

**PÄÄSSÄLASKUTAITO JA PÄÄSSÄLASKUN
SUORITUSSTRATEGIAT PERUSKOULUN LUOKILLA 1–3
VIROSSA SEKÄ TULOSTEN VERTAILU SUOMALAISTEN
OPPILAIDEN SUORITUKSIIN**

SIRJE PIHT



Lönnrot-yliopisto

Helsinki 2012

© Sirje Piht, 2012



Lonrot University Press, 2012
www.lonrotuniversity.com
ISBN 978-952-6631-00-4



Abstract

This research began with a study titled “*2. luokan matematiikan oppikirjan laatimisen käsitteelliset perusteet*” (“The Conceptual Bases of Preparing a 2nd Grade Mathematics Workbook”) written as a *Master's Thesis* at the University of Tallinn in 2002. In that study I presented the principles applied in the textbook I prepared, titled “Mathematics Workbook for the 2nd Grade Students”, the most important of which were students’ motivation and fluency in mental arithmetic.

Thus I started to take great interest in how Estonian students generally master the skill of mental arithmetic and comparison of their level with other countries. I participated in a Mathematics didactics conference in Turku and met some Finnish colleagues, and the discussions about mental arithmetic we held crystallised the topic of the research and its extension to Finland. Carrying out the research became possible thanks to a continued training place allocated for me at the education faculty of the University of Turku and cooperation with teachers at the Turku training school, whose students participated in the present study.

When learning the characteristics of numbers – comparison, classification, ranking, subtraction and addition – children have to be able to count numbers by size. They have their hands and fingers to help them. If teachers are asked *whether a child may use fingers as help when doing mental calculations*, the answers are generally hesitant. The hesitations may derive from the fact that there is insufficient information about the development of mental arithmetic skills and related strategies. In order to clarify these issues, they have to be researched.

Mental arithmetic is an area of school mathematics that definitely has to be taken into consideration upon implementing a curriculum. Therefore, it is important to be up to date with mental arithmetic teaching techniques and related factors. The main objective of my study is to determine what mental arithmetic is. What is its proportion of the curriculum? What is the level of mental arithmetic of 1st to 3rd grade students in Estonian schools? What strategies do they use in doing mental arithmetic? What are their attitudes towards mathematics and mental arithmetic? What are the differences between Estonian and Finnish students with regard to the aforementioned topics?

SISÄLLYSLUETTELO

ESIPUHE.....	1
1 MITÄ PÄÄSSÄLASKU ON?.....	5
1.1 Lähestymiskäyttäytyminen päässälaskun selittäjänä. Lähtökohtana kokonaisvaltainen Vygotskin lähestymiskäyttäytymisen määritelmä persoonallisuuden ja oppimisen tutkimiseen.....	5
1.1.1 Toimintapsykologian kolmiosainen vuorovaikutusmalli.....	7
1.1.2 Galperinin käyttämän käsitteellisen viitekehysten diagnostinen soveltaminen.....	9
1.2 Päässälaskun määritelmä.....	13
1.3 Päässälasku ja työmuisti.....	14
1.4 Päässälaskun rooli matematiikassa.....	19
1.5 Päässälaskun suoritusmenetelmät eli strategiat.....	20
1.6 Taitava päässälaskija.....	28
2 MATEMATIIKAN JA PÄÄSSÄLASKUN OPETUS LUOKILLA 1.–3. VIROSSA JA SUOMESSA.....	36
2.1 Matematiikan oppimiskäsityksestä ala-asteella Virossa ennen nykyistä opetussuunnitelmaa viimeisen sadan vuoden aikana.....	36
2.2 Matematiikan opetussuunnitelman perusteet nykyisen peruskoulun alaluokilla Virossa verrattuna Suomen opetussuunnitelmiin.....	41
2.3 Päässälaskun opetuksesta peruskoulun 1. asteella Virossa.....	44
2.4 Oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan ja päässälaskuun.....	46
2.5 Mihin matematiikan ja päässälaskun opetuksen tulisi perustua?.....	49
2.6 Matematiikan opetuksen eriyttäminen sukupuolen mukaan.....	52
2.7 Aikaisempia tutkimuksia päässälaskusta.....	53
2.7.1 Eri maissa suoritettuja tutkimuksia päässälaskusta.....	53
2.7.2 Viron ja Suomen oppilaita koskevia tutkimuksia päässälaskusta.....	57
3 TUTKIMUSONGELMAT.....	60
4 TUTKIMUSMENETELMÄT.....	62
4.1 Tutkittavat.....	62
4.2 Matematiikan tehtävät ja tutkimuksen kulku.....	62
4.3 Päässälaskutehtävien pisteytys ja strategioiden analysointi.....	66
5 TUTKIMUKSEN TULOKSET JA NIIDEN TULKINTA.....	68
5.1 Päässälaskutaito Viron 1. – 3. luokkien oppilailla.....	68
5.2 Virolaisten ja suomalaisten oppilaiden erot päässälaskutaidossa.....	70
5.3 Oppilaiden käyttämät päässälaskun ratkaisustrategiat.....	73
5.3.1 Viron oppilaiden päässälaskustrategiat.....	73
5.3.2 Erot Viron ja Suomen oppilaiden ratkaisustrategioiden välillä.....	74
5.4 Yhteenvedo virolaisten ja suomalaisten oppilaiden päässälaskusta, strategioiden käytöstä ja sukupuolieroista.....	76
5.5 Oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan ja päässälaskuun.....	78
5.5.1 Oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan.....	78
5.5.2 Oppilaiden suhtautuminen päässälaskuun.....	79
5.5.3 Päässälaskun osaamisen tärkeys.....	81
5.5.4 Päässälaskun käyttäminen.....	82

5.5.5 Yhteenveto oppilaiden suhtautumisesta matematiikkaan ja päässälaskuun.	82
5.6 Kuka on taitava päässälaskija?.....	85
5.7 Regressioanalyysi päämuuttujien avulla.....	85
6.1 Päätulokset ja pohdinta.....	87
6.1.1 Nuorten oppilaiden päässälaskutaidon ja strategioiden arviointi.....	87
6.1.2 Päässälaskutaidon kehittyminen.....	88
6.1.3 Sukupuolen rooli matematiikan oppimisessa.....	89
6.1.4 Oppilaiden strategioiden käyttö.....	89
6.1.5 Taitava päässälaskija.....	91
6.2 Pedagogiset päätelmät ja haasteet tulevaisuuden tutkimukselle.....	93
6.2.1 Päässälaskustrategioiden tärkeys.....	93
6.2.2 Oppilaiden positiivinen suhtautuminen ja motivointi.....	93
6.2.4 Tulevaisuuden tutkimushaasteet.....	95
7. Tiivistelmä.....	96
LÄHDELUETTELO.....	99

Taulukot

TAULUKKO 1. Kirjallisen allekkain laskemisen menetelmät ja päässä-laskun normaalimenetelmät peruslaskutoimituksissa (Virrankoski, 1983, 5).....	21
TAULUKKO 2. Tutkimuksessa osallistuneet oppilaat.....	62
TAULUKKO 3. Päässä-laskutehtävien suoritusten aikataulu luokittain.....	63
TAULUKKO 4. Päässä-laskutestin tehtävätyypit.....	64
TAULUKKO 5. Tutkimuksessa käytetyt päässä-laskustrategiat.....	67
TAULUKKO 6. Päässä-laskutestin tulokset virolaisilla oppilail-la.....	68
TAULUKKO 7. Viron oppilaiden numeeristen päässä-laskutehtävien tulokset tehtävätyypin perusteella luokiteltuina.....	69
TAULUKKO 8. Viron oppilaiden sanallisten laskutehtävien suoritukset.....	69
TAULUKKO 9. Oppilaiden suoritusten prosentuaalinen jakautuminen.....	70
TAULUKKO 10. Viron ja Suomen 1. – 3. luokan oppilaiden tulokset päässä-laskutestissä.....	71
TAULUKKO 11. Viron ja Suomen oppilaiden päässä-laskutulokset tehtävätyypin perusteella.....	72
TAULUKKO 12. Sanallisten tehtävien suoritukset.....	73
TAULUKKO 13. Virolaisten oppilaiden päässä-laskustrategiat prosentteina.....	74
TAULUKKO 14. Virolaisten (N=157) ja suomalaisten (N=130) oppilaiden päässä-laskustrategiat.....	75
TAULUKKO 15. Viron ja Suomen oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan.....	78
TAULUKKO 16. Poikien ja tyttöjen suhtautuminen matematiikkaan.....	79
TAULUKKO 17. 1. – 3.-luokkalaisten oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan....	79
TAULUKKO 18. Viron ja Suomen oppilaiden suhtautuminen päässä-laskuun.....	80
TAULUKKO 19. Poikien ja tyttöjen suhtautuminen päässä-laskuun.....	80
TAULUKKO 20. 1.– 3. luokan oppilaiden suhtautuminen päässä-laskuun.....	81
TAULUKKO 21. Yleinen päässä-laskun osaamisen tärkeys (suhteelliset osuudet).....	81

Kuviot

KUVIO 1. Baddeleyn (1986, 1996, 2000) työmuistin kolmikomponenttimalli täydennettynä episodisella puskurilla (Kyttälä 2008, 3).....	16
KUVIO 2. Aivotutkimuksen tuloksia aivojen kehityksestä.....	45
KUVIO 3. Regressioanalyysi.....	86

ESIPUHE

Tutkimukseni sai alkunsa vuonna 2002 Tallinnan yliopistossa kirjoittamastani maisteritutkimuksesta, *2.klassi matemaatika tööraamatu koostamise kontseptuaalsed alused* (2. luokan matematiikan oppikirjan laatimisen käsitteelliset perusteet). Pro gradu -työssäni esittelin oppikirjassani *Matemaatika tööraamat 2.klassile* käytetyt perusteet, joista tärkein oli oppilaiden motivointi ja päässälaskun hyvä osaaminen.

Vuodesta 1996 lähtien olen opettajien täydennyskursseilla pitänyt tärkeänä esitellä suosituksiani ja keskustella siitä, miten matematiikan opetus ja varsinkin päässälasku saadaan oppilaita kiinnostavaksi ja saavutetaan hyvät tulokset. Tätä varten olen laatinut ja jakanut runsaasti oppimateriaalia ja metodisia oppaita opettajien käyttöön, esim. opettajan kirja, lisätehtävät ja oppimispelit. Lisäksi Tallinnan yliopiston Haapsalu Collegessa opiskelijoitteni kanssa suorittamani tutkimukset päässälaskun, pelien ja eri päässälaskustrategioiden harjoittamisesta ovat osoittaneet todeksi päässälaskun suuren merkityksen ja antaneet vahvistusta sen tärkeydestä matematiikan opetuksessa ja oppimisessa.

Näin ajatus siitä, miten virolaiset oppilaat hallitsevat päässälaskua laajemmin ja mikä sen taso on muihin maihin verrattuna, alkoi kiinnostaa minua suuresti. Käydessäni Turussa ainedidaktiikan konferensseissa tutustuin suomalaisiin kollegoihin, joiden kanssa käydyissä keskusteluissa päässälaskusta kiteytyi tutkimusaiheeni ja tutkimuksen laajentaminen Suomeen. Sen mahdollisti jatko-opiskelupaikka Turun yliopiston kasvatustieteellisessä tiedekunnassa ja yhteistyön Turun normaalikoulussa, jonka oppilaita myös osallistui tähän tutkimukseen.

Parhaat kiitokseni osoitan Lönnrot-yliopiston rehtorille, professori Pertti Yli-Luomalle sekä dosentti Marjatta Virrankoskelle, jotka ovat tukeneet työni edistymistä antamalla arvokkaita neuvoja ja kannustaneet minua työni loppuun saattamisessa. Kiitän dosentti Marjatta Virrankoskea, joka on jaksanut lukea tutkimustyöni eri luonnoksia ja antaa niistä palautetta. Kiitän dosentti Vuokko Kaartista kielen tarkastamisesta ja hyvistä neuvoista tutkimuksen kielellisessä esityksessä.

Erityiset kiitokset kuuluvat myös tutkimukseen osallistuneille opettajille ja oppilaille Turun normaalikoulussa ja Viron eri kouluissa.

Kiitän myös Tallinnan yliopiston Haapsalu Collegen rehtoria Eve Eisenschmidtia, joka kannusti minua väitöskirjani kirjoittamiseen ja monella tapaa tuki ja mahdollisti työni onnistumisen käytännön tasolla.

Omistan väitöskirjani aviomiehelleni Antille, joka on uupumatta tukenut ja innostanut minua tutkimusprosessin aikana.

Turussa 5. heinäkuuta 2012

Sirje Piht

JOHDANTO

Laskemista käytämme joka päivä halusimmepa sitä tai emme. Lukuja ja laskemista esiintyy kaikkialla ympäristössämme. Aamulla herätyskello näyttää meille, mihin aikaan heräämme. Myöhemmin selvitämme, paljonko on aikaa aamukahviin tai päivälehden tuloon. Lisäksi joudumme lukemaan mm. aikatauluja, maksamaan ostoksia ja miettimään onko vaihtoraha oikein. Ne kaikki edellyttävät lukujen lukemista ja peruslaskutoimituksia, jotka tapahtuvat päässä. Sekä lapsi että aikuinen harjoittavat tahatonta päässä laskemista päivittäin. Voimme todeta, että päässä laskeminen kuuluu elämään.

Oppiakseen lukujen ominaisuudet - vertailu, luokittelu, järjestykseen asettaminen, lukujen hajottaminen ja kokoaminen konkreettisin välinein – lapsen pitää osata asettaa luvut suuruusjärjestyksessä. Apunaan hänellä ovat myös kädet ja sormet. Kun kysytään opettajilta, *saako lapsi käyttää sormien apua päässä laskemisessa*, saadaan usein erilaisia vastauksia. Epäily voi johtua siitä, ettei ole riittävästi tietoa päässä laskutaidon muodostumisesta ja siihen liittyvistä strategioista. Jotta asia selviäisi, se edellyttää tutkimista.

Vaikka päässä laskutaitoa on tutkittu jonkin verran, ei sen muodostumisprosessia ole pystytty täysin selittämään. On todettu, että päässä laskeminen on yhteydessä informaatioprosessointiin ja ennen kaikkea työmuistiin. Mutta olisiko muitakin tekijöitä, joilla voisi olla yhteyttä päässä laskuun, alkoi kiinnostaa minua. Mahdollisuus perehtyä aiheeseen laajemmin tarjoutui minulle noin viisitoista vuotta sitten työskennellessäni luokanopettajana peruskoulussa. Vuosina 1995-1996 etsittiin Virossa uusia oppikirjojen kirjoittajia, joiden joukkoon minut valittiin. Siihen aikaan Viron kouluissa käytetyt oppikirjat sisälsivät suurimmaksi osaksi vain allekkainlaskuja ja sanallisia tehtäviä. Oppilaat eivät olleet kiinnostuneet niistä eikä matematiikan oppimisesta, minkä saattoi todeta kaikilla oppitunneilla. Aloin etsiä lisätehtäviä opetukseen tutkimalla eri maiden oppikirjoja. Se avasi uusia näkökulmia oppikirjan kirjoittamiseen. Minua kiinnostivat etenkin päässä laskutehtävät, laskuketjut, ongelmatehtävät, taulukot eli kaikki, joka auttaa päässä laskun

oppimisessa. Kun kirjoitin oppikirjaani, opetin samanaikaisesti omaa luokkaani. Tarkkaillessani oppilaitani, huomioni kiinnittyi siihen, että tehtävien ja opetuksen täytyy olla vaihtelevaa. Ensimmäinen kirjoittamani matematiikan oppikirja, jota sain näin kokeilla omilla oppilaillani, valmistui vuonna 1996. Tämä toisen luokan oppilaille kirjoittamani kirja *Matemaatika tööraamat 2. klassile* (liite 26) otettiin painatuksen jälkeen käyttöön Viron kouluissa.

Oppikirjani avulla sain tilaisuuden levittää Viron opettajille tietoa löytämästäni uudesta näkökulmasta matematiikan opetukseen. Siihen antoi mahdollisuuden myös opettajille järjestämäni kesäkurssit. Tärkeä muutos entiseen opetukseen oli pyrkiä ulkoa oppimisen sijasta saada oppilaat kehittämään omaa ajattelukykyään, jossa päässä laskemisella olisi oma roolinsa. Tämän otin huomioon myös myöhemmissä oppikirjoissani (vrt. *Matemaatika tööraamat 2. klassile*, 2004, liite 27), joiden kirjoittaminen ja opettajilta saamani palautteet ja kehoutukset vahvistivat käsitystäni perehtyä päässä laskuun entistä syvällisemmin. Se toteutui tämän väitöstutkimuksen myötä, jonka tekemisen aloitin Turun kasvatustieteellisessä tiedekunnassa vuonna 2005.

Päässä lasku on koulumatematiikan alue, joka tulee huomioida opetussuunnitelmaa toteutettaessa. Siksi on tärkeää olla selvillä päässä laskun opetukseen ja oppimiseen liittyvistä seikoista. Tämän tutkimuksen päätarkoituksena on selvittää: Mitä päässä lasku on? Mikä sen osuus on opetussuunnitelmassa? Millainen päässä laskutaito on Viron peruskoulun 1. – 3. - luokkalaisilla? Millaisia strategioita he päässä laskiessaan käyttävät? Miten he suhtautuvat matematiikkaan ja päässä laskuun? Mitä eroja edellä mainituissa on Viron ja erään suomalaisen koulun oppilaiden suoritusten välillä?

1 MITÄ PÄÄSSÄLASKU ON?

1.1 Lähestymiskäyttäytyminen päässä laskun selittäjänä. Lähtökohtana kokonaisvaltainen Vygotskin lähestymiskäyttäytymisen määritelmä persoonallisuuden ja oppimisen tutkimiseen

Lähestymiskäyttäytymisellä tarkoitetaan lähinnä sitä, kuinka oppilaat käsittelevät oppimistehtävää. Van der Heijden (2004) on selvittänyt sitä artikkelissaan, jossa pääpaino on lähestymiskäyttäytymisen intellektuaalisessa näkökulmassa. Siinä käsitellään lähestymiskäyttäytymistä oppimistehtävään persoonallisuuden ja oppimisen suhteen.

Suurin osa oppimiseen liittyvistä empiirisistä tutkimuksista erottaa yhden tai muutamia hyvin spesifejä ja hyvin pelkistettyjä muuttujia. Singley ja Anderson (1989, 267) toteavat henkilön aikaisemman tiedon suhteesta hänen edellytyksiinsä muutokseen esimerkiksi seuraavaa: kognitiota tutkivat psykologit joutuvat todellisuudelle vieraaseen asemaan, jos he eivät tiedä mitään henkilön koko älyllisestä historiasta (Singley & Anderson, 1989, 267). Heijdenin mielestä Vygotskin käsitys tiedon sisäistymisestä näyttelee siinä huomattavaa osaa (van der Heijden, 2004, 1).

Venäläisen psykologin Vygotskin mukaan ajattelun kehittyminen liittyy psykologisten prosessien muokkautumiseen. Tästä syystä myös ajattelun eri lajeja tulisi käsitellä psyykkisenä toimintana (toimintakokonaisuudet), joita ihminen ajattelussaan soveltaa (Vygotski, 1984, 376). Vygotski on jakanut lapsen ajattelun kehityksen kolmeen eri vaiheeseen: *synkreettinen ajattelu, kokonaisuuksien muodostaminen ja tieteelliskäsitteellinen ajattelu.*

Synkreettinen ajattelu on ensimmäinen verbaalin ajattelun kehitystaso. Ajattelutapa kuvaa koettavien tilanteiden käsittelyä kokonaisuutena, jolloin niitä ei lajitella eri elementteihin. Vygotski kuvaa synkreettistä ajattelua "yhdistämättömän yhdistämisenä". Hänen mukaan lapsen synkreettisessä ajattelussa hallitsevassa roolissa ovat subjektiiviset yhteydet objektiivisten yhteyksien sijasta. Sanojen

tarkoitus ja kohteiden yhteydet perustuvat tilanteessa koettavaan vuorovaikutukseen. Kohteiden jakamisessa lapsi voi ryhmitellä esineet, jotka sijaitsevat lähekkäin, mutta joilla ei ole muita yhteisiä ominaisuuksia. Muodostettavat yhteydet perustuvat epäolennaisiin aistinperäisiin ominaisuuksiin.

Kokonaisuuksien muodostaminen on seuraava ajattelun kehitystaso, jolle ominaista on jatkuva välitön aistikokemusten vaikutus, mutta samalla myös yhteyksien luominen perustuu yhä enemmän kohteiden järjestelmällisiin ominaisuuksiin. Huolimatta siitä, että merkityksen määrittelyssä voidaan käyttää järjestelmällisiä ominaisuuksia, kyse ei ole abstraktista ajattelusta, vaan yhteyksiä luodaan konkreettisten aistiperäisten ominaisuuksien mukaisesti. Vygotski huomauttaa, että kokonaisuuksia hyödyntävä ajattelu on yhteyksiä sisältävää ja objektiivista ajattelua.

Tieteellisten käsitteiden käyttöönotto merkitsee ihmisen verbaalisen ajattelun kehittymisen aikana tapahtuvaa yhteyksien luomista, joka perustuu abstrakteihin käsitteisiin. Tämä tarkoittaa sitä, että ihminen kykenee muodostamaan merkityksiä ja käyttämään käsitteitä todellisuudessa olemassa olevien kohteiden aistiperäisesti koettavista ominaisuuksista tai vuorovaikutuksista. Tarkoituksen määrittely perustuu tieteellisessä ajattelussa aina muihin käsitteisiin (Vygotski, 1984, 376–385).

Vygotskin käsityksen mukaisesti lapsen ajattelun kehitymisessä iällä on huomattava osuus eli tiettyssä iässä lapsi ei kykene tiettyjen ajatustoimintojen suorittamiseen. Lapselle ei esimerkiksi voi opettaa laskemista, mikäli hänelle ei ole edeltävästi opetettu numeroiden käsittämistä tai mikäli lapsi ei tunne numeroita. Lapsen ei voi odottaa ratkaisevan sanallisia tehtäviä, mikäli lapsi ei osaa lukea. Vygotski ei kuitenkaan korosta iän vaikutusta lapsen ajattelun kehityksessä ylenmääräisesti. Vygotskin mukaan ympäristö, kulttuuritausta ja sosiaalinen ympäristö ovat tärkeämpiä. Kaikenlaisten tieteellisten käsitteiden pitää tukeutua lapsen aikaisempiin kokemuksiin (Vygotski, 2005, 461).

Viimeisten 20 vuoden aikana Länsi-Euroopassa kuten myös USA:ssa on kasvanut kiinnostus psykologista lähestymistä kohtaan, joka poikkeaa tietoteoreettisesta (information theoretical) lähestymisestä useissa kohdissa. Tämä ns. toimintapsykologia on periaatteessa eurooppalainen lähestymistapa, jolla on juuret eurooppalaisessa filosofiassa (van Oers, 1990; van der Veer & Valsiner, 1991;

Haenen, 1993). Eurooppalainen lähestymistapa, joka on Vygotskin perintöä, yhdistettiin anglo-amerikkalaiseen empiiris-analyttiseen traditioon, jolloin (1) lähestymiskäyttäytymisen käsitteen yleinen määritelmä toimi; (2) tämä määritelmä soveltui mm. päässälaskuun (yhteen- ja vähennyslaskut lukualueella 0-100). Sitä varten kehitettiin yksilölliset diagnostiset instrumentit ala-asteen oppilaita varten ja suoritettiin tutkimusta, joka antoi vastauksen useisiin esitettyihin tutkimuskysymyksiin (van der Heijden, 2004, 1).

Lähestymiskäyttäytyminen antaa informaatiota siitä, kuinka oppilas käsittelee tietynlaista oppimistehtävää. Käsitteet lähestyminen ”*approach*” ja lähestymiskäyttäytyminen ”*approach behavior*” liittyvät kognitiivisiin ja metakognitiivisiin prosesseihin, jotka tapahtuvat sinä aikana, kun oppilaat työskentelevät ongelman parissa (Span, 1974; van der Heijden, 2004, 1).

Vygotskin perintö lähestymiskäyttäytymisestä kohdistuu kahteen näkökulmaan, jotka ovat: (1.1.1) toimintapsykologian kolmiosaisen vuorovaikutusmallin soveltaminen heuristisella tavalla, (1.1.2) Galperinin käyttämän käsitteellisen viitekehyksen diagnostinen soveltaminen (van der Heijden, 2004, 2).

1.1.1 Toimintapsykologian kolmiosainen vuorovaikutusmalli

Toimintapsykologian vuorovaikutusmalli koostuu seuraavista komponentista: lähestymiskäyttäytyminen eli lähestyminen, tilanne eli ympäristö ja toimija eli henkilö. Sitä Span on kehitellyt 1960-luvulla luokassa tapahtuvan oppimisen tutkimiseen. Spanin kehittämä malli osoittaa että, kun oppilas joutuu kohtaamaan tehtävän, tietty lähestyminen riippuu vuorovaikutuksesta oppilaan persoonan ja tilanteen välillä (van der Heijden, 2004, 2).

Useimmat kognitiivis-psykologiset vuorovaikutusmallit sisältävät vain kaksi komponenttia: henkilö ja tilanne (eli ympäristö). Niiden mukaan sisäisten (mental) ja inhimillisen käyttäytymisen ulkoisten aspektien välillä on oleellinen ero. Oletetaan, että tieto sijaitsee päässä olevissa symbolisissa rakenteissa ja että mentaaliset prosessit koostuvat näiden symbolisten rakenteiden käyttämisestä, muokkaamisesta ja

luomisesta (Greer & Verschaffel, 1990). Käyttäytyminen nähdään sisäisten produktiivisten mekanismien ulkoisena tuloksena. Toimintapsykologian kolmiosainen vuorovaikutusmalli ei ole dualistinen vaan monistinen: kognitiiviset prosessit ja käyttäytyminen ovat olemukseltaan samanlaisia. Molemmat käsitetään toimintoina ja voidaan tulkita yrityksinä muuttaa materiaaliset tai mentaaliset objektit (van Oers, 1990; van der Heijden, 2004, 2).

Komponentti 1: Lähestymiskäyttäytyminen eli lähestyminen

Toimintapsykologian kolmiosainen malli osoittaa, että lähestymiskäyttäytyminen on erillinen kategoria. Lähestymiskäyttäytyminen ei kuulu oppilaan persoonallisuuteen eikä tilanteeseen. Lähestymiskäyttäytyminen eli yleisemmin ymmärrettynä inhimillinen aktiivisuus on kolmiosaisen mallin keskeinen, joka muodostaa prosessin, jonka kautta henkilö on vuorovaikutuksessa objektia ympäröivän maailman kanssa (Leont'ev, 1979; van der Heijden, 2004, 2).

Komponentti 2: Tilanne eli ympäristö

Inhimillinen toiminta ei tapahdu tyhjiössä vaan sosio-kulttuurisessa ja historiallisessa ympäristössä eli tilanteessa. Sen sisältä löydämme objektiivisesti osoitettavissa olevat fyysiset kohteet (esim. ihmiset ja asiat), joiden kanssa henkilö on toiminnassa eli vuorovaikutuksessa. On tärkeää todeta, että henkilö ei reagoi suoraan objektiivisesti annettuihin kohteisiin. Päinvastoin tilanteessa olevilla objekteilla on erityinen merkitys ja tunne toimijaan/tekijään (Leont'ev, 1979), ja se on juuri se merkitys, joka määrää toiminnan. Sen tähden ei mikään tekijöistä yksinään määrää lapsen tulevaa kehitystä, vaan kaikki toimijat yhdessä jättävät jälkensä lapsen emotionaaliseen kokemukseksi (Vygotski, 1984, 340; van der Heijden, 2004, 2).

Komponentti 3: Toimija eli henkilö

Toimintapsykologiassa yleensä tarkastellaan toimijaa tavoitteeseen suuntautuneena ja osittain rationaalisena olentona, joka aktiivisesti yrittää saavuttaa tavoitteensa (van Parreren, 1981). Henkilöllisyys (persoonallisuus) käsitetään dynaamisena ja kerrostuneena ilmiönä, jossa rationaaliset ja tietoiset toiminnat rakentuvat tiedostamattomalle aktiivisuudelle (van Parreren, 1978). Henkilöllisyyttä voidaan kuvata suhteellisen pysyvillä intellektuaalisilla, motivaationaalisilla ja emotionaalisilla persoonallisuuspiirteillä eli kaikilla niillä tekijöillä, jotka

mahdollistavat henkilön toiminnan (Kossakowski, et al. 1977; van Parreren, 1981). Aikaisempaa tietoa pidetään näiden toiminnan mahdollistavien intellektuaalisten tekijöiden tärkeänä osana (van der Heijden, 2004, 2).

Vuorovaikutus, kehitys, oppiminen ja sisäistyminen

Asmolov kuvaa toimintapsykologian kolmiportaisen vuorovaikutusmallin komponenttien suhdetta henkilön kehitykseen seuraavasti: 1. yksilölliset ominaisuudet ovat persoonallisen kehityksen orgaaniset esiehdot, 2. sosiaalinen ympäristö on persoonallisen kehityksen ehto, 3. ristiriidat objekti-orientoituneen toiminnan systeemissä ovat persoonallisuuden kehityksen käyttövoima (Asmolov, 1981, 26).

Vygotskin (1978, 57) mukaan mentaalisisessä kehityksessä tärkeää on tiedon sisäistyminen. Jokainen toiminto lapsen kulttuurisessa kehityksessä ilmenee kaksi kertaa: aluksi sosiaalisella tasolla ihmisten välillä (inter-psychological), sitten lapsen sisällä (intrapsychological). Tämä pätee yhtäläisesti sekä tahalliseen tarkkavaisuuteen, loogiseen muistamiseen että käsitteiden muodostamiseen. Kaikilla korkeimmilla toiminnoilla on lähtökohta aktuaalisissa suhteissa inhimillisten yksilöiden välillä.

Kossakowski ja Lompscher (1977, 133–134) puolestaan kuvaavat sisäistymisprosessia, joka koskee lähestymiskäyttäytymistä vakiintuneiden tapojen muodostumisprosessina (van der Heijden, 2004, 3).

1.1.2 Galperinin käyttämän käsitteellisen viitekehyksen diagnostinen soveltaminen

Venäläisen psykologin Galperinin teoria selvittää, kuinka ja millä ehdolla lapsi oppii. Galperinin mukaan oppiminen on toimintaa, jossa muodostuu uusia tietoja ja taitoja tai aikaisemmat tiedot ja taidot muuttavat laatuaan.

Hän lähtee periaatteesta, että henkinen toiminta heijastaa ulkomaailmaa eli kaikki henkiset operaatiot saavat alkunsa ulkomaailmasta. Ulkomaailman tekeminen muuttuu sisäiseksi tekemiseksi eri vaiheiden kautta. Tästä on Galperinin oppimisteoria saanut nimityksen: oppimisen vaihemuotoinen teoria eli henkisten toimintojen asteittainen kehittyminen (Galperin, 1979, 98).

Galperinin oppimisteorian avulla voidaan selittää päässälaskemisen osaamisen kehittymistä, koska päässälasku opitaan vaiheittain. Galperinin käsittelyssä (1979, 138–140) jäsentyy oppimisteoria kuudeksi vaiheeksi eli ominaisuudeksi:

Ensimmäinen vaihe on motivaatiotaso.

Toinen vaihe on fyysisen toiminnon taso. Vaiheen tavoitteena on muodostaa tarvittava toimintasuunnitelma. Ensiksi opettaja suorittaa oppilaan nähden koko toiminnan mallintamisen ja käsitteistön. Lapsen täytyy nähdä koko toiminta. Hänen ei tarvitse etsiä muistista mitään. Koko esitys täytyy olla nähtävissä. Tässä vaiheessa lapsi itse ei toimi vaan seuraa opettajan esitystä.

Kolmas vaihe on fysiologisen toiminnan taso. Tällä tasolla ovat ollaan kiinnostuneita toimintojensa tuloksista ja niin ollen myös niiden mekanismeista. Toimintojen tulokset eivät vain säätele niiden suorittamista, vaan myös vahvistavat toimintoja tuottavaa mekanismia. Toiminnan kehitystasolle on ominaista, että tulokset vaikuttavat vasta, kun vaihe on saavutettu. Tällainen vaikutus voi olla sekä lopullisella että väliaikaisella tuloksella, mutta vain materiaalisesti jo saavutetulla tuloksella. Siinä vaiheessa alkaa lapsen aktiivinen toiminta. Lapsi alkaa suorittaa opettajan näyttämiä toimintoja itse. Toiminta täytyy suorittaa alusta loppuun asti, mitään ei saa jättää väliin. Konkreettista toimintaa harjoitellaan kunnes voidaan sanoa, että lapsi sen osaa. Lapsen toimintaa auttaa kuunteleva ääni. Puheessa lapsi kuvaa kaikkea, mitä hän tekee. Täsmälleen samoja tehtäviä ei kerrata.

Neljäs vaihe on subjektin toiminnan taso. Toimintojen toistaminen siinä muodossa, jossa ne aikaisemmin tuottivat tuloksia, voi johtaa epäonnistumaan uusissa, hieman muuttuneissa tilanteissa. On välttämätöntä, että toimintaa sopeutetaan sekä alussa että sitä suoritettaessa, mutta ehdottomasti ennen sen päättymistä. Tämä puolestaan edellyttää eri toimintojen kokeilua. Vain siten voidaan tehdä korjaukset ennen toimintojen suorittamista tai ainakin ennen niiden päättymistä, jolloin onnistuminen on mahdollista. Tässä vaiheessa toiminta tapahtuu ulkoisena puheena. Kolmannessa vaiheessa puhe organisoii toimintaa. Esityspohjainen toiminta vaimenee ja saa vähitellen verbaalisen muodon. Ulkoisen puheen on pakko yksityiskohtaisesti koota toiminta esitetystä mallista. Tämän vaiheen lopussa lapsi mahdollisesti jättää jonkun toimintavaiheen suorittamatta, mutta lapsen ajattelussa sen pitää kuitenkin toimia.

Viides vaihe on persoonallisen toiminnan taso. Tässä tapauksessa toiminnan subjekti ei ota huomioon vain omaa havaintoa esineistä, eikä vain niiden luonnollisia suhteita ja ominaisuuksia, vaan myös niiden sosiaalisen merkityksen ja niihin liittyvät

yhteisölliset tiedot. Hän omaksuu ja käyttää sen sosiaalisen ryhmän yhteisöllistä kokemusta, jossa hänet kasvatetaan ja jossa hän elää. Tämä vaihe on äänetön puheen vaihe. Lapsi puhuu itselleen supisten, mutta suu suljettuna. Tässä vaiheessa toiminta lyhenee ja alkaa automatisoitua.

Kuudes vaihe on kehitystasojen keskinäinen suhteet. Tämä uusi suunnitelma syntyy, kun lisätään uudet olosuhteet. Yksilöllisesti muuttuvien ainutkertaisten tilanteiden syntyminen edellyttää olemassa olevien toimintojen suorittamista ikonisella tasolla. Tässä vaiheessa muodostuu toiminta sisäisenä puheena, se on henkinen prosessi. Toiminta lyhenee ja automatisoituu. Lopuksi tieto tulee suoraan muistista. (Galperin, 1979, 138–140).

Lähestymiskäyttäytymisen intellektuaaliset näkökulmat

Kuvatakseen lähestymiskäyttäytymisen muodostavia toimintoja van der Heijden valitsi Galperinin (1969) kehittämän käsitteellisen viitekehyksen, joka perustuu Vygotskin ideoille. Sen mukaan, kuten yleensä toimintapsykologiassa, inhimillinen aktiivisuus koostuu ulkoisesti havaittavista toiminnoista sekä myös sisäisistä toiminnoista.

Galperin erottaa ensi sijassa seuraavat toiminnot:

- a) suuntautumistoiminnot (kuinka minä lähestyn tätä ongelmaa),
- b) täytöntöönpanotoiminnot (ongelman varsinainen ratkaiseminen),
- c) kontrollointi eli arvioivat toiminnot (onko tämä oikea vastaus) (Galperin, 1969, 249–253).

Toiseksi Galperin (1969, 254–273) erottaa toimintojen kuvailun kuusi ominaisuutta eli parametria:

- 1) toiminnan taso (mentaaliset, havainnolliset, verbaaliset, materiaaliset toiminnot)
- 2) lyhentämisen aste
- 3) hallinnan aste
- 4) yleistämisen aste
- 5) oivalluksen aste
- 6) tietoisuuden aste.

Näihin van der Heijden lisäsi Vygotskin lähikehityksen taso (zone of proximal development) vastaavan tason, joka on:

7) itsenäisyyden taso.

Kun kutakin kolmea suuntautumisen, täytöntöönpanon ja kontrollin toimintoa kuvataan yllä mainituilla 7 parametrilla, saadaan 21 lähestymiskäyttäytymisen näkökulmaa. Näihin van der Heijden lisää vielä kolme parametria, jotka ovat *joustavuuden aste, tarkkavaisuuden puute sekä tehtävään liittyvien spesifien operaatioiden olemus*. Näin ollen voidaan lähestymiskäyttäytymistä tarkastella kolmiosaisen vuorovaikutusmallin mukaan kaikkiaan 24 näkökulmasta (van der Heijden, 2004, 4–5).

