чѣмъ смѣсь, съ цѣною смѣси, видимъ, что отъ помѣщенія въ смѣсь фунта перваго сорта получается 3 коп. убытку, а отъ введенія фунта втораго сорта 1 коп. убытку. Съ другой стороны отъ введенія фунта третьяго сорта получается $^1/_2$ коп. прибыли. Помножая числа 3 и 1 на нѣкоторыхъ множителей, и подбирая множителей для $^1/_2$ такъ, чтобы прибыль уравнялась съ убыткомъ, можемъ подыскать разнообразныя отношенія между количествами всѣхъ сортовъ. Напримѣръ, для чиселъ 3 и 1 возьмемъ множителемъ 1, а для $^1/_2$ множителя 8; тогда прибыль будетъ: $^1/_2$ к. $\times 8 = 4$ к., а убыль (3 к. $+$ 1 к.) $\times 1 = 4$ к. Раздѣливъ 80 ф. пропорціонально числамъ 1, 1,8, найдемъ, что перваго сорта можно взять 8 ф., втораго — 8 ф., а третьяго 64 ф. Мы можемъ взять другіе множители; напр., для 3 можемъ взять 3, для 1 можемъ взять 1, а тогда для $^1/_2$ нужно взять 20. Тогда прибыль равняется $^1/_2$ к. $\times 20 = 10$ к., а убыль 3 к. $\times 3 + 1$ к. $\times 1 = 10$ к. Раздѣливъ число 80 на части пропорціональныя числамъ 3, 1, 20, найдемъ, что перваго сорта нужно взять 10 ф., втораго сорта $\frac{10}{3}$ ф., а третьяго $\frac{200}{3}$ ф.

14. Методъ исправленія пробнаго допущенія.

Въ средніе вѣка и позже до 19-го столѣтія этотъ методъ имѣлъ очень широкое примѣненіе; онъ замѣнялъ методъ подобія и пропорціональнаго дѣленія и назывался «regula falsi» или «regula positionum». Апіанъ (1527) такъ опредѣляетъ это правило: «Оно называется ложнымъ не потому, что не вѣрно, но потому, что учитъ, какъ изъ двухъ ложныхъ чиселъ получить истинное число».

«Для полученія искомаго числа, говоритъ Адамъ Ризе, слѣдуетъ взять два произвольныхъ числа и совершить съ ними указанныя въ задачѣ дѣйствія. Тогда получимъ избытокъ либо недочетъ сравнительно съ истиннымъ результатомъ.

Умножимъ первое предположенное число на второй избытокъ, а второе число на первый избытокъ. Разность полученныхъ произведеній, дѣленная на разность между избытками дастъ искомое число».

Задача. «Сколько васъ всѣхъ?» спрашиваютъ общество, состоящее изъ нѣсколькихъ человѣкъ. На это отвѣтилъ одинъ изъ нихъ: «Еслибъ насъ было еще столько, да полстолько, то насъ было бы 30 человѣкъ». Изъ сколькихъ человѣкъ состояло общество?

Рѣшеніе.

Принявъ за искомое число 16, получимъ: $16 + 16 + 8 = 40$ т. е. больше истиннаго результата на 10; принявъ 14, получимъ $14 + 14 + 7 = 35$ т. е. больше истиннаго результата на 5. Умноживъ 14 на 10, а 16 на 5 и вычтя одно произведеніе изъ другаго, получимъ 60. Раздѣливъ 60 на разность 10—5, т. е. на 5, получимъ 12; изъ столькихъ человѣкъ и состояло общество.

Правило, данное Ризе, выводится алгебраически слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ неизвѣстное число черезъ x, данный результатъ черезъ b, а коэффиціентъ у x^a черезъ a, тогда неизвѣстное число опредѣлится изъ уравненія:

$$1)\ ax = b.$$

Подставивъ вмѣсто x двѣ величины n и m, дающія результатъ, большій чѣмъ b на δ и ε, уравненіе первое пріиметъ видъ:

$$(2)\ an = b - \delta$$

$$(3)\ am = b - \varepsilon.$$

Вычтя второе и третье изъ перваго, получимъ:

$$(4)\ a(x - n) = \delta$$

$$(5)\ a(x - m) = \varepsilon.$$

Исключая изъ этихъ уравненій a, получимъ:

$$x = \frac{\delta m - \varepsilon n}{\delta - \varepsilon}.$$

Это выраженіе и представляетъ собою правило Ризе.

