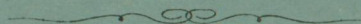


2371.

UEBER

**DIE PERIODEN DER ELLIPTISCHEN INTEGRALE**


ERSTER UND ZWEITER GATTUNG.



VON

**D<sup>R</sup>. HEINRICH BRUNS,**

OBSERVATOR AN DER STERNWARTE ZU DORPAT.



DORPAT 1875.

DRUCK VON C. MATTIESEN.

1802

LC 20965

UEBER

# DIE PERIODEN DER ELLIPTISCHEN INTEGRALE

ERSTER UND ZWEITER GATTUNG.

VON

DR. HEINRICH BRUNS,

OBSERVATOR AN DER STERNWARTE ZU DORPAT.

DORPAT 1875.

DRUCK VON C. MATTIESEN.

517.9

AR  
H. B. Kretzschold  
alm. ENSV Mikik  
Roamotukogu

79 547

1-375  
Bruch

Den Druck gestattet

im Namen der physiko-mathematischen Facultät

Decan Dr. L. Schwarz.

Dorpat den 30. April 1875.

№ 33.

Zur

**Feier des Tages,**

an welchem vor

fünfzig Jahren

**Victor Jakowlewitsch Buniakowsky,**

Geheimer Rath und Vicepräsident der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg,

von der Universität zu Paris

zum

**Doctor der mathematischen Wissenschaften**

promovirt ward,

glückwünschend dargebracht

von der

**physiko-mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität**

in Dorpat,

**am 19. Mai 1875.**

## Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

Bei Gelegenheit einer Untersuchung über die säcularen Störungen der Bahnelemente periodischer Kometen wurde ich auf die Aufgabe geführt, die Perioden der zu der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{du} = y, \quad y^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' \quad 1)$$

gehörigen Integrale erster und zweiter Gattung analytisch darzustellen unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten in  $y^2$  gegebene rationale Functionen eines unbeschränkt veränderlichen Parameters  $\xi$  sind. Wenn man um die Untersuchung zu vereinfachen von der üblichen Normalform

$$\frac{dx}{du} = K\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

obiger Differentialgleichung ausgeht, so werden die Perioden, abgesehen von dem Factor  $K$ , Functionen von  $k$  allein. Hierbei ist es jedoch lästig, dass  $K$  und  $k$  immerhin nicht ganz einfache algebraische Functionen von  $A, B, C, B'$  und  $A'$  werden, deren explicite Darstellung die Auflösung der Gleichung  $y^2 = 0$  voraussetzt. Dieser Uebelstand lässt sich jedoch vermeiden, wenn man von derjenigen Normalform der Gleichung 1) ausgeht, welche Herr Prof. Weierstrass seinen Vorlesungen über elliptische Functionen zu Grunde legt. Die Perioden lassen sich dann mit Hülfe hypergeometrischer Reihen darstellen, deren viertes Element eine einfache lineare Function der absoluten Invariante von  $y^2$  ist.

I.

Zunächst mögen hier diejenigen auf die Weierstrass'sche Normalform bezüglichen Formeln zusammengestellt werden, welche für die folgenden Entwicklungen nöthig sind. Führt man in 1) statt  $x$  die Veränderliche  $s$  ein, welche mit  $x$  durch eine Gleichung von der Form

$$(px^2 + qx + r)s^2 + (p'x^2 + q'x + r')s + p''x^2 + q''x + r'' = 0$$

verbunden ist, so lassen sich die  $p, q, r \dots$  so als Functionen der  $A, B, C, B', A'$  und einer willkürlichen Constante bestimmen, dass

$$\frac{dx}{y} = \frac{ds}{t}, \quad t^2 = 4s^3 - g_2s - g_3$$

wird, wo

$$g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2, \quad g_3 = ACA' + 2BCB' - AB'B' - A'BB - C^3$$

die beiden fundamentalen Invarianten von  $y^2$  bedeuten. 1) geht dann über in

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}, \quad 2)$$

und die Integrale erster und zweiter Gattung nehmen die Gestalt

$$\int \frac{ds}{t} \quad \text{und} \quad - \int \frac{s ds}{t} \quad 3)$$

an. Bezeichnet man mit  $pu$  diejenige zu 2) gehörige elliptische Function, welche für  $u = 0$  unendlich wird und die sich für kleine Werthe von  $u$  durch die Potenzreihe

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{20} + \frac{g_3 u^4}{28} + \dots$$

darstellen lässt, so existirt eine beständig convergente Potenzreihe

$$\sigma u = u - \frac{g_2 u^5}{2 \cdot 5!} - \frac{6g_3 u^7}{7!} - \dots,$$

welche der Bedingung

$$pu = - \frac{d^2}{du^2} \log \sigma u$$

genügt. — Sind  $e_1, e_2, e_3$  die Wurzeln der Gleichung  $t^2 = 0$ , also

$$4s^3 - g_2s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3),$$

so ist

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \quad e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{4}g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4}g_3, \\ (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 &= \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = \frac{27}{16}g_3^2(g - 1), \end{aligned} \quad 4)$$

wo

$$g = \frac{g_2^3}{27g_3^2}$$

die absolute Invariante von  $y^2$  bedeutet. Wenn  $g_2$  und  $g_3$  reell sind, so sind für  $g > 1$  alle drei Wurzeln reell, für  $g < 1$  dagegen nur eine. Wenn  $g = 1$  und  $g_3$  von Null verschieden, so sind zwei Wurzeln einander gleich; wenn jedoch die Discriminante verschwindet, indem  $g_2$  und  $g_3$  gleichzeitig gleich Null werden, so sind alle drei Wurzeln einander gleich. — Es seien nun  $L$  und  $L'$  zwei einfache geschlossene Curven in der Ebene der  $s$ , von denen die erste nur die Punkte  $e_2$  und  $e_3$ , die zweite nur  $e_1$  und  $e_2$  einschliesst, ohne diese Punkte zu berühren, dann sind die Werthe  $2\omega$ ,  $2\omega'$ ,  $2\eta$ ,  $2\eta'$  der längs  $L$  und  $L'$  genommenen Integrale 3) Fundamentalperioden der Integrale erster und zweiter Gattung. Wenn wir hierbei annehmen, dass, falls  $e_1, e_2, e_3$  in gerader Linie liegen,  $e_2$  zwischen  $e_1$  und  $e_3$  liege, so können wir auch schreiben