Lähestymiskäyttäytymisen operaationalistaminen päässä laskussa

Van der Heijdenin (1993) tutkimuksessa, jossa oli tarkoitus määrittellä interaktiokäyttäytymisen erilaisia näkökulmia, käytettiin menettelytapoja, jotka otettiin sekä käytännöllisestä prosessiarvioinnista että dynaamisesta arvioinnista.

Prosessiarvioinnissa eli kvalitatiivisessa arvioinnissa korostetaan kognitiivisten ja metakognitiivisten prosessien arviointia vastakohtana suoritusten arvioinnille (Holowinsky, 1980). Toimintapsykologisesti suuntautuneessa prosessiarvioinnissa (van Parreren, 1981) puolestaan oppilaiden suorittamat toiminnot konkreettisessa tehtävätilanteessa rekonstruoidaan yhdistämällä ne tietoihin, jotka saadaan observoimalla käyttäytymistä (van der Heijden, 2004, 5).

Dynaamisessa arvioinnissa oppilasta autetaan tai opetetaan määrittämään oma aktiviteetin itsenäisyyden aste eli taso 7. Se tarkoittaa: voiko oppilas, joka ei kykene suorittamaan tiettyä toimintaa spontaanisesti, onnistua tekemään niin aikuisen ohjaamana. Dynaamista arviointia voidaan näin ollen pitää Vygotskin (1978, 1984, 2005) ”lähikehityksen vyöhykkeen” mittaamisena (van der Heijden, 2004, 6).

Riippuu useista tekijöistä, mitkä lähestymiskäyttäytymisen 24 näkökulmasta voidaan asiallisesti operaationaalistaa käytännössä. Nämä tekijät ovat 1) käytettyjen tehtävien erityislaatu, (2) oppilaiden edistymistaso tehtäväalueella ja (3) sovellettavat spesifit diagnostiset menettelytavat. Näin ollen yleistä lähestymiskäyttäytymisen käsitteen

määritelmää kehitettiin lukualueen 0–100 yhteen- ja vähennystehtävien päässä laskuja varten. Tämä tuotti Leidenin testin (Leiden Diagnostic Arithmetic Approach Test: LDRT) eli prosessidiagnostisen instrumentin arvioimaan lähestymiskäyttäytymistä päässä laskussa. Leidenin testillä voidaan mitata kahdeksaa lähestymiskäyttäytymisen näkökulmaa, joita koskevaa tutkimusta tarkastellaan myöhemmin kappaleessa 2.7 (Aikaisempia tutkimuksia päässä laskun oppimisesta ja opetuksesta) (van der Heijden, 1988).

1.2 Päässä laskun määritelmä

Päässä laskulla (engl. mental arithmetic) tarkoitetaan laskemista päässä ilman apuvälineitä, kuten laskinta, tietokonetta tai kynää ja paperia. Päässä laskun ja kirjallisen laskemisen päällimmäinen ero onkin se, että kirjallinen eli kynällä laskeminen suoritetaan kirjoitetuin numeromerkein kun taas päässä laskeminen tapahtuu ajatuksissa käyttäen vain aivoja.

Päässä lasku on ajattelun ja toiminnan yhdistelmä. Se on prosessi, jossa samanaikaisesti tarvitaan kuvitelman luomista ja stimuloitua laskemista. Koko tämä prosessi virittää ajattelua, muistia, tarkkavaisuutta ja avaruudellista kuvittelua (suorittaa laskutehtävä).

Matemaattisia taitoja tarvitaan arkielämässä. Näihin arkielämän taitoihin kuuluu mm. lukujen ymmärtäminen, ajan katsominen kellosta, punnitseminen ja mittaaminen, ostosten maksaminen, vaihtorahan antaminen, aikataulujen lukeminen sekä niihin liittyvien laskutoimitusten suorittaminen. Näistä selvittää päässä laskien, jos tarvittavia apuvälineitä ei aina ole käytettävissä.

Huolimatta siitä, että taskulaskimet ja tietokoneet ovat yhä suurempi osa päivittäistä elämää ja myös opetusta, päässä laskun merkitys kouluopetuksessa ei ole vähentynyt. Useiden Yhdysvalloissa ja Japanissa suoritettujen tutkimusten mukaan oppilaat pitävät päässä laskutaitoa erittäin tärkeänä. Sitä pidetään tärkeämpänä kuin kirjallista laskemista, sillä päässä laskutaidosta on hyötyä mm. arkielämässä (McIntosh & Reys, 1997, 322–329).

1.3 Päässä-lasku ja työmuisti

Päässä-laskiessaan henkilö havaitsee, tulkitsee, jäsentää ja tallentaa lukuja, laskutoimituksia ja niiden suhteita koskevaa tietoa muistiinsa. Niitä prosesseja, jotka ilmenevät päässä-laskun suorituksessa ohjaavat pitkäkestoinen muisti (long term memory LM), johon opitut tiedot tallentuvat ja josta ne ovat noudettavissa tarvittaessa sekä lyhytkestoinen muisti (short term memory STM) informaation lyhytaikaista säilyttämistä ja käsittelyä varten. Päässä-laskussa pitkäkestoisella muistilla tarkoitetaan esim. kertotaulun muistamista. Lyhytkestoinen muisti on operatiivinen muisti, joka toimii apuna esimerkiksi muistinumeroiden tallentamisessa (Svensson, 1977, 6; Virrankoski, 1983, 2).

Nykyään lyhytkestoista muistia (STM) nimitetään useimmiten työmuistiksi (working memory WM). Työmuisti liittyy sekä informaation lyhytaikaiseen säilyttämiseen että käsittelyyn kognitiivisissa tehtävissä kuten oppimisessa, loogisessa ajattelussa ja ymmärtämisessä (Esim. Baddeley, 1986, 1996, 2000; Baddeley & Hitch, 1974; Douglas B. Potts, 1996; Logie, Gilhooly & Winn, 1994). Työmuisti ei ole pelkkä aivoissa sijaitseva lyhytkestoinen varasto vaan useissa kognitiivisissa toiminnoissa välttämätön mutta rajallinen väline. Osa tutkijoista erottaa vieläkin lyhytkestoisen varastoinnin (STM) ja työmuistin (WM) toisistaan. Toiset taas kuten Baddeley, jonka mallia on käytetty useimmissa päässä-laskututkimuksissa, yhdistävät nämä toiminnot saman käsitteen eli työmuistin alle (Baddeley, 1986, 1996; Kyttälä, 2008, 2).

Koska työmuisti on kapasiteetiltaan rajallinen, se on omalla tavallaan oppimisen pullonkaula (Kyttälä, 2008, 2). Monien tutkimusten mukaan (Imbo, De Rammelaere & Vandierendonck, 2005) työmuistin onkin todettu olevan yhteydessä kouluikäisten matemaattisiin suorituksiin kuten päässä-laskuun. Lisäksi matematiikassa heikosti suoriutuvien oppilaiden työmuistiresurssit ovat osoittautuneet keskimäärin normaalisti menestyvien valmiuksia huonoimmiksi (Kyttälä, 2008, 1).

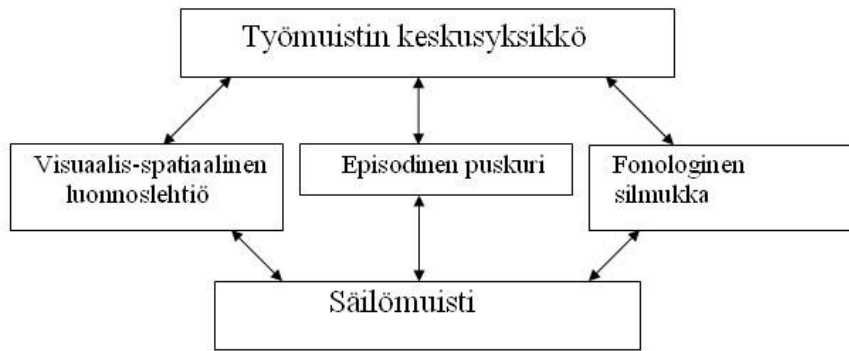
Päässä-laskututkimuksissa käytetty työmuistin malli

Kyttälän (2008, 2) mukaan nykyaikaisen työmuistikäsityksen juuret ovat Atkinsonin ja Shiffrinin (1968) laatimassa mallissa lyhytkestoisesta muistista (STM), jota pidettiin suurelta osin verbaalisen tiedon hetkellisenä varastona. Tätä seurasi em.

tutkijoiden kehittämä modaalimalli, jossa lyhytkestoinen muisti toimi varastona, jossa oli myös kontrollitoimintoja kuten haku, kertaus ja informaation siirto pitkäkestoiseen muistiin. Se työmuistimalli, jota on käytetty käsitteellisenä viitekehysenä useimmissa päässä laskututkimuksissa, perustuu Baddeleyn ja Hitchin (1974) kokeisiin, joissa he pyrkivät korjaamaan Atkinsonin ja Shiffrin modaalimallissa ilmenneet puutteet.

Baddeleyn (1986, 1996) moniosainen työmuistin malli käsittää kolme osaa eli komponenttia: keskeinen toimeenpanija (central executive component) eli keskusyksikkö ja kaksi ala- eli orjajärjestelmää, jotka ovat fonologinen silmukka (phonological loop) sekä visuaalis-spatiaalinen luonnoslehtiö (visuo-spatiaalinen sketchpad). Keskusyksikkö on vastuussa kahden alasysteemin ohjaamisesta ja koordinaatiosta sekä tietojen hakemisesta pitkäkestoisesta muistista (LM) ja loogisesta järjestyksestä. Fonologinen komponentti säilyttää ja käsittelee fonologisesti eli kuulemalla hankittua koodattua verbaalista informaatiota, kun taas visuaalis-spatiaalinen komponentti muodostaa saman toiminnon visuaalisesti ja spatiaalisesti koodatusta informaatiosta. Keskeinen toimeenpanija vastaa myös tehtävän koordinaatiosta, tehtävän kytkennästä, valikoivasta tarkkaavaisuudesta ja prosesseista, jotka liittyvät pitkäkestoiseen eli säilömuistiin, esimerkiksi informaation hallussa pitäminen ja säilyttäminen (Baddeley, 1996; Imbo et al., 2005, 2-3).

Myöhemmin Baddeley (2000) korjaili malliaan siinä ilmenevien puutteiden ja kritiikin takia. Tähän malliin, jota on käyttänyt mm. Kyttälä (2008, 3) matemaattisten taitojen kognitiivisessa tutkimuksessaan on lisätty yksi komponentti eli episodinen puskuri, jonka oletetaan yhdistävän informaatiota alajärjestelmien ja säilömuistin välillä (kuvio 1).



KUVIO 1. Baddeleyn (1986, 1996, 2000) työmuistin kolmikomponenttimalli täydennettynä episodisella puskurilla (Kyttälä 2008, 3)

Työmuistin rooli päässä laskussa

Monet empiiriset tutkimukset valaisevat työmuistin roolia päässä laskussa (esim. DeStefano & LeFevre, 2004). Päässä laskujen suorittamisessa on osoitettu tarvittavan keskusyksikkötoimintojen lisäksi myös fonologista ja visuaalis-spatiaalista varastointia (Kyttälä, 2008, 13). Keskusyksikön eli toimeenpanijakomponentin on nähty olevan tärkeässä osassa yksinkertaisissa yhteen- ja kertolaskuissa (Ashcraft, Donley, Halas & Vakali, 1992; De Rammelaere, Stuyven & Vandierendonck, 1999, 2001; Imbo et al., 2005, 3–4).

Toimeenpanijakomponentti on tärkeä myös muodostettaessa kompleksisia päässä laskuja. Sen rooli on varmistunut myös kompleksissa aritmeettisissa probleemoissa sekä yhteenlaskuissa (Fürst & Hitch, 2000) ja kertolaskuissa (Seitz & Schumann-Hengsteler, 2000, 2002).

Fonologinen komponentti kykenee säilyttämään väliaikaisten tulosten fonologisia representaatioita. Sen uskotaan huolehtivan tarkkuudesta laskemisen aikana. Edelleen, koska erityisesti kompleksisissa aritmeettisissa probleemoissa vaaditaan väliaikaistietojen säilyttämistä, on fonologinen silmukka välttämätön sekä yksinkertaisissa että myös kompleksisissa yhteen-, kerto- ja vähennyslaskutehtävissä (Imbo et al., 2005, 5).

Visuaalis-spatiaalisen komponentin rooli päässä laskussa on pitkään ollut epäselvä. Useissa tutkimuksissa ei ole osoitettu mitään todistetta sen roolista päässä laskussa.

Kyttälän (2008) suorittamassa tutkimuksessa ilmeni, että staattinen visuaalis-spatiaalinen informaation varastointi selittää päässälaskutehtävissä suoriutumista tilastollisesti merkitsevästi. Mentaalisen rotaatiokyvyn on havaittu olevan yhteydessä matemaattiseen suorittamiseen. *Laskujen esittämistapa* vaikuttaa ratkaisemisessa käytettävien resurssien valintaan: horisontaalisesti esitetyt tehtävät houkuttelevat fonologisten resurssien käyttöön ja vertikaalisesti esitetyt puolestaan visuaalis-spatiaalisten resurssien käyttöön (Trubovich & LeFevre, 2003). Kyttälän tutkimuksessa ilmeni kuitenkin, että rotaatiokyvyllä on vain epäsuora vaikutus älykkyyden kautta päässälaskutehtävissä suoriutumiseen (Imbo, 2005, 5; Kyttälä, 2008, 43).

Joustavuus kuvaa eri lähestymisten käyttöä ongelmissa, joissa tarkoitus on tehostaa laskemista. Van der Heijden väittää tutkimuksiinsa perustuen, että on oppilaita, jotka käyttävät yhteenlaskutehtävissä ns. menetelmää `1010` ($15+13=? - (1) 10+10=20 / (2) 5+3=8 / (3) 20+8=28$) tai ns. `N10`-menetelmää ($15+13=? - (1) 15+10=25 / (2) 25+3=28$). Todennäköisesti tämä johtuu siitä, että `1010`-menetelmä kuormittaa enemmän työmuistia ja lisää virheriskiä erityisesti suoritettaessa vähennyslaskutehtävää kuten $41-39=?$, jossa ensin vähennettäessä kymmenet kymmenistä $40-30=10$ ja sitten ykköset ykkösistä $9-1=8$ ja lopuksi tulokset yhdistämällä saadaan $10+8=18$, mikä johtaa väärään lopputulokseen. `N10`-menetelmässä ko. virheen riskiä ei ole, sillä suoritus tapahtuu seuraavasti: $41-39=?$ $41-30=11$ ja edelleen $11-9=2$, joka on oikea tulos (van der Heijden, 2004, 8-9).

Työmuistin rooli muistiinviemis- ja lainaamisoperaatiossa

Muistiinpano ja lainaaminen ovat additionaalisia ratkaisuskeleitä, joita usein tarvitaan kompleksissa aritmeettisissa tehtävissä. Esimerkiksi tehtävässä $37+14$ ykkösten summa ylittää luvun 10, jolloin luku 1 pitää viedä muistiin ja liittää kymmeneen. Tämä operaatio ilmenee myös kertolaskuprobleemoissa kuten Geary, Widaman ja Little (1986, 478-487) osoittivat. Esimerkiksi tehtävässä $27 \cdot 6$ ykkösten kertominen eli $7 \cdot 6$ antaa tuloksen 42, jolloin luku 4 säilytetään ja luku 2 pidetään aktiivisena työmuistissa, sillä aikaa kun kertolaskun $2 \cdot 6$ tulokseen 12 lisätään 4. Vastaavanlaisia vähennyslaskuja ei ole paljoa tutkittu, vaikka lapsilla (Brown & Burton, 1978) ja aivoinvalidilla (Sandrini, Miozzo, Cotelli & Cappa, 2003) on ilmennyt vaikeuksia lainaamisessa kuten tehtävässä $24-6$. Koska 4 miinus 6 on

vähemmän kuin 0, vaaditaan lainaamista, jolloin tehtävän ratkaisu onnistuu (Imbo et al., 2005, 6).

Muistiinviemisessä ja lainaamisessa on ilmeistä, että ne eivät liity vain deklaratiiviseen tietoon kuten tiedon noutaminen vaan myös proseduaaliseen (Ashcraft, 1992). Tällä perusteella voidaan odottaa, että aritmeettinen suorituskyky on hitaampaa ja vähemmän tarkkaa probleemoissa, jotka vaativat muistiinviemistä tai lainaamista verrattuna niihin, joissa sitä ei tarvita. Näin ollen se aika, joka vaaditaan päässä laskemiseen kasvaa, jos pitää tehdä muistiinpanoja tai lainaamisoperaatioita (e.g. Ashcraft & Faust, 1994; Ashcraft & Kirk, 2001). Sen vaiheen jälkeen, kun luku on viety muistiin tai lainattu, pitää tehdä ylimääräinen askel viettäessä tieto työmuistiin. Myöhemmässä vaiheessa tämä informaatio pitää taas noutaa sieltä. Jos kyseinen tieto on kadonnut työmuistista, tulee virhe. Epätäydelliset muisti- tai lainausmenetelmät ovatkin osoittautuneet eräiksi yleisimmistä virheen syistä lasten, aikuisten sekä aivoinvalidipotilaiden päässä laskusuorituksissa (e.g. Fürst & Hitch, 2000; Noel et al., 2001; Sandrini et al., 2003; Imbo et al., 2005, 7).

Oppilailla, jotka tuntevat pelkoa matematiikkaa kohtaan, on pienempi työmuistin laajuus. Se puolestaan johtaa virheiden tekoon ja hitaampaan reagointiaikaan. Ashcraftin ja Faustin (1994) tutkimusten mukaan pelokkailla oppilailla vaikeuksia esiintyi mm. kaksinumeroisissa luvuissa, missä ongelma johtuu kymmenylityksestä. Tällöin suoritus aika oikean tuloksen saavuttamiseksi oli kolme kertaa pitempi kuin oppilailla, joilla ei ollut pelkoa matematiikkaa kohtaan (Ashcraft & Kirk, 2001).

1.4 Päässä-laskun rooli matematiikassa

Laskeminen on osa päivittäistä elämäämme, jossa käytämme laskutaitoa useissa hyvin erilaisissa toiminnoissa. Emme kykene kuvittelemaan aikuista henkilöä, joka ei osaa laskea. Schipper (2001a) väittää, että lapsille kehittyy kyky ymmärtää matematiikkaa kasvu-ympäristön kulttuuri- ja koulutaustasta riippumatta. Oleellista on, että lapsen tiedot matematiikasta ja päässä-laskemisesta ovat oikeita. Tähän lapsi tarvitsee aikuisen apua ja tukea.

Laskutaidon vakiinnuttamisessa täytyy huomioida, että päässä-lasku olisi oppilaiden mielestä mielenkiintoista ja hauskaa. Alaluokilla oppilaiden ajattelu on kuvallista. Se kehittyy lapsilla jo ennen koulunkäynnin aloittamista. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että lapsi ajattelee kuvien ja muiden symbolien avulla käyttäen apuna usein myös sormiaan. Tästä syystä on tärkeää, että alaluokilla oppiminen olisi mahdollisimman tehokkaasti oppilasta aktivoivaa, motivoivaa ja käytettäisiin erityisesti oppilaan eri aisteja kehittävää materiaalia. Tärkeää on toimiminen käytännössä esimerkein sekä jatkuva kertaaminen, jotta oppilas oppisi miten tuloksia saavutetaan (Thompson, 1999, 2–4; Noor, 1998, 35; Woods, Resnick & Groen, 1975, 17–21).

Skemp (1979, 44–49; 1987) painotti symbolien käyttöä ja on myös esittänyt niiden avulla tapahtuvan oppimisen edellytykset. Symboleiden avulla voidaan painaa muistiin kirjoitetut tiedot pitkäksi aikaa, antaa lyhyitä kuvauksia, automatisoida ajattelua, esittää yhtäläisyyksiä ja laatia uusia ratkaisumahdollisuuksia, tiivistää ja muuttaa ajattelua, muotoilla lukujonoja individuaalisesti, muotoilla graafinen esitystapa, luoda matemaattisia kuvia sekä kuvitelmiä.

Tärkeää on myös se, että oppiminen ja toiminta liittyisivät ympäröivään maailmaan. Tämä antaa oppilaille tietoa siitä, että päässä-laskutaitoa tarvitaan myös matematiikan tuntien ulkopuolella. Näiden tehtävien ratkaisu liittyy suoraan oppilaan tarpeeseen tietää, kuinka kussakin tilanteessa on tarkoituksenmukaisinta toimia (Kaasik, 1997a, 28–30; Kilborn, 2003, 2–10; Koponen, 1995, 11–14). Esimerkkinä

toimii vaikkapa raha: sen käyttöön ja säästämiseen liittyvät tehtävät. Mielenkiintoisia ovat myös luontoon ja sen suojelemiseen liittyvät tehtävät sekä myös meitä ympäröivät esineet ja elämää käsittelevät tehtävät. Lasta aktivoi erityisesti se, kun hän saa ensin esittää oletuksia kyseessä olevasta ongelmasta. Tämän jälkeen tehtävä ratkaistaan konkreettisesti toimien. Mikäli opettaja käyttää tunneilla ongelmanratkaisutehtäviä, ensimmäisten luokkien oppilaat ovat yleensä innokkaita laatimaan luokkatovereilleen samantyyppisiä tehtäviä. Tällainen toiminta ylläpitää lapsen mielenkiintoa, kehittää ajattelua ja laskutaitoa (Logie, Gilhooly & Winn, 1994, 395–410; Pehkonen, 2006; Piht, 2004b, 5–11; Rice, 1992).

Toinen mahdollisuus laskutaidon kehittämiseen on pari- ja ryhmätyöskentely vertaisryhmässä. Tällaisen toiminnan avulla lapsi oppii, että yhteistyö on ihmisen luonnollinen päivittäinen toimintatapa. Tulokseen pääsy edellyttää jokaisen panosta. Oppiminen tapahtuu tällöin asianmukaisessa ohjauksessa toisia tukien. Kyseisessä työskentelymuodossa tehtävävalikoima on laaja. Oppilaille voidaan antaa mm. erilaisia mittaus- tai havainnoimistehtäviä kuten lämpötilan muutokset tietyllä aikavälillä tai päivän mittaan eri tunteina ohi kulkevien autojen lukumäärän vaihtelu. Näin voidaan toimia jo peruskoulun ala-asteella. Pari- ja ryhmätyöskentelyssä tulee myös yhdessä tutkia ongelmia sinänsä ja niiden ratkaisuja sekä tehdä johtopäätöksiä saaduista tuloksista. Fisher (2004, 13) korostaa: *Yhdessä muiden kanssa kykenemme toimimaan ja saavuttamaan enemmän kuin yksin.*

1.5 Päässä-laskun suoritusmenetelmät eli strategiat

Päässä-laskun ja kirjallisen laskemisen päällimmäinen ero on se, että kirjallinen eli kynällä laskemien suoritetaan numeromerkein usein tiettyjä kaavioita eli algoritmeja apuna käyttäen. Päässä-lasku puolestaan tapahtuu päässä, ilman ulkoisia apuvälineitä joko a) *reproduktiivisesti* tai b) *rekonstruktivisesti*. Suoritus on *reproduktiivinen*, kun vastaus saadaan suoraan pitkäaikaismuistista, jolloin työmuisti toimii vain tiedon välittäjänä. *Rekonstruktivinen* suoritus tapahtuu pääasiassa työmuistissa ja pitkäaikaismuisti toimii vain tiedon taltioijana ja varastona (Virrankoski, 1983, 4).

Varsinkin pitkien ja monimutkaisten tehtävien vastaus on harvoin saatavissa suoraan muistista eli reproduktiivisesti. Silloin yleensä oppilas rekonstruoi päässälaskun suoritusvaiheet yksinkertaisimmaksi loogisesti toisiinsa liittyviksi laskutehtävien kokonaisuudeksi, jolloin puhutaan päässälaskun **suoritusmenetelmästä eli strategiasta** (Abel, Harak & Kaljas, 2004, 68).

Peruskoulun alaluokkien matematiikan opetuksen tärkeimpiä tehtäviä on peruslaskutoimitusten (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku) suoritusmenetelmien opettaminen. Jokaisella peruslaskutoimituksella on omat suoritusmenetelmänsä sekä kirjallisissa että päässälaskuissa. Kirjalliset laskut suoritetaan allekkain kaavamaisten standardimenetelmien mukaan, joita kutsutaan usein peruslaskutoimitusten algoritmeiksi. Nämä opetetaan viimeistään 3. luokalla sekä Virossa että Suomessa.

Virrankosken (1983, 5–6) mukaan päässälaskun suoritusmenetelmät jakaantuvat **normaali- ja oikomenetelmiin**. Ne eivät ole niin kaavamaisia kuin kirjallisissa laskuissa ja sisältävät valinnaisia mahdollisuuksia kuten taulukosta 1 ilmenee.

TAULUKKO 1. Kirjallisen allekkain laskemisen menetelmät ja päässälaskun normaalimenetelmät peruslaskutoimituksissa (Virrankoski, 1983, 5)

Laskutoimitus	Päässälaskun normaalimenetelmiä	Kirjallisen allekkain laskemisen menetelmä
Yhteenlasku 64+28	a) 64+20=84, 84+8=92 b) 60+20=80, 4+8=12 80+12=92	$\begin{array}{r} 64 \\ +28 \\ \hline 92 \end{array}$
Vähennyslasku 64–28	64–20=44, 44–8=36	$\begin{array}{r} 64 \\ -28 \\ \hline 36 \end{array}$
Kertolasku 3·45	3·40=120, 3·5=15 120+15=135	$\begin{array}{r} 45 \\ \times 3 \\ \hline 135 \end{array}$
Jakolasku 125:5	(100+25):5= 100:5+25:5= 20+5=25	$\begin{array}{r} 25 \\ 5 \overline{)125} \\ \underline{10} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$

Oleellisin ero kirjallisen laskemisen ja päässä-laskun normaalimenetelmän välillä on se, että päässä-lasku aloitetaan yleensä suurimmasta yksiköstä, mutta kirjallisessa muulloin paitsi jakolaskuissa pienimmästä lähtien.

Päässä-laskun menetelmiä on useampia kuin yksi kuten jo edellä todettiin. Yhteen- ja vähennyslaskuissa oppilaat käyttävät monien tutkijoiden mukaan kuitenkin yleensä kahta menetelmää, jotka ovat nimeltään a) *Split- eli osiin jakamisen menetelmä* ja b) *Jump eli hyppymenetelmä*. Molemmat menetelmät perustuvat jakamiseen. Ne ovat samoja kuin Virrankosken (1983) esittämän taulukon 1 normaalimenetelmät kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

Yhteenlaskussa $26+15$ oppilas, joka käyttää a) Split-menetelmää, laskee seuraavasti:
 $20+10=30$; $6+5=11$; $30+11=41$.

Vähennyslaskussa $36-17$ oppilas, joka käyttää b) Jump -menetelmää, laskee seuraavasti: $36-10=26$; $26-7=19$ (Foxman & Beishuizen, 2002, 41–69; Thompson, 2000, 291–298; Beishuizen, 1993; van der Heijden, 2004, 8).

Oikomenetelmät. Päässä-laskulle on oleellista menetelmän valitseminen siten, että laskeminen muodostuu mahdollisimman yksinkertaiseksi ja tulos saadaan vähällä vaivalla. Näin tapahtuu käytettäessä **oikomenetelmiä**, joissa usein tukeudutaan laskulakien apuun. Helposti opittavia oikomenetelmiä ovat seuraavat:

1. *Kompensaatiomenetelmä* eli täydentäminen lähinnä suurimpaan yksikköön.

$$25+9=25+10-1=35-1=34$$

$$33-18=33-20+2=13+2=15$$

$$3 \cdot 19=3 \cdot (20-1)=3 \cdot 20-3 \cdot 1=60-3=57$$

$$54:3=(60-6):3=60:3-6:3=20-2=18$$

2. *Kertolaskun muuttaminen yhteenlaskuksi*

$$4 \cdot 12=12+12+12=36$$

3. *Kertolaskun osittaminen*

$$4 \cdot 18=2 \cdot (2 \cdot 18)=2 \cdot 36=72$$

4. *Kertolaskun vaihdantalain soveltaminen*

$$3 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 5) = 3 \cdot 10 = 30$$

5. Kertolaskun osituslain soveltaminen yhteenlaskuun

$$5 \cdot 24 = 5 \cdot (20 + 4) = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 4 = 100 + 20 \text{ (Virrankoski, 1983, 5–6).}$$

Kompensointimenetelmää käytetään enimmäkseen lukuihin 7, 8, ja 9 päättyvien lukujen yhteen ja vähennyslaskussa. Näiden lisäksi oppilaat kykenevät myös itse keksimään päässälaskustrategioita kuten seuraavat:

- Tiedät, kuinka paljon on $8+2$ joten voit käyttää sitä myös laskussa $18+12$;
- Laskussa $72-14$ vähennetään ensin 12 ja sitten 2. (Beishuizen, 1993; Foxman & Beishuizen, 2002, 41–69; van der Heijden 2004, 8; Thompson, 2000, 291–298).

Koulunsa aloittavien oppilaiden *laskemisstrategia* on aluksi, kuten Noor (1998) toteaa, manuaalisesti ja verbaalisesti toteutettavaa toimintaa, jonka avulla laskettavat esineet ja perättäiset luvut asetetaan vastaavaan järjestykseen. Tämän kaltaista laskemista hyödynnetään useissa erilaisissa toiminnoissa. Tällöin opitaan samalla tuntemaan lukujen koostumus sekä selvitetään yhteen- ja vähennyslaskua käänteisinä operaatioina (Noor, 1998, 35).

Thompsonin (1999, 2–4) sekä Woodsin, Resnickin ja Groen (1975, 17–21) mukaan tässä vaiheessa olevien oppilaiden käyttämät strategiat ovat seuraavanlaisia:

Perusyhteenlaskussa:

- *Luetteleminen ensimmäisestä luvusta lähtien*. Esim. $4+5=(4, _ 5, _ 6, _ 7, _ 8, _ 9)=9$. Tämä on ensimmäinen strategia, jonka lapset oppivat. Oleellista on se, että oppilaat tuntevat numerot.
- *Laskeminen suuremmasta luvusta lähtien tukeutuen vaihdannaisuuteen*. Esim. $5+6=6+5=11$.
- *Kymmenylityksellä*. Esim. $8+6=8+2+4=14$

Perusvähennyslaskussa:

- *Luetteleminen takaisinpäin*. Esim. $7-3=(7, _ 6, _ 5, _ 4)=4$

- *Luetteleminen eteenpäin pienemmästä lähtien.* Esim. $13-6=6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ eli siirrytty taaksepäin 7 askelta sormia apuna käyttäen)=7
- *Vähennyslasku kymmenen ylityksellä.* Esim. $12-4=12-2-2=8$.

Yhteen- ja vähennyslaskun vuorottelua:

- *Parisummasta vähentäminen.* Esim. $18-9=(9+9)-9$.
- *Täydentäminen parisummaksi ja siitä vähentäminen.* Esim. $8+5=(8+8-8-5)=16-3=13$. *Täydentäminen vähentäjän parisummaksi.* Esim. $9-5=(10-5-1$ koska 9 on yksi vähemmän kuin 10)=4.
- *Vähennyslasku yhteenlaskun käänteisenä toimituksena.* Esim. $7-3=4$, sillä $4+3=7$.
- *Kymmeneksi täydentäminen viiden parisumman avulla.* Esim. $6+7=(6-1+1)+(7-2+2)=(5+5+1+2)=(10+3)=13$.

Tutkimukset ovat osoittaneet, että osalla oppilaista päässä laskustrategiat muodostuvat spontaanisti, ja oppilaat ovat myös valmiita käyttämään niitä tarvittaessa. Toiset taas tarvitsevat opettajan tukea eli yksityiskohtaisempaa selittämistä, ohjaamista ja harjoittelua (Kadajäs, 2005, 12–13).

Tavoitteena on, sekä Virossa että Suomessa, että luokkien 1–3 aikana oppilaat oppivat suorittamaan ainakin perustehtävät kuten lukualueen 0–20 yksinkertaiset yhteenlaskut ja vähennyslaskut *reproduktiivisesti eli oppimisessa tulisi saavuttaa automaation taso*. Näin taattaisiin hyvät edellytykset aritmetiikan jatko-opiskelulle. Päässä laskussa kuten muissakin henkisissä toiminnoissa se saavutetaan vaiheittain. Tätä käsitystä edustaa mm. tunnettu Galperinin (1969) henkisten toimintojen muodostumisen teoria. Prosessin perustana on orientoitumisvaiheessa luotu toimintaskaema, jonka puitteissa tapahtuu tiedon siirtymistä askel askeleelta ulkoisesta täysin kontrolloimattomasta toiminnasta sisäiseksi automatisoituneeksi tiedoksi seuraavien vaiheiden kautta:

1. Materiaalisen eli materialisoituneen toiminnan vaihe, jolloin toiminta tapahtuu konkreettista materiaalia tai kaaviota käyttäen.
2. Ulkoisen puheen tasolla tapahtuva toiminnan vaihe, jolloin kuvataan ääneen puhuen skeeman sisältämän prosessin kulku askel askeleelta.

3. Itselle tarkoitetun ulkoisen puheen vaihe. Toiminnan kuvaus tapahtuu edelleen askeleittain, joiden lukumäärä on vähentynyt edellisestä ja tietyt kiinnepohdat puhutaan vielä ääneen.
4. Sisäisen puheen tasolla tapahtuva toiminta eli automatisoitunut vaihe. Tällöin toiminta on täysin sisäistynyt ja lyhentynyt. Välivaiheet häviävät mielestä ja ainoastaan lopputulos ajatellaan ja todetaan tietoisesti (Galperin, 1969, 268–273).

Van der Heijden (1993, 338) mukaan Galperin (1969) henkisten toimintojen suoritustason nousu tapahtuu päässä laskun suhteen seuraavasti:

1. Materiaalinen vaihe, jossa laskeminen tapahtuu sormin tai muuta apumateriaalia käyttäen.
2. Havaintoon yhdistetty laskeminen, johon tarvitaan visuaalista apua.
3. Verbaalinen eli ulkoisen puheen vaihe, jolloin oppilas kuvaa toimintaansa ääneen laskemalla.
4. Sisäisen puheen vaihe eli piilossa laskeminen, jolloin toiminta on automatisoitunutta päässä laskua.

Näiden rinnalla tapahtuu koko ajan suorituksen lyhentymistä, mikä yksinkertaisissa päässä laskuissa tapahtuu seuraavia vaiheita mukailen:

1. vaiheessa lasketaan luvut yksitellen eli käytetään 1-askelstrategiaa.
2. vaiheessa lasketaan 2, 3, 4 jne. luvun ryhmissä eli käytetään 2- tai 3- tai 4-askelstrategioita.
3. vaiheessa strategia on automatisoitunut, jolloin luvut saadaan suoraan muistista.

Svenssonin (1977) mukaan kolmasosa koulunsa aloittavista oppilaista ratkaisee päässä laskut reproduktiivisesti eli automaation tasolla. Muut käyttävät rekonstruktivisia menetelmiä, joita ovat **1. askelstrategia**, **2. paristrategia** ja **3. erikoisstrategiat** (Virrankoski, 1983, 4).

Lapsi aloittaa laskemisen ilman kynää ja paperia eli päässä laskulla. Se tapahtuu aluksi kuten van der Heijden (1993) (ks. ed. kpl) on todennut, luettelemalla lukuja peräkkäin eli **askelstrategialla**. Tätä Butterworth ja Harris (2002, 289–290) pitävät *kaiken laskemisen perustana*. Thompson (1999, 2–4) nimittää sitä luettelostrategiaksi. Riippumatta siitä, kuinka suuria yksinumeroisia lukuja oppilas laskee yhteen tai vähentää, askelstrategia toimii.

1. Askelstrategiassa luettelu voi tapahtua 1, 2 tai 3 askeleen hyppäyksin ja vaihtelemalla askelten määriä tehtävästä riippuen. Askelstrategiat voidaan jakaa siten seuraavasti:

1.1) Yhden askeleen strategia, jolloin usein sormia apuna käyttäen luetellaan lukuja peräkkäin kasvavassa tai vähenevässä järjestyksessä riippuen onko kyseessä yhteen vai vähennyslasku.

Esimerkiksi yhteenlaskun $4+3$ suorittamiseksi lapsi nostaa pystyyn neljä sormea ja näitä neljää sormea pystyssä pitäessään nostaa vielä kolme sormea, jolloin pystyssä on yhteensä 7 sormea, joka vastaa tulosta. Tai oppilas voi ratkaista saman tehtävän $4+3$ myös luettelemalla luvusta 4 eteenpäin 3 lukua eli 5, 6, 7 joista viimeinen eli 7 on vastaus.