Предложенную задачу можно рѣшить и проще, помощью одного допущенія. Пусть искомое число будетъ 16, тогда $16 + 16 + 8 = 40$; истинный же результатъ 30, слѣдовательно:

$$x : 16 = 30 : 40;\ x = 12.$$

Методъ исправленія пробнаго допущенія состоитъ въ допущеніи завѣдомо ложнаго предположенія о величинѣ неизвѣстнаго числа. Изъ этого предположенія извлекаютъ необходимыя слѣдствія, которыя неизбѣжно приведутъ къ предложенію, несовмѣстному съ однимъ изъ данныхъ предложеній. По разницѣ между этими величинами можемъ узнать, какую ошибку мы сдѣлали при первоначальномъ допущеніи и такимъ образомъ можемъ получить вѣрный результатъ. Этимъ методомъ рѣшаются задачи, въ которыхъ по даннымъ четыремъ величинамъ: количеству веществъ двухъ родовъ, ихъ общей стоимости и стоимости единицы вещества каждаго рода требуется опредѣлить количество вещества каждаго рода.

Задача. На пароходѣ ѣхало всего 134 пассажира перваго и втораго классовъ. Пассажирскій билетъ перваго класса стоитъ 50 коп., цѣна же билета втораго класса равняется 30 копѣйкамъ. Выручка отъ продажи всѣхъ билетовъ составила 49 руб. 20 коп. Сколько пассажировъ перваго и сколько пассажировъ втораго класса ѣхало на пароходѣ?

Рѣшеніе:

Положимъ, что всѣ билеты были перваго класса. Въ такомъ случаѣ они стоили бы 67 р. Въ дѣйствительности же они стоятъ 49 р. 20 к. т. е. меньше предположеннаго на 67 р. — 49,2 р. = 17,8 р. Замѣняя одинъ билетъ перваго класса билетомъ втораго класса, мы уменьшаемъ цѣнность всѣхъ билетовъ при каждой замѣнѣ на 20 к. Слѣдовательно, чтобы уменьшить цѣнность всей покупки на 17,8 р., нужно столько разъ сдѣлать выше указанную замѣну, сколько разъ 20 содержится въ 1780 т. е. 89 разъ; столько, значитъ, было билетовъ втораго класса, а билетовъ перваго класса было 134 б. — 89 б. = 45 б. Итакъ пассажировъ перваго класса было 45, а втораго класса 89.

Повѣрка. 50 к. $\times$ 45 + 30 к. $\times$ 89 = 49 р. 20 к.

Задача. Отецъ предложилъ сыну 17 задачъ съ условіемъ заплатить ему по 0,15 рубля за каждую задачу, рѣшенную вѣрно и вычитать съ него по 0,2 рубля за каждую задачу, рѣшенную неправильно. Такимъ образомъ, сынъ, по окончаніи рѣшенія предложенныхъ задачъ, получилъ отъ отца только 0,1 рубля. Сколько задачъ сынъ рѣшилъ правильно?

Рѣшеніе.

Еслибы всѣ задачи были рѣшены вѣрно, то сынъ получилъ бы 0,15 р. $\times$ 17 = 2,55 р. Въ дѣйствительности сынъ получилъ 0,1 р. т. е. меньше предложеннаго на 2,55 р. — 0,1 р. = 2,45 р. За каждую не рѣшенную задачу сынъ недополучалъ 0,15 р. и еще самъ приплачивалъ 0,2 р. т. е. онъ терялъ 0,35 р. Всего же сынъ потерялъ 2,45 р., слѣдовательно нерѣшенныхъ задачъ было: 245 : 35 = 7, а вѣрно рѣшенныхъ было 10 задачъ.

Повѣрка 0,15 р. $\times$ 10 — 0,2 р. $\times$ 7 = 0,1 р.

Изъ правила, показывающаго, какого рода задачи рѣшаются этимъ методомъ, слѣдуетъ, что задачи, рѣшаемыя методомъ сравненія, могутъ быть рѣшены и этимъ методомъ.

Задача. Мастеръ сплавилъ два сорта золота: $93^1/_3$ и 78-ой пробы, и получилъ 4,6 золотн. сплава, $91^2/_3{}^0/_0$ котораго составляли вѣсъ чистаго золота. Сколько золота того и другаго сорта мастеръ сплавилъ?

Рѣшеніе:

Опредѣлимъ сначала пробу сплава. Если въ 100 частяхъ сплава $\frac{275}{3}$ частей чистаго золота, то въ 1 части сплава $\frac{275}{300}$ частей чистаго золота, а въ 96 частяхъ сплава чистаго золота въ 96 разъ больше т. е. $\frac{275}{300}$ ч. з. $\times\ 96 = 88$ частей чистаго золота.

Итакъ сплавъ былъ 88-ой пробы.