$$\omega = \int_{e_2}^{e_3} \frac{ds}{t}, \quad \omega' = \int_{e_2}^{e_1} \frac{ds}{t}, \quad \eta = - \int_{e_3}^{e_2} \frac{s ds}{t}, \quad \eta' = - \int_{e_2}^{e_1} \frac{s ds}{t}, \quad 5)$$

wo die Integration längs der geradlinigen Strecken  $e_3 e_2$ ,  $e_2 e_1$  auszuführen ist. Das Vorzeichen von  $t$  ist hierbei vorläufig gleichgültig, nur muss es für  $\omega$  und  $\eta$ , sowie für  $\omega'$  und  $\eta'$  dasselbe sein. Es möge jedoch so bestimmt werden, dass in der Gleichung

$$\eta \omega' - \eta' \omega = \pm \frac{\pi i}{2} \quad 6)$$

das obere Zeichen gilt. Ferner soll, wenn  $e_1, e_2, e_3$  reell sind,  $e_1 > e_2 > e_3$  sein und das Vorzeichen so gewählt werden, dass  $\omega$  und damit auch  $\eta$  positiv reell wird;  $\omega'$  und  $\eta'$  sind dann resp. positiv und negativ rein imaginär. — Ferner gelten dann die Relationen

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = \frac{\sigma'u}{\sigma u} + 2\eta, \quad \frac{\sigma'(u+2\omega')}{\sigma(u+2\omega')} = \frac{\sigma'u}{\sigma u} + 2\eta', \quad 7)$$

$$p\omega = e_1, \quad p(\omega + \omega') = e_2, \quad p\omega' = e_3,$$

und wenn man für den Augenblick  $p\omega_a = e_a$  schreibt,

$$(pu - e_a)(p(u + \omega_a) - e_a) = (e_a - e_\beta)(e_a - e_\gamma). \quad 8)$$

Hieraus ergibt sich für eine längs  $L$  und  $L'$  vorgenommene Integration

$$\int \frac{1}{s - e_a} \frac{ds}{t} = -2 \frac{e_a \omega + \eta}{(e_a - e_\beta)(e_a - e_\gamma)}, \quad \int \frac{1}{s - e_a} \frac{ds}{t} = -2 \frac{e_a \omega' + \eta'}{(e_a - e_\beta)(e_a - e_\gamma)}. \quad 9)$$

Endlich hat man, wenn

$$h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3} = 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{7}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + \dots$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \dots$$

Hieraus folgt, dass, wenn  $e_2 - e_3 = k(e_1 - e_3)$  gesetzt wird,  $h$  sich in der Form

$$\frac{k}{16} + k \mathfrak{P}(k) \tag{10}$$

darstellen lässt, wo  $\mathfrak{P}(k)$  eine nach ganzen positiven Potenzen von  $k$  fortschreitende Reihe bedeutet.

Wenn nun  $g_2$  und  $g_3$  gegebene Functionen von  $\xi$  sind, so erhält man durch Differentiiren der längs des Weges  $L$  genommenen Integrale 3) nach  $\xi$

$$2 \frac{d\omega}{d\xi} = \int \frac{g_2' s + g_3'}{2t^2} \frac{ds}{t}, \quad 2 \frac{d\eta}{d\xi} = - \int \frac{g_2' s + g_3'}{2t^2} \frac{s ds}{t},$$

wo

$$\frac{dg_2}{d\xi} = g_2', \quad \frac{dg_3}{d\xi} = g_3'$$

gesetzt ist. Da nun

$$\frac{1}{2t^2} = \frac{1}{8} \Sigma \frac{1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \frac{1}{s - e_1},$$

$$\frac{s}{2t^2} = \frac{1}{8} \Sigma \frac{e_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \frac{1}{s - e_1},$$

$$\frac{s^2}{2t^2} = \frac{1}{8} \Sigma \frac{e_1^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \frac{1}{s - e_1},$$

so wird

$$\int \frac{ds}{2t^3} = - \frac{1}{4} \Sigma \frac{e_1 \omega + \eta}{(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2},$$

$$\int \frac{s ds}{2t^3} = - \frac{1}{4} \Sigma \frac{e_1^2 \omega + e_1 \eta}{(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2},$$

$$\int \frac{s^2 ds}{2t^3} = - \frac{1}{4} \Sigma \frac{e_1^3 \omega + e_1^2 \eta}{(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2},$$

oder es ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\xi} &= -P\eta - Q\omega, & \frac{d\eta}{d\xi} &= R\omega + Q\eta, \\ \text{und analog} \quad \frac{d\omega'}{d\eta} &= -P\eta' - Q\omega', & \frac{d\eta'}{d\xi} &= R\omega' + Q\eta', \end{aligned} \right\} \tag{11}$$



$$\text{wo } P = \frac{1}{8} \Sigma \frac{g_2' e_1 + g_3'}{(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2}, \quad Q = \frac{1}{8} \Sigma \frac{g_2' e_1^2 + g_3' e_1}{(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2}, \quad R = \frac{1}{8} \Sigma \frac{g_2' e_1^3 + g_3' e_1^2}{(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2}.$$

Führt man statt der Wurzeln ihre symmetrischen Functionen ein, so wird

$$\left. \begin{aligned} 8 (g_2^3 - 27 g_3^2) P &= -36 g_3 g_2' + 24 g_2 g_3', \\ 8 (g_2^3 - 27 g_3^2) Q &= 2 g_2^2 g_2' - 36 g_3 g_3', \\ 8 (g_2^3 - 27 g_3^2) R &= -3 g_2 g_3 g_2' + 2 g_2^2 g_3'. \end{aligned} \right\} \quad 12)$$

Substituirt man nun in 11) für  $\omega$  und  $\gamma$  resp.

$$\Omega g_3^{-\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} \text{ und } H g_3^{\frac{1}{2}},$$

so lassen sich die Coefficienten der so entstehenden Differentialgleichungen durch  $g$  allein und seine nach  $\xi$  genommene Ableitung ausdrücken, und man erhält

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\xi} &= \frac{g'}{6g(g-1)} H - g' \left( \frac{1}{12(g-1)} + \frac{1}{3g} \right) \Omega, \\ \frac{dH}{d\xi} &= \frac{g'}{12(g-1)} H - \frac{g'}{24(g-1)} \Omega. \end{aligned} \right\} \quad 13)$$