1.2) Moniaskelestrategia eli kahden, kolmen tai neljän askeleen strategiat, jolloin lueteltavissa lukujonoissa luvut kasvavat kahdella, kolmella tai neljällä kuten vastaavissa kertotauluissa.

Esimerkiksi, jos lapsi tietää, että $6=3+3$ hän ratkaisee tehtävän $4+6$ luettelemalla 4, 7, 10, jolloin vastaus on 10. Tai tehtävässä $6-4$, jos hän tietää, että $4=2+2$, hän luettelee alaspäin 6, 4, 2, jolloin vastaus on 2.

1.3) Seka-askelstrategia, jota kuvaa kymmeneksitäydentämismenetelmä.

Esimerkiksi kymmenylitystä $7+5$ varten on ensin hajotettava luku 5 kahteen osaan $3+2$. Nämä lisätään lukuun 7 peräkkäin, jolloin $7+3=10$ ja $10+2=12$. Tässä vaiheessa ei enää luetella lukuja vaan on opittu mm. kymmeneksi täydentäminen automaation tasolle. Toisaalta tehtävää $12-5$ varten lapsi hajottaa luvun 5 osiin 2 ja 3, joten hän laskee $12-2=10$ ja $10-3=7$.

Edellä olevat strategiat lapsi oppii ensimmäisellä luokalla, harjoitellessaan yhteen- ja vähennyslaskua 20 saakka.

Strategioiden opetuksen tarkoituksena on helpottaa laskemista. Näin ollen tulee kiinnittää yhteenlaskussa huomio mm. siihen, että on helpompi lähteä lisäämään suurempaan lukuun. Thomson (1999, 2–4) nimittää sellaista suoritusta *luettelemiseksi suuremmasta luvusta alkaen*. Tämän myötä oppilas ymmärtää yhteenlaskun vaihdannaisuuden kuten $2+5=5+2$ jo 1. luokalla. Kokemuksesta voidaan sanoa, että lapset omaksuvat tämän tiedon helposti.

2. Paristrategia, eli täydentäminen parisummaksi jossa muodostetaan samansuuruisien lukujen pareja. Schipper (2001a, 2001b) ja Ostad (2002) viittaavat paristrategiaan heuristisena (keksivänä) strategiana nimellä **dekompositio**.

Esimerkiksi tehtävässä $6+8$ lapsi hajottaa luvun 8 osiin $6+2$ saaden luvulle 6 parin ja suorittaa ratkaisun $6+6+2=12+2=14$. Tehtävässä $5+7$ lapsi muodostaa luvut 5 ja 7 kuutospariksi seuraavasti $(5+1)+(7-1)=6+6=12$.

3. Erikoisstrategiat, joita ovat mm. lukualueen 0–20 yhteen- ja vähennyslaskun perustehtäviin perustuvat strategiat. Tällöin tehtävät rekonstruoidaan usein muotoon, jossa erotetaan ykköset sekä kymmenet. Näihin sovelletaan vastaavien perustehtävien ratkaisuja, jotka jo on opittu automaation asteelle. Esimerkiksi tehtävä $35+42$ hajotetaan muotoon $30+40+5+2$. Koska perustehtävät $3+4=7$ ja $5+2=7$, niin $30+40=70$ ja tulos on 77. Vastaavasti tehtävä $78-34$ hajotetaan muotoon $(70-30)+(8-4)$ jolloin vastaavaan perustehtävään $7-3$ nojaten $70-30=40$ ja tulos on $40+4=44$.

Ensimmäisinä kouluvuosina oppilas pystyy käyttämään kaikkia edellä mainittuja strategioita joko spontaanisti tai jos niitä on hänelle opetettu. Ensimmäisellä luokalla lapsi käyttää eniten askelstrategioita, jotka usein tapahtuvat luettelemalla. Koska ensimmäistä luokkaa käyvät lapset opettelevat yksi- ja kaksinumeroisia lukuja, näiden kaikkien strategioiden käyttö on tarkoituksenmukaista. Schipper (2001a) kiinnittää myös erityistä huomiota luettelemisen avulla saavutettaviin tuloksiin. Hän on sitä meiltä, että ennen kuin lapset eivät ole täysin omaksuneet luettelemista ja hallitse lukujonotaitoja saadakseen oikeat ratkaisut automaattisesti, muita laskemisstrategioita ei voi käyttää.

Tutkiessaan sitä, käyttävätkö lapset päässälaskustrategioita ja miten he niitä käyttävät, Jordan, Hanisch ja Kaplan (2003, 103–119) totesivat, että ne lapset, joilla on

oppimisvaikeuksia laskemisessa, käyttävät erilaisia strategioita huomattavasti vähemmän kuin lapset, jotka osaavat laskea. Sen mukaan on pääteltävissä, että päässä laskutaidolla ja käytetyillä strategioilla olisi korrelatiivinen yhteys.

Ostadin (2002) Norjassa järjestämässä tutkimuksessa selvisi, että ne lapset, joilla on vaikeuksia laskemisessa suosivat perinteisiä eli normaalimenetelmiä kun taas ne, joilla ei ongelmia käyttävät myös muita strategioita.

Kuten edellä on todettu, oppilaat käyttävät päässä laskiessaan monia erilaisia strategioita, joista eräs yleisimmin esiintyvä on sormilla laskeminen. Tähän tuloksen ovat tulleet myös Butterworth ja Harris (2002, 302) sekä Schipper (2001a, 2001b) ja Ostad (2002), joiden mukaan sormilla laskemisella on tärkeä rooli niin luettelemisessä kuin myös myöhemmin laskutehtävissä. Jordanin, Hanischin ja Kaplanin (2003, 103–119) mukaan taas lapset, joilla esiintyy vaikeuksia päässä laskussa, käyttävät eri strategioita hyvin vähän.

1.6 Taitava päässä laskija

Taitava päässä laskija voidaan määritellä henkilöksi, jolla on hyvä päässä laskutaito. Lähemmin tarkasteltuna päässä laskutaito ei ole pelkkää taitoa vaan ajattelua, joka hyvällä päässä laskijalla on taitavaa. Saariluoman (1990,16) mukaan *taitava ajattelu* koostuu kahdesta elementistä eli *tiedonkäsittelystä* ja *taidosta*.

Tiedonkäsittely

Tiedonkäsittely on informaation prosessointia, joka on abstrakti näkökulma ihmisen psyyken kokonaisuuteen. Kuten tämän tutkimuksen kappaleessa 1.2 todettiin, on ihminen tietoa käsittelevä olio, joka havainnoi, tarkkailee, muistaa ja ajattelee ympäröivää todellisuuttaan. Hän poimii ympäristöstään tärkeitä tietoja, yhdistää ne aikaisempiin kokemuksiinsa ja toimii siten järkevällä tavalla. Silvonenin (2004) mukaan materiaaliset välineet, merkit ja symbolit eivät toimi yksinään, vaan edellyttävät vuorovaikutusta tullakseen omaksutuiksi. Tiedonkäsittely tapahtuu näin ihmisen ja ympäristön keskinäisessä vuorovaikutuksessa, mikä korostuu muihin

eläimiin nähden monimutkaisen kommunikaation vuoksi. Ihminen pystyy luomaan monimutkaisia ja pitkälle kehittyneitä symbolijärjestelmiä, joiden avulla hän kykenee ohjaamaan toimintojaan. Tämän vuoksi ihmisyksilöt pääsevät aloittamaan tavallaan korkeammalta tasolta kuin edellinen sukupolvi, jonka taitopääoma siirtyy mm. kouluopetuksen välityksellä seuraaville sukupolville.

Saariluoman (1990, 17) mukaan tiedonkäsittelyssä tärkeä ominaisuus on a) *valikoivuus oleellisen ja epäoleellisen tiedon välillä*. Tämä johtuu siitä, että meitä ympäröivä informaatiotodellisuus on laaja ja monimutkainen ja ihmisen tiedonkäsittelykyky on suhteellisen hidasta. Tehokas valikointi on siten välttämätöntä. Se on ihmisen ajattelun perustunnusmerkki. Valikoivuuteen liittyy b) *joustavuus*, joka kuvaa eri lähestymistapojen käyttöönottoa tarkoituksena tehostaa laskemista eri ongelmissa (van der Heijden, 2004, 7).

Valikoivuus päässä laskussa on tärkeä ennen kaikkea suoritusmenetelmän eli strategian valinnassa. Päässä laskun suoritusmenetelmiä on useampia, joista jokaisen oppilaan on löydettävä itselleen sopiva ja laskusuoritusta helpottava strategia. Kuten aikaisemmin (vrt. kpl 1.5) todettiin, osalla oppilaista päässä laskustrategiat muodostuvat spontaanisti, jolloin he ovat valmiita käyttämään niitä tarvittaessa. Toiset oppilaat tarvitsevat opettajan tukea eli yksityiskohtaisempaa selittämistä, ohjaamista ja harjoittelua niiden löytämisessä.

Taito

Taito on Saariluoman (1990) mukaan opittu käyttäytymisen muoto, joka saavutetaan a) *järjestelmällisen harjoittelun avulla* ja joka on opittavissa. Ei ole kuitenkaan varmaa, onko se kokonaan opittavissa, sillä taidot rakentuvat yleensä kaikille yhteisten ja kehityksen kautta saatujen toimintojen varaan.

Opittavuuden lisäksi toinen taitoja luonnehtiva ominaisuus on b) *yksilöiden väliset erot suorituskyyvyissä*. Ratkaisevaa tässäkin on harjoittelun määrä, vaikka osuutensa tietysti on myös luontaisilla erikoisominaisuuksilla kuten tenniksenpelaajilla ruumiinrakenne ja fyysisen kehityksen nopeus.

Kolmanneksi on huomioitava c) *taitojen suhteellinen kapea-alaisuus*. Tämä pätee erityisesti ns. huipputaitoihin. Hyvä tenniksenpelaaja voi olla yleisemminkin hyvä

urheilija, mutta hänen on vaikea saavuttaa huipputaitoa muulla alueella. Tämä johtuu erikoisharjoittelusta, joka on tähdätty kehittämään ruumiinrakennetta ja tehtäväkohtaisia tietoja tiettyyn suuntaan. Myös kognitiiviset huipputaidot ovat kapea-alaisia. Onhan kuultu hyvistä päässäälaskijoista, joiden muut taidot ovat ihan normaalia tasoa tai jopa alle sen. Lisäksi taidot edellyttävät d) *hyvää organisaatiokykyä*, sillä ne perustuvat monimutkaisille ja toisiinsa liittyneille suoritusten ketjuille, jotka kerran alettuaan etenevät yhtenäisinä loppuun asti.

Nämä taidon neljä ominaisuutta ovat kaikki yhteydessä tiedonkäsittelyyn ja sen valikoivuuteen. Taidon hankinnassa tarvittavan harjoittelun on oltava valikoivaa. Sen on keskityttävä jonkin määritellyn tehtäväkokonaisuuden oppimiseen ja sen pitää olla tarkoituksenmukaisella tavalla järjestettyä, jotta taidolle tyypillinen korkeatasoinen organisaatio voidaan saavuttaa. Siksi yksilölliset erot ajattelussa tulevat hyvin korostuneesti näkyviin juuri valikoivuudessa eivätkä suorituskapasiteetissa. Taitavat ajattelijat osaavat keskittyä tehokkaampiin ja olennaisimpiin vaihtoehtoihin käyttäen resurssejaan tehtävän kannalta tarkoituksenmukaisella tavalla (Saariluoma, 1990, 17–19).

Reunaehdot

Ihminen on toisaalta oman biologisen rakenteensa ja geneettisten lakiensa rajoittama olio ja toisaalta sosiaalinen, oman yhteiskuntansa ja aikakautensa ja kasvuhistoriansa tuote. Nämä asettavat ihmisen ajattelulle monia reunaehtoja, joista toiset eli *staattiset reunaehdot* ovat hyvin yleisiä, tehtäväalueesta riippumattomia, luonteeltaan hyvin muuttumattomia ja tiukasti sidoksissa ihmisen hermoston toimintatapaan. Niitä ovat: a) havainnon yksitulkintaisuus ja tarkkaavaisuuden rajat, b) työmuistin kapasiteetti ja c) ajattelun peruslogiikka. Toiset eli *dynaamiset reunaehdot* ovat sisällöllisiä ja tehtäväympäristökohtaisia, jotka liittyvät lähinnä toimivien ihmisten ja heidän yhteisöjensä tiedon tasoon. Ne voivat harjoittelun ja taidon kasvun myötä muuttua ratkaisevasti (Saariluoma, 1990, 182).

Staattiset reunaehdot

a) *Havainnon ja tarkkaavaisuuden rajat ovat ilmeinen ajattelun reunaehto.* Tarkkaavaisuus on valikoivaa havaitsemista. Tarkkaavaisuuden prosessit kontrolloivat sitä, että valittu havaintokuvan tulkinta kyetään erottamaan muista mahdollisista

tulkinnosta ja että se säilyy. Siitä huolimatta, että ihmisen tiedon käsittely perustuu laajaan rinnakkaisprosessointiin, ei ajatteleva ihminen voi kiinnittää huomiotaan kuin yhteen asiakokonaisuuteen kerrallaan. Se merkitsee, että jokainen ajatusprosessi, joka sisältää useampia toisistaan poikkeavia todellisuuden hahmotustapoja, voi edetä vain peräkkäisprosessoinnin tietä (Saariluoma, 1990, 57–58, 182).

Vygotskin teorian (vrt. kpl 1.1) ja van der Heijdenin tutkimuksen perusteella (vrt. kpl 2.7.1) havainto ja tarkkavaisuus liittyvät päässä-laskun selittäjänä lähestymiskäyttäytymiseen. Lähestymiskäyttäytyminen tarkoittaa, miten ihminen lähestyy tietyn tehtävän ratkaisua eli minkälaisia ominaisuuksia hänellä tulee olla ollakseen taitava ongelma ratkaisija kuten taitava päässä-laskija. Lähestymiskäyttäytyminen on erillinen kategoria, joka ei kuulu oppilaan persoonallisuuteen eikä tilanteeseen, vaan henkilö on vuorovaikutuksessa objektia ympäröivän maailman kanssa. Galperinin (1969) mukaan (vrt. kpl 1.1.2) havaitsemiseen ja tarkkavaisuuteen päässä-laskussa liittyvät oppilaan seuraavat kolme toimintoa: kuinka hän lähestyy ongelmaa, kuinka hän ratkaisee ongelman ja kuinka hän selvittää vastauksen oikeellisuuden.

b) *Työmuistin rajallinen kapasiteetti on staattinen reunaehto*, joka rajoittaa tilannesesitysten laajuutta ja näin myös niiden hienojakoisuutta. Kuten kappaleessa 1.3 todettiin, työmuisti liittyy informaation lyhytaikaiseen säilyttämiseen, oppimiseen, loogiseen ajatteluun ja ymmärtämiseen. Sen tärkein funktio ajatteluprosessin aikana on tiedon tilapäinen esittäminen uuden tiedon integrointia varten.

Työmuisti ei ole aivoissa sijaitseva lyhytkestoinen varasto vaan useissa kognitiivisissa toiminnoissa välttämätön rajallinen väline. Näin ollen, jos henkilön tehtäväkohtaiset käsitteet ovat kehittymättömiä ja tilanne edellyttäisi monimutkaisten tietoesitysten konstruointia, on hänelle ylivoimaisen vaikeaa pitää mielessään kaikkia ratkaisussa tarvittavia yksityiskohtia. Taitaville tämä ei ole yhtä ongelmallista, sillä he ovat oppineet laajempia ratkaisumalleja eivätkä näin joudu niin helposti työmuistin kapasiteetin rajoille (Saariluoma, 1990, 183).

Työmuistin onkin todettu olevan yhteydessä kouluikäisten päässä-laskuun. Päässä-laskujen suorittamisessa on osoitettu tarvittavan keskusyksikkötoimintojen

lisäksi myös fonologista ja visuaalis-spatiaalista varastointia. Visuaalis-spatiaalisen komponentin rooli päässä laskussa on tähän asti ollut epäselvä, koska useissa tutkimuksissa ei ole osoitettu mitään todistetta sen merkityksestä päässä laskussa. Mentaalisen rotaatiokyvyn on havaittu olevan yhteydessä matemaattiseen suoriinamiseen, missä laskujen esittämistapa vaikuttaa ratkaisemisessa käytettävien resurssien valintaan (vrt. kpl 1.3).

Kyttälän (2008) tutkimuksessa ilmeni, että rotaatiokyvyllä on vain epäsuora vaikutus älykkyyden kautta päässä laskutehtävissä suoriinamiseen. Ashcraft ja Faustin (1994) tutkimusten mukaan ihmisillä, jotka tuntevat pelkoa matematiikkaa kohtaan, on pienempi työmuistin kapasiteetti, josta johtuen heillä on vaikeuksia päässä laskutehtävissä (vrt. kpl 2.7.1).

Saariluoman (1990, 183) mukaan työmuistin kapasiteetin rajoitukset johtavat toisenlaisiin virheisiin kuin havainnon yksitulkintaisuuden aiheuttamat virheet. Työmuistin kapasiteetin rajoitusten johdosta henkilöt voivat löytää oikeita ideoita, mutta he eivät kykene toteuttamaan niitä riittävän täsmällisellä tavalla.

Useiden tutkimusten (e.g. Fürst & Hitch, 2000; Imbo et al., 2005, 7; Sandrini et al., 2003) mukaan on todettu, että työmuistilla on tärkeä rooli mm. kymmenylitystehtävien lainaamis- ja muistiinviemistoiminnoissa. Epätäydelliset muisti- tai lainausmenetelmät pidentävät suoritusaikaa ja ovat yleisimpiä virheen syytä lasten päässä laskusuorituksissa (vrt. kpl 1.3).

Työmuistin rajoittuneisuus selittänee myös tässä Viron ja Suomen koululaisille suoriinatussa tutkimuksessa saatuja alhaisia ratkaisuprosentteja 2-luokkalaisten yhteen- ja vähennyslaskujen kymmeneksi täydentämistä tai kymmenylitystä vaativissa tehtävissä kuten kappaleesta 5.2 ilmenee.

c) *Ajattelun peruslogiikka on kolmas staattinen reunaehto.* Se tarkoittaa sitä, että ajatteluprosessin aikana tuotetaan hypoteettisia tietoesityksiä, joita sen jälkeen testataan. Tämä toiminto on selvästi tehtävästä ja taidon tasosta riippumaton. Se on löydettävissä yhtä hyvin aloittavalta shakin pelaajalta kuin kokeneelta

tietokoneohjelmoijalta. Se on ilmeisesti sidoksissa hermoston biologiseen toimintaan (Saariluoma, 1990, 183).

Dynaamiset reunaehdot

Dynaamiset reunaehdot syntyvät *käsitteellisen tiedon puutteesta*. Henkilön on vaikea ajatella ongelmaa, jos hänellä ei ole tietoa tähän ongelmaan liittyvistä asioista. Hänen pitää kehittää tarvittavat käsitteet tehtävän suorittamisen aikana, mikä rasittaa työmuistia. Esimerkiksi a) tiedon automatisointi kuten myös valmiiden mieltämisyksiköiden opettelu johtaa reunaehtojen siirtymiseen. Reunaehtojen rajat ovat siten muutettavissa (Saariluoma, 1990, 184–185). Muita dynaamisia reunaehtoja, jotka ovat muuttuvia, ovat b) ratkaisumenetelmät eli strategiat ja c) suhtautuminen käsiteltävään asiaan.

a) Automatisointi

Päässäälaskun harjoittelussa pyritään automatisoitumiseen, joka on tehokkain menetelmä päässäälaskusuorituksissa. Automatisoituminen on välttämättömyys työmuistin pienen kapasiteetin takia. Saariluoma (1990) tarkoittaa automatisoitumisella sitä, että vakioissa olosuhteissa tapahtuneen toiston ansiosta tehtävän suorittaminen helpottuu olennaisesti eikä kuormita samalla tavalla muistia kuin automatisoitumaton tieto. Oikein käytettynä automatisoituminen on hyvin tehokas menetelmä, mutta sitä tietä on mahdollista omaksua myös täysin väärä toimintatapoja. Näveri (2009) toteaa, että automatisoituneen tiedon tulee perustua ymmärtämiseen ja ymmärtävään kokemukseen ja sen perustelut tulee olla tarvittaessa palautettavissa muistista. Näin automatisoitunut tieto eroaa mekaanisesti opitusta, johon se valitettavasti usein sekoitetaan. Näveri määrittelee mekaanisen rutiininomaisen oppimisen muistinvaraiseksi oppimiseksi, johon ei kuulu ymmärtävää komponenttia kuten automatisoituneeseen oppimiseen (Näveri, 2009, 23).

Kuten luvussa 1.1.2 todettiin Galperinin ”Henkisten toimintojen asteittaisen muodostumisen” teorian mukaan tietoisuuden taso vaihtelee alkaen orientoitumisvaiheella, josta ennakkokäsitysten selvittämisen jälkeen siirrytään konkreetin toiminnan tasolle. Seuraavaksi tulevat verbaalinen vaihe, sisäisen puheen eli ajattelun vaihe sekä lopulta automatisoitumisen vaihe. Näverin (2009, 24) mukaan

Galperinin mallin tavalla kehittynyt automatisoitunut tieto voi olla lähtökohtana hiljaisen tiedon syntymiselle.

b) Strategiat

Käsiterakenteiden tärkeä asema taitavassa ajattelussa tekee mahdolliseksi muotoilla ajattelutaitoa koskevia pääperiaatteita. Ensimmäinen näistä koskee tietojen asianmukaisuutta eli relevanssia. Koska taitava ajattelu kohdistuu tiettyyn suppeaan alueeseen, on siihen mahdollista päästä vain, jos henkilön tiedot ovat tehtävän kannalta olennaisia. Haluttaessa oppia tai opettaa korkeatasoisia taitoja, joita ovat päässälaskun kannalta mm. strategioiden hallinta, on kiinnitettävä huomiota materiaalin sisältöön, määrään ja yksityiskohtien huolelliseen käsittelyyn.

Huippusuoritusten takana ei välttämättä ole yleinen korkeatasoinen älykkyys vaan korkeatasoiset tehtäväkohtaiset tiedot (Saariluoma, 1990, 193).

Laskutaidon tukemisessa on hyvä harjoitella strategioita, jotka korostavat lukujen ja laskutoimitusten ymmärtämistä. Lisäksi ominaisuuksiin kuuluu yritteliäisyys, mikä voidaan määritellä matematiikan kokemisena järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana yhdistettynä käsitykseen ahkeruuden merkityksestä ja omiin kykyihin uskomisena (Kilpatrick, Swafford, Findell & Bradford, 2001, 407–432). On tärkeää, että opiskeluympäristö on taito- tai pätemissuuntautunut. Sille perustuvat hyvät arvosanat, saavutukset, tulosnormit ja älykkyys (Malmberg & Little, 2002, 127–144). Iso prosenttimäärä toisen ja kolmannen luokan oppilaista käytti tutkimuksen perusteella erikoisstrategioita, jossa laskutoimitusten suorituksessa eniten käytetty oli ykkösten ja kymmenien erottelu (vrt. kpl 5.3.1 ja 5.3.2).

Päässälasku on ajattelun ja toiminnan yhdistelmä. Se on prosessi, jossa samanaikaisesti tarvitaan kuvitelman luomista ja stimuloitua laskemista. Kuten van der Heijdenin (1993) suorittamassa tutkimuksessa todettiin (vrt. kpl 2.7 ja 2.7.1) automatisointiasteen ja ratkaisumenetelmien käytön pysyvyys on hyvin korkea. Tietoisuus, kontrollointi ja automatisointi näyttävät muodostavan lähestymiskäyttäytymisen keskeiset näkökulmat päässälaskusuorituksissa, minkä myös monet muut tutkijat ovat todenneet (Baars, 1988; van Haneghan & Baker, 1989; van der Heijden, 2004, 12–13; Kaptelinin, 1992).

c) Suhtautumismuuttujat

Dynaamisiin reunaehtoihin voidaan katsoa kuuluviksi myös suhtautumismuuttujat, jotka ovat muutettavissa tiedon kasvun myötä. Tässä tutkimuksessa niiden yhteyttä päässä laskuun selvitettiin seuraavin muuttujin: suhtautuminen matematiikkaan yleensä, suhtautuminen päässä laskuun, päässä laskun harjoittelun tiheys, päässä laskun osaamisen tärkeys, päässä laskun helppous tai vaikeus, päässä laskun käyttäminen, päässä laskun harjoittelu luokassa, opettajan arviot oppilaan matemaattisista taidoista ja oppilaan omat arviot matemaattisista taidoistaan.

2 MATEMATIIKAN JA PÄÄSSÄLASKUN OPETUS LUOKILLA 1.–3. VIROSSA JA SUOMESSA

2.1 Matematiikan oppimiskäsityksestä ala-asteella Virossa ennen nykyistä opetussuunnitelmaa viimeisen sadan vuoden aikana

Viron ensimmäisen itsenäisyyden aika 1918 – 1940

Matematiikan opetuksesta ala-asteella on tietoa Viron historiassa ensimmäisen tasavallan ajalta vuodesta 1917 lähtien. Metodiikassa korostettiin ymmärrystä ulkoa oppimisen sijaan, minkä vuoksi oppikirjoissa ei suosittu drillitehtäviä, vaan tärkeää oli, että oppilas itse ymmärsi, miksi hän oppii. Tehtävät tuli valita oppilaalle tutusta ympäristöstä (Rull, 1917, 182–188).

Herta Veiderman (1920, 5) vertasi matematiikkaa tiilitaloon, jossa perustan on oltava tukeva. Muuten talosta tulee vino ja seinät romahtavat. Veidermanin mukaan ensimmäiset ja kaikkien luonnollisemmat oppimisvälineet ovat oppilaan ympäristössä ja hänellä itsellään. Päässälkua opeteltaessa sormet ovat alussa tärkeitä, koska ne ovat aina saatavilla. Niitä voi katsoa tarvittaessa ja luetella lukuja sormista (Veiderman, 1920, 5).

Eisenbergin (1922–1928, 5–14) mukaan matematiikan opetuksessa tärkeintä ovat katselu ja esimerkit siitä, missä matematiikkaa esiintyy. Ensimmäisiksi välineiksi päässälkemiseen suositellaan rahoja, sormia ja tikkuja. Havaintovälineet voidaan jaotella joko 1) luonnollisiksi (sormet, palikat, kastanjat) tai 2) keinotekoisiksi (viivat, laskukuvat). Suosituimmat ovat sormet. Eisenberg oli sitä mieltä, että opittuaan laskemaan sujuvasti lukualueella 0–10 oppilas ei tarvitse enää sormien apua.

Päässälkemisen opetus oli kiinteässä yhteydessä ympäristö- ja luonnontietoon, josta saatiin konkreettisia malleja laskemisen avuksi. Tähän oli syynä se, että ensimmäisenä kouluvuonna oppilaan laskutaito on puutteellinen eikä oppilas ei pysty ajattelemaan abstraktilla tasolla eli pelkillä matemaattisilla käsitteillä (Kuulberg, 1924, 5–6). Yhteen- ja vähennyslaskuihin lukualueella 0–10 piti käyttää riittävästi aikaa. Tärkeää

oli konkreettisuus ja oppilaitten itsenäinen työskentely. Jo silloin opettajan päärooli oli opetuksen järjestäminen ja oppimisen ohjaaminen eikä vain opettaminen. Laskeminen kymmeneen asti tapahtui lukujen luettelemisen (luettelun) avulla. Mahdollisesti käytettiin askelstrategioita (1-askel- ja moniaskelstrategiat). Sen jälkeen rakennettiin lukumääräjärjestelmä. Oppilaalle tärkeää oli ymmärtää, mitä tarkoittavat ykköset ja kymmenet. Kymmenien ymmärtäminen oli lukumääräjärjestelmän kulmakivi (Kuulberg, 1924, 23–30).

Vuonna 1928 Virossa otettiin käyttöön uudet opetussuunnitelmat. Aiheet valittiin oppilaan lähiympäristöstä, hänen elämyksistään ja leikeistään. Ensisijalla olivat arkielämän kysymykset ja ongelmat. Matematiikan opetuksen täytyi olla luonnonmukaista (Parinbak, Brandt & Brandt, 1928, 5–6). Vuonna 1935 kirjoitetusta metodikirjasta on lueteltu matematiikan opetukseen liittyviä teemoja, joissa päässä laskemisella on tärkeä rooli laskemisen harjoittamisessa ja numerojen kirjoittamisessa. Yhteen ja vähennyslaskujen osaaminen lukualueella 0–10 oli niin tärkeä, että niitä oli harjoitettava drillitehtävien avulla (Kasvand & Lang, 1935, 4–13). Matematiikan ja päässälaskun oppimiskäsitys muuttui vuodesta 1935 lähtien. Kasvand ja Lang (1935) korostivat mekaanisia ja drillitehtäviä. Oppilaan ja lähiympäristön merkitystä ei enää korostettu kuten aikaisemmin.

Toisen maailmansodan aika 1940 - 1944

Joannes Käisin (1940, 7–8; 1946, 270–271) mukaan oli lukujen luetteleminen matematiikan opetuksen perustehtävä. Hänen mielestä tähän sopivat luonnolliset esineet ja kohteet, mutta sormia ei ollut hyvä käyttää. Käis tukeutui Kempinskyn (1921) ajatteluun. Siihen ei kuulu sormien käyttö, koska niitä on aina kymmenen ja koska niistä oli myöhemmin vaikea päästä eroon. Sormet vaikeuttavat laskutaidon kehitystä, hän totesi. Suosittua oli käyttää kuvia, tauluja ja erityisesti rahoja (Käis, 1940, 9–25). Päässälaskutaitoa edistettiin myös laskupelein (Käis, 1946, 315).

Vuonna 1940 kesäkuulla Neuvostoliitto valtasi Viron ja vuonna 1941 otettiin käyttöön uudet opetussuunnitelmat. Neuvostoliiton kommunistinen puolue antoi ohjeita. Koulussa tuli käyttää monimutkaisia uusia metodeja. Lapsista kasvatettiin sosialistista yhteiskuntaa varten kuuliaisista ja ahkeria työläisiä (Kasvand, 1941, 4–7). Opettajien työn oli pakko mukautua koulun, luokan ja oppilaan yksilökohtaisiin kykyihin.

Käytettiin havannoillisia ja kokeellisia menetelmiä. Tärkeitä olivat päässäälaskuharjoitukset (Kasvand, 1941, 10).

Neuvostoliiton aika 1944 – 1991

Matematiikan opetus jatkui vuoden 1941 opetussuunnitelman mukaan. Siihen tuli muutos vuonna 1948. Siitä alkaen päässäälaskuharjoituksia oli 5 minuuttia joka tunnin alussa. Se oli sääntö, jonka mukaan oli pakko toimia. Päässäälaskua arvioitiin nopeuden ja oikeellisuuden mukaan (Ptšolko, 1948, 5). Näinä vuosina suositeltiin metodisessa kirjallisuudessa strategioita eli yhteen- ja vähennyslaskujen opetuksessa käytettäviä menetelmiä. Tehtävät lukualueella 0–20 olivat perustehtäviä, joiden oppimista pidettiin perustana koko aritmetiikan oppimiselle. Eri lukualueilla 0–10, 0–20, 0–100 oli erilaisia strategioita, joita suositeltiin käytettävän. Lukualueella 0–10: a) jaksoittain yhteen- ja vähennyslasku yksittäin, b) ykköslukujen yhteenvetoa ja vähennystä, c) yhteenlaskettavien vaihtoa (Ptšolko, 1948, 175). Sormien käytöstä laskutehtävissä ei puhuttu.

Laskualueella 0–20 laskettiin käyttäen kymmenylitystä. Yhteenlaskussa ensin 10 täyteen ja sitten loput ($8+7=8+2+5=10+5=15$) ja vähennyslaskussa laskettiin ensin kymmeneen ja sitten loput $815-7=15-5-2=10-2=8$). Samanlaisten lukujen yhteenlasku ($6+6=12$) oli helppo muistaa, mikä helpotti laskutehtävien suoritusta (Ptšolko, 1948, 197).

Laskualueen 0–100 laskutehtävissä ($28+37$) ratkaisu nojautui perustehtäviin, joissa kymmenluvut ja yksinumeroiset luvut erotettiin. Siksi jokainen yhteenlaskettava jaettiin kymmeniksi ja ykkösiksi jolloin $28+37=20+8+30+7$ ja edelleen vaihdannaisuutta käyttäen $=20+30+8+7$, jossa liittämällä erikseen kymmenet ja ykköset saadaan $50+15$, joka kymmenylityksen huomioiden $=50+10+5=60+5=65$ (Ptšolko, 1948, 138–139).

Vuonna 1954 metodisessa oppaissa laskutehtävien suoritusmenetelmillä oli tärkeä sija. Monimutkaisten strategioiden käyttöä päässäälaskutehtävissä ei suosittu. Ylellisemmät päässäälaskua helpottavat metodiset keinot perustuivat laskujärjestyssääntöihin, joita olivat 1) vaihdannaisuus ja liitännäisyys eli lukujen siirtäminen ja ryhmittely: $7+9+3+1=(9+1)+(7+3)$; 2) lukujen vertailu laskutehtävissä

kuten $(5+7)+3$ ja $(7+3)+5$; $7+9$ ja $9+7$. Oppilaan tuli ymmärtää, että suurella lukualueella piti kiinnittää huomio lähimpään kymmenenlukuun ja pyöristää siihen sekä tehdä tarpeellinen korjaus: esim. $92=90+2$ tai $49=50-1$. Tällöin $49+37=(50+37)-1$ (Ignatjev, 1954, 10–16).

Päässäälaskutehtävissä korostettiin sen laatua huomioiden oikeat ratkaisut. Opettajan täytyi tarkistaa, että oppilaat suorittavat laskutehtävät oikein eivätkä käyttäneet epärationaalisia helpottavia tapoja. Tapoja, joita ei saa käyttää laskemisen siinä vaiheessa, olivat luettelu sormien avulla, laskeminen eteenpäin yksittelen ($4+3=4+1+1+1$) kerralla sekä kirjallinen päässäälasku, jossa aloitetaan ykkösistä. Oppilaiden laskutehtävien suoritusten kontrollointi oli päässäälaskun opetuksen tärkein ehto (Ignatjev, 1954, 16–17).

1950-luvulla ei suosittu helpottavien otteiden kuten sormien käyttöä päässäälaskussa. Laskutehtävät oli suoritettava tarkasti sen mukaan miten opettaja oli opettanut.

1960-luvulla Tartun yliopistossa järjestettiin konferenssi, jossa pääasiana oli lukion oppilaiden huonot tulokset matematiikan tiedoissa ja taidoissa. Yhtenä syynä siihen pidettiin opettajien puutteellista koulutusta. Toinen syy oli metodisen materiaalin vähäisyys, koska sitä ei ollut saatavilla. Matematiikan opetus oli liian yksipuolista. Oppilaille ei annettu riittävästi mahdollisuuksia ajattelun ja muistin kehittämiseen. Ensimmäisestä luokasta alkaen suositeltiin pidettäväksi viikossa tunti päässäälaskua, jonka merkitys matematiikan opiskelussa alettiin taas ymmärtää (Bergert, 1960, 1–5).

Seuraavien vuosikymmenien aikana olivat matematiikan opetuksessa tärkeitä mielenkiinnon herättäminen oppimiseen, vaihtelu ja monimutkaisuus, itsenäisyys, konkreettisuus sekä havainnollisuus (Kallak & Lints, 1962, 3–7; Lints, 1974, 3–16, Noor, 1982, 9–11). Päässäälaskuopetuksen tarkoituksena oli muistin systemaattinen kehittäminen kuten lukualueen (0–20) perustehtävien tietoinen ulkoa oppiminen (Lints, 1974, 58). Lapsille ei saanut antaa kaikkea uutta tietoa valmiina vaan heidän piti saada mahdollisuus itse kokeilla ja itse oman ikätasonsa mukaisesti ratkaista ongelmia (Anderssoo & Lints, 1975, 3).

Vuonna 1986 palattiin taas sormien tukeen. Todettiin, että jos oppilas ensimmäisessä luokassa tuntee tarvetta, hän voi käyttää sormia päässä laskiessa. Sormet tukevat sekä yhteenlaskun että vähennyslaskun perustehtävien omaksumista. Pääsälaskutehtävissä oli tärkeä myös leikki sekä piirtäminen että värittäminen (Noor, 1986, 74–75).

Vertailtaessa edellä kuvailtua vuosisadan myötä tapahtunutta matematiikan oppimiskäsitystä ja pääsälaskun opetusta Virossa havaitaan vastakkaisia käsityksiä mekaanisuuden ja drillitehtävien käytöstä, sormien käytöstä ja luonnonympäristön merkityksestä. Lähes sata vuotta sitten voi oppimiskäsityksessä havaita nykyisen konstruktivismin merkkejä kuten 1) oppija osallistuu aktiivisesti opetukseen, 2) oppija oppii ympäristöstään saatavasta informaatiosta sen tiedon, jonka hän itse konstruoi. Sen vuoksi sormien käytöstä katsottiin olevan hyötyä aritmetiikan oppimisen alussa, koska sormet ovat aina saatavilla, niitä saa katsoa ja luetella. Tämä käsitys, jota kannattivat mm. Veiderman (1920) ja Eisenberg (1922) oli vallalla vuoteen 1940 asti, jolloin Käisin (1946) mukaan lapsen ei pidä käyttää sormia laskemisessa, koska niitä on aina kymmenen. Hän lisäsi, että sormista on vaikea päästä eroon, mikä vaikeuttaa abstraktin laskukyvyn kehittymistä.