Еслибы весь слитокъ состоялъ изъ золота перваго сорта, то въ немъ было бы чистаго золота $\frac{280 \times 4{,}6}{3 \times 96}$ золотн. Въ дѣйствительности же должно быть чистаго золота $\frac{88}{96} \times 4{,}6$ золотн. т. е. больше предположеннаго на $\frac{280 \times 4{,}6}{3 \times 96}$ золотн. $-$ $\frac{88 \times 4{,}6}{96}$ золот. $= \frac{4{,}6}{18}$ золотн. Замѣняя въ предположенномъ слиткѣ золотникъ золота перваго сорта золотникомъ втораго сорта, мы увеличиваемъ содержаніе чистаго золота въ смѣси на $\frac{280}{3.96}$ з. $-$ $\frac{78}{96} = \frac{46}{288}$ золотника. Слѣдовательно золотниковъ втораго сорта надо взять столько, сколько разъ $\frac{23}{144}$ содержится въ $\frac{2{,}3}{9}$ т. е. $\frac{2{,}3}{9} : \frac{23}{144} = 1{,}6$ золотн.; а перваго сорта нужно взять: 4,6 золотн. — 1,6 золотн. = 3 золотника.

Повѣрка $\frac{93^1/_3 \text{ золот.} \times 3 + 78 \text{ зол.} \times 1{,}6}{4{,}6} = 88$ золотн.

Въ виду того, что этотъ методъ имѣетъ искусственный характеръ, мнѣ кажется, полезно будетъ вывести его аналитически. Для этого рѣшимъ первую изъ предложенныхъ задачъ.

Чтобы опредѣлить число билетовъ втораго класса, нужно знать: 1) сколько было всѣхъ билетовъ, и 2) сколько было билетовъ перваго класса. Первое изъ этихъ чиселъ извѣстно, именно 134, а чтобы найти второе, нужно знать: 1) насколько больше противъ дѣйствительной стоимости пришлось бы заплатить, еслибы всѣ билеты были перваго класса, и 2) насколько одинъ билетъ перваго класса дороже билета втораго класса. Оба эти числа неизвѣстны.

Чтобы опредѣлить, насколько больше противъ дѣйствительной стоимости нужно уплатить, еслибы всѣ билеты были перваго класса, необ-

Чтобы опредѣлить, насколько одинъ билетъ перваго класса дороже билета втораго класса, нужно знать: 1) стоимость билета перваго класса, ходимо знать: 1) сколько нужно заплатить, еслибы всѣ билеты были перваго класса, и 2) дѣйствительную стоимость билетовъ.

Второе изъ этихъ чиселъ извѣстно, именно 49 р. 20 коп.; первое число неизвѣстно.

Чтобы вычислить, сколько нужно заплатить, еслибы всѣ билеты были перваго класса, необходимо знать: 1) сколько стоилъ одинъ билетъ перваго класса, и 2) сколько было всѣхъ билетовъ.

Эти числа извѣстны: первое 50 коп., второе 134 билета.

и 2) стоимость билета втораго класса. Оба эти числа извѣстны: первое 50 к., второе 30 к.

15. Методъ подобія.

Методъ подобія состоитъ въ выраженіи той истины, что каждая единица какой-либо величины подвергается тѣмъ измѣненіямъ, какимъ, по условію задачи, подвергается вся величина. Напримѣръ, дробь $^3/_5$ можетъ произойти двоякимъ образомъ: или такъ, что 3 единицы раздѣлены на 5 равныхъ частей, или же такъ, что единица раздѣлена на 5 равныхъ частей и такихъ частей взято три. Багодаря такому допущенію мы пріобрѣтаемъ проблему, отъ которой нужно отправиться, чтобы вывести рѣшеніе предложенной. Дѣйствительно, сравнивая результатъ, полученный нами вслѣдствіе допущенія, съ той величиной, которая дана въ задачѣ, мы узнаемъ дѣленіемъ, во сколько разъ искомая величина больше единицы. Методъ подобія удобно прилагается къ тѣмъ задачамъ, условія которыхъ указываютъ, какія дѣйствія надо произвести надъ частями искомаго количества для полученія даннаго результата.

Задача. Капиталистъ отдалъ $^4/_5$ своихъ денегъ по 4% и $^1/_5$ по 6% и, такимъ образомъ, по прошествіи 1 года 8 мѣсяцевъ получилъ съ обѣихъ частей 3080 рублей процентныхъ денегъ. Опредѣлить его первоначальный капиталъ.

Рѣшеніе.

Естественно, что результатъ получится тотже, если мы предположимъ, что изъ каждаго рубля искомаго капитала $^4/_5$ рубля отданы по 4% и $^1/_5$ рубля по 6%.

Если со 100 р. въ 12 мѣс. получается 4 р. приб.

» $^4/_5$ » » 20 » » x » »

1 р. въ 1 мѣс. получается $\frac{4}{100 \times 12}$ р. пр.

$^4/_5$ » » 20 » » $\frac{4 \text{ р.} \quad 4 \times 20}{100 \times 12 \times 5}$ р. пр. $= \frac{4}{75}$ р. пр.