Wenn  $g$  von  $\xi$  unabhängig, also  $g' = 0$  wäre, so würden auch  $\Omega$  und  $H$   $\xi$  nicht enthalten, folglich die Perioden einfache algebraische Functionen von  $\xi$  sein. Diesen Ausnahmefall wollen wir hier nicht weiter berücksichtigen und  $g$  als unabhängige Veränderliche einführen, indem wir für  $g'd\xi$   $dg$  schreiben. Eliminirt man dann aus den beiden Gleichungen 13) der Reihe nach  $H$  und  $\Omega$ , so erhält man

$$\left. \begin{aligned} 0 &= g(g-1) \frac{d^2\Omega}{dg^2} + \left( \frac{7}{3}g - \frac{4}{3} \right) \frac{d\Omega}{dg} + \frac{55}{144} \Omega, \\ 0 &= g(g-1) \frac{d^2H}{dg^2} + \left( \frac{4}{3}g - \frac{1}{3} \right) \frac{dH}{dg} - \frac{5}{144} H. \end{aligned} \right\} \quad 14)$$

Diese Gleichungen sind aber weiter nichts, als die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$0 = x(x-1) \frac{d^2F}{dx^2} + (x(\alpha + \beta + 1) - \gamma) \frac{dF}{dx} + \alpha\beta F, \quad 15)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{11}{12}, \quad \beta = \frac{5}{12}, \quad \gamma = \frac{4}{3}, \\ \alpha &= \frac{5}{12}, \quad \beta = -\frac{1}{12}, \quad \gamma = \frac{1}{3}, \end{aligned} \right\} \alpha + \beta = \gamma,$$

oder

zu setzen ist.  $\Omega$  und  $H$  haben also, als Functionen von  $g$  betrachtet, in der ganzen Zahlenebene den Charakter ganzer rationaler Functionen; Ausnahmestellen können nur die Punkte 0, 1,  $\infty$  sein. Zur Ermittlung der vollständigen Integrale

von 14) ist jetzt weiter nichts erforderlich, als aus den bekannten Gaussischen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe die verschiedenen Ausdrücke zu entnehmen, welche für die Umgebung der Ausnahmestellen gültige Darstellungen der particulären Integrale liefern, und die Integrationsconstanten zu bestimmen. Der Uebersichtlichkeit halber mögen zunächst die hierher gehörigen Formeln aus der zweiten Gaussischen Abhandlung kurz zusammengestellt werden.

## II.

Zu der Differentialgleichung 15) gehören für die Umgebung des Punktes  $x=0$  die beiden particulären Integrale

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right), \quad 16)$$

$$\begin{aligned} x^{1-\gamma} F\left(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x\right) &= x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right) \\ &= x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right). \end{aligned} \quad 17)$$

Diese Darstellungen sind gültig für alle  $x$  innerhalb eines um den Nullpunkt mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreises, resp. innerhalb derjenigen Halbebene, welche auf der negativen Seite der durch den Punkt  $x=\frac{1}{2}$  senkrecht zur Axe der reellen Zahlen gezogenen Geraden liegt.

In der Umgebung des Punktes  $x=1$  hat man die particulären Integrale

$$\begin{aligned} F\left(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x\right) &= x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right) \\ &= x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right), \end{aligned} \quad 18)$$

und, weil  $\alpha+\beta=\gamma$ ,

$$F\left(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x\right) \log(x-1) + G(\alpha, \beta, 1-x), \quad 19)$$

wo  $G(\alpha, \beta, x)$  die Reihe

$$\frac{\alpha\beta}{1.1} Ax + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \frac{\beta(\beta+1)}{1.2} (A+B)x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3} (A+B+C)x^3 + \dots$$

bedeutet, und

$$A = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{2}{1}, \quad B = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} - \frac{2}{2}, \quad C = \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+2} - \frac{2}{3}, \dots$$

ist. Für 19) kann man auch setzen

$$\begin{aligned} & F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x\right) \log \frac{x-1}{x} + x^{-\beta} G\left(\beta, 1 - \alpha, \frac{x-1}{x}\right) \\ &= F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x\right) \log \frac{x-1}{x} + x^{-\alpha} G\left(\alpha, 1 - \beta, \frac{x-1}{x}\right). \end{aligned} \quad 20)$$

Von der Identität der Ausdrücke 19) und 20) überzeugt man sich leicht, wenn man berücksichtigt, dass 19) und 20) der Differentialgleichung 15) genügen, und dass ihre Differenz für  $x=1$  verschwindet, so lange man die Logarithmen so wählt, dass sie für reelle  $x$  reell werden. Diese Darstellungen sind gültig für alle  $x$  innerhalb eines um den Punkt  $x=1$  mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreises, resp. innerhalb der Halbebene auf der positiven Seite der oben erwähnten Geraden.

Für die Umgebung des unendlich fernen Punktes hat man endlich die particulären Integrale

$$x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta, \frac{1}{x}\right) = (x-1)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \alpha + 1 - \beta, \frac{1}{1-x}\right), \quad 21)$$

$$x^{-\beta} F\left(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta + 1 - \alpha, \frac{1}{x}\right) = (x-1)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma - \alpha, \beta + 1 - \gamma, \frac{1}{1-x}\right). \quad 22)$$

Diese Reihen convergiren, so lange der absolute Betrag von  $x$  resp.  $1-x$  grösser ist als Eins.

Von den linearen Relationen zwischen diesen verschiedenen Reihen mögen hier nur die beiden folgenden angeführt werden. Es ist

$$\begin{aligned} & F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x) = \frac{\Pi(\alpha + \beta - \gamma) \Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha - \gamma) \Pi(\beta - \gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ & + \frac{\Pi(\alpha + \beta - \gamma) \Pi(\gamma - 2)}{\Pi(\alpha - 1) \Pi(\beta - 1)} F(1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma, x) x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}, \end{aligned} \quad 23)$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{\Pi(\alpha-1) \Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta, x) = -F(\alpha, \beta, 1, 1-x) \log(1-x) - G(\alpha, \beta, 1-x) \\ & + F(\alpha, \beta, 1, 1-x) (2\psi(0) - \psi(\alpha-1) - \psi(\beta-1)), \end{aligned} \quad 24)$$

wo  $\Pi$  und  $\psi$  die bekannten Gaussischen Zeichen sind. Um die folgenden Entwicklungen etwas übersichtlicher zu machen, sollen noch folgende Bezeichnungen gebraucht werden:

$$\left. \begin{aligned}
 H_1(x) &= F\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, \frac{16}{12}, x\right), & K_1(x) &= F\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{4}{12}, x\right), \\
 H_2(x) &= F\left(\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, \frac{8}{12}, x\right), & K_2(x) &= F\left(\frac{13}{12}, \frac{7}{12}, \frac{20}{12}, x\right), \\
 H_3(x) &= F\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1, 1-x\right), & K_3(x) &= F\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1, 1-x\right), \\
 H_4(x) &= F\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1, 1-x\right) \log(x-1) \\
 &\quad + G\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1-x\right), & K_4(x) &= F\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1, 1-x\right) \log(x-1) \\
 & & &\quad + G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-x\right), \\
 H_5(x) &= F\left(\frac{11}{12}, \frac{7}{12}, \frac{18}{12}, \frac{1}{x}\right), & K_5(x) &= F\left(\frac{5}{12}, \frac{13}{12}, \frac{18}{12}, \frac{1}{x}\right), \\
 H_6(x) &= F\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{6}{12}, \frac{1}{x}\right), & K_6(x) &= F\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{6}{12}, \frac{1}{x}\right).
 \end{aligned} \right\} 25)$$

### III.

Die Grössen  $\omega, \omega', \eta, \eta'$  sind nun aus den Ausdrücken 25) linear zusammengesetzt. Da jedoch die so definirten Funktionen wegen der darin auftretenden algebraischen und logarithmischen Glieder mehrdeutig, resp. unendlichvieldeutig sind, so soll das Gebiet der  $g$  durch einen geradlinigen Verzweigungsschnitt, welcher von dem Punkte  $g = 1$  über  $g = 0$  nach  $g = -\infty$  verläuft, in ein einfach zusammenhängendes verwandelt werden. Innerhalb dieses Gebietes sind dann  $\Omega, \Omega', H, H'$  eindeutige Funktionen und man kann jetzt die Integrationsconstanten so bestimmen, dass die Werthe von  $\omega, \omega', \eta, \eta'$ , welche durch die Ausdrücke 25) geliefert werden, identisch sind mit denen, welche die Integrale 5) ergeben, wobei vorläufig  $g_2$  und  $g_3$  immer reell sein sollen.

Zu dem Ende seien zunächst  $e_1, e_2, e_3$  reell, also  $g$  reell und  $> 1$ . Dann ist einerseits, weil  $e_1 > e_2 > e_3$ ,

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_{e_3}^{e_2} ds \{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\}^{-\frac{1}{2}}, & \eta &= -\int_{e_3}^{e_2} s ds \{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\}^{-\frac{1}{2}}, \\
 \omega' &= i \int_{e_2}^{e_1} ds \{-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\}^{-\frac{1}{2}}, & \eta' &= -i \int_{e_2}^{e_1} s ds \{-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\}^{-\frac{1}{2}},
 \end{aligned} \tag{26}$$

wo die Wurzeln sämmtlich reell und positiv sind. Andererseits hat man nach einer kleinen Umformung für  $\omega$  und  $\omega'$ , sowie für  $\eta$  und  $\eta'$  Ausdrücke von der Gestalt

$$C g_2^{-\frac{1}{4}} H_6(g) + C' g_2^{\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2^{\frac{2}{3}}} H_5(g) \quad \text{und} \quad C g_2^{\frac{1}{4}} K_6(g) + C' g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} K_5(g).$$

Wenn man nun  $g_2$  für den Augenblick als constant ansieht und die Perioden als Functionen von  $g_3$  betrachtet, so enthalten diese Ausdrücke offenbar nichts anderes, als die Entwicklung der Perioden nach steigenden Potenzen von  $g_3$ . Man erhält also die Constanten  $C$  und  $C'$  sofort, wenn man  $g_2 = 1$  setzt und die Werthe aufsucht, welche die Perioden und ihre ersten Ableitungen nach  $g_3$  für  $g_3 = 0$  annehmen. In diesem Falle ist

$$e_1 = \frac{1}{2}, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -\frac{1}{2};$$

also wird, wenn man setzt

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 ds (4s^3 - s)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}, \\ \eta_0 &= - \int_{-\frac{1}{2}}^0 s ds (4s^3 - s)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad 27)$$

und für  $g_2 = 1$  und  $g_3 = 0$ ,

$$\omega = \omega_0, \quad \omega' = i\omega_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \eta' = -i\eta_0.$$

Die Werthe der ersten Ableitungen erhält man aus 11) und 12), wenn man  $g_2' = 0$ ,  $\xi = g_3$ ,  $g_3' = 1$ , also  $P = 3$ ,  $Q = 0$ , und  $R = \frac{1}{4}$  setzt. Dieselben werden dann resp.

$$-3\eta_0, \quad +3\eta_0 i, \quad \frac{1}{4}\omega_0, \quad \frac{i}{4}\omega_0.$$

Hieraus folgt schliesslich

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} H_6(g) - 3\eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} H_5(g), \\ \omega' &= i\omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} H_6(g) + 3i\eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} H_5(g), \\ \eta &= \eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} K_6(g) + \frac{1}{4}\omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} K_5(g), \\ \eta' &= -i\eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} K_6(g) + \frac{i}{4}\omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} K_5(g). \end{aligned} \right\} \quad 28)$$

Die Bedingung  $\eta \omega' - \eta' \omega = \frac{1}{2} \pi i$  liefert, weil  $4\eta_0 \omega_0 = \pi$ , noch die Relation

$$1 = \frac{1}{36g} \cdot K_5 H_5 + K_6 H_6.$$

Die Gleichung  $\eta \omega' - \eta' \omega = \text{constans}$  ist übrigens eine einfache Folge aus den Gleichungen 11), wie man sich leicht durch blosses Differentiiren dieses Aus-

drucks überzeugt. Da nun die Perioden als Functionen von  $\xi$  betrachtet den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen, abgesehen von den in endlicher Anzahl vorhandenen Ausnahmestellen, so muss die Constante, wenn sie für irgend einen Punkt  $\xi$  gleich  $\frac{1}{2} \pi i$  ist, stets diesen Werth besitzen, vorausgesetzt, dass man in 6) für die Perioden ein System simultaner Werthe substituirt.