Pari-kolmekymmentä vuotta myöhemmin tuli vallalle behavioristinen oppimiskäsitys. Sen mukaan tavoitteiden saavuttamista kontrolloitiin ja arvioitiin drillitähtävillä. Tärkeintä olivat oikeat tulokset. Opettajien täytyi tarkistaa, suorittiko oppilas laskutehtävät oikein. Oppilaat eivät saaneet käyttää epärationaalisia helpottavia otteita. Keskeinen sija oli aritmeettisten laskutehtävien menetelmillä. Monimutkaisten strategioiden käyttöä pääsälaskutehtävissä ei suosittu. Oppilaan itsenäistä ajattelua ja oma-aloitteista tiedon hankintaa ei arvostettu.

Merkkejä konstruktivistisesta oppimiskäsityksestä löytyy jonkin verran 1960-luvulta lähtien. Tällöin matematiikan opetuksessa tärkeintä oli motivaatio oppimiseen, vaihtelu ja monimuotoisuus, itsenäisyys, konkreettisuus sekä havainnollisuus. Löytyy tietoa myös sormien käytöstä pääsälaskuissa. Sormien käyttö tuki sekä yhteen- että vähennyslaskun perustehtävien oppimista.

Opetus on vaihdellut sen mukaan, miten metodiset näkökulmat muuttuvat. Historiallisen kehityksen myötä on Virossa tullut pääsälaskuopetukseen jonkin

verran epävarmuutta mm. sormien käytöstä. Sen vaikutuksesta oppimiseen näkökulmat ovat muuttuneet kymmenen - parinkymmenen vuoden välein.

2.2 Matematiikan opetussuunnitelman perusteet nykyisen peruskoulun alaluokilla Virossa verrattuna Suomen opetussuunnitelmiin

Virossa kuten Suomessakin on 9-vuotinen peruskoulu, joka aloitetaan yleensä 7-vuotiaana. Peruskoulu jakaantuu Virossa kolmeen asteeseen. Luokat 1–3 muodostavat 1. asteen, luokat 4–6 puolestaan 2. asteen ja luokat 7–9 edelleen 3. asteen. Suomen peruskoulun jakaantuu kahteen asteeseen: alakouluun ja yläkouluun. Alakoulu käsittää luokat 1–6 ja yläkoulu luokat 7–9. Virossa 1. asteella yhteensä on 10 matematiikan oppituntia viikossa, missä 1–2 luokalla 3 matematiikan oppituntia ja 3. luokalla 4 oppituntia (Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava, 2002, 2010). Suomen peruskouluissa kolmella ensimmäisellä luokalla on vastaavasti 10 tuntia, jotka jakaantuvat seuraavasti: 1. luokka 3, 2. luokka 3 ja 3. luokka 4 tuntia (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet, 2004). Sekä Viron että Suomen luokilla 1. – 3. näyttää olevan sama määrä matematiikan tunteja. Samoin on oppitunnin pituus Viron ja Suomen kouluissa 45 min.

Viron peruskoulun alaluokilla matematiikan opiskelu perustuu lukujen tuntemiseen sekä lukujen laskemiseen, jotka taidot suurin osa oppilaista osaa jo ennen koulua. Opetuksella peruskoulun 1.asteella on yhteys luonnontieteeseen ja ihmisen elinympäristöön, joista löytyy analogisia aiheita ja käsitteitä, mm. ajan laskeminen kellon ja kalenterin avulla. Peruskoulun matematiikan opetuksen tavoitteena on oppilaan persoonallisuuden monipuolinen kehitys, ottaen huomioon oppilaan erilaisuuden ja kyvyt. Tärkeä osa opetuksessa on tiimityöhön kasvaminen. Siihen sopivat monipuolista toimintaa edellyttävät menetelmät kuten ryhmätyö, ongelmatehtävät, projektit ym. Niiden avulla syventyy ja kehittyy oppilaan yleinen oppimismotivaatio, mikä takaa mielenkiinnon matematiikkaan. Opiskelussa pitää huomioida myös oppilaan itsenäisen työskentely. Se kehittää matematiikan ymmärtämistä, välittää matematiikan merkityksen toisiin oppiaineisiin ja selventää matematiikan osaa jokapäiväisessä elämässä. Oppilaan itsenäinen työ tapahtuu monimutkaisten tehtävien ja ongelmaratkaisutehtävien avulla (Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava, 2002, 954–956).

Peruskoulun 1. asteen eli luokkien 1–3 matematiikan opetussuunnitelman perusteina ovat peruslaskutaidot päässä ja kirjallisesti. Ensimmäisellä kouluasteella tutustutaan luonnollisiin lukuihin ja niiden laskutehtäviin lukualueella 0–1000. On tärkeää, että oppilas ymmärtää lukukäsitteen ja lukumäärän ominaisuudet. Murtoluvuista tutustutaan lukuihin $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{5}$. Tällöin otetaan ensiaskelia algebraan merkitsemällä lukuja kirjaimella. Geometrian opiskelu aloitetaan ns. propedeuttisella kurssilla, jolloin tutustutaan ympäristössä oleviin geometrisiin kuvioihin ja muotoihin ja kappaleisiin. Muita keskeisiä sisältöjä ovat suuruusluokkien ja tulosten oikeellisuuden arviointi, mittaukset ja niiden välisten suhteiden selvittäminen. Lisäksi tutustutaan taulukoihin ja diagrammeihin sekä niiden lukemiseen ja tulkitsemiseen.

Vuoden 2004 Suomen valtakunnallisissa peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa matematiikan opetukselle on asetettu tavoitteeksi tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja matemaattisten käsitteiden sekä yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen. Opetuksen tulee kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua, ja sen tulee ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin. Matematiikan merkitys on nähtävä laajasti - se vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen sekä edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta. Matematiikan opetuksen on edettävä systemaattisesti, ja sen tulee luoda kestävä pohja matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle. Konkreettisuus toimii tärkeänä apuvälineenä yhdistettäessä oppilaan kokemuksiin ja ajattelujärjestelmiä matematiikan abstraktiin järjestelmään. Arkipäivän tilanteissa eteen tulevia ongelmia, joita on mahdollista ratkoa matemaattisen ajattelun tai toiminnan avulla, tulee hyödyntää tehokkaasti. Tieto- ja viestintäteknikkaa tulee käyttää oppilaan oppimisprosessin tukemisessa. Vuosiluokkien 1-2 matematiikan opetuksen ydintehtävinä ovat matemaattisen ajattelun kehittäminen, keskittymisen, kuuntelemisen ja kommunikoinnin harjaannuttaminen sekä kokemusten hankkiminen matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostumisen perustaksi (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet, 2004, 158).

Vuosiluokkien 3-5 matematiikan opetuksen ydintehtävinä ovat matemaattisen ajattelun kehittäminen, matemaattisten ajattelumallien oppimisen pohjustaminen,

lukukäsitteen ja peruslaskutoimitusten varmentaminen sekä kokemusten hankkiminen matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumisen pohjaksi (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet, 2004, 159–160).

Suomen peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa on määritelty ala-asteen eli nykyisen alakoulun matematiikan keskeisiksi sisällöiksi peruslaskutaidot päässä, paperilla ja laskimilla sekä perustaitojen käyttö arkielämän ongelmien ratkaisemisessa. Muita keskeisiä sisältöjä ovat ympäröivän maailman havainnointi ja tulkitseminen matematiikan keinoin sekä asioiden ja esineiden lajittelu, säännönmukaisuuksien löytäminen ja kuvaaminen. Matematiikan aineenhallinnasta alakoulun matematiikkaan kuuluvat peruslaskutaitojen ohella luonnollisen luvun sekä murto- ja desimaaliluvun käsitteet, mittakaavan käsite ja sen käyttö piirustusten ja karttojen tulkinnassa. Keskeisiä sisältöalueita ovat lisäksi taulukoiden ja diagrammien laatiminen, lukeminen ja tulkitseminen sekä tavallisimpien geometrinen kappaleiden ja kuvien tunnistaminen, perusominaisuuksien kuvaaminen, piirtäminen ja näiden pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen. Matematiikan muita keskeisiä sisältöjä ovat suuruusluokkien ja tulosten oikeellisuuden arviointi, matemaattisten ongelmatilanteiden tunnistaminen ja niistä toimiminen sekä tutustuminen symmetriaan. Alakoulun lopussa tulee syventää aiemmin opittuja tietoja jäsentämällä tietoaan, jolloin useimmilla oppilailla on mahdollisuus muodostaa hankkimistaan tiedosta systemaattisempia kokonaisuuksia. Samalla varmennetaan perustietojen ja – taitojen osaaminen (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet, 2004, 159–160).

Verrattaessa Viron ja Suomen peruskoulun alaluokkien opetussuunnitelmia todetaan, että molemmissa maissa matematiikan opetuksen tavoitteita on tarjota kaikille oppilaille mahdollisuus hankkia peruskoulun aikana sellaiset matemaattiset perustiedot ja – taidot, jotka luovat pohjaa jatko-opinnoille ja antavat valmiuksia selviytyä jokapäiväisissä toiminnoissa ja työelämässä. Näiden maiden tavoitteet matematiikan opetuksen suhteen ovat suurin piirtein samanlaiset. Keskeistä on se, että oppilas oppii keskittymään, kuuntelemaan, kommunikoidaan ja kehittämään ajatteluaan, saa tyydytystä ja iloa ongelmien ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta. Oppilas oppii luonnollisen luvun käsitteen ja siihen soveltuvat peruslaskutaidot, oppii perustelemaan ratkaisujaan ja päätelmiään konkreettisin mallein ja välinein, kuvin,

kirjallisesti tai suullisesti ja oppii löytämään ilmiöistä yhtäläisyyksiä ja eroja, säännönmukaisuuksia sekä syy-seuraussuhteita.

Tärkeä rooli alakoulun matematiikassa on päässä laskulla, johon tässä tutkimuksessa rajoitutaan. Niitä ovat yhteen- ja vähennyslaskutehtävät luokilla 1–2 sekä kerto- ja jakolaskun perustehtävät 3. luokalla. Tutkimuksessa mukana olevista tehtävistä yhteen- ja vähennyslaskun perustehtävät lukualueella 0–20 ilman kymmenen ylitystä opetetaan sekä Virossa että Suomessa 1. luokalla. Suomessa sen lisäksi opetetaan myös kymmenylitys, johon Virossa vain tutustutaan. Lukualue 0–100 yhteen ja vähennyslaskussa sisältäen kymmenen ylityksen opetetaan 2. luokalla molemmissa maissa. Kerto- ja jakolaskun tehtävät kuten myös peruslaskutoimitusten järjestys opetetaan molemmissa maissa 3. luokalla. Virossa opetetaan tällöin lisäksi sulkeiden käyttö laskutoimituksessa.

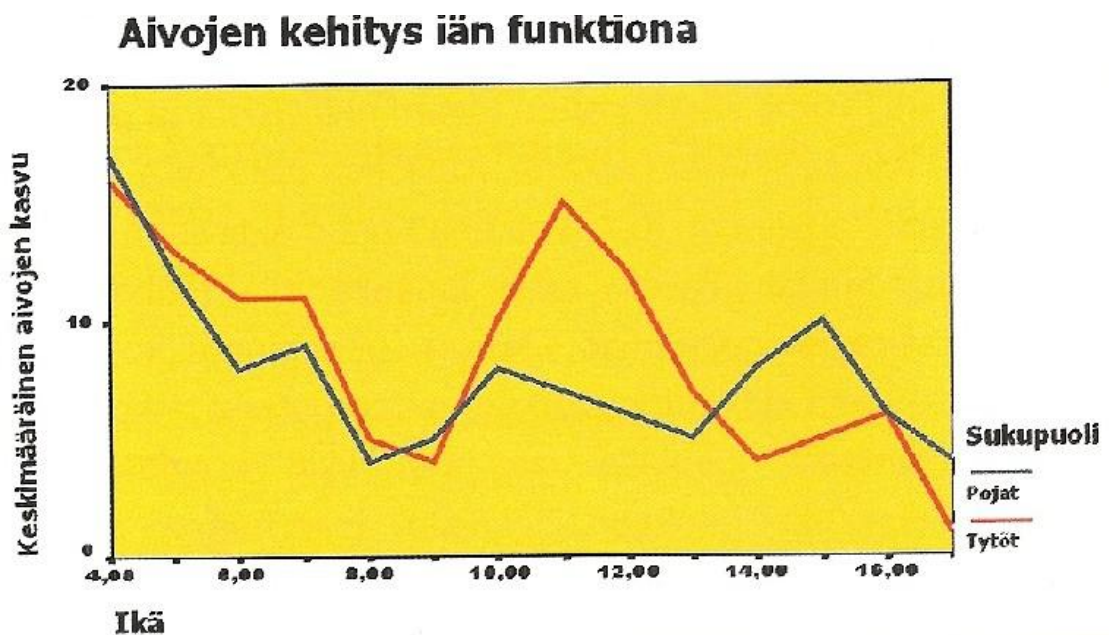
2.3 Päässä laskun opetuksesta peruskoulun 1. asteella Virossa

Nykyisessä maailmassa saadaan jatkuvasti uutta informaatiota, josta pitää osata valita ja jota seuloa. Tärkeäksi on tullut myös ongelmanratkaisutaito, jota vaativat erilaiset arkielämän tilanteet. Siihen, että ihminen osaa ratkaista ongelmia, tarvitaan ajattelua. Niin kuin mm. Friedman (1987, 22) on sanonut, ajatteluun liittyy kaikki, mikä koulussa opitaan ja opetetaan. Se liittyy kaikkien aineiden opetukseen, eniten matematiikkaan. Ihmisen täydellinen kehitys ei toimi ilman loogista ajattelua.

Oppilaiden tulee ymmärtää, että matematiikka tulee nähdä laajempaan kuin vain tiettyjen laskutaitojen oppimisena. Matematiikan omaksuminen on liitettävä oppilaan henkiseen kasvuun, hänen ajattelunsa laajuuden ja johdonmukaisuuden lisäämiseen sekä maailmankuvansa muodostumiseen (Kaasik, 1997a, 28–30; Kilborn, 2003, 2–10; Koponen, 1995, 11–14).

Virossa koulu aloitetaan 7-vuotiaana. Ensimmäistä kouluvuotta aloittava lapsi on omaksunut edellä esitettyjen ajattelutoimintojen perusteet. Oppimisen aikana oppilaan täytyy saada jatkuvasti mahdollisuuksia omaksuttujen ajattelutapojen käyttämiseen ja kehittämiseen.

Piaget'n teorian mukaan peruskoulun ala-asteen oppilaat (7–12 vuotta) kuuluvat pääosin konkreettisten operaatioiden vaiheeseen. Sinä aikana kehittyvät looginen ajattelu, ajattelu muuttuu käänteiseksi - tallennus- ja järjestely-, kieltämis- ja tunnistus sekä kompensointikyky kehittyvät. Lapsi kykenee loogisesti ratkaisemaan konkreetteja ongelmia. Kuitenkin ensimmäisillä koululuokilla lapset ovat vasta siirtymässä esioperationaalisesta vaiheesta konkreettisten operaatioiden vaiheeseen. Tällöin taito ajatella alkaa vakiintua, jolloin oppilaiden tulee saada riittävästi erilaisia kokemuksia (Flavell, 1970, 129–135; Lindgren & Suter, 1994, 44–45; Piaget, 1997, 596–608; Seefeldt & Barbour, 1990, 384–386). Aivotutkijat selvittävät lasten aivojen kasvua ja kehitystä, niin on havaittavissa mielenkiintoisia vaiheita: aktiivista kehityksen kautta ja lepovuosia ja taas aktiivista kasvua. Tyttöjen aivokehitys on poikien vastaavaa kehitystä selvästi parempaa 10 – 14 ikävuosien aikana (kuvio 2). Tämä olisi myös osattava huomioida opetuksen järjestelyissä.



KUVIO 2. Aivotutkimuksen tuloksia aivojen kehityksestä (Yli-Luoma, 2003, 85)

Matematiikka ympäröi lasta kaikkialla – koulussa, luokassa, kotona, koulumatkalla, luonnossa. Ensimmäisten kouluvuosien aikana täytyy oppilaan omaksua päässä-laskeminen. Se on pohjana seuraavaksi opittaville asioille ja myös koko arkielämälle. Viron opetussuunnitelmissa on sanottu, että 3. luokan lopulla oppilas osaa suorittaa

yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskutehtävät (Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava, 2002, 20, 116).

Ensimmäisestä luokasta alkaen täytyy opettaa oppilaita näkemään lukuja, suhteita ja ongelmia, kehittää heidän huomionsa ongelmien ja niiden ratkaisumenetelmien löytämiseen sekä tulosten kriittiseen tarkasteluun (Kaasik, 1997b, 117).

Päässä-lasku kehittää oppilaan lukumuistia. Oikean tuloksen löytäminen kehittää ajattelua. Päässä-laskussa on tärkeä sekä nopeus että laskutehtävien oikea tulos (Sikka, 1995, 127–131). Päässä-laskun täytyy kuulua jokaiseen matematiikan oppituntiin, koska tottumusten muodostuminen riippuu harjoittelun johdonmukaisuudesta (Sikka, 1995, 142).

Päässä-laskun harjoittelu on muistin kannalta hyvin tärkeä. Muistin kehittämisessä mekaaniset ja drillitehtävät eivät kiinnosta lasta. Ušinski (1958, 470–471) suosittaa aistien (silmät, korvat, ääni) käyttöä ja jos mahdollista, myös maistamista ja haistamista sekä erilaisten teemojen käyttämistä muistin tukena.

Opetuksen täytyy olla havainnollista. Matematiikan opetuksen täytyy tukea lapsen luonnollista uteliaisuutta keksimään itse tehtäviä ja löytämään niihin ratkaisuja (Kaasik, 1997b, 119–120).

2.4 Oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan ja päässä-laskuun

Ennen koulua ja ensimmäisinä kouluvuosina oppilaat ovat hyvin kiinnostuneet oppimisesta ja haluavat tulla viisaiksi. Oppilaat suhtautuvat myönteisesti matematiikkaan riippumatta siitä, millainen heidän taitotasonsa on (Kinnunen, 2003, 16). Aikaisemmista tutkimuksista on selvinnyt, että opettajien suhtautuminen matematiikkaan vaikuttaa suoraan oppilaiden asenteisiin. Tämä vaikuttaa puolestaan opiskelumotivaatioon (Ernest, 1988).

Koulutien aloittava lapsi haluaa paljon huomiota. Tämä huomionhalu on tahallista tai spontaania. Tahallisen huomionhalun merkitys kasvaa, kun lapsi kasvaa ja kehittyy,

jolloin oppilas itse pyrkii hankkimaan huomiota. Ennen koulua lapsen asenteisiin vaikuttavat esim. vanhemmat ja päiväkotit. Koska sisäinen palkinto toimii tehokkaammin kuin ulkoinen, niin opettajat yrittävät luoda, löytää ja suunnitella tehtäviä, joissa oppilaat voivat toteuttaa tarpeitaan (Lindgren & Suter, 1994, 496).

Maria **Montessorin** (1870–1952) mukaan jokaisen lapsen kehityksessä on individuaalinen ajanjakso, jolloin lapsi on tietyille vaikutuksille vastaanottavaisempi. Se on herkkätunteisuuden kausi, jolloin lapsi tuntee kiinnostusta tiettyä toimintaa kohtaan, hän on kiinnostunut esimerkiksi harjoittelusta. Valinta tapahtuu lapsessa itsessään sisäisesti. Siitä johtuu, että lapsen iän kannalta ei ole tarkkoja rajoja, milloin hän oppii laskemaan. Jos herkkätunteisuuden kausi on mennyt, ei kukaan opettaja pysty motivoimaan oppilasta innolla uutta tietoa omaksumaan (Montessori, 1988; 42; Yli-Luoma, 2003, 86–89). Voi sanoa, että oppilaiden suhtautumista vaikuttavat hyvä työskentelyilmapiiri ja mielekkäät tehtävät. Tehtävissä täytyy olla uutuuden viehätystä ja hyödyn tuntua. Tehtävien tulee olla myös tarpeeksi vaativia, ne eivät saa olla liian helppoja.

Jokaisella lapsella on omat vahvat ja heikot puolensa. Lapset haluavat toimia vanhempien mielen mukaan odottaen kiitosta ja tunnustusta (Burnett & Jarvis, 2004, 26–28). Kiitos on tärkeää lapsen itsetunnon kannalta. Positiivinen palaute auttaa häntä tulemaan tietoisiksi omista vahvuuksistaan (Lindenfield, 2003, 131).

Aikaisemmat tutkimukset ovat osoittaneet, että matematiikkaa pelkävien ja heikosti menestyvien lasten vanhemmilla on myös ollut ongelmia matematiikassa. Siksi he saattavat aiheuttaa pelkoa ja epävarmuutta myös lapsissa matematiikkaa kohtaan (Sikka, 1997, 29–138; Spellings, 2005). **Sellaisissa tilanteissa** vanhempien on unohdettava omat heikkoutensa ja rohkaistava lasta niin, että tämä ei anna periksi. Jos lasta rohkaistaan, hän oppii uskomaan itseensä (Fisher, 2004, 80).

Negatiivista palautetta saadessaan rupeaa lapsi pelkäämään epäonnistumista ja välttämään riskiä (Burnett & Jarvis, 2004, 26–28). Negatiivinen ajattelu ei ole luonnollista vaan totuttua, ja sen lapset oppivat ympäristöstä jo varhaisiässä. Oppimisen kannalta se on huono tapa, ja siitä on tehtävä loppu niin pian kuin mahdollista. Negatiivinen ajattelu heikentää itsetuntoa (Lindenfield, 2003, 124).

Yli-Luoman mukaan arviointi näyttäisi keskimäärin heikentävän suomalaisten oppilaiden itsetuntoa. Itsetunto on tärkeä koulumenestyksen kannalta, mutta jos oppilas ei saakaan sellaista arvosanaa kuin odotti, niin hän kokee sen negatiivisena arviointina opettajan taholta (esim. *minä en ollutkaan sen arvoinen*), josta seuraa itsetunnon ja motivaation heikkeminen, mikä puolestaan johtaa huonompaan koulumenestykseen (Yli-Luoma, 2003, 141).

Konstruktivistisen oppikäsityksen mukaan oppijan matemaattisen ajattelun kehittymisen edellyttää hänen aktiivista osallistumistaan opetukseen. Matematiikan opiskelun tulee olla toimintaa, jossa oppijalla on keskeinen rooli. Lapsen on itse hankittava ja luotava oma matematiikkansa oppimisprosessissa eikä olla vain valmiin tiedon vastaanottaja (van den Heuvel-Panhuizen, 1996; Kilpatrickin, 1987).

Leino (1993) on todennut, että oppimisen kannalta erityisen tärkeiksi ovatkin osoittautuneet merkitysten muodostumiset. Merkitykset perustuvat aikaisemmalle kokemustalustalle tai uskomuksille ja varmentuvat oppimisprosessin aikana ja muokkautuvat myöhemmin oppimisen kannalta perustavanlaatuisesti. Konstruktivismiin ollessa matematiikan opetuksen lähtökohtana pääongelmana on selvittää oppilaiden aikaisemmat käsitykset ja merkitykset puheena olevasta aiheesta. Opetuksessa konstruktivismissa tarkastellaan oppilaan kokemusmaailmaa eikä vain matematiikan ja ympäristön välistä suhdetta. Nämä kaikki vaikuttavat oppilaan suhtautumiseen matematiikkaan. Siksi olisi tärkeä selvittää oppilaiden esikäsitykset ja uskomukset, miten ne on ymmärrettävissä ja miten ne saataisiin muutetuiksi (Leino, 1993, 11–16). Oppilas on aktiivinen, jos matematiikan opetuksessa herätetään mielenkiintoa oppimiseen, siinä on vaihtelua ja monimutkaisuutta, itsenäisyyttä, konkreettisuutta, havainnollisuutta.

Jotta oppiminen toimisi, keskeisintä on mielenkiinto ja motivaatio. Oppijalle tärkeintä on tahto osallistua oppimisprosessiin. Näin opetuksen ensimmäinen askel on sopivan motivaatiotason luominen. Golemannin (2000, 165–168) mukaan tärkein lähtökohta on optimismi. Se ennustaa hyvää oppimistulosta.

Lapsi ei omaksu välittömästi uutta tietoa, vaan hänelle täytyy antaa aikaa. Motivoinnin kannalta pelien käyttö on ensimmäisinä kouluvuosina hyvin tärkeää lapsen opettamisessa. Pelin kautta lapsi omaksuu paljon käsitteitä, ratkaisee ongelmia, löytää erilaisia mahdollisuuksia tilanteiden ratkaisemiseen. Yhdessä työskenneltäessä ja leikkiessä lapsi omaksuu huomattavasti helpommin uusia tietoja. Nykyaikaiset opetusmenetelmät tarjoavat useita erilaisia keinoja pari- ja ryhmätyöhön sekä erilaisia pelejä aineiston omaksumisen helpottamiseen. Peli aktivoi ja motivoi oppilaita osallistumaan ajatteluun ja toimintaan. Mekaaninen rutiiniharjoittelu ei kiinnosta oppilaita. Leikinomaisuus on kiinnostavaa. Se antaa mahdollisuuden kaikille oppilailla. Kun käytetään pelejä, laskutaito parantuu ja sen myötä ongelmanratkaisu. Leikinomaiseen opiskeluun kuuluvat säännöt, käsitteet ja merkit. Oppilaan osallistumisen tulee olla vapaaehtoista ja sen mukaista, miten hän ehtii. Hyvään oppituntiin kuuluvat ainakin päässälaskutehtävät, jotka auttavat keskittämään ajatusten käsiteltävään aiheeseen. Mutta miten se tapahtuu? Jos oppitunnin alkuun sisältyy jännitystä, niin oppilas uskoo sen jatkuvan koko tunnin ajan, mikä motivoi oppimista. Siksi tarvitaan erilaisia pelejä (Kinnunen, 2003, 34; Piht, 2004b, 5–11).

2.5 Mihin matematiikan ja päässälaskun opetuksen tulisi perustua?

Ensimmäiset kolme vuotta peruskoulussa ovat päässälaskun kannalta tärkeää aikaa, jolloin matematiikan opiskelu tapahtuu aluksi (ensimmäisellä luokalla) suullisesti ja päässä laskien. Tietty ajattelutapa selviää oppilaille ensin ilman kirjoja ja vihkoja. Vasta sen jälkeen tehdään sama kynä–paperi-tehtävänä. Tällöin oppilaille kehittyvät omia informaalisia ratkaisustrategioita, jotka tulevat esille keskusteltaessa oppilaiden kanssa. Opettajan on tärkeä tuntee nämä strategiat, jolloin hän voi hyödyntää niitä opetuksessa. Siten oppilaat oppivat huomaamaan miten erilaiset laskulait ja -säännöt toimivat. Se puolestaan tekee matematiikan opiskelun elävämmäksi ja helpommin käsitettäväksi (Kilborn, 2003, 2–10). Päässälasku ja oppilaiden käyttämät strategiat ovat tärkeitä matematiikan laajemmalle oppimiselle. On nimittäin osoittautunut, että ne informaaliset strategiat, joita lapset käyttävät ensimmäisten kouluvuosien aikana voivat kehittyä myöhemmin ja auttavat heitä ymmärtämään syvällisemmin matematiikan eri alueita kuten negatiivisten lukujen vähennyslaskua tai murto- ja

desimaalilukujen jakolaskua. Näin päässä lasku luo pohjan koko matematiikan oppimiselle (Kilborn, 2003, 2–10).

Matematiikka ei ole vain laskemista, vaan opetuksen päämääränä pitäisi olla myös ymmärtäminen. Kumpikaan näistä ei yksin riitä, koska runsas laskeminen ei vielä lisää ymmärtämistä eikä myöskään laskutaito lisääny pelkästään ymmärtämisen myötä. Tärkeä rooli on opetuksen vaihtelulla. Ei aina saa ratkaista tehtäviä vain kirjallisesti vaan myös päässä laskien. Päässä laskutehtäviä voidaan tehdä myös leikinomaisesti, mitä enemmän, sitä parempia tuloksia on odotettavissa. Annetaan myös oppilaille mahdollisuus tehdä valintoja. Opetetaan oppilaita ajattelemaan. Ajattelukykyjen kehittäminen on opetuksen keskeisiä asioita (Piht, 2004b, 5–11).

Leikki kuuluu lapsuuteen. Se tekee oppimisesta lapselle miellyttävämpää ja helpompaa. Leikkiessään lapsi vapautuu. Myös leikeissä lapsen on käytettävä laskutaitoa, ja mahdolliset ilmenevät vaikeudet ovat pienempiä kuin samaa ongelmaa esimerkiksi tehtäväkirjan avulla ratkaistaessa. Kun oppitunneilla leikitään, myös heikommat laskijat haluavat olla mukana, mikä saa myös heidät yrittämään enemmän. Erehtyminen tai epäonnistuminen ei johda leikkihalun katoamiseen, vaan lapsi haluaa kokeilla uudestaan ja uudestaan todistaakseen itselleen ja myös muille, että hän selviää tehtävästä. Leikkihalu kehittää tahdonvoimaa, joka puolestaan edesauttaa kaikenlaista oppimista ja toimintaa halutun tuloksen saavuttamisessa (Piht, 2004b, 11–15; 2007, 5–8).

Matematiikan opetuksen tulee kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua, ja sen tulee ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin. Matematiikan merkitys on nähtävä laajasti – se vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen sekä edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet, 2004, 158).

Fisherin (2005) mukaan matematiikan opetuksessa tulee saada lapset itse ajattelemaan eli kehittää *lasten filosofiaa*. Mekaaninen laskutaito on tarpeeton, jos lapset eivät osaa ajatella ja suunnitella ongelmien ratkaisuja. Tutkimuksille perustuva, ongelmia herättävä, virikkeinen oppimisympäristö tukee ajattelun kehitystä. Tärkeintä on kuitenkin itse *ajattelun opetus*, jossa pääpaino ei ole sillä, mitä opetetaan vaan sillä

miten oppilas oppii hankkimaan, käsittelemään ja tallentamaan uutta informaatiota (Fisher, 2005, 5–25).

Päässä lasku on ajatteluprosessi, jossa kognitiiviseen prosessointiin sisältyy havaitsemista, tulkitsemista, tarkkaavaisuutta, oppimista, muistamista ja ajattelemista. Tulos ilmoitetaan joko suullisesti tai kirjallisesti. Jos kirjoitetaan ylös myös ajatuksen kulku, puhutaan kirjallisesta päässä laskusta. Kirjallisessa päässä laskussa kirjoittamisvaihe on välivaihe, jolla selkeytetään ja helpotetaan laskemista (Andersson, 2005). Kirjallisen päässä laskun harjoittamisen hyviä puolia ovat Birgitta Rockströmin mukaan (2000) mm. seuraavat: oppilaat oppivat ymmärtämään laskulait ja havaitsemaan yhteyden eri laskutapojen välillä; oppilaat virittyvät luovaan ajatteluun, jolloin ratkaisutavat vaihtelevat tehtäväkohtaisesti.

Kirjallisen päässä laskun välivaihe johtaa myös matemaattiseen keskusteluun, jolloin oppilas ja opettaja voivat reflektoida erilaisia ajatuskuluja jonkin erityisen tehtävän ratkaisemiseksi (Andersson, 2005). Puhe on usein se väline, jolla ihmiset selkiyttävät omia ajatuksiaan ja ideoitaan. Kuuntelemalla päästään selville toisten ajatuksista. Keskustelussa tapahtuu vuorovaikutusta kumpaankin suuntaan. Myös matematiikan opetuksessa on tärkeää, että kuunnellaan toisia ja liitetään omat puheenvuorot loogisesti muihin (Koponen, 1994, 7–18). Duffin (1987) toteaa, että keskustelu on tärkeä tapa kehittää ajatuksia; kielellistä kehitystä voi tapahtua yhtä hyvin matematiikan kuin muidenkin oppiaineiden yhteydessä; puhumalla hankittu matemaattinen sanasto on hyödyksi matemaattisen tekstin ymmärtämisessä; ihmisten jokapäiväiseen sanastoon ei kuulu paljoakaan matematiikkaa; toiminnallisuudesta ja reaali maailmasta opittu matemaattinen sanasto on lapselle merkityksekkäämpi kuin puhtaasti matemaattisista lausekkeista opittu; opettajien tulisi mieluummin jäädä kuuntelemaan, mitä lapsi todella sanoo, kuin keskittyä tarkkailemaan, oliko vastaus varmasti oikea (Duffin, 1987, 42–55).

Matematiikan opiskelu alkaa päässä laskulla. Se tapahtuu aluksi suullisesti, jolloin oppilas oppii kuuntelemaan, muistamaan ja ajattelemaan. Sen jälkeen suoritetaan tehtävät päässä laskien ja myöhemmin kirjallisesti. Tärkeä rooli on matematiikan opetuksen vaihtelulla. Vaihtelua voi saavuttaa ohjaamalla oppilasta löytämään ja

muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin. Harjoittelemalla saavutetaan hyviä tuloksia.

2.6 Matematiikan opetuksen eriyttäminen sukupuolen mukaan

Useiden oppilaiden mielestä matematiikka on vaikea oppiaine. Vaikka pojilta odotetaan yleensä parempia tuloksia kuin tytöiltä, niin tosiasiasa tyttöjen matematiikan oppimistulokset ovat keskimäärin paremmat kuin pojilla ala-asteella. Tämän on ajateltu johtuvan siitä, että nykyinen kouluympäristö sopii paremmin tytöille kuin pojille, sillä jos opetetaan erikseen poikia ja tyttöjä, poikien tulokset paranevat huomattavasti (esim. Höbejärv, 1998; Kindlon & Thompson, 2003; Leino, 2005). On tärkeää että opettaja ymmärtää sukupuolten erilaisuuden päässä laskun oppimisessa ja sen myötä sitten käyttää opetuksessa erilaisia menetelmällisiä keinoja. Valitettavasti nykyisin Viron kouluissa valitsee neuvostoliittoaikainen sukupuolten tasa-arvoisuus, jossa ei oteta huomioon poikien ja tyttöjen psykologista ja fysiologista erilaisuutta (Höbejärv & Normak, 1997, 27–30).

Virossa peruskoulun ala-asteella suurin osa opettajista on naisia. Kindlonin ja Thompsonin (2003) mukaan, tämä ei ole hyvä poikien kannalta. Pojat tarvitsevat heille sopivan, turvallisen kasvuympäristön. Tämä on tärkeä varsinkin peruskoulun ala-asteella, koska heidän kehityksensä on erilainen kuin tyttöjen (Kindlon & Thompson, 2003, 37–38).

1980-luvun lopulla Viron koulu muuttui. Voitiin kokeilla jotakin uuttakin. Monessa koulussa alettiin opiskella poikien ja tyttöjen luokissa. Parin vuoden päästä tällainen opiskelu kuitenkin loppui, koska sen ei katsottu olevan hyvä kokonaispersoonallisen kehityksen kannalta. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, etteikö sukupuolten välisiä eroja tulisi huomioida kouluun liittyvissä asioissa (Höbejärv, 1998, 240–242).

Ensimmäisinä kouluvuosina tytöt menestyvät matematiikassa poikia paremmin, mutta erojen on havaittu tasoittuvan kuudenteen luokkaan mennessä (mm. Hyde, Fennema & Lamon, 1990, 139–155; Linnanmäki, 1997, 283–300). McNiece ja Jolliffe (1998) havaitsivat tutkimuksessaan, että jo alaluokilla pojat ovat parempia matematiikassa kuin tytöt, paitsi sanallisissa tehtävissä, mikä johtuu poikien heikommasta

lukutaidosta. Murrosiässä, jolloin lukutaito on parantunut, pojat menestyvät matematiikassa kauttaalta tyttöjä paremmin (McNiece & Jolliffe, 1998, 17–30). Van der Heijdenin (2004) tutkimuksen perusteella selvisi, että tyttöjen tulokset päässäälaskutehtävissä olivat hieman alhaisemmat kuin pojilla. Sukupuolieroja selvitetään kyseisessä tutkimuksessa lähestymiskäyttäytymisellä (approach behavior). Sen mukaan pojat tarttuvat tyttöjä rohkeammin uusiin ja haastaviin tehtäviin (van der Heijden, 2004, 14).