Если со 100 р. въ 12 мѣс. получается 6 р. приб.
» $^1/_5$ » » 20 » » x » »

---

1 р. въ 1 мѣс. получается $\frac{6}{100 \cdot 12}$ р. пр.

$^1/_5$ » » 20 » » $\frac{6 \cdot 20}{100 \cdot 12 \cdot 5}$ р. пр. $= \frac{1}{50}$ р. пр.

Итакъ $^4/_5$ руб. приносятъ $\frac{4}{75}$ р. прибыли, а $^1/_5$ руб. приноситъ $\frac{1}{50}$ р. пр.; поэтому каждый рубль искомаго капитала приноситъ: $\frac{4}{75}$ р. $+ \frac{1}{50}$ р. $= \frac{11}{150}$ р. Но весь капиталъ принесъ не $\frac{11}{150}$ р. прибыли, а 3080 р., слѣдовательно онъ долженъ быть больше единицы во столько разъ, сколько разъ $\frac{11}{150}$ заключается въ 3080 т. е. $3080 : \frac{11}{150} = 42000$ разъ. Значитъ искомый капиталъ равнялся 42000 рублямъ.

Повѣрка. Сумма процентныхъ денегъ съ $^4/_5$ и $^1/_5$ найденнаго капитала должна равняться 3080 рублямъ.

Задача. Купецъ имѣлъ цибикъ чаю, фунтъ котораго ему стоилъ $1^4/_5$ рубля. Продавъ $\frac{7}{12}$ всего чаю, находившагося въ цибикѣ, по $2^2/_5$ рубля за фунтъ, и весь остальной чай по $1^1/_2$ рубля за фунтъ, купецъ получилъ $15^3/_4$ рубля прибыли отъ продажи всего чаю. Сколько фунтовъ чаю было въ цибикѣ?

Рѣшеніе.

Примемъ, что изъ каждаго фунта онъ продавалъ $\frac{7}{12}$ фунта по $2^2/_5$ р. за фунтъ и $\frac{5}{12}$ фунта по $1^1/_2$ р. за фунтъ. Изъ этого предположенія слѣдуетъ, что за одинъ фунтъ купецъ получилъ: $2^2/_5$ р. $^7/_2$ + $1^1/_2$ р. $\frac{5}{12}$ $= \frac{81}{40}$ руб. Но ему самому фунтъ стоилъ $1^4/_5$ р., значитъ на одномъ фунтѣ онъ получилъ $\frac{81}{40}$ р. — $^9/_5$ р. $= \frac{9}{40}$ р. прибыли, а отъ продажи всего чаю онъ получилъ $15^3/_4$ р. прибыли, слѣдовательно фунтовъ было $15^3/_4 : \frac{9}{40} = 70$ ф.

Повѣрка. $(2^3/_5 \text{ р.} \times 70 \times \frac{7}{12} + 1^1/_2 \text{ р.} \times 70 \times \frac{5}{12})$ — $1^4/_5$ р. 70 $= 15^3/_4$ р.

16. Методы опредѣленія общаго срока платежа.

Общимъ, или среднимъ срокомъ платежа называется срокъ общаго векселя, замѣняющаго нѣсколько векселей, сроки которыхъ различны. Принципъ методовъ опредѣленія общаго срока платежа состоитъ въ нахожденіи такого срока платежа, чтобы ни должникъ, ни заимодавецъ не потерпѣли убытку. Этотъ принципъ легъ въ основаніи двухъ методовъ.

1) Методъ Лукаса Паччоли*).

Еслибы должникъ уплатилъ всѣ деньги въ первый срокъ, то онъ потерялъ бы процентныя деньги съ остальныхъ капиталовъ за время отъ перваго срока до остальныхъ сроковъ.

Найдя сумму этихъ процентныхъ денегъ, ищутъ время, въ которое весь капиталъ принесетъ такую же прибыль. Поэтому, придавъ къ первому сроку, найденное такимъ образомъ время, мы получимъ время платежа всего долга.

Задача. Купецъ долженъ былъ заплатить фабриканту: 2450 рублей по 4% черезъ 10 мѣсяцевъ, 1200 рублей по $3^1/_2\%$ черезъ 1 годъ 2 мѣсяца и 560 рублей по 5% черезъ 1 годъ 4 мѣсяца. Черезъ сколько времени купецъ могъ бы заплатить всю сумму заразъ?

Рѣшеніе.