Es seien nun wieder wie vorhin die drei Wurzeln reell, also  $g > 1$  und reell, so werden, wenn  $g$  von  $+\infty$  auf  $+1$  zurückt, zwei Wurzeln einander gleich, und zwar wird wegen der Relationen 4) für  $g_3 > 0$   $e_2 = e_3$ , für  $g_3 < 0$   $e_1 = e_2$ ; im ersten Falle bleiben  $\omega$  und  $\eta$  endlich, während  $\omega'$  und  $\eta'$  unendlich werden, im zweiten Falle findet das Umgekehrte statt. Es sei zunächst  $g_3$  positiv, dann hat man, weil  $\omega$  und  $\eta$  endlich bleiben müssen,

$$\omega = C g_2^{-\frac{1}{4}} g^{\frac{5}{12}} H_3, \quad \eta = C' g_2^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{1}{12}} K_3.$$

Zur Bestimmung von  $C$  und  $C'$  setze man  $g = 1$ ,  $g_3 = 1$ , also  $g_2 = 3$ , dann wird  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}$  und

$$\frac{\pi}{\sqrt[4]{6}} = \frac{C}{\sqrt[4]{3}}, \quad \frac{\pi}{\sqrt[4]{24}} = C' \sqrt[4]{3},$$

oder

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}} g_2^{-\frac{1}{4}} g^{\frac{5}{12}} H_3(g), \quad \eta = \frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}} g_2^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{1}{12}} K_3(g), \quad 29)$$

wofür man auch etwas einfacher schreiben kann

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{54}} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_3(g), \quad \eta = \frac{\pi}{\sqrt[4]{24}} g_3^{\frac{1}{6}} K_3(g). \quad 30)$$

Da nach 18)

$$g^{\frac{5}{12}} H_3 = F\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right), \quad g^{-\frac{1}{12}} K_3 = F\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right),$$

so erhält man durch Vergleichung von 28) und 29) für ein ins Unendliche wachsendes  $g$  die Relationen

$$\omega_0 \sqrt[4]{12} = \pi F\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, 1, 1\right) \quad \eta_0 \sqrt[4]{1728} = \pi F\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, 1\right)$$

oder

$$\omega_0 \sqrt[4]{12} \Pi\left(-\frac{1}{12}\right) \Pi\left(-\frac{5}{12}\right) = \pi \sqrt{\pi}, \quad \eta_0 \sqrt[4]{1728} \Pi\left(\frac{1}{12}\right) \Pi\left(-\frac{7}{12}\right) = \pi \sqrt{\pi}. \quad 31)$$

Um  $\omega'$  zu finden, berücksichtige man, dass  $\frac{\omega'}{\omega}$  die Form

$$C + C' \frac{H_1}{H_3} = C + C' \log(g-1) + C' \frac{G(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1-g)}{H_3}$$

besitzen muss, oder dass die Grösse  $\frac{1}{\pi i} \log h$  sich in der Gestalt

$$C + C' \log(g-1) + (1-g) \mathfrak{P}(1-g)$$

darstellen lässt. Man erhält also  $C$  und  $C'$  sofort, wenn man  $h$  nach Potenzen von  $g-1$  entwickelt. Zu dem Ende setze man in der Gleichung  $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$

$$s = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6}\right), \quad n = g_3^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{6}}.$$

Es wird dann

$$\cos 3N = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \sin 3N = \sqrt{\frac{g-1}{g}}, \quad \operatorname{tg} 3N = \sqrt{g-1},$$

also, wenn  $g = 1 + k^2$  gesetzt wird ( $k > 0$ ), so erhält man

$$N = \frac{1}{3} \left( k - \frac{k^3}{3} + \frac{k^5}{5} - \dots \right),$$

$$\operatorname{tg} N = \frac{1}{3} k + k^3 \mathfrak{P}(k^2),$$

$$e_1 = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad e_2 = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6}\right), \quad e_3 = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{2 \operatorname{tg} N}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} N} = \frac{2}{3\sqrt{3}} k + k^3 \mathfrak{P}(k^2).$$

Hiernach wird also  $h$  ausgedrückt durch eine Reihe von der Form

$$\frac{\sqrt{g-1}}{24\sqrt{3}} \left( 1 + (g-1) \mathfrak{P}(g-1) \right),$$

und es ist

$$C = -\frac{\log 24 \sqrt{3}}{\pi i}, \quad C' = \frac{1}{2\pi i},$$

oder

$$\omega' = \frac{\omega}{2\pi i} \left( \log(g-1) - 2 \log 24 \sqrt{3} \right) - \frac{i}{\sqrt{216}} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{3}}}{g_3} G\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1-g\right), \quad 32)$$

oder auch mit Berücksichtigung von 20)

$$\omega' = \frac{\omega}{2\pi i} \left( \log \frac{g-1}{g} - 2 \log 24 \sqrt{3} \right) - \frac{i}{\sqrt{192}} g_2^{-\frac{1}{2}} G\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{g-1}{g}\right). \quad 33)$$

Durch ähnliche Schlüsse gelangt man zu dem Ausdruck für  $\eta'$ . Beachtet man, dass  $\frac{\eta'}{\eta}$  die Form

$$C + C' \log (g-1) + C' \frac{G(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g)}{K_3}$$

besitzt, dass ausserdem wegen 6) und 29) oder 30)

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\pi i}{2\eta\omega} = \frac{\omega'}{\omega} - \frac{6i}{\pi} + (g-1) \wp(g-1)$$

ist, so erhält man

$$\eta' = \frac{\eta}{2\pi i} \left( \log (g-1) + 12 - 2 \log 24 \sqrt{3} \right) - \frac{i}{\sqrt{96}} g_3^{\frac{1}{2}} G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g\right) \quad 34)$$

$$= \frac{\eta}{2\pi i} \left( \log \frac{g-1}{g} + 12 - 2 \log 24 \sqrt{3} \right) - \frac{i}{\sqrt{96} \sqrt[4]{3}} g_2^{\frac{1}{4}} G\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{g-1}{g}\right). \quad 35)$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in 6) liefert noch die Relation

$$12g^{-\frac{1}{2}} = 12 H_3(g) K_3(g) + H_3(g) G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g\right) - K_3(g) G\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1-g\right).$$

Um die Ausdrücke für ein negatives  $g_3$  zu ermitteln, ist es nicht erforderlich, die ebengemachten Schlüsse zu wiederholen; ein Blick auf die Gleichungen 28) zeigt vielmehr, dass, wenn für  $g_3 - g_3$  gesetzt wird, die Grössen  $\omega, \omega', \eta, \eta'$  übergehen in  $-\omega'i, \omega i, \eta'i, -\eta i$ . Man erhält also die gewünschten Ausdrücke, wenn man in den Gleichungen 29), 30) etc. für  $g_3, \omega, \omega', \eta, \eta'$  einfach  $-g_3, -\omega'i, \omega i, \eta'i, -\eta i$  schreibt; also