Gurianin ja Ballew`n (2004) mukaan matematiikassa kuten myös päässäälaskutehtävissä on tärkeää paperille kirjoittaminen. Siinä tytöt ovat taitavampia kuin pojat, joita tulisi harjoituttaa kirjoittamisessa. Näyttelemine ja roolipelit, jotka ovat yhteydessä liikkumiseen virkistävän ajattelua pojilla voimakkaammin kuin tytöillä ja edistävät siten myös oppimista pojilla enemmän. Konkreetit kokemukset auttavat kaikkia sellaisia oppilaita, joiden abstraktinen ja avaruudellinen ajattelu on heikompi, mikä on tärkeää matematiikan kannalta. Toisten oppilaiden ohjaaminen ja opettaminen matematiikassa rohkaisee tyttöjä, jotka ovat luonnostaan arempia siihen kuin pojat. Opetuksessa näitä kaikkia voidaan harjoitella mm. ryhmätöinä. Tyttöjä tulee kannustaa ottamaan riskejä matematiikan opiskelussa. Opettajien mielestä niin tytöt kuin pojatkin pystyvät tekemään kaikkea matematiikassa, kun heidän erikoistaipumuksensa ja puutteensa huomioidaan (Gurian & Ballew, 2004, 252–253).

2.7 Aikaisempia tutkimuksia päässäälaskusta

2.7.1 Eri maissa suoritettuja tutkimuksia päässäälaskusta

Päässäälaskun oppimista ja opetusta on tutkittu paljon eri maissa. Matemaattisen ajattelun ja työmuistin yhteydestä päässäälaskuun on monia empiirisiä tutkimuksia.

Tutkiessaan oppilaiden pelkoa matematiikkaa kohtaan Cleveland State Yliopiston tutkijat Ashcraft ja Faust (1994), Ashcraft ja Kirk (2001) havaitsivat oppilailta, joiden työmuisti oli rajoittunut, olevan pelkoja, jotka johtuivat vaikeuksista ratkaista ennen kaikkea kaksinumeroisten kymmenylitystä edellyttävien lukujen yhteenlaskuja (vrt. s 13).

Norjassa (Ostad, 2002) on tutkittu päässä laskun strategioiden käyttöä. Tutkimuksen mukaan norjalaiset lapset käyttävät päässä laskuissaan samoja strategioita kuin kirjallisissa laskusuorituksissa.

Jordanin, Hanischin ja Kaplanin (2003, 103–119) tutkimuksista selvisi, että ne lapset, joilla on vaikeuksia laskennossa, käyttävät erilaisia päässä laskustrategioita huomattavasti vähemmän kuin lapset, joilla ei ole vaikeuksia laskennassa.

Edinburgin yliopiston ECME Macintyre ja Forrester tutkivat 14–15-vuotiaiden oppilaiden päässä laskun osaamista ja strategioiden käyttöä ja havaitsivat, että oppilailla esiintyy paljon virheitä vähennystehtävissä. Strategioista käytettiin varsinkin tapaa laskea erikseen yksiköt aloittamalla kymmenillä, sitten ykkösillä ja yhdistämällä tulokset (Macintyre & Forrester, 2004).

Useiden Yhdysvalloissa ja Japanissa suoritettujen tutkimusten tulokset vahvistavat käsitystä siitä, että oppilaat pitävät päässä laskutaitoa erittäin tärkeänä. Kyseiseen tutkimukseen osallistuneet oppilaat pitävät päässä laskutaitoa tärkeämpänä kuin kirjallista laskemista, sillä päässä laskutaidosta on hyötyä arkielämässä (McIntosh & Reys, 1997, 322–329).

Van der Heijden (1993) selvitti oppilaiden lähestymiskäyttäytymistä eli ratkaisustrategiaa käyttäen LDRT (Leiden Diagnostic Arithmetic Approach Test) päässä laskutestejä. Tutkimus suoritettiin Hollannissa ja siihen osallistui 174 toisen luokan oppilasta. Leidenin testi on standardoitu prosessi-diagnostinen väline, jolla mitataan 8 lähestymiskäyttäytymisen eli ratkaisustrategian näkökulmaa yhteen- ja vähennyspäässä laskuissa luonnollisten lukujen alueella 0-100. Näkökulmat ovat tarkkaavaisuuden puute, orientoituminen tarkoituksenmukaisesti, ratkaisumenetelmät, automatisointi, joustavuus, ymmärrys eli oivallus, tietoisuus ja kontrolli (van der Heijden, 2004, 7-8).

Testi koostui kahdesta osasta: osassa A on 30 kaksijäsenistä yhteen- ja vähennyslaskua (esim. $34-18=?$) ja osassa B 18 kolmijäsenistä tehtävää (esim. $15+13-17=?$).

Tehtävät oli luokiteltu 3 kriteerin mukaan:

1 kaksi-jäsenisiä yhteen ja vähennyslaskuja joko ilman muistinumeroa tai sen kanssa
2 kaksi-jäsenisiä tehtäviä jotka on luokiteltu vaikeusasteen mukaan.
3 kolme-jäsenisiä nk. tarkoituksenmukaisen aritmetiikan (handy arithmetic) tehtäviä
(Esim. $18+14+2=?$, $15+17-15=?$), jotka voidaan ratkaista jollakin oikomenetelmällä.
Lapsia pyydettiin lukemaan tehtävä ääneen, laskemaan vastaus ja sanomaan se ensin
äänen ja sitten kirjoittamaan se paperille (van der Heijden, 2004, 7).

Tärkeimmät johtopäätökset olivat seuraavat:

- Koko tutkittava ryhmä ositti korkeatasoista johdonmukaisuutta päässälaskun lähestymiskäyttäytymisen eli ratkaisustrategian suhteen.
- Myös automatisointiasteen ja ratkaisumenetelmien käytön pysyvyys oli hyvin korkea.
- Vaihtelevuus lähestymiskäyttäytymisessä johtui enimmäkseen yksilöiden välisistä eroista kuin tehtävätyyppien eroista.

Van der Heijden totesi, että havaittu korkea pysyvyys tässä asiassa voidaan tulkita joustamattomuutena. *Oppilaat pyrkivät käyttämään samoja ratkaisumenetelmiä huolimatta käsillä olevasta tehtävästä.* Sellainen taipumus on yhteydessä suhteellisesti heikkoihin tuloksiin päässälaskussa. Ja päinvastoin, *joustavuus lähestymiskäyttäytymisessä viittaa korkeaan suorituskyykyyn* (van der Heijden, 2004, 12).

Tietoisuus, kontrollointi ja automatisointi näyttävät muodostavan lähestymiskäyttäytymisen keskeiset näkökulmat päässälaskusuorituksissa. Tämän myös monet muut tutkijat ovat todenneet (Baars, 1988; van Haneghan & Baker, 1989; van der Heijden, 2004, 12–13; Kaptelinin, 1992).

Vain 30 % tutkimukseen osallistuneista oppilaista lähestyi oikomenetelmin ratkaistavia eli handy- aritmetiikan tehtäviä tarkoituksenmukaisella tavalla, sillä 70 % suoritti tehtävät standardimenetelmin. Kuitenkin enemmän kuin 85 % oppilaista myönsi myöhemmin tarkoituksenmukaisen tavan eli oikomenetelmän löytämisen helpottavan laskemista.

- Tarkoituksenmukainen lähestyminen merkitsi huomattavaa tehokkuuden kasvua päässälaskuissa. Ratkaisuaika lyheni 11 sekuntia ja oikeiden ratkaisujen määrä nousi 18 %.
- Tarkoituksenmukaisten menettelyjen käyttäminen on vain osittain yhteydessä esitietojen puuttumiseen.
- Se, että vain pieni osa käytti tarkoituksenmukaisia menetelmiä vaikka suurimmalla osalla oppilaita oli niiden käyttöön tarvittavat tiedot, voidaan selittää vain sillä, että suurella osalla oppilaista on tehtäväspesifiä tietoa mutta nämä oppilaat eivät osaa käyttää sitä (van der Heijden, 2004, 13).

Tulokset pitävät yhtä Galperin tekemien havaintojen kanssa. Galperin totesi, että ”vaikka järjestelmä saattaa olla olemassa, niin yksilö siitä huolimatta ei ole kykenevä käyttämään sitä. Ja tämä on asian ydin: järjestelmää joko käytetään tai sitten ei” (Galperin, 1979, 91). Resnick (1987, 433) toteaa, että valitettavasti oppilaiden kasvatuksessa ei ole harjoiteltu analysoimaan tehtäviä ennen laskemista, mikä tarkoittaa että oppilailta puuttuu matemaattinen asennoituminen eli ajattelu. Hänen mukaansa paras tapa nostattaa oppilaiden suoritustasoja päässälaskussa ei ole opettaa heille uusia kognitiivisia prosesseja vaan harjoituttaa käyttämään niitä laajasti ja syvällisesti.

Tulosten tarkastelu sukupuolen suhteen osoitti, että

- tyttöjen tulokset päässälaskussa olivat hieman matalammat kuin pojilla
- tyttöjen automatisoinnin aste oli matalampi (tytöt käyttivät laskutehtävissä enemmän sormia kuin pojat)
- tyttöjen tietämisen määrä oli vähäisempi kuin pojilla
- poikien ja tyttöjen eroja suorituksissa selitti heidän lähestymiskäyttäytymisensä eli ratkaisustrategia päässälaskutehtäviin (van der Heijden, 2004, 14).

Tyttöjen ja poikien välisiä eroja matemaattisissa suorituksissa on selitelty sosio-kulttuurisilla, motivationaalisilla ja emotionaalisilla tekijöillä (Esim. Fennema, 1985).

Van der Heijdenin mukaan yllä olevat tulokset tarjoavat lähtökohdan vähentää sukupuolien välisiä eroja suorituseroja opettamalla oppilaille tarkoituksen-

mukaisempaa lähestymiskäyttäytymistä. Matematiikan opetuksen ei tule koskea vain älyllisiä tekijöitä vaan myös ei-älyllisiä kuten itseluottamusta ja epäonnistumisen pelon voittamista (van der Heijden, 2004, 13–14).

2.7.2 Viron ja Suomen oppilaita koskevia tutkimuksia päässä-laskusta

Suomen peruskoulujen 13–16 vuotiaat oppilaat ovat osallistuneet kansanvälisiin päässä-laskuntutkimuksiin vuodesta 1979 alkaen. Noissa tutkimuksissa on pyritty selvittämään, millaista on matemaattinen osaaminen tietoyhteiskunnan vaatimusten kannalta. Tutkimuksia, joissa olisi vertailtu Viron ja Suomen oppilaiden suorituksia ei ole aikaisemmin tehty.

Suomalaiset tutkijat (Esim. Haapasalo, 1992, 1993, 1994; Kupari, 1996; Pehkonen, 1998) ovat selvittäneet, millaisia strategioita opettajat käyttävät tai suosittelevat oppilaille. He totesivat, että yleensä matematiikassa ja päässä-laskussa keskitytään liiaksi laskutaidon kehittämiseen matemaattisen ajattelun ja ratkaisustrategioiden löytämisen kustannuksella.

Virrankosken (1983) tutkimuksessa selvitettiin peruskoulun 6.-luokkalaisten (N=105) päässä-laskutaitoa, päässä-laskun suoritusmenetelmien käyttöä ja niiden välistä yhteyttä. Myös tutkittiin missä määrin päässä-laskutaitoa voidaan selittää matemaattisilla kykytekijöillä ja koulumenestyksellä. Lisäksi selvitettiin tyttöjen ja poikien välisiä eroja tutkittavissa kysymyksissä. Päässä-laskukoe käsitti sekä numeerisesti että verbaalisesti esitettyjä laskutehtäviä. Suoritusmenetelmätestiin valittiin osa päässä-laskuista, joista pyydettiin kuvaamaan ratkaisutapa ja sääntö, jota oppilas käytti ratkaisussaan. Tulosten tarkastelu osoitti, että päässä-laskutehtävistä osattiin parhaiten kaikkien neljän laskutoimituksen perustehtävät, jotka hallittiin erittäin hyvin, ratkaisuprosentin ollessa 95. Perustehtäviin nojaavista ja useampia laskutoimituksia vaativista tehtävistä heikoimmin osattiin jakolaskut sekä sellaiset tehtävät, joissa edellytettiin jonkin laskulain hallintaa. Numeeristen tehtävien keskimääräinen ratkaisuprosentti (88) oli myös hyvä ja huomattavasti korkeampi kuin verbaalisessa muodossa esitettyjen tehtävien, joiden ratkaisuprosentti jäi tyydyttävälle tasolle (52). Tätä selittää osin rajoitettu aika, jonka takia kaikki oppilaat eivät ehtineet

laskea kaikkia sanallisia tehtäviä, jotka olivat viimeisinä. Suoritusmenetelmien kuvauksessa todettiin, että keskimäärin hieman alle puolet (43 %) oppilaista näytti käyttäneensä kaikissa tehtävissä jotain päässälaskumenetelmää. Korrelaatiot oikeiden ratkaisuiden ja suoritusmenetelmien välillä olivat korkeammat verbaalisesti kuin numeerisesti esitetyissä tehtävissä, jotka ratkaistiin usein kirjallisen algoritmin mukaisesti. Erot tyttöjen ja poikien välillä osoittivat, että päässälaskukokeen numeerisissa tehtävissä sekä kykytekijöistä verbaalista kykyä mittaavissa osioissa tytöt menestyivät poikia paremmin tilastollisesti merkittävällä tasolla ($p < 0,3$). Poikien tulokset olivat muissa osioissa keskiarvon puolesta korkeampia, mutta eivät tilastollisesti merkittävästi. Tutkimuksessa tuli ilmi, että jotkin oppilaat käyttivät apunaan myös piirroksia. Tosin visuaalinen ja avaruudellinen kykytekijä, jota tässäkin mitattiin, ei ole osoittautunut olevan yhteydessä päässälaskutaitoon (Virrankoski, 1983, 34–55).

Viron oppilaat osallistuivat vuonna 2003 TIMSS:n kansainvälisiin tutkimuksiin, jotka on tarkoitettu 15-vuotiaille nuorille. Kaikkien osallistujavaltioiden joukossa Viro saavutti 8. sijan, ja Euroopan valtioiden joukossa 3. sijan. Vuonna 2006 PISA-tutkimuksissa saivat Viron oppilaat 5. sijan matematiikassa (Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: a Framework for PISA, 2006). Huolimatta siitä, että Viron oppilaiden tulokset olivat arvokkaita, on tärkeä kiinnittää suurta huomiota matematiikan oppimisvaikeuksiin, päässälaskun opetukseen ja oppimiseen.

Kansanväliset tutkimukset ovat antaneet mahdollisuudet vertailla oppilaiden tietoja ja kiinnostusta oppimiseen. PISA- tulokset vuodelta 2006 ja 2009 osoittavat **korkeaa (hyvälaatuista)** osaamista sekä Viron että Suomen oppilaiden tulosten osalta (Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy, 2006; PISA 2009 Results). Samaan aikaan monet tutkimukset osoittavat, että Viron koulujen oppilaat ovat kokeneet stressiä **ja** heidän **oppimismotivaationsa** on matala (Ruus et al., 2007). Toinen ongelma sisältyy epätasaiseen kiinnostukseen eri oppiaineita kohtaan. Viron opiskelijoiden kiinnostus oppia yliopistossa luonnontiedettä ja eksaktitieteitä on olennaisesti pudonnut (Kõrghariduse riiklik koolitustellimus, 2008). Aikana, jolloin sosiaalitieteet ovat suosittuja, on tärkeä tiedostaa matematiikan ja laskukyvyn tärkeys. Oppilaat tarvitsevat matemaattisia tietoja ja taitoja arkielämässä.

Vuodesta 2003 alkaen järjestetään Virossa joka huhtikuun lopussa tai toukokuun alussa virallisia testejä, joiden **avulla arvioidaan** oppilaiden tietoja ja taitoja matematiikassa 3. luokan **lopussa** opetussuunnitelmien pohjalta. **Vuonna 2008 järjestetyissä testeissä Viron oppilaat menestyivät näissä testeissä erinomaisesti.** Keskimääräinen tulos oli 4,3 (arviointi oli 5-asteinen, missä 5 oli paras tulos ja 1 hyvin heikko). Ongelmia esiintyy vähennystehtävissä, kertotaulussa ja ajan laskemisessa (Riiklik Eksami- ja Kvalifikatsioonikeskus, 2009).

3 TUTKIMUSONGELMAT

Tutkimus kohdistuu nuorten peruskoulun oppilaiden päässäälaskutaitoon ja sen kehittymiseen kolmen ensimmäisen vuoden aikana. Erityisen kiinnostuksen kohteena ovat nuorten koululaisten käyttämät strategiat päässäälaskuissa. Ensisijainen tutkimusjoukko koostuu virolaisista oppilaista, joiden päässäälaskutaitoja ja -strategioita tarkastellaan yksityiskohtaisesti luokkatasoittain ja sukupuolittain. Tutkimuksessa kiinnostus kohdistuu myös oppilaiden suhteeseen matematiikkaan ja etenkin päässäälaskuun. Tulosten pohjalta pyritään lopuksi luomaan kuvaa taitavasta päässäälaskijasta niin suoritusten, strategioiden kuin matematiikkasuhteen pohjalta.

Tutkimuksessa on neljä pääkysymystä, joissa kaikissa selvitetään niin sukupuolen kuin maiden välisiä eroja kaikilla kolmella tutkitulla luokkatasolla.

Tutkimukset osoittavat, että ensimmäisinä kouluvuosina tytöt menestyvät matematiikassa poikia paremmin, mutta erojen on havaittu tasoittuvan kuudenteen luokkaan mennessä (esim. Linnanmäki 1997; Hyde, Fennema & Lamon 1990; McNiece ja Jolliffe 1998, 17–30). Virossa 2003–2006 suoritettujen testien perusteella poikien tulokset olivat paremmat ajan laskemisessa ja **massayksikön** käytössä. Tytöt onnistuivat paremmin **päässäälaskutehtävissä**, kalenteritehtävässä (päivämäärän kirjoittaminen) ja laskujen järjestyksen määrittelyssä (The National Examinations and Qualifications Centre 2009). Tarkoitukseni on tutkia oppilaiden päässäälaskun osaamista perusteellisemmin eriluokka-asteella peruskoulun 1.– 3.- luokan lapsilla, sen lisäksi katsotaan, mitä eroja on toisaalta sukupuolten välillä.

- (1) Millainen päässäälaskutaito on peruskoulun ensimmäisten (1–3) luokkien oppilailla?

Tutkimukset osoittavat, että oppilaat käyttävät päässäälaskiessaan monia erilaisia strategioita, joista alkuopetuksessa yleisimmin esiintyvä on sormilla laskeminen (esim. Foxman ja Beizhuizen 2002, 41–69; Thompson 2000, 291–298; Butterworth ja Harris 2002, 302; Schipper 2001 a, 2001 b, Ostad 2002). Taitaville oppilaille on ominaista joustavien ja monipuolisten strategioiden käyttö. Sen sijaan lapset, joilla

esiintyy vaikeuksia päässä laskussa, käyttävät eri strategioita hyvin vähän (Jordanin, Hanischin ja Kaplanin 2003, 103–119). Siitä johtaen on tarkoitukseni tutkia, mikä strategioita 1–3 luokkien oppilaat käyttävät.

(2) Millaisia ratkaisustrategioita peruskoulun ensimmäisten luokkien oppilaat käyttävät päässä laskutehtävissä?

Voidaan olettaa, että oppilaiden suhtautumisella on merkitys sekä matematiikkaan että päässä laskuun. Useissa tutkimuksissa todetaan, että oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan yleensä riippuu opetuksesta sekä nykyisestä oppimiskäsityksestä, jossa korostuu oppijan aktiivinen osallistuminen opetukseen (esim. Kilpatrick, 1987). Haluan tutkia onko Virossa samanlainen tilanne kuin esitettyssä maassa.

(3) Miten peruskoulun ensimmäisten luokkien oppilaat suhtautuvat matematiikkaan ja päässä laskuun ja onko maiden välillä eroja?

Taitava päässä laskija voidaan määritellä henkilöksi, jolla on hyvä päässä laskutaito. Päässä laskutaito ei ole pelkkää teknistä osaamista, vaan myös taitavaa ajattelua. Taitavan päässä laskijan määrittelyssä kiinnitetään huomio oppilaan päässä laskutuloksiin sekä oppilaiden asenteisiin matematiikka ja päässä laskua kohtaan. Voi olettaa, että taitavat päässä laskijat ovat erinomaisia laskutehtävien suorituksissa, heidän laskutaitonsa on automatisoitunut ja he arvostavat päässä laskun osaamista.

Kuten Van der Heijdenin (1993) suorittamassa tutkimuksessa todettiin automatisointiasteen ja ratkaisumenetelmien käytön pysyvyys on hyvin korkea. Tietoisuus, kontrollointi ja automatisointi näyttävät muodostavan keskeiset näkökulmat päässä laskusuorituksissa, jonka myös monet muut tutkijat ovat todenneet (esim. Baars 1988; van Haneghan & Baker 1989; Kaptelinin 1992; van der Heijden 2004, 12–13). Tarkoitukseni on **selvittää millainen on taitava päässä laskija tässä tutkimuksessa.**

(4) Millainen on taitava päässä laskija?

4 TUTKIMUSMENETELMÄT

4.1 Tutkittavat

Tutkittavat olivat 1–3 luokan oppilaita (N=287) Virossa (N=157) ja Suomesta (N=130) (ks. Taulukko 1).

Virossa valittiin oppilaat luokilla 1–3 Haapsalun kaupungin ja lähimaaseudun kouluista. Suomesta tutkimukseen osallistuivat Turun normaalikoulun 1–3 luokan oppilaat. Taulukossa 2 on kuvattu oppilaiden lukumäärät luokittain.

TAULUKKO 2. Tutkimuksessa osallistuneet oppilaat

	Viro			Suomi		
	yhteensä	pojat	tytöt	yhteensä	pojat	tytöt
1. luokka	47	30	17	56	27	29
2. luokka	39	19	20	37	16	21
3. luokka	70	39	32	37	20	17
yhteensä	157	88	69	130	63	67

4.2 Matematiikan tehtävät ja tutkimuksen kulku

Pääsälaskutestit tehtiin huhti- toukokuussa vuonna 2006 sekä Virossa että Suomessa. Tutkimuksessa käytettiin tutkimuslomaketta, johon sisältyi kolme osaa (Liitteet 4–12; 16–24). Opettajia neuvottiin informoimaan oppilaita suoritettavasta testistä ja sen tarkoituksesta. *Pyydän Teitä ystävällisesti toimittamaan oppilailenne kyselykaavakkeet ja vastamaan itse opettajille tarkoitettuihin kysymyksiin. Aikaa tähän kuluu oppilasta kohti yksi oppitunti, josta pääsälaskukokeeseen 25 min 1. luokassa ja yksi oppitunti 2. – 3. luokassa* (Liitteet 1–3; 13–15).

Opettajille selvitettiin tutkimuksen tarkoitusperä ja sen suorittaminen. Sitä varten koostettiin 3-osaiset **kysymyslomakkeet**, joihin mm. oli merkitty testin suoritus aika ja muut tarkat tiedot testin **suoritusta** varten.

Epäselvyyksien välttämiseksi suositeltiin, että opettaja lukisi kunkin tehtävän sanallisen osuuden (n. 30 s – 1 min), jonka jälkeen oppilaat laskivat pääsälaskutehtävät itseksensä aikataulun mukaan, joka on taulukossa 3.

TAULUKKO 3. Päässälaskutehtävien suoritusten aikataulu luokittain

Tehtävän tyyppi	Opettajan luenta + laskuaika		
	1. luokka	2. luokka	3. luokka
Puhtaat päässälaskut	11 min	6 min	10 min
Taulukkolaskut	7 min		
Sanalliset tehtävät	5 min	9 min	8 min
Yhteensä	20–25 min	15 min	18–20 min

Päässälaskutestin suorituksen jälkeen selviteltiin oppilaiden käyttämät päässälaskustrategiat B-osassa, missä oppilas sai vapaasti kirjoittaa, kuinka hän laski tai millaisia apuvälineitä käytti. C-osassa selviteltiin oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan ja päässälaskuun kyselylomakkeen perusteella, joka sisälsi seitsemän kysymystä.

A osa: Päässälaskutesti

Päässälaskutestin tehtävät perustuivat Viron peruskoulun alaluokkien opetussuunnitelmiin ja oppikirjoihin. Vastaavia tehtäviä on käytössä virolaisissa ja suomalaisissa nykyisissä matematiikan oppikirjoissa (Piht, 2004a). Tehtävät koosti tutkija itse, keskusteltuaan ohjaajan kanssa.

Ennen testiä annettiin kaikille oppilaille samanlaisia ohjeita, siten että opettaja luki kunkin tehtävän sanallisen osuuden. Oppilaille annetuissa ohjeissa oli sanottu: *Laske seuraavat tehtävät ja kirjoita vain vastaus.* Sen jälkeen oppilaat laskivat päässälaskutehtävät itsekseen aikataulun mukaan. Tarvittaessa annettiin oppilaille lisäaikaa.

Ensimmäisellä luokalla päässälaskutason selvityksen varten koostettiin 4 päässälaskutehtävää. Testin ensimmäinen tehtävä sisälsi viisi yhteen- ja viisi vähennyslaskutehtävää lukumäärän 20 sisällä (ei kymmenen ylitystä). Oppilaan täytyi kirjoittaa vain oikeat tulokset. Toisessa tehtävässä täytyi oppilaan täyttää taulukko, kolme yhteen- ja vähennyslaskua.

Toisen luokan oppilaille koostettiin 13 päässälaskutehtävää. Koostettu päässälaskutehtävät sisälsivät yhteen- ja vähennyslaskuja lukumäärän 100 sisällä,

tehtäviä ilman kymmenen ylitystä, kymmenenlukuun (kymmenenluvusta) ja kymmenen ylityksellä. Oppilaat kirjoittivat vain vastaukset.

Kolmannen luokan oppilaiden päässälaskutason selvityksen varten koostettiin 23 päässälaskutehtävää: yhteen- ja vähennyslaskua, kertotaulua ja jakamista, opittujen algoritmien käyttöä ja laskutehtävien lukumäärän 100 sisällä. Taulukossa 4 on kuvattu päässälaskutestin tehtävätyypit ja esimerkit.

TAULUKKO 4. Päässälaskutestin tehtävätyypit

luokka	Päässälasku tehtäväsarja	Päässälasku tehtävätyyppi	Esimerkit
1. luokka	Päässälasku lukualueella 0–10	Yhteenlasku Vähennyslasku	3+2, 2+5 10–3, 8–4
	Päässälasku lukualueella 0–20	Yhteenlasku Vähennyslasku	12+5, 16+4 19–4, 20–8
2. luokka	Päässälasku lukualueella 0–100	Yhteen- ja vähennyslasku ilman kymmenen ylitystä Yhteen- ja vähennyslasku kymmenen lukuun (kymmenenluvusta) Yhteen- ja vähennyslasku kymmenen ylityksellä	12+7, 24+12 28+12, 76–46 50–14 53+8, 81–9
3. luokka	Päässälasku lukualueella 0–100	Kahden luvun yhteen- ja vähennyslasku Kolmen luvun laskeminen (myös sulut laskutehtävissä)	64+3, 97–4, 47+35, 72–36 34+23+6
	Kertotaulu lukualueella 0–100	Kahden luvun kerto- ja jakolaskut Kolmen luvun laskeminen (myös sulut laskutehtävissä)	6·8, 3·17, 45:9, 84:3 5+7·6, (48–16):4

Sanalliset laskutehtävät

Ensimmäisen luokan oppilaiden testiin sisältyi kaksi sanallista laskutehtävää. Oppilaille annetuissa ohjeissa oli sanottu: *Laske seuraavat tehtävät*. Oppilaan täytyi lukea tehtävä, kirjoittaa laskutehtävä, suorittaa laskeminen ja kirjoittaa lopputulos vastaukseen.

Toisen luokan testiin sisältyi kolme sanallista tehtävää. Kaksi tehtävä ratkesi yhdellä laskutavalla, kolmannessa tehtävässä tarvittiin kaksi laskutapaa. Oppilaille annetuissa ohjeissa oli sanottu: *Jos osaat laskea päässäsi, kirjoita seuraaviin laskuihin vain vastaus. Jos et osaa laskea päässä, niin laske ruudukkoon*.

Kolmannen luokan testiin sisältyi kolme sanallista tehtävää. Ennen tehtäviä oli sanottu: Laske päässä. Kirjoita viivalle vain vastaus. Älä taaskaan pyyhi, vaan jos huomaat, että vastauksesi on väärä, vedä viiva sen yli ja kirjoita viereen oikea vastaus.

B osa: Selitä päässälaskusuoritukset

Välittömästi päässälaskutestin suoritusten jälkeen 1.-luokkalaisia haastateltiin ja 2.-3.-luokkalaiset kirjoittivat, kuinka he suorittivat päässälaskutehtävät.

Ensiluokkalaisille järjestettiin strukturoitu haastattelu. Oppilaita haastateltiin suullisesti, koska ensiluokkalaisilla lukeminen ja vastauksen kirjoittaminen vie paljon aikaa. Sisällöltään haastattelu oli samanlainen kuin 2. ja 3. luokan kirjallinen kysely. Tutkimuksen haastattelumenetelmänä käytettiin teemahaastattelua. Teemahaastattelu mahdollisti tiedonkeruun varmistamalla samojen aihe-alueiden käsittelyn kaikkien haastateltavien osalta. Teemahaastattelu kohdennetaan tiettyihin teemoihin, joista keskustellaan. Tällä menetelmällä voidaan tutkia tietystä asiasta yksilön ajatuksia, kokemuksia, uskomuksia ja tunteita (Hirsijärvi & Hurme, 2000, 47–48).

Tutkija ja kolme avustavaa tutkijaa haastattelivat oppilaita heti testisuorituksen jälkeen, yhtä oppilasta kerrallaan. Haastatteluilla pyrittiin selvittämään kuinka ensiluokkalainen laskee, käyttääkö hän päässälaskustrategioita, ja jos käyttää, niin millaisia. Haastattelut kestivät keskimäärin 15–20 minuuttia. Kaikki haastattelut purettiin sanatarkasti paperille. Haastattelua varten oli valmistettu sekä viron- että suomenkieliset kyselykaavakkeet (Liitteet 5, 6, 17, 18). Esimerkiksi kysyttiin: *Selitä, kuinka laskit. Kerro tai kirjoita, miksi laskit sillä tavalla.*

Toisella ja kolmannella luokalla opettaja luki kaavakkeen alussa olevan suoritusohjeen. Sen jälkeen oppilaat vastasivat omaa tahtiaan edeten siten, että koko kaavakkeen täyttöön on aikaa 15–20 minuuttia. Tarvittaessa annettiin oppilaille lisäaikaa. Tarkoitus oli selvittää, kuinka oppilas ajattelee tai kuinka hän laskee, tarvitseeko hän apuvälineitä laskutehtävissä ja minkälaisia menetelmiä hän käyttää laskiessaan (luettelua, kymmeneksi täydentämistä, samansuuruisten lukujen muodostamista, ykkösten ja kymmenien erottelua ym.). Samoin selvitetään oppilaiden laskutaidon automatisoituminen. Automatisoituminen luokitellaan korkeimman tason suoritusmenetelmäksi, missä tiedon tulee perustua ymmärtämiseen ja ymmärtävään

kokemukseen, sen perustelut tulee olla tarvittaessa palautettavissa muistista. Automatisoitunut tieto voi olla lähtökohtana hiljaisen tiedon syntymisellä, mikä on päässä lasku harjoittelussa tehokkain menetelmä (ks. Kappale 6.1).

C osa: Oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan ja päässä laskuun

Tässä osiossa selvitettiin oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan ja päässä laskuun. Oppilailta kysyttiin, *kuinka hän suhtautuu matematiikkaan ja päässä laskuun, kuinka tärkeä päässä laskun osaaminen oppilaan mielestä on, kuinka usein ja missä arkielämässä hän uskoo käyttävänsä päässä laskua.*

4.3 Päässä laskutehtävien pisteytys ja strategioiden analysointi

Tutkimuksen aineisto hankittiin kyselylomakkeilla, missä tutkija itse haastatteli ensimmäisen luokan oppilaita. Testillä pyrittiin mittaamaan 1.– 3. luokan oppilaiden (N=287) päässä laskun osaamista. Testisuoritukset pisteytettiin, jolloin saatiin päässä laskun osaamista kuvaavat summamuuttujat.

Jokaisesta laskutehtävästä annettiin piste. Laskutehtävien arvostelu tapahtui pistein 0=väärin ja 1=oikein. Oikean vastauksen löytämistä varten oli lupa käyttää apuvälineitä (sormet, kynät, kuvat, viivoitin ja sen numerot).

Päässä laskutestin tulosten analysointi perustui Viron kouluissa käytössä oleville arvokriteereille. Vastaavien laskutehtävien suorituksista (pisteet ja prosenttimäärät), arvosteltiin oppilaiden tuloksia seuraavasti: 100 %–90 % hyvin hyvä; 89 %–70 % hyvä; 69 %–45 % tyydyttävä, 44 %–20 % heikko, 19 %–0 % erittäin heikko. (Elektrooniline Riigi Teataja, 2006). Tutkimuksessa erotettiin 100 %:n tulokset eli erinomaiset päässä laskijat.

Käytetty strategioiden luokittelu perustuu Butterworthin, Harriksen (2002) ja Thompsonin (1999) ryhmittelyyn. Taulukossa 5 on kuvattu oppilaiden käyttämiä päässä laskustrategioita.

TAULUKKO 5. Tutkimuksessa käytetyt päässä-laskustrategiat

Strategian nimi	Teorian mukainen kuvaus	Esimerkit (oppilaiden selvitykset)
1-askelstrategia	Käyttää sormien ja varpaiden apua, tarvitsee apuvälineitä, luettelee sormia tai muita esineitä, myös kirjallinen malli, hiljainen luetteleminen	Luettelen sormia ja varpaita, luettelen eri kuvia, luettelen miettiessä
Seka-askelstrategia	Käyttää kymmeneksi täydentämistä	Ensin liitän niin paljon, että saan seuraavan kymmenen täyteen
Paristrategia	Muodostaa samansuuruiset luvut	Liitän 5+5, sitten otan sieltä 2 pois
Erikoisstrategia	Erottelee ykköset ja kymmenet	Ensin liitän ykköset, sitten kymmenet; ensin liitän kymmenet, sitten ykköset
Automatisoitunut laskeminen	Luo samanaikaisen kuvitelman, laskee stimuloidusti, jolloin tieto tulee pitkäkestomuistista	En minä osaa sanoa, mutta vastaus tulee heti päästä

Tutkimuksen tekijä ja kolme opiskelijaa, jotka toimivat tutkimusapulaisina, suorittivat kaikkien tehtävien arvioinnit, luokitukset ja strategioiden luokitukset riippumatta toisista. Tutkimusryhmän kokoukset tapahtuivat aikataulun mukaan. Niissä jokainen jäsen tarkasti kaikkien oppilaiden kaikki päässä-laskutehtävät luokka luokalta. Arvioijat olivat arvioinneista ja luokituksista 80 %:ssa yksimielisiä. Erimielisyydet ratkaistiin keskustelemalla.

5 TUTKIMUKSEN TULOKSET JA NIIDEN TULKINTA

5.1 Päässäälaskutaito Viron 1. – 3. luokkien oppilailla

Yleisesti päässäälaskutestissä suoriutuminen oli hyvä virolaisilla oppilailla kaikilla kolmella luokkatasolla (ks. Taulukko 6). Pienet hajonnat osoittavat, että 1. ja 2. luokan oppilaiden tulokset olivat varsin homogeenisia. Tyttöjen ja poikien suorituksissa ei ollut tilastollisesti merkitseviä eroja. Koska testitehtävät eri luokkatasoilla olivat opetussuunnitelman vaatimusten mukaisia, oppilaiden kehityksen huomioon ottavia ja näin ollen poikkesivat toisistaan, kaikki tilastolliset analyysit on tehty luokkatasojen sisällä. Kehitystä voidaan tällöin arvioida sen pohjalta, miten hyvin oppilaat eri luokkatasoilla ovat saavuttaneet opetussuunnitelman mukaiset tavoitteet.

TAULUKKO 6. Päässäälaskutestin tulokset virolaisilla oppilailla

Luokka / Sukupuoli	N	max pisteet testissä	Testitulokset	
			Keskiarvo	Hajonta
1. luokka	47	20	18.70	1.68
Tytöt	17		19.20	1.28
Pojat	30		18.50	1.83
2. luokka	39	14	11.80	1.31
Tytöt	20		11.75	1.65
Pojat	19		11.90	0.87
3. luokka	71	23	20.70	2.48
Tytöt	32		20.60	2.71
Pojat	39		20.80	2.31

Numeerisissa tehtävissä *ensimmäisellä luokalla* parhaat tulokset päässäälaskussa olivat yhteenlaskutehtävissä lukualueella 0–10. Eniten virheitä esiintyi vähennyslaskuissa lukualueella 0–20. *Toisella luokalla* parhaat tulokset olivat sekä yhteen- että vähennyslaskutehtävissä lukualueella 0–10. Vaikeimmat tehtävät olivat yhteen- ja vähennyslaskut kymmenenlukuun (esim. $28+12$) tai kymmenenluvusta (esim. $50-14$ ks. Liite 25). *Kolmannella luokalla* parhaimmat tulokset löytyivät sekä kahden luvun yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä että kerto- ja jakolaskutehtävissä (ks. Liite 25). Eniten virheitä ilmeni kolmen luvun laskutehtävissä, joissa oli sulut yhteen- tai vähennystehtävissä (esim. $(48-16):4$) tai täytyi löytää oikea laskutoiminnan järjestys

(lukualue-erot ks. Liite 25). Taulukossa 7 on esitetty oppilaiden suoriutuminen erityyppisistä tehtävistä eri luokkatasoilla.