Еслибы купецъ уплатилъ всю сумму черезъ 10 мѣсяцевъ, то онъ потерялъ бы: 1) процентныя деньги съ 1200 рублей по $3^1/_2\%$ за 4 мѣсяца т. е. 14 рублей и 2) процентныя деньги съ 560 рублей по 5% за 6 мѣсяцевъ т. е. 14 рублей. Значитъ всего купецъ потерялъ бы 28 рублей. Но съ 2450 руб. по 4% получится въ 1 мѣсяцъ $\frac{49}{6}$ рублей прибыли; съ 1200 по $3^1/_2\%$ получится въ 1 мѣсяцъ $\frac{21}{6}$ руб. прибыли и съ 560 руб. по 5% получится въ 1 мѣсяцъ $^4/_3$ руб. прибыли. Слѣдовательно съ всего капитала въ 1 мѣсяцъ получится: $\frac{49}{5}$ р. $+$ $\frac{21}{6}$ р. $+$ $^3/_4$ р. $=$ 14 руб. прибыли, а чтобы получить 28 рублей, надо $28 : 14 = 2$ мѣсяца. Значитъ всѣ деньги купецъ можетъ уплатить черезъ 10 м. $+$ 2 м. т. е. черезъ 1 годъ.

Чтобы повѣрить задачу, нужно вычислить прибыль со всего капитала за 1 годъ и она должна равняться суммѣ прибылей: съ первой и второй части капитала за 2 мѣсяца и съ третьей части за 4 мѣсяца.

2) Второй способъ, о которомъ упоминаютъ уже Видманъ и Тарталья, болѣе простъ. Онъ состоитъ въ томъ, что дѣйствія производятся не съ прибылью, но съ произведеніемъ изъ капитала на время, т. е. узнается, какой долженъ быть капиталъ, чтобы прибыль съ него въ единицу времени равнялась прибыли съ частей этого капитала за извѣстное время. Произведеніе изъ капитала на время будемъ называть «процентнымъ числомъ» (Zinsnummer).

Задача. Нѣкто, купивъ товару на 1200 рублей, обязался уплатить 800 рублей черезъ 7 мѣсяцевъ и остальные 400 рублей черезъ 10 мѣсяцевъ послѣ покупки товара. Черезъ сколько времени онъ могъ бы уплатить заразъ всю сумму 1200 рублей?

---

*) Lucas de Burgo. Summa de Arithmetica, geometria, proportione et proportionalitate. Venet. 1494.

Рѣшеніе:

800 рублей въ 7 мѣсяцевъ принесутъ столько прибыли, сколько капиталъ въ 7 разъ большій, или 5600 рублей въ 1 мѣсяцъ.

400 рублей въ 10 мѣсяцевъ принесутъ столько же прибыли, сколько капиталъ въ 10 разъ большій, или 4000 рублей въ 1 мѣсяцъ.

Слѣдовательно съ 800 руб. въ 7 мѣсяцевъ и съ 400 руб. въ 10 мѣсяцевъ получится столько прибыли, сколько съ 9600 руб. въ 1 мѣсяцъ; значитъ, чтобы со всего капитала т. е. 1200 р., получить столько прибыли, сколько съ 9600 руб. въ 1 мѣсяцъ, нужно, чтобы этотъ капиталъ находился въ оборотѣ $\frac{9600}{1200}$ м. $=$ 8 мѣсяцевъ.

Отсюда видимъ, что для опредѣленія общаго срока платежа слѣдуетъ умножить каждый капиталъ на соотвѣтствующее ему время до срока и сумму процентныхъ чиселъ раздѣлить на сумму капиталовъ.

Этимъ методомъ рѣшаются и обратныя задачи, въ которыхъ по данному среднему сроку платежа требуется опредѣлить капиталъ, уплаченный въ этотъ срокъ.

Задача. Купецъ долженъ былъ заплатить 1376 рублей черезъ 5 мѣсяцевъ, 2560 р. черезъ 8 м., а остальныя деньги черезъ 13 мѣсяцевъ; онъ расчиталъ, что вмѣсто этого можетъ отдать весь долгъ черезъ 10 мѣсяцевъл Какъ великъ былъ долгъ?

Рѣшеніе:

Платя весь долгъ въ 10 мѣс., купецъ терпитъ убытокъ, равный той прибыли, которую могли бы дать капиталы 1376 р. въ 5 мѣс. и 2560 р. въ 2 мѣс., или капиталъ 1376×5 р. $+$ 2560×2 р. $=$ 12000 р. въ 1 мѣсяцъ. Этотъ убытокъ вознаграждается прибылью, которую купецъ получаетъ отъ того, что остальныя деньги уплачиваетъ тремя мѣсяцами раньше. Значитъ прибыль съ неизвѣстнаго капитала въ 3 мѣсяца равняется прибыли съ 12000 р. въ 1 мѣсяцъ, а потому неизвѣстный капиталъ равняется 12000 р. : 3 $=$ 4000 р., а весь долгъ $=$ 7936 р.