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= -\frac{\pi i}{\sqrt{54}} \frac{g_2(-g_3)^{\frac{1}{2}}}{g_3} H_3(g), \quad \eta' = -\frac{\pi i}{\sqrt{24}} (-g_3)^{\frac{1}{2}} K_3(g), \\ \omega &= -\frac{\omega'}{2\pi i} \left( \log (g-1) - 2 \log 24 \sqrt{3} \right) - \frac{1}{\sqrt{216}} \frac{g_2(-g_3)^{\frac{1}{2}}}{g_3} G\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1-g\right) \\ &= -\frac{\omega'}{2\pi i} \left( \log \frac{g-1}{g} - 2 \log 24 \sqrt{3} \right) - \frac{1}{\sqrt[4]{192}} g_2^{-\frac{1}{4}} G\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{g-1}{g}\right), \\ \eta &= -\frac{\eta'}{2\pi i} \left( \log (g-1) + 12 - 2 \log 24 \sqrt{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{96}} (-g_3)^{\frac{1}{2}} G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g\right) \\ &= -\frac{\eta'}{2\pi i} \left( \log \frac{g-1}{g} + 12 - 2 \log 24 \sqrt{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{96} \sqrt[4]{3}} g_2^{\frac{1}{4}} G\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{g-1}{g}\right). \end{aligned} \right\} 36)$$



Von den in Vorstehendem entwickelten Ausdrücken haben offenbar diejenigen, in denen kein Logarithmus auftritt, in der Umgebung des Punktes  $g = 1$  den Charakter einer ganzen rationalen Function, abgesehen natürlich von dem Fall, wo  $g_2$  und  $g_3$  gleichzeitig gleich Null oder Unendlich und  $g = 1$  wird. Diese Ausdrücke lassen sich also mit Hülfe der Formeln 23) ohne Zweideutigkeit bis zur Umgebung des Punktes  $g = 0$  fortsetzen, während bei den anderen wegen des Logarithmus eine von dem Wege der Fortsetzung abhängige Vieldeutigkeit stattfindet. Wir wollen dieselbe berücksichtigen, indem wir in 24)  $\log(1-g) = \log(g-1) + \varepsilon\pi i$  setzen, wo  $\varepsilon$  eine beliebige ungerade Zahl bedeutet, die vorläufig  $= \pm 1$  sein soll. Ferner hat man nach den von Gauss gegebenen Formeln

$$\begin{aligned} 2\Psi(0) - \Psi(-\frac{1}{12}) - \Psi(-\frac{7}{12}) &= 2\log 24\sqrt{3} - \pi\sqrt{3}, \\ 2\Psi(0) - \Psi(-\frac{13}{12}) - \Psi(-\frac{5}{12}) &= 2\log 24\sqrt{3} - 12 - \pi\sqrt{3}, \end{aligned}$$

folglich werden die Gleichungen 23) und 24)

$$\begin{aligned} H_3 &= \frac{\Pi(-\frac{16}{12})}{\Pi(-\frac{5}{12})\Pi(-\frac{11}{12})} H_1 + \frac{\Pi(-\frac{8}{12})}{\Pi(-\frac{1}{12})\Pi(-\frac{7}{12})} g^{-\frac{1}{3}} H_2 \\ K_3 &= \frac{\Pi(-\frac{4}{12})}{\Pi(\frac{1}{12})\Pi(-\frac{5}{12})} K_1 + \frac{\Pi(-\frac{20}{12})}{\Pi(-\frac{7}{12})\Pi(-\frac{13}{12})} g^{\frac{2}{3}} K_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\Pi(-\frac{1}{12})\Pi(-\frac{7}{12})}{\Pi(\frac{4}{12})} H_1 = -H_3(\log(g-1) - 2\log 24\sqrt{3}) - G(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1-g) - H_3(\varepsilon\pi i + \pi\sqrt{3}),$$

$$\frac{\Pi(-\frac{7}{12})\Pi(-\frac{13}{12})}{\Pi(-\frac{8}{12})} K_1 = -K_3(\log(g-1) + 12 - 2\log 24\sqrt{3}) - G(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g) - K_3(\varepsilon\pi i + \pi\sqrt{3}).$$

Wenn wir wieder zunächst  $g_3 > 0$  voraussetzen, so erhält man aus 30)

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\pi}{\sqrt{54}} \frac{\Pi(-\frac{4}{3})}{\Pi(-\frac{5}{12})\Pi(-\frac{11}{12})} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\Pi(-\frac{2}{3})}{\Pi(-\frac{1}{12})\Pi(-\frac{7}{12})} g_3^{-\frac{1}{6}} H_2, \\ \eta &= \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{\Pi(-\frac{1}{3})}{\Pi(\frac{1}{12})\Pi(-\frac{5}{12})} g_3^{\frac{1}{6}} K_1 + \frac{\pi}{9\sqrt{24}} \frac{\Pi(-\frac{5}{3})}{\Pi(-\frac{7}{12})\Pi(-\frac{13}{12})} \frac{g_2^2 g_3^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2. \end{aligned}$$

Diese Reihen enthalten offenbar die Entwicklung der Perioden nach steigenden Potenzen von  $g_2$ . Bezeichnet man deshalb die Werthe von  $\omega$  und  $\eta$  für  $g_2 = 0$   $g_3 = 1$  mit  $\omega_1$  und  $\eta_1$ , so ist

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\Pi(-\frac{2}{3})}{\Pi(-\frac{1}{12})\Pi(-\frac{7}{12})}, \quad \eta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{\Pi(-\frac{1}{3})}{\Pi(\frac{1}{12})\Pi(-\frac{5}{12})}. \quad 37)$$

Hieraus folgt dann nach einigen Umformungen oder, indem man wieder wie früher die Differentialgleichungen 11) zur Bestimmung der Coefficienten von  $g_2$  und  $g_2^2$  verwendet,

$$\omega = \omega_1 g_3^{-\frac{1}{2}} H_2(g) - \frac{\eta_1}{6} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{2}}}{g_3} H_1(g), \quad (38)$$

$$\eta = \eta_1 g_3^{\frac{1}{2}} K_1(g) + \frac{\omega_1}{144} \frac{g_2^2 g_3^{-\frac{1}{2}}}{g_3} K_2(g). \quad (39)$$