TAULUKKO 7. Viron oppilaiden numeeristen päässäälaskutehtävien tulokset tehtävätyypin perusteella luokiteltuina

luokka	Tehtävätyyppi	Tehtävien pistemäärät		% maksimista
		keskiarvo	maksimi	
1. luokka	yhteenlasku lukualueella 0–10	7.9	8	98
	vähennyslasku lukualueella 0–10	5.8	6	97
	yhteenlasku lukualueella 0–20	1.7	2	87
	vähennyslasku lukualueella 0–20	3.3	4	82
2. luokka	Yhteen- ja vähennyslasku ilman kymmenen ylitystä	4.8	5	96
	Yhteen- ja vähennyslasku kymmenen lukuun (kymmenenluvusta)	1.8	3	59
	Yhteen- ja vähennyslasku kymmenen ylityksellä	5.3	6	88
3. luokka	Kahden luvun yhteen- ja vähennyslasku	8.3	9	93
	Kahden luvun kerto- ja jakolaskut	8.4	9	93
	Kolmen luvun laskeminen (myös sulut laskutehtävissä)	4.0	5	80

Sanallisissa tehtävissä *ensimmäisellä luokalla* suoritettiin kaksi tehtävää. Parhaat tulokset saavutettiin toisessa tehtävässä. Tyttöjen tulokset sanallisissa tehtävissä olivat poikia korkeammat. *Toisella luokalla* suoritettiin kolme sanallista tehtävää. Parhaat tulokset saavuttivat pojat ensimmäisessä tehtävässä ja tytöt toisessa tehtävässä. *Kolmannella luokalla* suoritettiin myös kolme sanallista tehtävää. Parhaat tulokset olivat ensimmäisessä sanallisessa tehtävässä. Kolmannen sanallisen tehtävän suorituksissa tarvittiin enemmän ajattelukykyä, sen osaaminen onnistui pojilta tyttöjä paremmin. Taulukossa 8 on esitetty oppilaiden suoriutuminen sanallisissa tehtävissä eri luokkatasoilla.

TAULUKKO 8. Viron oppilaiden sanallisten laskutehtävien suoritus

Luokka / sukupuoli	1. tehtävä Suoritti %	2. tehtävä Suoritti %	3. tehtävä Suoritti %
1. luokka			
Tytöt	94	100	
Pojat	80	97	
2. luokka			
Tytöt	95	100	35
Pojat	100	90	16
3. luokka			
Tytöt	100	59	66
Pojat	97	51	80

5.2 Virolaisten ja suomalaisten oppilaiden erot päässälaskutaidossa

Tutkimukseen osallistui myös vertailun vuoksi joukko suomalaisia oppilaita, jotka tulokset testattavilla alueilla ilmenevät taulukoista 9 – 12. Tutkimuksessa osallistuneet *virolaiset ja suomalaiset* oppilaat menestyivät hyvin päässälaskutehtävissä. Päässälaskutehtävissä erinomaisesti tai hyvin hyvin onnistuneiden virolaisten oppilaiden määrä oli prosentuaalisesti suurempi kuin suomalaisten oppilaiden. Taulukossa 9 on esitetty oppilaiden päässälaskusuoritusten taso.

Päässälaskutulosten vertailua varten oppilaiden suoritukset luokiteltiin kappaleessa 4.2.1 selvittämäni arviointiasteikon mukaisesti. Mikäli %-osuuksiin on tarvetta yhdistää merktsevyytstejä niin tehtiin ristiintaulukointiin liittyvä khiin neliö –testi. Khiin neliö -testin p-arvo $p < 0.1^*$ näyttää melkein merktsevän, $p < 0.01^{**}$ merkitsevän ja $p < 0.001^{***}$ erittäin merkitsevän eron. Ero virolaisten ja suomalaisten oppilaiden päässälaskusuoritusten välillä oli kaikilla luokkatasoilla tilastollisesti merkitsevä ($\chi^2(4)=18.24$, $p < 0.01^{**}$).

TAULUKKO 9. Oppilaiden suoritusten prosentuaalinen jakautuminen

Päässälaskusuorituksen taso	Virolaiset (N=157)	Suomalaiset (N=130)	Yhteensä (N=287)
Heikko	1	2	1
Tyydyttävä	4	18	10
Hyvä	34	37	36
Hyvin hyvä	36	26	31
Erinomainen	25	18	22

Päässälaskusuoritukset antoivat molemmissa maissa hyviä tuloksia. Virolaisten tuloksissa eroja sukupuolien välillä ei esiintynyt. Päässälaskutehtävien perusteella suomalaiset pojat suorittivat tehtävät tyttöjä paremmin. Taulukko 10 kuvaa päässälaskusuorituksia eri luokkatasoilla. Pieni hajonta osoittaa, että Viron ensimmäisen ja toisen luokan oppilaiden päässälaskutulokset ovat melko homogeenisia. *Virolaisten ja suomalaisten* oppilaiden tulosten vertailussa selvisi tilastollisesti merkitsevä ero sekä sukupuolen ja maan välillä ($p < 0.01^{**}$) että luokan ja maan välillä ($p < 0.01^{**}$).

TAULUKKO 10. Viron ja Suomen 1. – 3. luokan oppilaiden tulokset päässälaskutestissä

Luokka/sukupuoli	Max pisteet	Virolaiset			Suomalaiset		
		N	keskiarvo	hajonta	N	keskiarvo	hajonta
1. luokka	20	47	18.70	1.68	56	17.60	2.54
Tytöt		17	19.20	1.28	29	18.10	2.41
Pojat		30	18.50	1.83	27	17.10	2.61
2. luokka	14	39	11.80	1.31	37	11.50	2.09
Tytöt		20	11.75	1.65	21	10.85	2.37
Pojat		19	11.90	0.87	16	12.40	1.25
3. luokka	23	71	20.70	2.48	37	17.10	2.97
Tytöt		32	20.60	2.71	17	16.05	2.58
Pojat		39	20.80	2.31	20	18.00	3.06

Tehtävätyypin perusteella voi todeta *ensimmäisellä luokalla* hyviä tuloksia yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä lukualueella 0–10. Eniten virheitä esiintyi sekä virolaisilla että suomalaisilla oppilailla laskutehtävissä lukualueella 0–20 (esim. 12+5, 19–4). *Toisella luokalla* onnistuivat molempien maiden oppilaat hyvin yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä ilman kymmenen ylitystä (esim. 12+7, 24+12). Vaikeat tehtävät sekä virolaisille että suomalaisille sisälsivät yhteen- ja vähennyslaskua kymmenenlukuun tai kymmenenluvusta (esim. 28+12, 50–14), myös yhteen- ja vähennyslaskua kymmenen ylityksellä (esim. 53+8, 81–9). *Kolmannella luokalla* oppilaat saavuttivat hyviä tuloksia kahden luvun yhteen- ja vähennyslaskuissa (esim. 47+35, 97–4). Eniten esiintyi virheitä kolmen luvun laskemisessa (esim. 5+7·6), jossa virolaiset oppilaat onnistuivat paremmin. Taulukossa 11 on esitetty päässälaskutehtävätyypit ja tulokset luokittain.

TAULUKKO 11. Viron ja Suomen oppilaiden päässälaskutulokset tehtävätyypin perusteella

luokka	Tehtävätyypit	Virolaiset		Suomalaiset	
		Keskiarvo / max	% maksimista	Keskiarvo / max	% maksimista
1. luokka	yhteenlasku lukualueella 0–10	7.9 / 8	98	7.3 / 8	91
	vähennyslasku lukualueella 0–10	5.8 / 6	97	5.5 / 6	91
	yhteenlasku lukualueella 0–20	1.7 / 2	87	1.6 / 2	78
	Vähennyslasku lukualueella 0–20	3.3 / 4	82	3.3 / 4	83
2. luokka	Yhteen- ja vähennyslasku ilman kymmenen ylitystä	4.8 / 5	96	4.4 / 5	89
	Yhteen- ja vähennyslasku kymmenenlukuun (kymmenenluvusta)	1.8 / 3	59	2.4 / 3	80
	Yhteen- ja vähennyslasku kymmenen ylityksellä	5.3 / 6	88	4.7 / 6	78
3. luokka	Kahden luvun yhteen- ja vähennyslasku	8.3 / 9	93	8.0 / 9	89
	Kahden luvun kerto- ja jakolaskut	8.4 / 9	93	6.8 / 9	75
	Kolmen luvun laskeminen (myös sulut laskutehtävissä)	4.0 / 5	80	2.3 / 5	45

Sanallisissa tehtävissä on suuria eroja maata edustavien oppilaiden ja sukupuolien välillä. Sanallisissa tehtävissä virolaiset *ensimmäisen luokan* oppilaat menestyivät suomalaisia paremmin ensimmäisessä tehtävässä ja merkittävästi paremmin toisessa tehtävässä ($\chi^2(1)=12.491$, $p<0.01^{**}$). *Toisen luokan* oppilasta virolaiset oppilaat saavuttivat paremmat tulokset toisessa ($\chi^2(1)=9.419$, $p<0.01^{**}$) ja kolmannessa tehtävässä ($\chi^2(2)=25.551$, $p<0.001^{**}$) kuin suomalaiset. Tässä maiden välinen ero on merkitsevä. *Kolmannella luokalla* maiden välinen ero on merkitsevä ensimmäisessä tehtävässä ($\chi^2(1)=15.203$, $p<0.01^{**}$) ja melkein merkitsevä toisessa tehtävässä ($\chi^2(1)=6.213$, $p<0.1^*$), joissa virolaisten oppilaiden suoritukset olivat korkeammat. Sukupuolten välisiä eroja ensimmäisellä ja toisella luokalla ei esiintynyt. Kuitenkin voi todeta sukupuolten välisiä eroja kolmannessa tehtävässä kolmannella luokalla, jossa suomalaisten poikien tulokset olivat paremmat kuin suomalaisilla tytöillä ($\chi^2(1)=13.104$, $p<0.001^{***}$). Taulukossa 12 on esitetty oppilaiden sanallisten tehtävien suoritukset luokittain.

TAULUKKO 12. Sanallisten tehtävien suoritukset

Luokka/ sukupuoli	virolaiset			suomalaiset		
	1. tehtävä	2. tehtävä	3. tehtävä	1. tehtävä	2. tehtävä	3. tehtävä
	Suoritti %	Suoritti %	Suoritti %	Suoritti %	Suoritti %	Suoritti %
1. luokka						
Tytöt	94	100		70	76	
Pojat	80	97		67	74	
2. luokka						
Tytöt	95	100	35	91	62	10
Pojat	100	90	16	100	75	0
3. luokka						
Tytöt	100	59	66	65	18	35
Pojat	97	51	80	85	40	100

5.3 Oppilaiden käyttämät päässä-laskun ratkaisustrategiat

5.3.1 Viron oppilaiden päässä-laskustrategiat

Oppilaiden käyttämät strategiat muuttuvat ensimmäisien kouluvuosien aikana ja näitä tarkastellaan luokkien vertailussa. Oppilaat käyttivät strategioita, mikä olikin odotettavissa (ks. Taulukko 13). *Ensimmäisellä luokalla* oppilaat käyttivät eniten 1-askelstrategiaa ja siinä hiljaista luettelemista, missä ei tarvita apuvälineitä ja laskemista sormilla tai muilla esineillä. Sormet ja esineet laskemisen apuna oli lähes yhtä yleinen strategia kuin automatisoitunut laskeminen, jossa ei tarvita pitkäaikaista ajattelua, vaan vastaus löytyy helposti pitkäkestomuistista. *Toisella luokalla* oli automatisoituneen laskemisen määrä korkein. Lisäksi oppilaat käyttivät erikoisstrategiaa, jossa he erottelevat ykköset ja kymmenet; samoin seka-askelstrategiaa, jossa oppilaat käyttivät kymmeneksi täydentämistä. Paristrategian käyttö alkaa ilmestyä toisella luokalla ja sitä käyttivät myös kolmannen luokan oppilaat. *Kolmannella luokalla* erikoisstrategia on eniten käytetty, siinä oppilaat erottelevat ykköset ja kymmenet. Koska laskutehtävät ovat luokkien myötä erilaiset, toisella ja kolmannella luokalla sormien käyttö on tehotonta. *Toisen luokan* pojat käyttivät enemmän 1- ja seka-askelstrategiaa, he laskevat sormien ja esineiden avulla tai käyttävät kymmeneksi täydentämistä. Tytöt puolestaan harrastavat enemmän erikoisstrategioiden käyttöä ja erottelevat laskutehtävässä ykköset ja kymmenet. *Kolmannen luokan* oppilaista käyttivät tytöt enemmän erikoisstrategioita. Automatisoitunut laskeminen oli yleisintä toisen luokan oppilaiden yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä. Lähes puolet oppilaista kirjoitti sen toimivan. Automatisoinnin määrä oli suurin toisen luokan tytöillä ja kolmannen luokan pojilla.

TAULUKKO 13. Virolaisten oppilaiden päässä-laskustrategiat prosentteina

Päässä-laskustrategia	1. luokka		2. luokka		3. luokka	
	Tytöt	Pojat	Tytöt	Pojat	Tytöt	Pojat
1-askelstrategia						
• Sormien ja varpaiden avulla (tarvitsee apuvälineitä)	0	0	0	0	0	0
• Luettelee sormia tai muita esineitä, myös kirjallinen malli (kuviot)	24	23	2	6	0	0
• Hiljainen luetteleminen (ei tarvitse apuvälineitä)	51	44	0	0	0	0
Seka-askelstrategia						
Käyttää kymmeneksi täydentämistä	0	0	3	20	0	0
Paristrategia						
Muodostaa samansuuruiset luvut	0	0	5	0	6	8
Erikoisstrategia						
Erottaa ykköset ja kymmenet	0	0	35	21	91	74
Automatisoitunut						
• Helpot yhteenlaskutehtävät; 1-askelstrategia vähennyslaskuissa, joissa myös sormet apuna	0	3	0	0	0	0
• Yhteen- ja vähennyslaskut	25	30	55	53	3	13
Yhteensä	100	100	100	100	100	95*

* 3. luokan poikien käyttämistä strategioista 5 %:ia ei kyetty sijoittamaan mihinkään yllä olevista strategialuokista.

5.3.2 Erot Viron ja Suomen oppilaiden ratkaisustrategioiden välillä

Maiden vertailussa voi todeta ratkaisustrategioiden välillä yhteneväisiä tuloksia. *Ensimmäisellä luokalla* saatiin samanlaisia tuloksia sekä 1-askelstrategian että päässä-laskun automatisoitumisessa yhteen- ja vähennyslaskuissa (ks. Taulukko 14). Suomalaiset oppilaat käyttivät paljon apunaan sormia kuten myös varpaita ja virolaiset puolestaan hiljaista luettelemista. Tutkimuksen perusteella maalla, siis Virolla tai Suomella, ei kuitenkaan ole merkitystä ensiluokkalaisten strategioiden käytössä. *Toisella luokalla* Viron oppilaiden tuloksista selvisi korkea päässä-laskun automatisoinnin määrä. Paristrategiaa eli samansuuruisien lukujen muodostelua käyttivät virolaiset ja suomalaiset oppilaat lähes saman verran. Erikoisstrategioiden eli ykkösten ja kymmenien erottelun käytössä esiintyi eroja suomalaisten ja virolaisten oppilaiden välillä: suomalaiset käyttivät niitä enemmän. Mutta Khiin neliö -testi ei anna merkitseviä eroja. Voidaan sanoa, että maalla ei ollut yhteyttä toisen luokan oppilaiden strategioiden käytön suhteen ($\chi^2(3)=3.741$, $p<0.1^*$). *Kolmannella luokalla*

virolaiset oppilaat käyttivät mm. enemmän ykkösten ja kymmenien erottelua, mutta tilastollisesti tämä ero ei ole merkitsevää. 1-askelstrategiaa käyttivät vain suomalaiset oppilaat. Paristrategia eli samansuuruisten lukujen muodostelua käyttävät saman verran sekä virolaiset että suomalaiset oppilaat. Voi todeta, että maa ei vaikuta kolmannen luokan oppilaiden strategioiden käyttöön ($\chi^2(4)=9.021$, $p=0.061$). eli $p > 0.05$.)

Yhteyttä oppilaan käyttämällä strategioilla päässä laskutaitoon selviteltiin korrelaatiolla (Pearson r). Sen todettiin olevan positiivinen vain Viron 1. luokan ($r=0.424$) (N=47) ja 3. luokan ($r=0.411$) (N=71) oppilailla. Muilla luokilla kuten myös koko tutkimusjoukossa (N=287) kyseinen korrelaatio oli negatiivinen ($r=-0.025$). Voidaan näin ollen todeta, että yhteyttä käytettyjen strategioiden ja päässä laskutulosten välillä ei yleisesti ottaen havaittu.

TAULUKKO 14. Virolaisten (N=157) ja suomalaisten (N=130) oppilaiden päässä laskustrategiat

Päässä laskustrategia	1. luokka		2. luokka		3. luokka	
	Viro (N=47)	Suomi (N=56)	Viro (N=39)	Suomi (N=37)	Viro (N=71)	Suomi (N=37)
1-askelstrategia						
• Sormien ja varpaiden avulla (tarvitsee apuvälineitä)	0	5	0	0	0	0
• Luettelee sormia tai muita esineitä, myös kirjallinen malli (kuviot)	23	39	6	9	0	11
• Hiljainen luetteleminen (ei tarvitse apuvälineitä)	47	0	0	0	0	0
Seka-askelstrategia						
• Käyttää kymmeneksi täydentämistä	0	0	9	11	0	0
Paristrategia						
• Muodostaa samansuuriset luvut	0	0	3	5	7	5
Erikoisstrategia						
• Erottelee ykköset ja kymmenet	0	0	28	43	82	68
Automatisoitunut						
• Helpot yhteenlaskutehtävät; 1-askelstrategia vähennyslaskuissa, joissa myös sormet apuna	2	34	0	0	0	0
• Yhteen- ja vähennyslaskut	28	22	54	32	8	13
Yhteensä	100	100	100	100	97*	97*

* 3 % oppilaan strategioista ei kyetty sijoittamaan mihinkään yllä olevista strategialuokista.

5.4 Yhteenveto virolaisten ja suomalaisten oppilaiden päässälaskusta, strategioiden käytöstä ja sukupuolieroista

Tutkimukseen osallistuneet *virolaiset ja suomalaiset* oppilaat menestyivät hyvin päässälaskutehtävissä. Päässälaskutuloksien vertailussa käytettiin T-testiä, missä Levenen testin p-arvo $p < 0.1^*$ näyttää ryhmien välillä melkein merkitsevän eron, $p < 0.01^{**}$ merkitsevän ja $p < 0.001^{***}$ erittäin merkitsevän eron. Päässälaskutulosten vertailussa ilmeni virolaisten ja suomalaisten oppilaiden **päässälaskusuoritusten** välillä ero, joka on tilastollisesti merkitsevä ($t(285)=4.27$, $p < 0.01^{**}$). *Virolaisten ja suomalaisten* oppilaiden päässälaskutulosten vertailussa selvisi tilastollisesti merkitsevä ero myös luokan ja sukupuolen välillä ($p < 0.01^{**}$).

Ensimmäisellä luokalla päässälaskutuloksissa todettiin, että virolaiset oppilaat menestyivät paremmin (virolaisilla $M=18.70$, suomalaisilla $M=17.60$, ks. Taulukko 10). Oppilaat saavuttivat hyviä tuloksia yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä lukualueella 0–10. Eniten virheitä esiintyi oppilailla laskutehtävissä lukualueella 0–20. Ero ensimmäisen luokan päässälaskutuloksissa on tilastollisesti merkitsevää ($t(101)=2.62$, $p < 0.01^{**}$).

Toisella luokalla onnistuivat molempien maiden oppilaat hyvin yhteen- ja vähennyslaskuissa ilman kymmenen ylitystä. Yhteen- ja vähennyslaskut kymmenenlukuun tai kymmenenluvusta olivat vaikeita sekä virolaisille että suomalaisille. Maiden välinen ero päässälaskutuloksissa toisella luokalla ei ole merkitsevä. Sukupuolien vertailussa oli pojilla päässälaskun keskiarvot korkeammat kuin tytöillä sekä Virossa ($M=11.90$) että Suomessa ($M=12.40$). Kaikkein alhaisin tulos oli Suomen tytöillä ($M=10.85$).

Kolmannella luokalla oppilaat saavuttivat hyviä tuloksia kahden luvun yhteen- ja vähennyslaskuissa. Eniten virheitä esiintyi kolmen luvun laskemisessa. Päässäälaskutulosten vertailussa ilmenivät suurimmat erot Viron ja Suomen oppilaiden päässäälaskutulosten välillä. Niissä virolaiset saavuttivat parempia tuloksia kolmannella luokalla ($M=20.70$, ks. Taulukko 10) kuin suomalaiset oppilaat ($M=17.10$). Tulosten vertailussa näkyivät suurimmat erot suomalaisten poikien ja tyttöjen tuloksissa: kaikkein matalimmat tulokset olivat Suomen 3. luokan tytöillä ($M=16.05$). Maiden välinen ero kolmannen luokan päässäälaskutuloksissa on tilastollisesti merkitsevä ($t(106)=6.342$, $p<0.01^{**}$).

Verrattaessa päässäälaskutestin tehtävätyyppejä luokittain (vrt. taulukko 4) voi totea kehitystä 1. luokalta (esim. $3+2$, $2+5$, $12+5$, $16+4$) 2. luokkaan yhteenlaskutehtävissä ilman kymmenylitystä, missä toisen luokan oppilaat onnistuivat hyvin yhteenlaskutehtävissä (esim. $12+7$, $24+12$). Siirryttäessä 3. luokalle voi tutkimuksen perusteella totea oppilaiden onnistumista yhteenlaskutehtävissä ilman kymmenylitystä (esim. $64+3$). Verrattaessa yhteenlaskutehtäviä kymmenylityksellä 2. luokalla (esim. $53+8$) ja 3. luokalla (esim. $83+9$, $47+35$) voi totea päässäälaskun kehitystä helpommissa yhteenlaskussa (esim. $83+9$). Virheet laskutehtävien suorituksissa osoittavat, että oppitunneilla täytyy enemmän suorittaa vähennyslaskutehtäviä, eniten kymmenenluvusta ja –kymmenen ylityksellä sekä toisella että kolmannella luokalla (esim. $76-46$, $50-14$, $81-9$, $72-36$).

Tutkimuksen perusteella selvisi, että erilaisia strategioita käytetään vähän. Maiden vertailussa voi todeta ratkaisustrategioiden välillä samanlaisia tuloksia. *Ensimmäisellä luokalla* käytettiin 1-askelstrategiaa ja todettiin päässäälaskun automatisoitumista helppoissa yhteen- ja vähennyslaskuissa (ks. Taulukko 14). Suomalaiset oppilaat käyttivät paljon sormien apua (myös varpaita) laskutehtävissä. Virolaisilla hiljainen luetteleminen oli yleisintä. *Toisella luokalla* Viron oppilaiden tuloksista selvisi korkea päässäälaskun automatisoinnin määrä. Paristrategiaa eli samansuuruisten lukujen muodostelua käyttivät virolaiset ja suomalaiset oppilaat lähes saman verran. Erikoisstrategioiden eli ykkösten ja kymmenien erottelun käytössä esiintyi eroja suomalaisten ja virolaisten välillä. Niitä suomalaiset käyttivät

enemmän. *Kolmannella luokalla* tuli esiin eroja erikoisstrategioiden käytössä eli ykkösten ja kymmenien erottelussa. Niissä virolaisten osuus oli suurempi. 1-askelstrategian käyttivät vain suomalaiset oppilaat. Tähän kuului sormien tai muiden esineiden luettelu, myös kirjallisen mallin käyttö. Paristrategiaa eli samansuuruisten lukujen muodostelua sekä virolaiset että suomalaiset oppilaat käyttivät saman verran. Voi todeta, että sormien käyttö kuuluu myös kolmannella luokalla osana päässä-laskuun, st. että laskeminen suoritetaan luettelon avulla (oppilas käyttää 1-askelstrategiaa). Tutkimustulosten perusteella voi olettaa, että kolmannella luokalla ei kaikkien oppilaiden päässä-laskeminen ole vielä automatisoinut.

5.5 Oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan ja päässä-laskuun

Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan, miten oppilaat suhtautuvat matematiikkaan ja päässä-laskuun, mitä eroja esiintyy eri luokkien oppilaiden suhtautumisessa matematiikkaan sekä päässä-laskuun sukupuolien ja maan vertailussa.

5.5.1 Oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan

Suhtautuminen matematiikkaan: Kaikkien tutkimukseen osallistuvien oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan oli positiivista (ks. Taulukko 15). Tutkimuksessa käytettiin 1–4 portaista Likert-asteikkoa, joten maksimipistemäärä oli 4 (vrt liite 12). Suomen oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan on merkitsevällä tasolla positiivisempi kuin Viron oppilaiden ($t(285)=-3.3, p<0.01^{**}$).

TAULUKKO 15. Viron ja Suomen oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan

Kansallisuus	N	Keskiarvo	Hajonta
Virolaiset	157	2.85	0.81
Suomalaiset	130	3.16	0.80
Yhteensä	287	2.99	0.82

Tutkimukseen osallistuneet pojat ovat motivoituneempia opiskelemaan matematiikkaa kuin tytöt (ks. Taulukko 16). Poikien suhtautuminen matematiikkaan on myös tilastollisesti merkitsevällä tasolla positiivisempi kuin tyttöillä ($t(285)=2.42, p<0.01^{**}$).

TAULUKKO 16. Poikien ja tyttöjen suhtautuminen matematiikkaan

Sukupuoli	N	Keskiarvo	Hajonta
Pojat	151	3.10	0.82
Tytöt	136	2.87	0.80

Ensimmäisen luokan oppilaiden yleinen suhtautuminen matematiikkaan oli hyvin positiivista. Suurimmat erot näkyivät virolaisten poikien tuloksissa, joissa negatiivisen suhtautumisen määrä oli kaikkein korkein. *Toisen luokan* oppilaiden motivaatio opiskella matematiikkaa oli kaiken matalin. Sekä suomalaiset että virolaiset pojat suhtautuvat matematiikkaan positiivisemmin kuin tytöt.

Kolmannella luokalla näkyi suuria eroja suhtautumisessa matematiikkaan. Suomalaiset tytöt ovat paljon motivoituneempia opiskelemaan matematiikka kuin virolaiset tytöt. Motivaatio opiskella matematiikka oli kaikkein matalin Viron kolmannen luokan työillä. Poikien motivaatio opiskella matematiikka on pysyvästi korkea (ks. Taulukko 17).

TAULUKKO 17. 1. – 3.-luokkalaisten oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan

Luokka	Sukupuoli	virolaiset			Suomalaiset		
		N	Keskiarvo	Hajonta	N	Keskiarvo	Hajonta
	kaikki	157	2.85	0.81	130	3.16	0.82
1. luokka	Pojat	30	2.77	0.86	27	3.44	0.58
	Tytöt	17	3.00	0.61	29	3.17	0.71
2. luokka	Pojat	19	3.21	0.79	16	3.19	0.83
	Tytöt	20	2.65	0.88	21	2.62	0.80
3. luokka	Pojat	39	2.92	0.87	20	3.30	0.80
	Tytöt	32	2.66	0.70	17	3.18	0.95

5.5.2 Oppilaiden suhtautuminen päässälaskuun

Suhtautuminen päässälaskuun: Virolaiset ja suomalaiset oppilaat arvostivat matematiikkaa enemmän kuin päässälaskua (ks. Taulukko 15 ja 18).

TAULUKKO 18. Viron ja Suomen oppilaiden suhtautuminen päässä laskuun

Kansallisuus	N	Keskiarvo	Hajonta
Virolaiset	157	2.82	0.82
Suomalaiset	130	2.93	0.83
Yhteensä	287	2.87	0.83

Tutkimustulokset osoittavat, että sukupuolien vertailussa ovat pojat enemmän motivoituneet päässä laskuun kuin tytöt (Taulukko 19). Pojat suhtautuvat päässä laskemiseen positiivisemmin kuin tytöt, eroavaisuus on tilastollisesti merkitsevä ($t(285)=3.05, p<0.01^{**}$).

TAULUKKO 19. Poikien ja tyttöjen suhtautuminen päässä laskuun

Sukupuoli	N	Keskiarvo	Hajonta
Pojat	151	3.01	0.84
Tytöt	136	2.71	0.79

Ensimmäisellä luokalla suhtautuvat oppilaat päässä laskemiseen positiivisesti. Kaikkein alhaisin motivaatio on virolaisilla pojilla. Suomalaiset oppilaat ovat enemmän motivoituneet päässä laskemiseen (ks. Taulukko 20).

Toisella luokalla ovat pojat enemmän motivoituneet päässä laskemiseen, tyttöjen suhtautuminen päässä laskuun on pudonnut. Suomalaiset tytöt suhtautuvat positiivisemmin päässä laskemiseen kuin virolaiset tytöt.

Kolmannella luokalla pojat sekä Virossa että Suomessa ovat motivoituneempia päässä laskuun kuin tytöt. Kysyttäessä suhtutumista päässä laskuun suomalaiset tytöt saivat alhaisempia pisteitä kuin virolaiset tytöt. Kolmannen luokan suomalaisten tyttöjen suhtautuminen on alhaisin kaikista oppilaista (ks. Taulukko 20).

TAULUKKO 20. 1.– 3. luokan oppilaiden suhtautuminen päässälaskuun

Luokka	Sukupuoli	virolaiset			suomalaiset		
		N	Keskiarvo	Hajonta	N	Keskiarvo	Hajonta
1. luokka	Pojat	30	2.93	0.69	27	3.15	0.82
	Tytöt	17	3.00	0.79	29	3.03	0.42
2. luokka	Pojat	19	3.05	0.85	16	3.19	0.98
	Tytöt	20	2.35	0.93	21	2.71	0.78
3. luokka	Pojat	39	2.90	0.88	20	2.95	0.89
	Tytöt	32	2.66	0.70	17	2.41	1.00

5.5.3 Päässälaskun osaamisen tärkeys

Päässälaskun osaamisen tärkeyden määrittelemistä varten kysyttiin oppilailta *onko päässälaskun osaaminen sinulle hyvin tärkeää, tärkeää, ei ole tärkeää, et tarvitse sitä koskaan*.

Päässälaskun osaaminen on hyvin tärkeää. Suurin osa Suomen ja Viron oppilaista nimittivät päässälaskun osaamista tärkeäksi tai hyvin tärkeäksi. Virolaiset ja suomalaiset oppilaat saivat samanlaisia tuloksia päässälaskun osaamisen tärkeydessä (Taulukko 21).

TAULUKKO 21. Yleinen päässälaskun osaamisen tärkeys (suhteelliset osuudet)

	Päässälaskun osaamisen tärkeys (%)			
	En tarvitse sitä koskaan	Ei ole tärkeä	Tärkeä	Hyvin tärkeä
Viro	0	5	38	57
Suomi	2	8	52	38
Poika	1	5	46	48
Tyttö	1	8	43	48

5.5.4 Päässä-laskun käyttäminen

Oppilailta kysyttiin, missä käytät päässä-laskua eniten: *kotona, koulussa, kaupassa, leikeissä, joka paikassa*. Tarkoitus oli selvittää, osaako oppilas nähdä yhteyttä päässä-laskun käyttämisellä ja arkielämällä.

Päässä-laskun käyttäminen: virolaiset ja suomalaiset oppilaat käyttävät päässä-laskua eniten *koulussa*.

Ensimmäisellä luokalla virolaiset oppilaat käyttävät päässä-laskua eniten *koulussa*. Merkittävä määrä virolaisia oppilaita käyttää päässä-laskemista *joka paikassa*. *Kotona, kaupassa* tai *leikeissä* sanoivat päässä-laskua käyttävänsä vain virolaiset pojat. Suomalaiset oppilaat käyttävät päässä-laskua eniten *koulussa*, myös *kotona, kaupassa, leikeissä*, ts. arkielämässä. *Toisella luokalla* virolaiset oppilaat käyttävät päässä-laskemista eniten *koulussa*. Suomalaiset oppilaat käyttävät päässä-laskemista myös *kotona*. Sekä suomalaiset että virolaiset tytöt käyttävät päässä-laskemista poikia enemmän *kaupassa*. *Kolmannella luokalla* suuri määrä virolaisia oppilaita käyttää päässä-laskemista *koulussa*, suomalaiset oppilaat käyttivät päässä-laskua eniten arkielämässä.

5.5.5 Yhteenveto oppilaiden suhtautumisesta matematiikkaan ja päässä-laskuun

Matematiikan opiskelussa on olennaista, että opiskelijalle annetaan tärkeä rooli. Tärkeä on lapsen aktiivinen osallistuminen oppiprosessissa. Oppilas on aktiivinen, jos hän suhtautuu positiivisesti opetukseen. Sitä varten kysyttiin testin 3. osassa oppilailta, kuinka he suhtautuvat matematiikkaan ja päässä-laskuun.

Tutkimuksen perusteella selvisi, että oppilaiden motivaatio opiskella matematiikkaa on positiivisempi kuin suhtautuminen päässä-laskemiseen. Korrelaatioanalyysi (Pearson correlation, 2-tailed) osoitti kuitenkin niiden välillä olevan selvän positiivisen riippuvuuden ($r=0.56$, $p<0.01^{**}$) kaikilla oppilailla. Ristiintaulukointiin liittyvä khiin neliö -testillä saatiin positiivinen yhteys oppilaan suhtautumisessa päässä-laskuun ja päässä-laskutaitoon ($\chi^2(3)=51.273$, $p<0.01^{**}$): 71 % oppilaista piti

erittäin paljon tai paljon päässä laskusta, 29 % ei pitänyt tai inhosi. Tämä voi osoittaa, että yhteys päässä laskutaidon ja suhtautumisen välillä on korkea erittäin merkitsevällä tasolla.

Tutkimustulokset *osoittavat toisen ja kolmannen luokan* oppilaiden positiivisen suhtautumisen vähenemistä *ensimmäisen luokan oppilaiden* verrattuna. Suomen oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan on positiivisempi kuin Viron oppilailla. Poikien suhtautuminen matematiikkaan ja päässä laskemiseen on positiivisempaa kuin tyttöillä. Jos vertaillaan oppilaiden vastauksia luokittain, on huomattava tyttöjen negatiivisen suhtautumisen kasvu luokka-asteen myötä sekä matematiikkaa että päässä laskemista kohtaan. Oppilaiden suhtautumiseen saattavat vaikuttaa 1) vaikeudet, jotka sisältyvät päässä laskemiseen, 2) yksipuoliset opetusmenetelmät, 3) se että oppimisprosessissa ei oteta huomioon oppilaan yksilöllisyyttä.

Seuraavalla kysymyksellä selvitettiin päässä laskun osaamisen tärkeys. Selvisi, että päässä laskun osaaminen on hyvin tärkeää. Suurin osa Viron ja Suomen oppilaista nimeää päässä laskun osaamisen tärkeäksi tai hyvin tärkeäksi. Merkitsevää ero tuli Viron ja Suomen oppilaiden välille toisella ja kolmannella luokalla. Suomen toisen luokan oppilaiden mielestä päässä laskun osaaminen on tärkeämpää kuin Viron oppilaiden mielestä. Kolmannella luokalla puolestaan Viron oppilaiden prosenttiosuudet olivat suomalaisia korkeammat. Erot tärkeydessä johtuvat mahdollisesti siitä, että päässä lasku ja sen osaaminen tuntuu vaikealta, jos laskutaito ei ole vielä automatisoinut.

Viidennellä kysymyksellä selvitettiin, onko päässä laskeminen helppoa. Kun vertaillaan oppilaiden vastauksia luokittain, kaikkein suurimmat erot ovat toisen luokan virolaisten ja suomalaisten oppilaiden välillä: Suomen oppilaiden *kyllä*-vastauksien prosenttimäärät olivat korkeammat. Kolmannella luokalla *kyllä*-vastausten määrä oli puolestaan korkeampi virolaisilla.