17. Методъ измѣненія данной величины.

Методъ измѣненія данной величины*) состоитъ въ томъ, что одну изъ

---

*) Этотъ методъ ведетъ свое начало отъ Римлянъ. См. Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer. Въ 18-мъ столѣтіи онъ имѣлъ широкое примѣненіе при производствѣ дѣленія и умноженія. Clausberg въ Demonstrative Rechenkunst 1772 приводитъ такой примѣръ: 22987822 : 997; 22987822 : (1000—3) = 23056

$$\begin{array}{l} 3047 \\ \ \ 5682 \\ \ \ \underline{\ 6972\ } \\ \ \ \ 990 \text{ остатокъ.} \end{array}$$

Достойно удивленія, замѣчаетъ по этому поводу Унгеръ, что этотъ методъ не практикуется въ настоящее время. Unger. Die Methodik der praktischen Arithmetik.

данныхъ величинъ измѣняютъ такъ, чтобы этимъ упростить нахожденіе или вычисленіе неизвѣстнаго числа.

Такъ какъ найденная такимъ образомъ неизвѣстная величина будетъ отличаться отъ истинной, то ее исправляютъ по разности между истиннымъ значеніемъ данной величины и измѣненнымъ. Этотъ методъ употребляется часто при умственныхъ вычисленіяхъ. Положимъ, напримѣръ, что нужно 127 помножить на 999. Еслибы множитель былъ не 999, а 1000, то произведеніе было бы 127000. Поэтому, для полученія истиннаго произведенія, нужно вычесть 127 изъ 127000 и получимъ 126873. Трудно перечислить тѣ случаи, въ которыхъ этотъ методъ приноситъ пользу; замѣчу только, что его можно приложить къ тѣмъ вопросамъ, въ которыхъ нужно опредѣлить, сколько разъ къ предъидущему и послѣдующему члену даннаго отношенія нужно прибавить или отнять данную величину, чтобы это отношеніе измѣнилось въ другое, напередъ заданное.

Задача. Сколько разъ по 2 нужно прибавить къ числителю и знаменателю дроби $\frac{17}{3}$, чтобы она обратилась въ 3?

Рѣшеніе:

Еслибы числитель съ самаго начала былъ втрое больше знаменателя, то для сохраненія того же отношенія, нужно было бы, прибавляя къ знаменателю по 2, прибавлять къ числителю по 6 т. е. каждый разъ лишнихъ 4 единицы. Но такъ какъ числитель уже теперь имѣетъ сверхъ 9 еще лишнихъ 8 единицъ, значитъ прибавлять нужно $8:4=2$ раза т. е. если мы къ числителю и знаменателю прибавимъ 2 раза по 2 т. е. 4, то получимъ $\frac{17+4}{3+4}=3$.

Задача. Въ одномъ закромѣ 82 мѣры ржи, а въ другомъ 13 мѣръ. Сколько разъ нужно прибавлять въ оба закрома по 5 мѣръ, чтобы въ первомъ оказалось въ четыре раза больше, чѣмъ во второмъ?

Рѣшеніе:

Еслибы въ первомъ закромѣ съ самаго начала было въ четыре раза больше, чѣмъ во второмъ, т. е. 52 мѣры, то для сохраненія того же отношенія, нужно было бы, прибавляя во второй закромъ по 5 мѣръ, прибавлять въ первый по 20 мѣръ, т. е. каждый разъ по 15 мѣръ лишнихъ. Но такъ какъ въ первомъ закромѣ уже теперь имѣется сверхъ 52 мѣръ еще 30 мѣръ лишнихъ, то, значитъ, для установленія требуемаго отношенія нужно прибавить въ оба закрома по 5 мѣръ 2 раза.

Повѣрка. Прибавивъ 10 мѣръ къ 82 м., получимъ 92 м.; прибавивъ 10 м. къ 13 м., получимъ 23 мѣры; но 92 больше 23 въ 4 раза.

Методъ разложенія на первоначальныхъ производителей.

Методъ разложенія на первоначальныхъ производителей состоитъ въ томъ, что данное число разлагается на первоначальныхъ производителей и находятъ всѣхъ точныхъ дѣлителей этого числа какъ простыхъ, такъ и сложныхъ.

Покажемъ, какъ слѣдуетъ находить дѣлителей. Пусть, напримѣръ, требуется составить всѣхъ дѣлителей числа 480, или $2^5 \times 3 \times 5$. Напишемъ таблицу, имѣющую столько линій, сколько число содержитъ различныхъ первоначальныхъ производителей; при этомъ каждая линія составляется изъ единицы и послѣдовательныхъ степеней одного изъ производителей даннаго числа, начиная отъ первой его степени и оканчивая тою, которая соотвѣтствуетъ ему въ разложеніи даннаго числа. Въ данномъ случаѣ получимъ:

1, 2, 4, 8, 16, 32
1, 3
1, 5.