Multipliziert man ferner die oben angesetzten Gleichungen, welche Logarithmen enthalten, mit

$$\frac{i}{\sqrt{216}} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{2}}}{g_3} \text{ resp. } \frac{i}{\sqrt{96}} g_3^{\frac{1}{2}},$$

so erhält man nach Ausführung der nöthigen Reductionen

$$\omega' = \frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} \omega_1 g_3^{-\frac{1}{2}} H_2(g) - \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} \frac{\eta_1}{6} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{2}}}{g_3} H_1(g), \quad (40)$$

$$\eta' = \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} \eta_1 g_3^{\frac{1}{2}} K_1(g) + \frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} \frac{\omega_1}{144} \frac{g_2^2 g_3^{-\frac{1}{2}}}{g_3} K_2(g). \quad (41)$$

Die für ein negatives  $g_3$  geltenden Formeln erhält man wieder wie früher, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= i\omega_1 (-g_3)^{-\frac{1}{2}} H_2(g) + \frac{i\eta_1}{6} \frac{g_2 (-g_3)^{\frac{1}{2}}}{g_3} H_1(g), \\ \eta' &= -i\eta_1 (-g_3)^{\frac{1}{2}} K_1(g) + \frac{i\omega_1}{144} \frac{g_2^2 (-g_3)^{-\frac{1}{2}}}{g_3} K_2(g), \\ \omega &= -\frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} i\omega_1 (-g_3)^{-\frac{1}{2}} H_2(g) - \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} \frac{i\eta_1}{6} g_2 (-g_3)^{\frac{1}{2}} H_1(g), \\ \eta &= \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} i\eta_1 (-g_3)^{\frac{1}{2}} K_1(g) - \frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} \frac{i\omega_1}{144} \frac{g_2^2 (-g_3)^{-\frac{1}{2}}}{g_3} K_2(g). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Aus den Gleichungen 37) und 6) folgt dann noch

$$\pi = \omega_1 \eta_1 \sqrt{12}, \quad 1 = K_1 H_2 + \frac{g}{32} K_2 H_1.$$

IV.

Durch die in dem letzten Abschnitt aufgestellten Ausdrücke ist für jedes Wertepaar  $g_2, g_3$  ein System von simultanen Werthen der Fundamentalperioden der Integrale erster und zweiter Gattung gegeben. Es ist dabei gleichgültig, wie man die Werthe der mehrdeutigen Grössen  $g_2^{\frac{1}{4}}, g_3^{\frac{1}{6}}, \log(g-1)$  fixirt, vorausgesetzt natürlich, dass dieselben innerhalb einer jeden einzelnen Reihe von Ausdrücken dieselben sind. Ferner gestatten die verschiedenen Formen, welche im zweiten Abschnitt für die hier benutzten hypergeometrischen Reihen aufgeführt worden sind, zu bewirken, dass man für jedes beliebige  $g$  convergente Entwicklungen erhält. Es ist dazu nur erforderlich, von den Grössen

$$g, \frac{g}{g-1}, 1-g, \frac{g-1}{g}, \frac{1}{g}, \frac{1}{g-1}$$

diejenige auszuwählen, deren absoluter Betrag kleiner als Eins ist. Nur die beiden Punkte  $g = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3}$  machen eine Ausnahme. Für diese beiden Punkte liegen die eben genannten Grössen stets an der Grenze des Convergenzgebietes der verschiedenen Reihen. Da jedoch  $\Omega, \Omega', H, H'$  an diesen beiden Stellen den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen, so wollen wir diesen Ausnahmefall hier nicht weiter berücksichtigen.

Es ist nun noch übrig zu untersuchen, wie sich die Perioden als Functionen von  $\xi$  verhalten. Dieselben haben im Allgemeinen den Charakter einer ganzen rationalen Function; Ausnahmestellen können nur diejenigen Punkte  $\xi$  sein, in welchen eine der folgenden Gleichungen stattfindet:

$$g_2 = 0, g_2 = \infty, g_3 = 0, g_3 = \infty, g = 1.$$

Denkt man sich alle diese singulären Punkte durch eine gebrochene Linie  $M$  mit einander verbunden, welche durch keinen Punkt der  $\xi$ -Ebene zweimal hindurch geht und ins Unendliche verläuft, wenn  $\xi = \infty$  ebenfalls eine Ausnahmestelle ist, so ist durch diesen Schnitt die ganze  $\xi$ -Ebene in ein zweifach, resp. einfach zusammenhängendes Gebiet zerlegt. Innerhalb dieses Gebietes sind dann die Grössen  $\omega, \omega', \eta, \eta'$  eindeutig definiert, wenn man einem beliebigen nicht singulären Punkte  $\xi_0$  ein bestimmtes Werthsystem  $\bar{\omega}, \bar{\omega}', \bar{\eta}, \bar{\eta}'$ , wie es durch die Formeln des vorigen Abschnittes gegeben ist, zuordnet, und die so definirten Functionen nach allen Punkten  $\xi$  hin fortsetzt, ohne jedoch die Linie  $M$  zu passiren. Zu beiden Seiten

der Linie  $M$  werden offenbar  $\bar{\omega}, \bar{\omega}', \bar{\eta}, \bar{\eta}'$  verschiedene Werthe besitzen können. Um sich von diesen Werthdifferenzen ein allgemeines Bild zu verschaffen, ist es nur nöthig, zu ermitteln, wie sich die im vorigen Abschnitt dargestellten  $\omega, \omega', \eta, \eta'$  verhalten, wenn  $\xi$  eine der Ausnahmestellen umwindet, während die Untersuchung über das Verhalten der Perioden in jedem einzelnen Punkte des Verzweigungsschnittes einfacher in jedem besonderen Falle besonders für gegebene  $g_2$  und  $g_3$  durchgeführt wird.

Es seien die Grössen  $a$  und  $b$  niemals  $= 0$  oder  $= \infty$ ,  $c$  niemals  $= 0$  oder  $= 1$  oder  $= \infty$ , dann kann  $\xi$  höchstens in einem der folgenden 13 Fälle singulärer Punkt sein:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$g_2 =$	a	a	0	0	0	0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$g_3 =$	b	$\infty$	0	0	0	0	$\infty$	b	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$g =$	1	0	c	0	1	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	c	0	1	$\infty$

In den drei noch übrigen möglichen Fällen haben offenbar die Perioden den Charakter einer rationalen oder einer ganzen rationalen Function. In dem Falle 1) können die Perioden logarithmisch, in den Fällen 5) und 12) logarithmisch und algebraisch, in allen übrigen Fällen nur algebraisch unstetig werden. Es sind nun vier Gruppen von Fällen, nämlich  $g = 0$ ,  $g = \infty$ ,  $g = c$ ,  $g = 1$  zu unterscheiden.