Jos oppilas vastasi, että päässä laskeminen on hänestä helppoa, ei hän kuitenkaan perustellut, minkä takia. *Ei*-vastauksien (eli päässä laskeminen on vaikea) jälkeen ensimmäisen luokan oppilaat sanoivat: jos luvut menevät yli kymmenen on vaikea laskea; myös vähentäminen on vaikeaa. Yleisemmät syyt toisen ja kolmannen luokan

oppilaiden mielestä ovat riippuvaiset päässälaskutehtävistä: jos luvut ovat suuret, on päässä laskeminen vaikeampaa: niitä lukuja täytyy pitempään ajatella. Objektiivisuus olisi lisääntynyt, jos jokaisessa luokassa olisi ollut mahdollisuus haastatteluun. Tutkijana huomasin, että useinkaan toisen ja kolmannen luokan oppilaat eivät olleet kirjoittaneet mitään tai olivat kirjoittaneet jotain vähämerkityksistä (mm. en minä tiedä, näin on, on vain vaikea). Syynä voi olla se, että oppilaat eivät olleet kiinnostuneet enää lukemisesta ja kirjoittamisesta sen jälkeen, kun päässälaskutesti oli tehty.

Seuraavaksi oppilailta kysyttiin, missä he käyttävät päässälaskua eniten. Tarkoitus oli selvittää, huomaako oppilas, että päässälaskua tarvitaan arkielämässä. Tuloksista selvisi, että eniten käytetään päässälaskua *koulussa*. Toiseksi paras tulos oli *joka paikassa* päässälaskeminen. Tulokset olivat odotuksenmukaiset, koska ala-asteen oppilaat arvostavat eniten koulussa oppimista.

Viimeiseksi kysyttiin oppilailta, kuinka usein he harjoittelevat luokassa päässälaskua. Tuloksista selvisi, että suurin osa oppilaista harjoittelee *joka matematiikan tunnilla* tai *kerran viikossa* päässälaskemista. Viron toisen luokan tytöistä 20 % luulee, että he eivät harjoittele päässälaskemista. Verrattaessa kolmannen luokan virolaisten tuloksia suomalaisiin, voi todeta eroja harjoittelun prosenttiosuuksissa: *joka matematiikan tunnilla* ja *kerran viikossa* ovat myös suomalaisilla korkeammat. Voi sanoa, että Viron ja Suomen kolmannen luokan oppilaiden välillä on merkitsevä ero. Suomen oppilaiden mielestä harjoitellaan päässälaskemista useammin, virolaisten mielestä harvoin.

Prosenttimäärät, jotka osoittavat oppilaiden negatiivista suhtautumista matematiikkaan ja päässälaskuun, antavat tärkeää tietoa sekä tutkijalle että opettajille. Sellainen oppilas, joka inhoaa (tai sanoo inhoavansa) matematiikka tai päässälaskua, tarvitsee enemmän huomiota ja tukea.

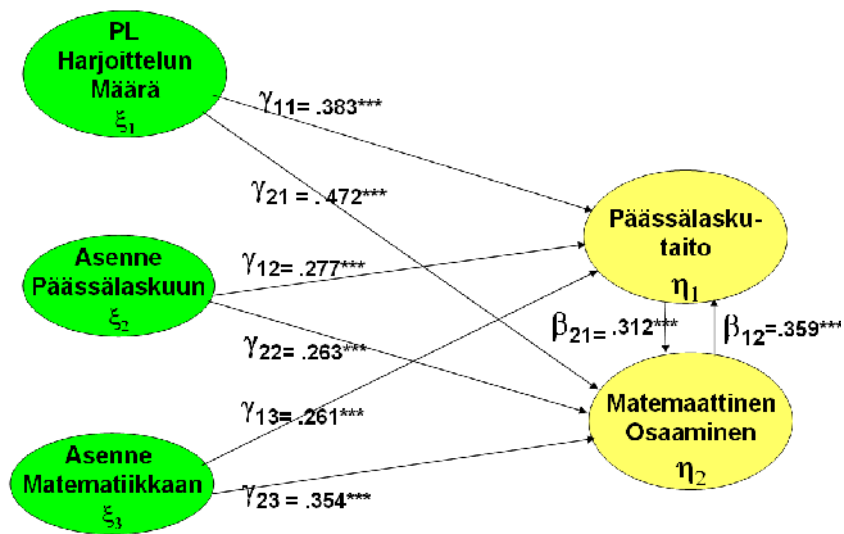
5.6 Kuka on taitava päässäälaskija?

Taitavina päässäälaskijoina tarkoitetaan tässä tutkimuksessa oppilaita, jotka suorittivat päässäälaskutestin 100 %:sesti eli erinomaisesti (22 % oppilaista) ja 90–99 %:sesti eli hyvin hyvin (31 % oppilaista). Tähän taitavien päässäälaskijoiden ryhmään kuului 53 % tutkimukseen osallistuneista oppilaista (ks. kpl 5.2 taulukko 9). Lisäksi tarkistettiin taitavien päässäälaskijoiden suhtautumista matematiikkaan ja päässäälaskuun, Selvitettiin myös, miten tärkeänä nämä oppilaat pitivät päässäälaskutaitoa ja millaisia strategioita he käyttivät.

Taitavien päässäälaskijoiden suhtautuminen matematiikkaan ($K=3.01$, $H=0.77$) ja päässäälaskun osaamisen tärkeys ($K=3.41$, $H=0.60$) antoivat korkeita tuloksia. Diskriminaatioanalyysin perusteella näistä muuttujista taitavaa päässäälaskijaa parhaiten kuvaa suhtautuminen matematiikkaan, jonka korrelaatio diskriminaatiofunktioon ($r=0.868$) oli korkein. Taitava päässäälaskija pitää matematiikasta ja päässäälaskusta erittäin paljon, hänestä päässäälaskutaito on tärkeää ja hänelle päässäälasku on automatisoitunut. Tässä päässäälaskututkimuksessa käytetyistä strategioista automatisoitunut laskeminen luokiteltiin korkeimman tason suoritusmenetelmäksi. Parhaiten sille tasolle yltivät 2-luokkalaiset yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä. Kyseisen tason saavutti 54 % virolaisista ja 32 % suomalaisista oppilaista (vrt. kpl 5.3.2). Hiljaisen tiedon syntyä kuvaa hiljainen luetteleminen, jota esiintyi 47 % virolaisilla 1. luokan oppilailla. Verrattuna suomalaisiin 1.-luokkalaisiin hiljaista luettelemista ei esiintynyt, mutta automatisoinnin määrä 56 % suomalaisilla 1.-luokkalaisilla tukee selvästi Galperinin teoriaa (vrt. kpl 1.1.2).

5.7 Regressioanalyysi päämuuttujien avulla

Tein vielä lopuksi regressioanalyysin *SPSS*-ohjelman avulla. Olen tosin käyttänyt kuviossani *LISREL*-menetelmässä käytettyjä merkintöjä ja sen logiikkaa (Erätuuli et al., 1994), mutta itse ajot on siis tehty *SPSS*- ohjelmalla (Ks. Kuvio 3).



Kuvio 3. Regressioanalyysi (kolme selittäjää ja kaksi selitettävää muuttujaa)

Kuviossa on siis selittävinä muuttujina PL (Päässälasku) Harjoittelun määrä, Asenne Päässälaskutaitoon, Asenne matematiikkaan sekä selitettäviä muuttujia ovat Päässälaskutaito sekä Matemaattinen osaaminen.

Päässälaskun Harjoittelun määrä (ξ_1) ($\gamma_{21} = .472^{***}$) Matemaattiseen osaamiseen on tässä vahvin Matemaattisen osaamisen selittäjä. Toisaalta myös Päässälaskutaito ($\beta_{21} = .312^{***}$) selittää erittäin merkittävästi Matemaattista osaamista.

Matemaattisen osaamisen kannalta on tässä selvästi nähtävissä Päässälaskun tärkeä osuus, mutta myös asennekasvatus molemmissa (Päässälaskutaito sekä Matemaattinen Osaaminen) ovat erittäin vahvasti esillä. Toisaalta on myös nähtävissä, että oppilas, joka osaa hyvin matematiikkaa, osaa myös päässälaskutekniikkaa ($\beta_{12} = .359^{***}$).

6 POHDINTA

6.1 Päätulokset ja pohdinta

Tutkimus kohdistui nuorten peruskoulun oppilaiden päässä-laskutaitoon ja sen kehittymiseen kolmen ensimmäisen vuoden aikana. Erityisen kiinnostuksen kohteena olivat nuorten koululaisten käyttämät strategiat päässä-laskuissa. Tutkimuksessa selvitettiin myös oppilaiden suhdetta matematiikkaan ja etenkin päässä-laskuun.

Laskeminen on osa päivittäistä elämäämme, jossa käytämme laskutaitoa useissa hyvin erilaisissa toiminnoissa. Lapsille kehittyy kyky ymmärtää matematiikkaa kasvu-ympäristön kulttuuri- ja koulutaustasta riippumatta. Tärkeää on se, että oppiminen ja toiminta liittyisivät ympäröivään maailmaan. Tämä antaa oppilaille tietoa siitä, että päässä-laskutaitoa tarvitaan myös koulun ulkopuolella. Tällöin tehtävien ratkaisu liittyy suoranaisesti oppilaan tarpeeseen tietää, kuinka kussakin tilanteessa on tarkoituksenmukaisinta toimia.

Tämä väitöstutkimus antoi mahdollisuuksia selvittää päässä-laskun opetukseen ja oppimiseen liittyviä seikkoja. Tulosten pohjalta luotiin lopuksi kuvaa taitavasta päässä-laskijasta suoritusten, strategioiden ja matematiikkasuhteen pohjalta.

6.1.1 Nuorten oppilaiden päässä-laskutaidon ja strategioiden arviointi

Tutkimuksessa käytettiin mittarina tutkimuslomaketta, johon sisältyi kolme osaa. Opettajia neuvottiin informoimaan oppilaita suoritettavasta testistä ja sen tarkoituksesta. Opettajille selvitettiin tutkimuksen tarkoitusperä ja sen suoritustapa. Testiä varten koostettiin kolmiosaiset kysymyslomakkeet, joihin oli muun muassa merkitty testin suoritus-aika ja muut tarkat tiedot testin tekemistä varten. Ennen testiä annettiin kaikille oppilaille samanlaisia ohjeita, siten että opettaja luki kunkin tehtävän sanallisen osuuden. Se auttoi oppilaita ymmärtämään tehtäviä.

Päässä-laskutestin jälkeen selvitettiin oppilaiden käyttämät päässä-laskustrategiat. Sitä varten ensiluokkalaisille järjestettiin strukturoitu haastattelu. Oppilaita haastateltiin

suullisesti, koska ensiluokkalaisilla lukeminen ja vastauksen kirjoittaminen vie paljon aikaa. Sisällöltään haastattelu oli samanlainen kuin 2. ja 3. luokan kirjallinen kysely, jossa oppilas sai vapaasti kirjoittaa, kuinka hän laskee tai millaisia apuvälineitä käytti. 2. ja 3. luokan oppilaiden suullinen haastattelu olisi antanut tarkempia tietoja strategioiden käytöstä. Testin tulosten analysoinnista selvisi, että oppilaat eivät aina kirjoittaneet siitä, kuinka he laskevat. Moni oppilas oli jättänyt selitykset kirjoittamatta - syynä voi olla se, että testin tekeminen väsytti oppilasta tai häntä ei kiinnostanut kirjoittaa laskutavastaan.

Kolmannessa osassa selviteltiin kyselylomakkeen avulla oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan ja päässälaskuun. Näin saatiin selville eri oppilasryhmien välisiä eroja, samoin maiden välisiä eroja. Suomen oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan on merkitsevällä tasolla positiivisempi kuin Viron oppilaiden; tutkimukseen osallistuneet pojat ovat motivoituneempia opiskelemaan matematiikkaa ja suhtautuvat päässälaskemiseen positiivisemmin kuin tytöt.

6.1.2 Päässälaskutaidon kehittyminen

Työmuisti vaikuttaa päässälaskun oppimiseen ja on perustavanlaatuinen tekijä oppilaiden ajatteluprosessissa. Aritmeettinen suorituskkyky on hitaampaa ja vähemmän tarkkaa probleemoissa, jotka vaativat muistinviemistä tai lainaamista verrattuna niihin, joissa sitä ei tarvita. Tärkeät ovat laskutehtävät ja harjoittelut, miten enemmän oppilaat harjoittelevat, sitä paremmat ovat päässälaskutulokset, sitä enemmän kehittyy työmuisti.

Tässä tutkimuksessa saadut tulokset vahvistavat työmuistin tärkeyttä: 1. — 3. luokan oppilaat saivat päässälaskutestissä hyvät tulokset yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä ilman kymmenen ylitystä.

Muistiinpano ja lainaaminen ovat additionaalisia ratkaisuaskeleita, joita usein tarvitaan kompleksisissa aritmeettisissä tehtävissä (vrt. kpl. 1.3). Siihen viittaavat myös tämän tutkimuksen tulokset: päässälaskutestissä esiintyi eniten virheitä 1. luokalla yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä lukualueella 0–20, 2. luokalla yhteen- ja

vähennyslaskuissa kymmenenlukuun tai kymmenenluvusta ja 3. luokalla kolmen luvun laskemisessa.

6.1.3 Sukupuolen rooli matematiikan oppimisessa

Matematiikan opetuksessa on tärkeää arvioida sukupuolen merkitystä, jossa täytyy ottaa huomioon poikien ja tyttöjen psykologinen ja fysiologinen erilaisuus. Ensimmäisinä kouluvuosina tytöt menestyvät matematiikassa poikia paremmin, mutta erojen on havaittu tasoittuvan kuudenteen luokkaan mennessä (mm. Linnanmäki, 1997; Hyde et al., 1990). On myös väitetty, että nykyinen koulunympäristö sopii paremmin tytöille kuin pojille (Kindlon & Thompson, 2003, 37–38).

Tässä tutkimuksessa tukea selkeille sukupuolieroille tyttöjen eduksi ei löydetty kummankaan maan aineistoissa. Ainoastaan Virossa ensimmäisen luokan tytöt saavuttivat poikia parempia tuloksia päässä-laskemisessa ja kolmannen luokan tytöt onnistuivat paremmin sanallisissa tehtävissä. Yleinen tulostrendi näytti pikemminkin lievästi viittaavan poikien parempiin suorituksiin, mutta tilastollisesti merkitseviä tuloksia ei kuitenkaan todettu. Suhteellisen pieni oppilasmäärä tosin saattaa vaikuttaa erojen esiintuloon, minkä vuoksi päätelmiä vahvistaisivat laajemmilla oppilasjoukoilla tehtävät tutkimukset. Kahden maan suoritusten vertailussa – siis virolaisten ja suomalaisten oppilaiden tulosten vertailussa – selvisi tilastollisesti merkitsevä ero sekä sukupuolen ja maan välillä että luokan ja maan välillä.

Van der Heijdenin (2004, 14) mukaan poikien ja tyttöjen suorituseroja voidaan selittää sillä, miten he lähestyvät päässä-laskutehtävää eli ratkaisustrategia päässä-laskutehtäviin.

6.1.4 Oppilaiden strategioiden käyttö

Vygotski on osoittanut (myöhemmin hänen seuraajat mm. Galperin, 1979, van der Heijden, 1993, 2004), että lähikehityksen vyöhykkeellä on tärkeä merkitys älyllisen kehityksen dynamiikan ja koulusuoritusten kannalta. Se, mikä lapsi tänään osaa tehdä yhteistyössä tai opettajan avulla, sen hän huomenna osaa tehdä itsenäisesti (Vygotski, 1982, 1984–185). Kehitysarvioksi ei riitä se, että todetaan kuinka lapsi selviytyy

standardoiduista tehtävistä yksinään. Lapsen toimintakykyä ja kehitysmahdollisuuksia on tarkasteltava sosiaalisessa kontekstissa ja lapsen kyky vuorovaikutukseen ympäristönsä kanssa on sisällytettävä hänen kehitystasonsa määrittelyyn. Päässä-laskussa kuten muissakin henkisissä toiminnoissa se saavutetaan vaiheittain, niin kuin Galperinin teoriassa (1979, 138–140) todettiin. Lähestymistapojen eroista huolimatta on tärkeä rooli ulkoisen ja sisäisen toiminnan keskinäisen yhteyden hahmottamisessa.

Tässä tutkimuksessa päässä-lasku oli automatisoinut kolmasosalla virolaisista ensiluokkalaisista ja puolella saman luokan suomalaisista. Kahden maan luokkien 1–3 oppilaiden strategioiden käyttövertailussa automatisoinnin määrä oli korkeampi 2.- luokkalaisilla verrattuna 3.- luokkalaisiin.

Päässä-laskustrategioiden osalta tässä tutkimuksessa kiinnostus kohdistui siihen, miten strategiat ilmenevät ja kehittyvät nuorilla peruskoululaisilla. Galperinin (1979, 29) perusajatuksena oli, että psyykkinen toiminta ei vain rakennu ulkoisen esineellisen toiminnan mallien mukaan, vaan se tosiasia-ssa jää tämän ulkoisen toiminnan erityiseksi muodoksi, jolta se saa mahdollisuutensa. Tällöin lähdetään siitä, että ulkoisen käyttäytymisen (eli päässä-laskutuloksen) ja psyykkisen toiminnan (eli laskustrategian löydämisen) välillä ei ole eroa. Se tarkoittaa, että lapsi ei pysty sanomaan tai kirjoittamaan päässä-laskutulosta ennen kuin hänen ajattelussa ei ole löydetty ratkaisua laskutehtävään.

Lisäksi olin tutkimuksessa erityisesti kiinnostunut sormien käytöstä päässä-laskutehtävissä. Siksi tarkastelin Viron kouluissa aikojen kuluessa käytettyjä opetusmenetelmiä. Käisin periaate on käytössä tänä päivänä Viron kouluissa, koska löytyy opettajia, jotka eivät suosittele sormien käyttöä. Päässä-laskun opiskelu alkaa askelstrategian käytöllä, se tarkoittaa luettelemisen avulla. Kuten Noor (1998) on todennut, manuaalisesti ja verbaalisesti toteutettava toiminta, jonka avulla laskettavat esineet ja perättäiset luvut asetetaan vastaavaan järjestykseen, auttaa oppilaita myöhemmin suorittamaan laskutehtäviä. Tämän kaltaista laskemista hyödynnetään useissa erilaisissa toiminnoissa. Tätä vahvistavat tämän tutkimuksen tulokset oppilaiden käyttämistä strategioista. Sormien apua sanoivat laskutehtävissä käyttävänsä lähes puolet tutkimukseen osallistuneista 1. luokan oppilaista. 1-

askelstrategiaa, myös sormia kirjoittivat käyttävänsä 2. ja 3. luokan oppilaat. Viron ja Suomen oppilaiden vertailussa selvisi suomalaisten ahkerampi sormien ja varpaiden käyttö. Virolaiset oppilaat puolestaan ilmaisivat (sanoivat tai kirjoittivat) käyttävänsä hiljaista luettelemista, mikä voi viitata siihen, että sormien käyttöä päässä laskutehtävissä ei ole sallittu.

Monet tutkijat ovat osoittaneet (esim. Virrankosken, 1983; Thompsonin, 1999), että päässä laskun oppiminen liittyy eri strategioiden käyttöön. Tässä tutkimuksessa kahden maan oppilaiden suoritusten vertailussa 1. luokalla saatiin samanlaisia tuloksia sekä 1-askelstrategian että päässä laskun automatisoimisessa. 2. ja 3. luokalla eniten käytetyt strategiat olivat erikoisstrategiat eli ykkösten ja kymmenien erottelu ja automatisoitunut laskeminen, käytettiin myös paristrategiaa eli samansuuruisten lukujen muodostelua. Erikoisstrategioiden tai oman laskustrategian käyttö on ymmärrettävää, koska lukujono päässä laskussa on 100:n sisällä ja se tarkoittaa sopivan laskutavan löytämistä.

6.1.5 Taitava päässä laskija

Tässä tutkimuksessa selvitettiin, millainen on *taitava päässä laskija*. Taitava päässä lasku ei ole pelkkää taitoa vaan taitavaa ajattelua, mihin kuuluvat a) valikoivuus, b) joustavuus, c) keskittyminen tehtävään, d) havaitseminen ja tarkkaavaisuus, e) työmuistin laajuus, f) ajattelun peruslogiikka, g) tiedon automatisointi, h) strategioiden hallinta ja i) suhtautuminen käsiteltävään asiaan (esim. Saariluoma, 1990; van der Heijden, 2004).

Taitava päässä laskija on myös hyvä matemaattisissa taidoissa korkeatasoinen (Ks. Kuvio 3).

Tämä tutkimus antoi minulle mahdollisuudet tutkia virolaisia oppilaita päässä laskusuorituksissa. Onnistuin tutkimaan tarkemmin Viron 1.– 3. luokkien oppilaiden päässä laskun osaamista ja suoritustrategioiden käyttöä. Strategioiden käyttöä ala-asteen oppilailla aikaisemmin ei ole Virossa tutkittu, siksi se tuntui tärkeältä.

Tutkimukseen osallistui myös vertailun vuoksi joukko suomalaisia oppilaita. Tutkijana sain hyvät mahdollisuudet tutustua suomalaisiin oppilaihin ja opettajiin. Tutkimuksellani sain vahvistusta siitä, että virolaisten oppilaiden tulokset verrattuna suomalaisiin oppilaihin ovat lähes samanlaiset. Se antaa tukea kansamme opettajille, että meidän opetussuunnitelmamme ja käytetyt menetelmät ovat oikeat. Samoin onnistuin 1. luokan oppilaiden haastattelussa. Haastattelu tarjosi tutkijalle mahdollisuuden selvittää, kuinka ensiluokkalaiset laskevat päässä, sekä mitä apuvälineitä ja kuinka he niitä käyttävät.

Epäonnistuin selvittämään, kuinka 2. ja 3. luokan oppilaat laskevat eli mikä päässä-laskustrategioita he käyttävät. Tarkemmat tiedot olisin varmasti saanut, jos heitäkin olisin haastattellut. Syynä voi olla, että päässä-laskutestin suorituksen jälkeen 2. ja 3. luokan oppilaat saivat B-osassa vapaasti kirjoittaa laskun eri vaiheet eli kuinka he ajattelivat päässä ja laskevat ne. Pyysin oppilaita kirjoittamaan, käyttivätkö he apuna sormia tai jotain muuta. Tutkijana huomasin, että monta oppilasta ei vastannut kaikkiin esitetty laskutehtäviin. Voi olla, että päässä-laskutestin suorituksen jälkeen oppilaita väsytti ja he eivät pitäneet tärkeänä tarkkaan kirjoittaa kaikki ulos.

Keskittyminen tehtävään, tietoisuus ja tiedon automatisointi näyttävät muodostavan lähestymiskäyttäytymisen keskeiset näkökulmat päässä-laskusuorituksissa. Taitavat päässä-laskijat osaavat *keskittyä* tehokkaammin ja olennaisimpiin vaihtoehtoihin käyttäen resurssiaan tehtävän kannalta tarkoituksenmukaisella tavalla. He suorittavat laskutehtävät nopeasti ja väärä vastauksia esiintyy harvoin. Tutkijalle yllätyksellistä oli 2. luokan oppilaiden korkea päässä-laskun automatisoinnin määrä.

Tutkimuksessa suhtautuminen opittavaan asiaan näyttää olevan tärkeätä. *Tämän tutkimuksen perusteella taitava päässä-laskija suhtautuu myönteisesti tai erittäin myönteisesti matematiikkaan ja päässä-laskuun. Häntä kuvailee päässä-laskun osaamisen tärkeys ja harjoittelut mm. päässä-laskun käyttäminen kaupassa, kotona tai leikeissä. Taitavan päässä-laskijan mielestä päässä-laskeminen on helppoa. Siinä vaiheessa onnistuin selvittämään oppilaiden positiivisen suhtautumisen sekä matematiikkaan että päässä-laskuun.*

6.2 Pedagogiset päätelmät ja haasteet tulevaisuuden tutkimukselle

6.2.1 Päässä-laskustrategioiden tärkeys

Matematiikka tulee nähdä laajempaan kuin vain tiettyjen laskutaitojen oppimisena. Sen omaksuminen on liitettävä oppilaan henkiseen kasvuun, hänen ajattelunsa laajuuden ja johdonmukaisuuden lisäämiseen sekä maailmankuvansa muodostumiseen (esim. Kaasik, 1997a; Kilborn, 2003; Koponen, 1995).

Yksi syy siihen, miksi tunneilla täytyy pohtia päässä-laskustrategioita sekä kokeilla uusia mahdollisuuksia, on oppilaalle sopivimman laskutavan löytäminen (Kilborn, 2003, 2–10). Täytyy kuitenkin myöntää, että Viron matematiikan oppikirjoissa ei käsitellä erikseen päässä-laskustrategioita. Esitellään kyllä konkreettisia tapoja, jotka perustuvat laskentaperiaatteisiin. Opettajat käyttävät päivittäisessä työssään useita erilaisia menetelmiä päässä-laskun opettamisessa: ns. silmien ja korvien menetelmää (suora kysymys), jossa lasku esitetään kirjallisesti ja vastaus suullisesti; ketjulaskentaa; kyselyä kasvokkain; tauluharjoituksia; dominoa; matemaattisia tarinoita; numerotaloja; leikkiin perustuvia kilpailuja (Piht, 2004b, 5–11). Tässä tutkimuksessa 1. luokan oppilaiden haastattelussa selvisi, että suomalaiset oppilaat käyttävät päässä-laskutehtävissä myös varpaiden apua, jos lukujono menee 20:een asti. Siitä syystä on tärkeä ottaa aikaa selvittää oppilaiden laskemismenetelmät tai -tavat. Se auttaa löytämään sopivia päässä-laskustrategioita, jotka tukevat oppilaita päässä-laskun oppimisessa.

Tarkemmat tiedot oppilaiden strategioiden käytöstä olisivat selvinneet, jos 2. ja 3. luokan oppilaita olisi haastateltu. Testitulosten analyysissä näkyi, että oppilaat eivät aina kirjoittaneet, kuinka he laskevat. Se voi johtua siitä, että testin tekeminen väsytti oppilasta eikä häntä kiinnostanut kirjoittaa siitä, miten hän laski.

6.2.2 Oppilaiden positiivinen suhtautuminen ja motivointi

Matematiikan opiskelun tulee olla toimintaa, jossa oppijalla on keskeinen rooli. Konstruktivismissa kiinnitetään huomiota oppilaan kokemusmaailmaan eikä vain matematiikan ja ympäristön väliseen suhteeseen. Nämä kaikki vaikuttavat oppilaan

suhtautumiseen matematiikkaan. Siksi olisi tärkeä selvittää oppilaiden esikäsitykset ja uskomukset, miten ne on ymmärrettävissä ja miten ne saataisiin muutetuiksi. Saadut tutkimustulokset osoittavat *toisen ja kolmannen luokan* oppilaiden positiivisen suhtautumisen vähenemistä *ensimmäisen luokan oppilaisiin* verrattuna. Suomen oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan on positiivisempaa kuin Viron oppilailla. Poikien suhtautuminen matematiikkaan ja päässäälaskemiseen on positiivisempaa kuin tyttöillä. Jos vertaillaan oppilaiden vastauksia luokittain, on huomattava tyttöjen negatiivisen suhtautumisen kasvu luokka-asteen myötä sekä matematiikkaa että päässäälaskua kohtaan.

Oppilaiden suhtautumiseen saattavat vaikuttaa 1) vaikeudet, jotka sisältyvät päässäälaskemiseen, 2) yksipuoliset opetusmenetelmät, 3) se että oppimisprosessissa ei oteta huomioon oppilaan individuaalisuutta.

Työmuistin mahdollisuudet ja rajoitukset vaikuttavat päässäälaskun oppimiseen. Se tarkoittaa laskuharjoittelun tärkeyttä ja tietojen saattamista automaation asteelle. Oppilaan päässäälaskutaito riippuu myös *opettajasta* eli *hänen käyttämistään menetelmistä* laskuharjoituksissa. On tärkeä, että oppilas suhtautuu opetukseen ja oppimiseen positiivisesti. Useiden tutkimusten tulokset vahvistavat käsitystä siitä, että oppilaat pitävät päässäälaskutaitoa erittäin tärkeänä.

Jos odotetaan, että oppilas suhtautuisi positiivisesti opetukseen ja oppimiseen on opettajan, vanhempien ja kodin rooli tärkeä. Oppilas hyväksyy aikuisten suhtautumisen ja käyttäytymisen. Koulussa opettaja ohjaa oppilaiden suhtautumista matematiikkaan ja päässäälaskemiseen. Oppitunnit täytyy suunnitella niin, että opiskelu olisi vaihtelevaa: jokaisen oppitunnin tulisi olla mielenkiintoinen ja tärkeää on, että rutiinitehtävät vaihtelevat ongelmaratkaisutehtävien kanssa. Päässäälaskua voi harjoitella pelien ja ryhmätöiden avulla. (Piht, 2004b, 9–11). Jos oppilas tietää ensimmäiseltä luokalta alkaen matematiikan tärkeyden ja ymmärtää päässäälaskun merkityksen arkielämässä, hän suhtautuu opiskeluun positiivisesti ja on motivoitunut.

6.2.4 Tulevaisuuden tutkimushaasteet

Tutkimuksella saatiin vahvistusta siihen, että Viron oppilaiden tulokset verrattuna Suomen oppilaihin ovat lähes samanlaiset. Se antaa tukea Viron opettajille, että nykyiset opetussuunnitelmat ja käytetyt menetelmät ovat tukena päässä-laskun opetuksessa ja oppimisessa.

Tämä tutkimus antoi mahdollisuudet selvittää, kuka on taitava päässä-laskija. Teorian perusteella (esim. Saariluoma, 1990; van der Heijden, 2004; Baddeley, 1986, 1996; Vygotski, 1984; Kyttälä, 2008) selvitettiin, että hyvään päässä-laskutaitoon liittyy joustavuus ja tarkkavaisuus, mikä viittaa korkeaan suorituskyykyyn. Suhtautumismuuttujista suhtautuminen opittavan asiaan on tärkeä taitavassa ajattelussa – tässä tutkimuksessa taitavalle päässä-laskijalle. Työmuistin mahdollisuudet ja rajoitukset vaikuttavat päässä-laskun oppimiseen. Se tarkoittaa laskuharjoittelun tärkeyttä. Näin oppilaan päässä-laskutaito riippuu myös opettajasta eli hänen käyttämistään menetelmistä laskuharjoituksissa.

Tutkimukseni keskeinen anti oli saada selville, miten oppilaat (eniten virolaiset) suorittavat päässä-laskutehtävät. Sen pohjalta voi antaa opettajille suosituksia, miten opettaa oppilaita laskemaan. Toisaalta päässä-laskun opetuksen teoriasta (eikä lähestymiskäyttämisestä), erityisesti strategioiden opetuksesta ja oppimisesta ei ole Virossa paljon kirjoitettu. Päässä-laskun tutkimisesta sai minut innostumaan metodisen kirjan kirjoittamiseen matematiikan opetuksesta peruskoulun ala-asteella. Metodiseen kirjaan haluan laittaa sekä teoreettisuutta että mahdollisimman paljon käytännön sovelluksia, missä selvitetään matematiikan rooli opetuksessa ja elämässä, mihin on yhdistetty opetussuunitelmissa yleiset ja matemaattiset pätevyudet. Opettajille tarkoitettussa kirjassa täytyy selvittää päässä-laskun oppimisen ja osaamisen prosessi, kuinka askel askelelta täytyy tutustuttaa ja opettaa eri strategioita. Tärkeä on saada opettajat ajattelemaan enemmän sitä, miten oppilaille asiat esitetään. Matematiikan opetuksessa ei ole yhtä oikeaa tapaa opettaa, vaan monta hyvää erilaista tapaa.

Tutkimuksessa käytetyt menetelmät olivat sopivat. Päässälaskutestiä varten koostetut tehtävät perustuivat opetussuunnitelmiin. Aika tehtäväsuorituksiin oli sopiva. Suhteellisen pieni oppilasmäärä tosin saattaa vaikuttaa erojen esiintuloon, minkä vuoksi päätelmiä vahvistaisivat laajemmilla oppilasjoukoilla tehtävät tutkimukset. Tulevaisuutta varten olisi hyvä tutkia vielä ala-asteen oppilaita, heidän päässälaskun osaamistaan ja haastatella kaikkia tutkittavia oppilaita sekä selvittää oppilaiden matemaattista ajattelua ja strategioiden käyttöä. Se auttaisi opettajia löytämään sopivat opetusmenetelmät ja ymmärtämään, kuinka oppilas laskee.

Kullakin ikävaiheella on oma erityinen kehityslogiikkansa ja lapsi ei voi ratkaista tehtäviä, johon hän ei ole ikänsä puolesta vielä kypsä. Ensimmäiset kouluvuodet ovat aikaa, jolloin looginen ajattelu kehittyy. Lapsi kykenee loogisesti ratkaisemaan konkreetteja ongelmia, hyväksymään muiden näkökantoja tilanteista sekä huomioimaan muiden ihmisten aikomukset ja arvot – se on aikaa päässälaskun oppimiseen.

7. Tiivistelmä

Tämä tutkimus perustuu kahteen pääteoriaan jotka ovat ratkaisevia tekijöitä päässälaskun selittäjinä. Ne ovat *lähestymiskäyttäytyminen* ja *työmuistin rooli* päässälaskussa. Teorian kappaleissa olen tukeutunut esim. Baddeleyn, van der Heijdenin, Kyttälän, Svenssonin ja Vygotskin periaateisiin.

Tutkimuksessa käytettiin tutkimuslomaketta (päässälaskutestia), johon sisältyi kolme osaa. Tutkimus kohdistui nuorten peruskoulun oppilaiden päässälaskutaitoon ja sen kehittymiseen kolmen ensimmäisen vuoden aikana. Erityisen kiinnostuksen kohteena olivat nuorten koululaisten käyttämät strategiat päässälaskuissa. Ensisijainen tutkimusjoukko koostui virolaisista oppilaista, joiden päässälaskutaitoja ja -strategioita tarkasteltiin yksityiskohtaisesti luokkatasoinnain ja sukupuolittain. Tässä yhteydessä verrattiin kahden maan, Viron ja Suomen, oppilaiden päässälaskutaitoa ja -strategioita kolmen ensimmäisen kouluvuoden aikana. Tutkimuksessa kiinnostus kohdistui myös oppilaiden suhteeseen matematiikkaan ja etenkin päässälaskuun.

Tämä tutkimus antaa vertailevan näkökulman Viron opetussuunnitelmista, etenkin matematiikan opetuksesta. Tutkimustuloksien perusteella voidaan esittää seuraavat ehdotukset opetussuunnitelmien kehityksestä. Ensimmäisen luokan oppilaat saavuttivat hyviä tuloksia yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä ensimmäisen kymmenen sisällä, mutta täytyy vielä enemmän harjoitella vähennyslaskutehtäviä lukualueella 0—20, missä esiintyy eniten virheitä. Toisella luokalla täytyy enemmän harjoitella yhteen- ja vähennyslaskuja kymmenenlukuun ja kymmenenluvusta, koska aritmeettisessa suorituskäytössä tarvitaan muistiinviemisestä ja lainaamisesta. Kolmannella luokalla näyttivät oppilaat saavan hyviä tuloksia kahden luvun yhteen- ja vähennyslaskuissa, mutta eniten virheitä esiintyi kolmen luvun laskemisessa, siksi on otettava huomioon laskutoiminnan järjestys (esim. laskualue-erot). Opettajien on tärkeää käyttää eri menetelmiä päässälaskuopetuksessa ja -harjoituksissa. Samoin oppikirjoihin täytyy kirjoittaa eri menetelmiä, jotka auttavat oppilaat laskemaan ja oman menetelmän löytämiseen.

Viron opetussuunnitelmissa täytyy tarkemmin selvittää päässälaskun osaamisen tärkeys sekä ajattelun kehityksen mahdollisuus. Jokaisella oppilaalla on mahdollisuus käyttää tietokonetta tai taskulaskinta. Siitä syystä on tärkeää tarjota laskutehtäviä, missä aktivoidaan oppilaan ajatteluprosessit. Oppilaan täytyy ymmärtää, että me tarvitsemme päässälaskun osaamista arkielämässä. Oppikirjat täytyy rakentaa niin, että ne sisältäisivät erilaisia ongelmatehtäviä, missä tarvitaisiin eri laskumenetelmien käyttöä. Rutiinitehtävien välttämiseksi on hyvä käyttää eri oppimisasipelejä, koska pelien kautta oppilas tekee ensimmäiset askeleet tieteenmaailmassa. Tärkein asia on, että oppimisasipelet kuuluisivat jokaiseen oppituntiin. Samoin on tärkeää ottaa huomioon oppilaiden erikoisuudet ja ominaisuudet. Niistä johtuen täytyy tarjota oppilaille erilaisia valintamahdollisuuksia laskutehtävien suorituksissa ja ongelmaratkaisussa. On tärkeää että opettaja ymmärtää sukupuolten erilaisuuden päässälaskun oppimisessa ja sen myötä sitten käyttää opetuksessa erilaisia menetelmällisiä keinoja. Siitä johtuen täytyy tarjota pojille lyhytaikaisia mutta ponnistuksia vaativia tehtäviä, missä he keskittyvät ongelmaratkaisuun. Tyttöillä sopivien näyttelemisen ja roolipelien käyttö päässälaskuopetuksessa ovat yhteydessä positiiviseen suhtautumiseen ja laskutehtävien suorituksiin.