Послѣ этого умножимъ всѣ числа первой линіи на каждое изъ чиселъ второй; затѣмъ найденныя произведенія на каждое изъ чиселъ третьей линіи и т. д. до тѣхъ поръ, пока не возьмемъ всѣхъ линій таблицы. Тогда послѣднія произведенія и будутъ всѣми дѣлителями даннаго числа.

Такимъ образомъ найдемъ, что число 480 имѣетъ слѣдующихъ дѣлителей:

1,	2,	4,	8,	16,	32
3,	6,	12,	24,	48,	96
5,	10,	20,	40,	80,	160
15,	30,	60,	120,	240,	480.

Найденные въ такомъ порядкѣ дѣлители обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: Произведеніе двухъ дѣлителей, равноотстоящихъ отъ начала и конца, равняется данному числу. Это свойство облегчаетъ нахожденіе искомыхъ дѣлителей. Дѣйствительно, методъ этотъ прилагается къ такого рода вопросамъ, въ которыхъ, по данному произведенію двухъ цѣлыхъ чиселъ и ихъ суммѣ или разности, требуется найти эти числа. Поэтому, найдя всѣхъ дѣлителей даннаго числа, легко отыскать такую пару дѣлителей, равноотстоящихъ отъ начала и конца, коихъ сумма или разность равнялась бы данному числу.

Задача. Найти два числа, сумма которыхъ 45, а произведеніе 476.

Рѣшеніе:

Разложимъ 476 на первоначальныхъ производителей.

	2	2	7	17
476	238	119	17	1.

Такимъ образомъ $476 = 2 \times 2 \times 7 \times 17$. Найдя по указанному способу всѣхъ дѣлителей, получимъ: 1, 2, 4, 7, 14, 28, 17, 34, 68, 119, 238, 476.

Такъ какъ произведеніе этихъ дѣлителей, равноотстоящихъ отъ начала и конца, равняется данному числу 476, то изъ шести паръ мы выберемъ только ту, которая въ суммѣ даетъ 45. Такая пара 28 и 17.

Задача. Произведеніе двухъ чиселъ 1584, а разность ихъ 8. Найти эти числа.

Рѣшеніе.

Разложивъ 1584 на первоначальныхъ производителей, получимъ:

$$1584 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11.$$

Напишемъ таблицу: 1, 2, 4, 8, 16
1, 3, 9
1, 11.

Перемноживъ эти числа въ указанномъ порядкѣ, получимъ слѣдующихъ дѣлителей:

1,	2,	4,	8,	16
3,	6,	12,	24,	48
9,	18,	36,	72,	144
11,	22,	44,	88,	176
33,	66,	132,	264,	528
99,	198,	396,	792,	1584.

Такъ какъ произведеніе двухъ дѣлителей, равноотстоящихъ отъ начала и конца, равняется 1584, то выбравъ тѣхъ изъ нихъ, которыхъ разность 8, получимъ 44 и 36.

Задача. Куплено два куска ситцу: первый кусокъ за 1 р. 35 коп., второй за 72 коп. Сколько аршинъ каждаго куплено, если извѣстно, что въ первомъ кускѣ было 3-мя аршинами болѣе и аршинъ 3-мя копѣйками дороже, чѣмъ во второмъ кускѣ.?

Рѣшеніе:

Произведеніе искомыхъ чиселъ 72; если каждаго изъ производителей увеличу на 3, то произведеніе будетъ 135. Этимъ условіемъ воспользуемся для нахожденія суммы искомыхъ производителей.

Разсмотримъ, что сдѣлается съ произведеніемъ, когда я ко множимому и множителю прибавлю поровну, въ данномъ случаѣ по 3. Прибавлю сперва 3 къ множителю; въ такомъ случаѣ произведеніе увеличится на 3 множимыхъ. Если теперь прибавлю 3 единицы къ множимому, произведеніе увеличится на 3 новыхъ множителя, или на 3 прежнихъ множителя, да еще на 9 единицъ. Итакъ, произведеніе увеличится на 3 множимыхъ, на 3 множителя и на 9 единицъ — всего, по условію задачи, на $135-72=63$ единицы. Слѣдовательно 3 множимыхъ и 3 множителя равны $63-9=54$ единицамъ; откуда находимъ, что множимое и множитель равны $54:3=18$.

Итакъ произведеніе двухъ чиселъ 72, а сумма ихъ 18.

Но $72 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$.

1, 2, 4, 8
1, 3, 9.

Дѣлители слѣдующіе:

1,	2,	4,	8
3,	6,	12,	24
9,	18,	36,	72.

Искомыя числа 6 и 12.