Es sei zunächst  $g = 0$ . Man setze in den Formeln 38) bis 41)  $\varepsilon = 1$  und bezeichne den zu  $\varepsilon = -1$  gehörigen Werth von  $\omega', \eta'$  mit  $\omega'', \eta''$ , so ist  $\omega + \omega' = \omega''$ ,  $\eta + \eta' = \eta''$ . Sind

$$\varepsilon_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

die beiden complexen cubischen Wurzeln der Einheit, also  $-\varepsilon_3$  eine primitive sechste Wurzel der Einheit, ist ferner  $n$  die Ordnungszahl für das Null- oder Unendlichwerden von  $g_3$ , wo für ein Unendlichwerden von  $g_3$   $n$  negativ zu nehmen ist, schreibt man endlich die Gleichungen 38) bis 41) für einen beliebig fixirten Wurzelwerth von  $g_3^{\frac{1}{6}}$  in der Gestalt

$$\begin{aligned} \omega &= a + b, & \omega' &= a\varepsilon_2 + b\varepsilon_3, & \omega'' &= -a\varepsilon_3 - b\varepsilon_2, \\ \eta &= c + d, & \eta' &= c\varepsilon_2 + d\varepsilon_3, & \eta'' &= -c\varepsilon_3 - d\varepsilon_2, \end{aligned}$$

so sind offenbar alle Werthsysteme, welche  $\omega, \omega', \omega'', \eta, \eta', \eta''$  annehmen können, wenn  $\xi$  den betreffenden singulären Punkt ein oder mehrere Male umwindet, in folgenden Ausdrücken enthalten:

$$\begin{aligned} \omega &= a(-\varepsilon_3)^{-kn} + b(-\varepsilon_3)^{kn}, \quad \omega' = a\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{-kn} + b\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{kn}, \quad \omega'' = -a\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{-kn} - b\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{kn}, \\ \eta &= c(-\varepsilon_3)^{-kn} + d(-\varepsilon_3)^{kn}, \quad \eta' = c\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{-kn} + d\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{kn}, \quad \eta'' = -c\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{-kn} - d\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{kn}, \end{aligned}$$

wo  $k$  die Anzahl der Windungen bedeutet. Wenn  $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$ , so erhält man folgende sechs Werthsysteme:

$$\begin{array}{cccccc} \omega & \omega' & \omega'' & \eta & \eta' & \eta'' , \\ -\omega' & \omega'' & \omega & -\eta' & \eta'' & \eta , \\ -\omega'' & \omega & -\omega' & -\eta'' & \eta & -\eta' , \\ -\omega & -\omega' & -\omega'' & -\eta & -\eta' & -\eta'' , \\ \omega' & -\omega'' & -\omega & \eta' & -\eta'' & -\eta , \\ \omega'' & -\omega & \omega' & \eta'' & -\eta & \eta' . \end{array}$$

Wenn  $n \equiv \pm 2 \pmod{6}$ , so fällt das zweite, vierte und sechste Werthsystem fort; ist  $n \equiv 3 \pmod{6}$ , so findet nur ein Zeichenwechsel statt; ist endlich  $n \equiv 0 \pmod{6}$ , so haben die Perioden an der betreffenden Stelle den Charakter einer rationalen Function. Die Formeln 42) liefern offenbar ein analoges Resultat.

Wenn  $g = \infty$ , so erkennt man sofort, dass, wenn die Ordnungszahl von  $g_2$   $m$  und  $m \equiv \pm 1 \pmod{4}$  ist, nur folgende vier Werthsysteme auftreten können:

$$\begin{array}{cccc} \omega & \omega' & \eta & \eta' , \\ -\omega' & \omega & -\eta' & \eta , \\ -\omega & -\omega' & -\eta & -\eta' , \\ \omega' & -\omega & \eta' & -\eta . \end{array}$$

Wenn  $m \equiv 2 \pmod{4}$ , so findet nur ein Zeichenwechsel statt, und wenn  $m \equiv 0 \pmod{4}$ , so haben die Perioden den Charakter einer rationalen Function.

Wenn ferner  $g = c$  oder  $g = 1$  ist, so muss  $3m - 2n = 0$ , also  $m = 2p$ ,  $n = 3p$  sein; die algebraischen Glieder wechseln also für ein ungerades  $p$  ihr Zeichen, für ein gerades  $p$  werden sie rational. Ferner wächst, wenn  $g = 1$ , der Logarithmus beim Umkreisen der singulären Stelle um ein Vielfaches von  $2\pi i$ , also die eine Periode um ein Vielfaches der andern.

Hiernach sind also sämmtliche zu einem bestimmten Werthe von  $\xi$  gehörigen Werthe der Perioden in der allgemeinen Form

$$\begin{aligned}\omega &= f\bar{\omega} + g\bar{\omega}', & \bar{\omega}' &= f'\bar{\omega} + g'\bar{\omega}', \\ \eta &= f\bar{\eta} + g\bar{\eta}', & \bar{\eta}' &= f'\bar{\eta} + g'\bar{\eta}',\end{aligned}$$

enthalten, wo wegen 6)

$$fg' - f'g = 1$$

sein muss. Der Weg, auf welchem man von  $\xi_0$  nach  $\xi$  übergeht, lässt sich dabei stets so wählen, dass die ganzen Zahlen  $f, g, f', g'$  alle beliebigen mit jener Bedingungsgleichung verträglichen Werthe annehmen.

Ich muss es mir hier versagen, auf die Folgerungen näher einzugehen, welche sich in Bezug auf den Zusammenhang zwischen den Invarianten  $g_2, g_3, g$  und der Grösse

$$h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$$

aus den bisherigen Entwicklungen ziehen lassen. Es mag hier nur bemerkt werden, dass es möglich ist,  $g$  als Quotienten zweier Potenzreihen von  $h$  mit ganzzahligen Coefficienten darzustellen, welche unbedingt convergiren, so lange der absolute Betrag von  $h$  kleiner ist als Eins.

Dorpat, im April 1875.