Въ первомъ кускѣ было 6 арш. + 3 арш. = 9 арш. по 15 коп. аршинъ, а во второмъ кускѣ 6 аршинъ по 12 копѣекъ.

18. Методъ введенія средне-геометрическаго числа.

Методъ введенія средне-геометрическаго состоитъ въ томъ, что произведеніе двухъ неравныхъ чиселъ приводятъ къ произведенію равныхъ чиселъ дѣленіемъ произведенія на отношеніе этихъ чиселъ. Квадратный корень изъ этого произведенія или средне-геометрическое и представляетъ меньшее число; большее же получимъ, умноживъ меньшее на кратное отношеніе.

Этотъ методъ прилагается въ тѣхъ случаяхъ, когда опредѣляютъ два числа по ихъ произведенію и частному. Алгебраическое рѣшеніе такихъ задачъ приводится къ квадратнымъ уравненіямъ.

Задача. Произведеніе двухъ чиселъ 1200, а отношеніе ихъ 3. Найти эти числа.

Рѣшеніе:

Раздѣливъ произведеніе 1200 на 3, получимъ 400, что и представляетъ квадратъ меньшаго числа.

Сталобыть, меньшее число равняется квадратному корню*) изъ 400 т. е. 20, а большее 20.3 = 60.

Задача. Площадь прямоугольника содержитъ 1440 кв. фут. и одна сторона его въ $^8/_5$ раза больше другой. Опредѣлить стороны прямоугольника.

Рѣшеніе:

Такъ какъ площадь прямоугольника равняется произведенію двухъ его сторонъ, то 1440 есть произведеніе искомыхъ чиселъ, коихъ отношеніе $^8/_5$. Квадратъ меньшаго числа получимъ, раздѣливъ 1440 на $^8/_5$, а меньшее число получимъ, извлекая квадратный корень изъ 900. Итакъ меньшее число равнялось 30 фут., а большее 30 фут. $\times$ $^8/_5$ = 48 фут.

Примѣчаніе.

Раньше такого рода задачи рѣшались очень сложнымъ способомъ, названнымъ «regula falsi», который состоялъ въ подстановкѣ вмѣсто неизвѣстнаго двухъ произвольныхъ значеній. По разностямъ между дѣйствительнымъ результатомъ и полученнымъ вслѣдствіе предположенія можно было найти истинное значеніе неизвѣстнаго числа. Примѣненіе этого правила къ задачамъ, алгебраическое рѣшеніе которыхъ приводитъ къ уравненіямъ второй и третьей степени, впервые встрѣчаемъ у Геммы Фризія 1540, а послѣ у Стифеля 1544. Гемма приписываетъ себѣ честь открытія въ слѣдующихъ словахъ: «Et jam finem facerem, nisi in memoriam veniret promissionis de Regula falsi, qua ratione ea liceat uti in exemplis secundae, tertiae et quartae regulae qua vocat Cos (алгебра), quod ante nos nemo tentavit.

Чтобы познакомить съ методомъ двойнаго примѣненія «regulae falsi», приведу примѣръ, заимствованный у Стифеля (Arithmetica integra 1544).

---

*) Квадратомъ какого либо числа называется произведеніе двухъ производителей, равныхъ этому числу. Поэтому, для незнающихъ правила извлеченія квадратнаго корня можно посовѣтовать слѣдующій способъ: разложить данное число на простыхъ множителей и изъ всякой пары равныхъ множителей взять по одному множителю; произведеніе этихъ множителей и дастъ квадратный корень изъ даннаго числа. Напримѣръ $400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$; слѣдовательно квадратный корень изъ 400 равняется $2 \times 2 \times 5 = 20$.

Найти два числа, которыхъ произведеніе 864 и которыя находятся въ отношеніи $1 : 1^1/_2$.

I			II	
2	4		10368	576
3	6		23328	1296
858	840		4	16
18			9	36
			858	840
			18	

Возьмемъ два произвольныхъ числа 2 и 4, соотвѣтствующія имъ числа, удовлетворяющія отношенію $1 : 1^1/_2$, будутъ 3 и 6. Произведенія этихъ чиселъ отличаются отъ истиннаго произведенія на 858 и 840, разность коихъ 18. Во второй схемѣ возьмемъ квадраты чиселъ первой схемы. Разность между ними будетъ соотвѣтственно: $16 - 4 = 12$ и $36 - 9 = 27$. $864 \times 12 = 10368$; $864 \times 27 = 23328$; $\frac{10368}{18} = 576$; $\frac{23328}{18} = 1296$. Квадратные корни изъ частныхъ 576 и 1296 сутъ 24 и 36, которыя и будутъ искомыми числами.

Изъ предъидущаго видно, что способъ этотъ несравненно сложнѣе предложеннаго мною способа.