Tulevaisuuden tutkimuksissa on tärkeää analysoida, mitkä tekijät vaikuttavat oppilaiden oppituloksiin valtakunnallisissa opetusohjelmissa ja kuinka opetusohjelman kehityksellä työskentelevät asiantuntijat ottavat huomioon lapsen kognitiivisen kehityksen.

Huolimatta siitä, että PISA- tulokset vuodelta 2006 ja 2009 osoittavat hyvää osaamista sekä Viron että Suomen oppilaiden tulosten osalta, saavuttivat Suomen oppilaat parempia tuloksia ja ovat paremmassa asemassa. Saavutustason noustessa putoaa vastaavan tason saavuttaneen oppilaiden määrä (PISA 2009 Results). Voiko se johtua siitä, että taitavat oppilaat saavat enemmän huomiota verrattuna vähemmän taitaviin? Matematiikan opetuksessa täytyy antaa enemmän mahdollisuuksia luovan ja loogisen ajattelun kehitykseen, myös arkielämän ratkaisutehtäviin.

Avainsanat: päässälasku, päässälaskun strategiat, lähestymiskäyttäytymien, työmuisti

LÄHDELUETTELO

- Abel, E.; Harak, E. & Kaljas, T. (2004). *Peastarvutamise strateegiad ja nende kasutamine Eesti põhikoolide seitsmendates klassides. [Päässälaskustrategiat ja niiden käyttö Viron peruskoulun 7-luokilla]*. Koolimatemaatika XXXI, [Koulumatematiikka XXXI]. TÜ kirjastus, Tartu, 2004, 67–73.
- Andersson, L. (2005). *Skriftlig huvudräkning*. Reports from MSI, Aug 2005, Växjö Universitet. <http://vxu.se/msi/utb/exarb/2005/05137.pdf> (Luettu 10.04.2206).
- Anderssoo, U., Lints, A. (1975). *Matemaatika õpetamisest koolieelikutele. [Matematiikan opetuksesta esiopetuksessa]*. Tallinn, Valgus. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagogiikan Arkistomuseo], fond R 8895, 3.
- Ashcraft, M. H. (1992). *Cognitive arithmetic*. A review of data theory. *Cognition*, 44, 75–106.
- Ashcraft, M. H., Donley, R. D., Halas, M. A. & Vakali, M. (1992). Working memory, automaticity, and problem difficulty. In J. I. D. Campbell (Ed.), *The nature and origins of mathematical skills*. Amsterdam: Elsevier, 301–329.
- Ashcraft, M. H. & Faust, M. W. (1994). *Mathematics anxiety and mental arithmetic performance: An exploratory investigation*. *Cognition and Emotion*, 8, 97–125.
- Ashraft, M. H. & Kirk, E. P. (2001). *The relationships among working memory, math anxiety, and performance*. *Journal of Experimental Psychology: General*, 130, 224–237.
- Asmolov, A. G. (1981). *Classification of unconscious phenomena and the category of activity*. *Soviet Psychology*, 9, 26–45.
- Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: a Framework for PISA 2006*, www.pisa.oecd.org (Luettu 4.10.2008).
- Atkinson, R., C. & Shiffrin, R. M. (1968). *Human memory: A proposed system and its control processes*. In K. W. Spence & J. T. Spence (Eds.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory*. Vol 2, 89–195. London: Academic Press.
- Baars, B. J. (1988). *A cognitive theory of consciousness*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Baddeley, A. D. & Hitch, G. J. (1974). *Working Memory*. In G. Bower (Ed.). *The Psychology of Learning and Motivation*. Vol 8, 47–90. New York: Academic Press.
- Baddeley, A. D. (1986). *Working Memory*. Oxford: Oxford University Press.
- Baddeley, A. D. (1996). *Exploring the central executive*. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 49A, 5–28.
- Baddeley, A. D. (2000). *The episodic buffer: a new component of working memory?* *Trends in Cognitive Sciences*, 4, 417–423.
- Beishuizen, M. (1993). *Mental strategies and materials or models for addition subtraction up to 100 in Dutch second grades*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (4), 294–323.
- Bergert, G. (1960). Käsikirjalised materjalid: *Rohkem peastarvutamist matemaatikatunnis*. [Käsikirjalliset materiaalit: *Enemmän päässä laskemisesta matematiikan oppitunnilla*]. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagogiikan Arkistomuseo], fond K 4934, 1–5.

- Brown, J. S. & Burton, R. R. (1978). *Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills*. *Cognitive Science*, 2, 155–192.
- Burnett, G., Jarvis, K. (2004). *Õpime koos lapsega õppima*. [We learn with a child]. Tartu: Kirjastus Studium, 26–28.
- Butterworth, G.; Harris, M. (2002). *Arengupsühholoogia alused*. Tartu üliopistoni Kirjasto.
- De Rammelaere, S., Stuyven, E. & Vandierendonck, A. (1999). *The contribution of working memory resources in the verification of simple mental arithmetic sums*. *Psychological Research*, 62, 72–77.
- De Rammelaere, S., Stuyven, E. & Vandierendonck, A. (2001). *Verifying simple arithmetic sums and products: Are the phonological loop and the central executive involved?* *Memory & Cognition*, 29, 267–273.
- DeStefano, D. & LeFevre, J.-A. (2004). *The role of working memory in mental arithmetic*. *European Journal of Cognitive Psychology*, 16, 353–386.
- Douglas B. Potts (1996). *What Is Working Memory Good For?* Douglas Potts Consulting <http://www.dpottsconsulting.com/articles/working%20memory.pdf> (Lüettu 5.5.2008).
- Duffin, J. (1987). *The language of primary mathematics*. Teoksessa Preston, M. (Ed) *Mathematics in primary education*. London: falmer Press, 42–55.
- Eisenberg, J. (1922-1928). *Matemaatika metoodika loengumaterjalid*. [Matematiikan metoodiset luentomateriaalit]. ENSV Vabariiklik Õpetajate Täiendusinstituut [ENSV Tasavaltainen Opettajien Täydennysinstituutti?], Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagoogiikan Arkistomuseo], fond R 2679, 5–14.
- Elektrooniline Riigi Teataja – eRT (2006). *Teadmiste ja oskuste hindamine*. § 6 *Hinded viiepallisüsteemis*. <https://www.riigiteataja.ee/ert/act.jsp?id=12753100> (Lüettu 10.5.2006).
- Ernest, P. (1988). *The attitudes and practices of student teachers of primary school mathematics*. <http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/papers/attitudes.htm> (Lüettu 2.10.2007).
- Erätuuli, M. & Leino, J. & Yli-Luoma, P. (1994) *Kvantitatiiviset analyysimenetelmät ihmistieteissä*. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Fisher, R. (2004). *Õpetame lapsi õppima*. [Teaching Children to Learn]. Tartu. Atlex, 13, 80.
- Fisher, R. (2005). *Õpetame lapsi mõtlema*. [Teaching Children to Think]. Tartu. Atlex, 5–25, 26–171.
- Flavell, J. (1970). *The developmental psychology of Jean Piaget*. New York [etc.] Van Nostrand Reinhold Company.
- Foxman, D.; Beishuizen, M. (2002). *Mental Calculation Methods Used by 11-years olds in Different Attainment Bands: a Reanalysis of data from the 1987. APU Survey in the UK*. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 41–69.
- Fridman, L. (1987). *Matemaatika õpetamise psühholoogilis – pedagoogilisi probleeme*. [Matematiikan opetuksen psykologis-pedagogisia ongelmia]. Tallinn. Valgus.
- Fürst, A. J., Hitch, G. J. (2000). *Separate roles for executive and phonological components of working memory in mental arithmetic*. *Memory & Cognition*, 28, 774–782.
- Galperin, P. J. (1969). *Stages in the development of mental acts*. In M. Cole & I. Maltzman (Eds.), *A handbook of contemporary Soviet psychology*, 249–273. New York: Basic Books.
- Galperin, P. J. (1979). *Johdatus psykologiaan*. Kansankultuuri Oy, Helsinki, 98, 138–

- Geary, D. C., Widaman, K. F. & Little, T. D. (1986). *Cognitive addition and multiplication: Evidence for a single memory network*. *Memory & Cognition*, 14, 478–487.
- Golemann, D. (2000). *Emotsionaalne intelligentsus. [Emotional Intelligence]*. Väike Vanker.
- Gurian, M. & Ballew, A. C. (2004). *Poisid ja tüdrukud õpivad erinevalt. [Boys And Girls Learn Differently]*. Haridus- ja teadusministeerium: El Paradiso, 252–253.
- van Haneghan, J. P. & Baker, L. (1989). *Cognitive monitoring in mathematics*. In C. B. McCormick, G. E. Miller & M. Pressley (red.), *Cognitive strategy research*, 215–238. New York: Springer.
- Haenen, J. P. P. (1993). *Piotr Gal`perin – His lifelong quest for the content of psychology*. Amsterdam: dissertation Free University.
- van der Heijden, M. K. (1988). *The Leiden Diagnostic Arithmetic Approach Test (LDRT)*. Leiden University, Internal publication Centre for the Study of Education and Instruction. [Will be published by Swets & Zeitlinger].
- van der Heijden, M. K. (1993). *Consistency of approach behavior – A process – assessment research into eight aspects of mental arithmetic* [in Deutch with a summary in English]. Lisse: Swets & Zeitlinger.
- van der Heijden M. K. (2004). *A Holistic Vygotskian operational definition of approach behavior for the study of personality and learning*. <http://psych.hanover.edu/vygotsky/heijden.html> (Luettu 4.03.2008).
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-? Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2005-0301-003023/index.htm> (Luettu 2.10.2007).
- Hirsijärvi, S. & Hurme, H. (2000). *Tutkimushaastattelu. Teemahaastattelun teoria ja käytäntö*. Helsinki: Yliopistopaino.
- Holowinsky, I. Z. (1980). *Qualitative assessment of cognitive skills*. *The Journal of Special Education*, 14, 155–163.
- Höbejärv, A. & Normak, M. (1997). *Arvestame poiste ja tüdrukute erinevusi. [Arvioidaan poikien ja tyttöjen erilaisuuksia]*. *Haridus*, 2, 27–30. [Viron tiedekausikirja *Haridus* 2, 27–30].
- Höbejärv, A. (1998). *Tüdrukud ja poisid tänapäeva koolis. [Tytöt ja pojat nykyaikaisessa koulussa]*. Rmt. Talts, L. (Koost.). *Algõpetuse aktuaalseid probleeme VII*. [Talts, L. (koost.) *A Collection of Research Paper: Actual Problems In Primary Educational VII*]. Tallinn: Tallinna Pedagoogikaülikooli Kirjastus, 235–255.
- Hyde, J. S., Fennema, E. ja Lamon, S. J. (1990). *Gender differences in mathematics performance: A meta analysis*. *Psychological Bulletin* 107, 139–155.
- Ignatjev, V. A. (1954). *Aritmeetika ülesannete kogu peastarvutamiseks. [Aritmetikan tehtäviä päässälaskemisessa]*. Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagoogikan Arkistomuseum], fond R 35623, 10–17.
- Imbo, I., De Rammelaere, S. & Vandierendonck, A. (2005). *New insights in the role of working memory in carry and borrow operations*. *Journal of Psychologica Belgica*, 45, 101–121. <http://users.ugent.be/~iimbo/PB05.pdf> (Luettu 5.5.2008).
- Jordan, N. C., Hanich, L. B., Kaplan, D. (2003). *Arithmetic fact mastery in young*

- Children: a longitudinal investigation*. Journal of Experimental Child Psychology 85, 103–119.
- Kaasik, K. (1997a). *Matemaatika I kooliastmel (1.-3.klass)*. [Matematiikka peruskoulun I asteella (luokilla 1-3)]. Õppekava. Matemaatika ainearaamat. HM. [Opetusohjelma. Matematiikan ainekirja. Viron Koulutusministeriö]. Tallinn, 28–30.
- Kaasik, K. (1997b). *Mõningaid matemaatika õpetamise probleeme ja rõhuasetusi põhikooli I kooliastmes (1. – 3. klass)*. [Jonkinlaisia ongelmia matematiikan opetuksessa ja painostuksia peruskoulun I asteella (luokilla 1-3)]. Õppekava. Põhikooli I aste (II osa). [Opetusohjelma. Peruskoulun I aste (II osa)]. Tallinn: Eesti Vabariigi Haridusministeerium [Viron Tasavallan Koulutusministeriö], 119–123.
- Kadajas, H. – M. (2005). *Õppima õppimine ja õppima õpetamine*. [Oppimaan oppiminen ja oppimaan opettaminen]. Tallinn. TLÜ Kirjastus.
- Kallak, J., Lints, A. (1962). *Matemaatika õpetamisest 1. ja 2.klassis*. [Matematiikan opetuksesta 1 ja 2 luokalla]. Eesti Riilik Kirjastus, Tallinn. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagogiikan Arkistomuseo], fond R 67965, 3–7.
- Kaptelinin, V. N. (1992). *Consciousness, attention, and control*. Activity Theory – Official organ of the International Standing Conference for the Research on Activity Theory, 11/12, 45–48.
- Kasvand, A. (1941). *Küsimusi matemaatika metoodikast*. Õpetajate suvekursustele 1940.a. peetud loengute konspekt. [Kysymyksiä matematiikan metodiikasta. Vuonna 1940 opettajien kesäkurssien luentomateriaalit]. Tartu. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagogiikan Arkistomuseo], R896, 4–10.
- Kasvand, A., Lang, J. (1935). *Juhatusi õpetajaile "Väike matemaatik" I, II, III ja IV käsitlemiseks*. [Johdatuksia opettajille "Pieni matemaatikko" 1,2,3,4 luokkalaisille]. Kirjastus Kool, Tartu. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagogiikan Arkistomuseo], fond R 2786, 4–13.
- Kilborn, W. (2003). *Pupils` understanging of fractions and decimal numbers*. PICME in Växjö 2003. <http://www.vxu.se/msi/picme10/F4KW.pdf> (Luettu 20.10.2006).
- Kilpatrick, J. (1987). *What Constructivism might be in Education?* Teoksessa J.C.Bergeron, N.Heerscovics ja C.Kieran (toim.) Proceedings of the Eleventh Congerence og the International Groups for the Psychology of the Mathematics Education. Montreal, Canada.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. & Bradford, J. D. (Eds.) (2001). *Mathematics Learning Study Committee, National Research Council. Conclusions and recommentations*. In *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, D.C.: The National Academies Press, s. 407–432.
- Kindlon, D. & Thompson, M. (2003). *Kaini kasvatamine*. [Raising Cain.] Tallinn: Balti Raamat, 35–64.
- Kinnunen, R. (2003). *Miksi kertotauluun kompastuu? Lukujen hallinta oppimisen perustana*. Oppimistutkimuksen keskus, Turun yliopisto.
- Koponen, R. (1994). *Asenteet matematiikkaa kohtaan*. Jyväskylän yliopisto. Opettajakoulutuslaitos. Tutkimuksia 56.
- Koponen, R. (1995). *Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille II painos*. Atena Kustannus Oy, Jyväskylä.
- Kossakowski, A. & Lompscher, J. (1977). *Teilfunktionen und Komponenten der*

- psychischen Regulation der Tätigkeit.* In A. Kossakowski, H. Kohn, J. Lompscher, & Rosenfeld (red.), *Psychologische Grundlagen der Persönlichkeitsentwicklung im pädagogischen Prozess* (107–148). Berlin: Volk und Wissen.
- Kuulberg, J. (1924). "Metoodilisi näpunäited "Elavate arvude" tarvitajaile" K/Ü Tartu "Loodus" [*Methodisia ohjeita "Vilkaalle lukujen käyttäjälle"*], Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagoogiikan arkistomuseum], fond R 8241, 23–30.
- Kõrghariduse riiklik koolitustellimus.* [Government-commissioned higher education]. 2008. Riigikontrolli aruanne [National audit office in Estonia] <http://www.riigikontroll.ee/?lang=en> (Luettu 24.08.2008).
- Käis, J. (1940). "Matemaatika algõpetusest" [*Matematiikan perusopetuksesta*], Tartu – Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagoogiikan Arkistomuseum], fond R 7892, 7–25.
- Käis, J. (1946). *Valitud tööd.* Pedagoogiline Kirjandus [*Valitut työt.* Pedagooginen Kirjallisuus], Tallinn. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagoogiikan Arkistomuseum], fond R 12634, 270–271, 315.
- Kyttälä, M. (2008). *Visuaalis-spatiaalisten työmuistivalmiuksien yhteys (esi)matemaattisiin taitoihin ja merkitys osana matemaattisilta taidoiltaan heikkojen lasten ja nuorten kognitiivista profiilia.* <https://oa.doria.fi/bitstream/handle/10024/42334/visuaali.pdf?sequence=1> (Luettu 24.10.2008).
- Leino, J. (1993). *Konstruktivismi ja matematiikan opetus.* Teoksessa Paasonen, J., Pehkonen, E. & Leino, J. (toim.) *Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä.* Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116, 11–20.
- Leino, M. (2005). *Sooline aspekt hariduses.* [*Sukupuolinen näkökohta koulutuksessa*]. *Haridus*, 11, 9–11. [Viron tiedekausikirja *Haridus*, 11, 9–11].
- Leont'ev, A. N. (1979). *Tätigkeit – Bewusstsein – Persönlichkeit.* Berlin: Volk und Wissen.
- Lindenfield, G. (2003). *Enesekindel laps.* [*Confident Children by Thorson*]. Tallinn: Kirjastus Sild.
- Lindgren, H. C., Suter, W. N. (1994). *Pedagoogiline psühholoogia koolipraktikas.* [*Educational Psychology in the Classroom*]. Tartu Ülikool.
- Linnanmäki, K. (1997). *Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen.* Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuskeskus, 283–300.
- Lints, A. (1974). *Matemaatika õpetamisest I klassis.* [*Matematiikan opetuksesta I-luokalla*]. Tallinn, Valgus. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagoogiikan Arkistomuseum], fond R 34654, 3–16, 58.
- Logie, R. H., Gilhooly, K. J. & Winn, V. (1994). *Counting on working memory in arithmetic problem solving.* *Memory and Cognition*, 22, 395–410.
- Macintyre, T., Forrester, R. (2004). *Teaching Mental Calculation – how successfully are strategies being learnt?* <http://www.icme-organisers.dk/tsg08/macintyre.doc> (Luettu 18.10.2007).
- Malmberg, L-E., & Little, T. D. (2002). *Nuorten koulumotivaatio* [Adolescents' school motivation]. In K. Salmela-Aro & J-E. Nurmi, (Eds.), *Mikä meitä liikuttaa. Modernin motivaatiopsykologian perusteet* [*What moves us. An*

- introduction to modern psychology of motivation*](pp. 127–144). Jyväskylä: PS-kustannus.
- McIntosh, A.; Reys, R. E. (1997). *Mental Computation in the Middle Grades*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2, 5, 322–329.
- McNiece, R. & Jolliffe, F. (1998). *An investigation into regional differences in educational performance in the National Child Development Study*. *Educational Research* 40 (1), 17–30.
- Montessori, M. (1988). *The Secret of Childhood*. Ballantine Book, New York.
- Noel, M.-P., Desert, M., Aubrun, A. & Seron, X. (2001). *Involvement of short-term memory in complex mental calculation*. *Memory & Cognition*, 29, 34–42.
- Noor, E. (1982). *Matemaatika õpetamisest kuueaastaste laste klassis*. Katsematerjal. [Matematiikan opetuksesta 6-vuotiaisten luokassa. Kokellinen materiaali]. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagogiikan Arkistomuseum], fond R 68221, 9–11.
- Noor, E. (1986). *Matemaatika õpetamisest I.klassis*. [Matematiikan opetuksesta I. luokalla]. Tallinn. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagogiikan Arkistomuseum], fond R 32852, 74–75.
- Noor, E. (1998). *Matemaatika I ja II klassis*. Õpetajaraamat. [Matematiikka 1. ja 2. luokalla. Opettajakirja]. Tallinn: Koolibri.
- Näveri, L. (2009). *Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana*. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 309. Helsinki: Yliopistopaino.
- Ostad, S. A. (2002). *Mathematical difficulties: Aspects of learner characteristics In developmental perspective* (Lecture at Department of Experimental Psychology). Oxford University. <http://folk.uio.no/snorreo/paper1.doc> (Luettu 23.01.2006).
- van Oers, B. (1990). *The development of mathematical thinking in school: a comparison of the action-psychological and information-processing approaches*. *International Journal of Educational Research*, 14, 51–67.
- Parinbak, J., Brandt, M., Brandt, Th. (1928). Eesti Õpetajate Liidu pedagoogilises ja metoodilises raamatus nr 7 "Üldõpetus Rakvere õpetajateseminari harjutuskoolis" Eesti Õpetajate Liidus kirjastus, Tallinn.- Pedagoogika Arhiivmuuseum, fond R 2891, 5–6.
- van Parreren, C. F. (1978). *A building block model of cognitive learning*. In A. M. Lesgold, J. W. Pellegrino, S. D. Fokkema & Glaser (eds.), *Cognitive psychology and instruction*. New York: Plenum Press.
- van Parreren, C. F. (1981). *Activiteit als object van de psychologie: noch 'inwendig', noch 'uitwendig'*. *Nederlands Tijdschrift voor de Psychologie*, 36, 185–196.
- Pehkonen, E. (2006). *Matemaattinen ajattelu*. SOKLA/HY luento. http://www.helsinki.fi/sokla/malu/luento/3_1_matem.pdf (Luettu 30.01.2008).
- Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet*. (2004). Opetushallitus. http://www.koulutus.ulvila.fi/data/doc/opetussuunnitelmat/Perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2004.pdf (Luettu 12.10.2007).
- Piaget, J. (1997). *The Child's Conception of Space: Collected Works*. Routledge (UK) <http://books.google.com/books?vid=ISBN0415168899&id=NFiLRyEbCnkC&pg=PP1&lpg=PP1&dq=piaget&sig=I4AuqbXsFg29aAi7LGqlOWNt6iw#PRA1-PA83.M1> (Luettu 27.11.2008).
- Piht, S. (2004a). *Matemaatika tööraamat 2.klassile*, I ja II osa. [Matematiikan työkirja 2. luokalle, I ja II osa]. Tallinn, AS BIT.

- Piht, S. (2004b). *Matemaatika 2.klassile. Õpetajaraamat*. [Matematiikka 2. luokalle. Opettajankirja]. Tallinn, AS BIT.
- PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do. Students Performance in Reading, Mathematics and Science*. Vol.1. <http://www.oecd.org/dataoecd/10/61/48852548.pdf> (Luettu 17.01.2011).
- Ptšolko, A. (1948). *Algkooli aritmeetika õpetamise metoodika*. Pedagoogiline Kirjandus, Tallinn. [Peruskoulun alaasten aritmetikan opetuksen metodiikka. Pedagoginen kirjallisuus]. Eesti Pedagoogika Arhiivmuuseum [Viron Pedagogiikan Arkistomuseo], fond R 27820, 5, 138–139 175, 197.
- Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava*. (2002). [Peruskoulun ja lukion valtakunnallinen opetusohjelma]. Riigi Teataja I osa, nr 20, 953–956.
- Põhikooli riiklik õppekava*. (2010). [Peruskoulun valtakunnallinen opetusohjelma]. www.oppekava.ee (Luettu 3.04.2010).
- Resnick, L. B. (1987). *Instruction and the cultivation of thinking*. In E. de Corte, H. Lodewijks, R. Parmentier & P. Span (red.), *Learning and instruction – European research in an international context: Vol. 1*, 415–442. leuven/Oxford: Leuven University Press/Pergamon.
- Rice, B. (1992). *Increasing critical thinking skills of the fourth grade student through problem solving activities*. ERIC ED351273.
- Riiklik Eksami- ja Kvalifikatsioonikeskus. (2009). [The National Examinations and Qualifications Centre]. http://www.ekk.edu.ee/vyfiles/0/tasemetoo_analyys_matem_3kl_2008.pdf (Luettu 15.4.2009).
- Rockström, B. (2000). *Skrifflig huvudräkning*. Bonniers, 2000. <http://epubl.ltu.se/1402-1595/2002/102/LTU-PED-EX-02102-SE.pdf> (Luettu 10.04.2006).
- Rull, A. (1917). *Kasvatus ja haridus*. (toim. Peeter Pöld, juuli-september nr 7-9), I aastakäik. Eesti Kirjastuse Ühisuse "Postimehe" trükk, Tartu. Pedagoogika arhiivmuuseum, 182–188.
- Ruus, V-R., Veisson, M., Leino, M., Ots, L., Pallas, L., Sarv, E-S., Veisson, A. (2007). *Õpilaste edukus, toimetulek ja heaolu koolis*. [Students' success, succeeding and welfare at school] – T. Kuurme (Toim.) Eesti Kool 21. sajandi algul: kool kui arengukeskkond ja õpilase toimetulek. [Estonian school in the beginning of 21st century: school as a environment of development and succeeding of a child]. Tallinn: TLU Publisher.
- Saariluoma, P (1990). *Taitavan ajattelun psykologia*. Helsinki: Otava.
- Sandrini, M., Mioozzo, A., Cotelli, M. & Cappa, S. F. (2003). *The residual calculation abilities of a patient with severe aphasia: Evidence for a selective deficit of subtraction problems*. *Cortex*, 39, 85–96.
- Schipper, W. (2001a). *Verfahren erten Rechnens*. http://www.grundschule.bildung-rp.de/gs/Lernprozesse/texte/rechnen_strategien.html (Luettu 28.10.2005).
- Schipper, W. (2001b). *Verfahren weiterführenden Rechnens*. http://www.grundschule.bildung-rp.de/gs/Lernprozesse/texte/weiter_fuehrendeRS.html (Luettu 28.10.2005).
- Seefeldt, C; Barbour, N. (1990). *Early childhood education an introduction*. Second edition. Merrill publishing company.
- Seitz, K. & Schumann-Hengsteler, R. (2000). *Mental multiplication and working memory*. *European Journal of Cognitive Psychology*, 12, 552–570.
- Seitz, K. & Schumann-Hengsteler, R. (2002). *Phonological loop and central*

- executive processes in mental addition and multiplication*. Psychologische Beiträge, 44, 275–302.
- Sikka, H. (1995). *Algkoolilõpetanute matemaatikateadmised ja –oskused*. Rmt. Hiie, E. (Koost.). Algõpetuse aktuaalseid probleeme V. [A Collection of Research Paper: Actual Problems In Primary Educational V]. Tallinn: Tallinna Pedagoogikaülikool, 127–143.
- Sikka, H. (1997). *Laste hirmud matemaatika õppimisel. [Childrens Fear About Mathematics Studies]*. Rmt. Hiie, E., Talts, L. (Koost.) Algõpetuse aktuaalseid probleeme VI. Teadustööde kogumik. [A Collection of Research Paper: Actual Problems In Primary Educational VI]. Tallinn: TPÜ Kirjastus, 129–138.
- Silvonen, J. (2004). Lähikehityksen vyöhykkeellä? Teoksessa R. Mietola & H. Outinen (toim.). *Kulttuurit, erilaisuus ja kohtaamiset*. Kasvatustieteen päivien 2003 julkaisu. Helsinki, Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos, s. 50–58. http://www.joensuu.fi/kasvatustiede/tutkimus/silvonen_lahikehitys.pdf. (Luettu 19.1.2010).
- Singley, M. K. & Anderson, J. R. (1989). *The transfer of cognitive skill*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Skemp, R. R. (1979). *Goals of learning and qualities of understanding*. Mathematics Teaching, 88, 44–49.
- Span, P. (1974). *Cognitieve stijl en aanpak van de leerstof*. In C. F. van Parreren & J. Peeck (red.), *Informatie over leren en onderwijzen* (34–66). Gronongen: Wolters-Noordhoff.
- Svensson, O. (1977). *Om barns tankeprosesser vid enkel huvudräkning*. Julkaisussa Nämnaren 3.
- Thompson, I. (1999). *Mental Calculation Strategies for the Addition and Subtraction*. Mathematics in School. November, Volume 28, Issue No 5, p 2–4.
- Thompson, I. (2000). Teaching Place value in UK: time for reappraisal? Educational Review, 52, 2000, 3, 291–298.
- Trubovich, P. L. & LeFevre, J.-A. (2003). *Phonological and visual working memory in mental addition*. Memory & Cognition, 31, 738–745.
- Ušinski, K. D. (1958). *Õpetuse küsimused. [Opetuksen kysymykset]*. Rmt. Valitud pedagoogilised teosed, kd 2. [Kirjassa: Valitut pedagogiset teosed, kd.2]. Tallinn: Eesti Riiklik Kirjastus.
- van der Veer, R. & Valsiner, J. (1991). *Understanding Vygotsky: a quest for synthesis*. Oxford/Cambridge: Blackwell.
- Veiderman, H. (1920). *Väikese arvutaja juhataja*. Rahvaülikool. [Pikku laskejan ohjaaja. Kansanyliopisto]. Tallinn – Pedagoogika Arhiivimuseum [Viron Pedagogiikan Arkistomuseo], fond R 7933, 5.
- Virrankoski, M. (1983). *Päässälasku ja sen yhteys matemaattisiin kykytekijöihin sekä päässälaskun suoritusmenetelmien käyttöön peruskoulun 6.luokalla*. Joensuun korkeakoulun kirjasto.
- Vygotski, L. (1978). *Mind on society – the development of higher psychological processes* (Edited by M. Cole et al.). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotski, L. (1982). *Ajattelu ja kieli*. (Käännös K. Helkama & A. Koski-Jännes.) (Alkut. 1934) Helsinki: Kansankulttuuri.
- Vygotski, L. (1984). *Krizis semi let*. - Sobranie sotšinenii, tom tšetvjortõi: Detskaja psihhologia. Pedagogika, Moskva, 376–385.
- Vygotski, L. (2005). *Pedogogitšeskaja psihhologia*. Moskva. ACT. Astrel. Ljuks, 46, 196, 445–447, 461.

Woods, S.S., Resnick, L.B., Groen, G.J. (1975). *An experimental test of five process models for subtraction*. *Journal of Educational Psychology*, 67, 17–21.

Yli-Luoma, P. (2003). *Hyvä opettaja*. IMDL OY: Sipoo.

Liitteet

LIITE 1.	KIRJE 1. LUOKAN OPETTAJALLE
LIITE 2.	KIRJE 2. LUOKAN OPETTAJALLE
LIITE 3.	KIRJE 3. LUOKAN OPETTAJALLE
LIITE 4.	1. LUOKKA PÄÄSSÄLASKUN TESTI A-OSA
LIITE 5.	1. LUOKKA PÄÄSSÄLASKUN TESTI B-OSA
LIITE 6.	1. LUOKKA PÄÄSSÄLASKUN TESTI C-OSA
LIITE 7.	2. LUOKKA PÄÄSSÄLASKUN TESTI A-OSA
LIITE 8.	2. LUOKKA PÄÄSSÄLASKUN TESTI B-OSA
LIITE 9.	2. LUOKKA PÄÄSSÄLASKUN TESTI C-OSA
LIITE 10.	3. LUOKKA PÄÄSSÄLASKUN TESTI A-OSA
LIITE 11.	3. LUOKKA PÄÄSSÄLASKUN TESTI B-OSA
LIITE 12.	3. LUOKKA PÄÄSSÄLASKUN TESTI C-OSA
LIITE 13.	KIRI 1. KLASSI ÕPETAJALE
LIITE 14.	KIRI 2. KLASSI ÕPETAJALE
LIITE 15.	KIRI 3. KLASSI ÕPETAJALE
LIITE 16.	1. KLASS PEASTARVUTAMISE TEST A-OSA
LIITE 17.	1. KLASS PEASTARVUTAMISE TEST B-OSA
LIITE 18.	1. KLASS PEASTARVUTAMISE TEST C-OSA
LIITE 19.	2. KLASS PEASTARVUTAMISE TEST A-OSA
LIITE 20.	2. KLASS PEASTARVUTAMISE TEST B-OSA
LIITE 21.	2. KLASS PEASTARVUTAMISE TEST C-OSA
LIITE 22.	3. KLASS PEASTARVUTAMISE TEST A-OSA
LIITE 23.	3. KLASS PEASTARVUTAMISE TEST B-OSA
LIITE 24.	3. KLASS PEASTARVUTAMISE TEST C-OSA
LIITE 25.	PÄÄSSÄLASKU TEHTÄVÄTYYPIT LUOKITTAIN
LIITE 26.	VIRON 2. LUOKAN MATEMATIIKAN OPPIKIRJA VUODESTA 2004
LIITE 27.	VIRON 2. LUOKAN MATEMATIIKAN OPPIKIRJA VUODESTA 2004

TURUN YLIOPISTO

Kasvatustieteiden tiedekunta

Arvoisa 1. luokan opettaja

Teen tutkimusta peruskoululaisten päässä-laskun kehityksestä ja strategioista sekä asennoitumisesta matematiikkaan. Tutkimuksessa on oppilaita luokilta 1–3 sekä Suomesta että Virosta.

Pyydän Teitä ystävällisesti toimittamaan oppilailenne kyselykaavakkeet ja vastamaan itse opettajille tarkoitettuihin kysymyksiin (kaavakkeet I ja II). Aikaa tähän kuluu oppilasta kohti yksi oppitunti, josta päässä-laskukokeeseen 25 min seuraavasti

Alkuun opettajan ohje oppilaille (2 min)

Tällä tunnilla saatte osallistua päässä-laskusta tehtävään tutkimukseen, jossa on mukana oppilaita myös Viron kouluista. Tarkoituksena on tutkia, miten hyvin te osaatte laskea päässä-nne. Laskut ovat helppoja, joten osaatte varmasti laskea ne. Olkaa vain huolellisia ja keskittykää laskemaan tehtäviä, jotka opettaja teille jakaa ja lukee, mitä tehtävissä kysytään.

Päässä-laskuihin kuluva aika (23min)

Epäselvyyksien välttämiseksi on parasta, että opettaja lukee kunkin tehtävän sanallisen osuuden (n.30s–1min), jonka jälkeen oppilaat laskevat päässä-laskutehtävät itseksensä seuraavan aikataulun mukaan:

Puhtaat päässä-laskut: opettajan luenta + laskuaika 11 min.

Taulukkolaskut : ” ” ” 7min.

Sanalliset tehtävät: ” ” ” 5min.

Yhteensä 23 min, josta oppilaan laskemiseen käyttämä aika n.20min.

Tutkijan osuus:

Strategiaselvitys eli miten tehtävät ratkaistiin ja oppilaan asennoituminen matematiikkaan haastatellen 24.–26.4.2006 n.10–15 min/oppilas.

Kiitos!

Sirje Piht

Tohtoritutkintoa suorittava jatko-opiskelija

Turun Yliopisto

Kasvatustieteiden tiedekunta

Liite 2

Arvoisa 2. luokan opettaja

Teen tutkimusta peruskoululaisten päässä-laskun kehityksestä ja strategioista sekä asennoitumisesta matematiikkaan. Tutkimuksessa on oppilaita luokilta 1–3 sekä Suomesta että Virossa.

Pyydän Teitä ystävällisesti toimittamaan oppilailenne kyselykaavakkeet ja vastamaan itse opettajille tarkoitettuihin kysymyksiin (kaavakkeet I ja II). Aikaa tähän kuluu yksi oppitunti seuraavasti

Alkuun opettajan ohje oppilaalle (2 min)

Tällä tunnilla saatte osallistua päässä-laskusta tehtävään tutkimukseen, jossa on mukana oppilaita myös Viron kouluista. Tarkoituksena on tutkia, miten hyvin te osaatte laskea päässä-nne. Laskut ovat helppoja, joten te osaatte laskea ne. Olkaa vain huolellisia ja keskittykää tehtäviin, jotka opettaja teille jakaa ja lukee, mitä tehtävissä kysytään.

Oppilaiden ajan käyttö

A Päässä-laskukoe oppilaille

Epäselvyyksien välttämiseksi on parasta, että opettaja lukee kunkin tehtävän sanallisen osuuden (n.30s–1min), jonka jälkeen oppilaat laskevat päässä-laskutehtävät itsekseen seuraavan aikataulun mukaan:

Puhtaat päässä-laskut: opettajanluenta + oppilaan laskemiseen käyttämä aika	6 min.
Sanalliset tehtävät:	9 min.
Yhteensä	15 min.

B. Strategiakysely eli kysymykset, miten tehtävät ratkaistiin

Opettaja lukee kaavakkeen alussa olevan suoritusohjeen, jonka jälkeen oppilaat vastaavat omaa tahtiaan edeten siten, että koko kaavakkeen täyttöön on aikaa 18 min.

C. Asennekysely tapahtuu samassa rintamassa edeten eli opettaja lukee tehtävän kerrallaan ja pyytää oppilaita miettimään tarkkaan, mitä mieltä hän on kysymyksestä, minkä jälkeen oppilaat ruksaavat sopivan vaihtoehdon ja kirjoittavat tehtävään 5 myös perustelun. Aikaa tähän osioon 10min.

Kiitos!

Sirje Piht

Tohtoritutkintoa suorittava jatko-opiskelija

Turun Yliopisto

Kasvatustieteiden tiedekunta

Arvoisa 3. luokan opettaja

Teen tutkimusta peruskoululaisten päässä-laskun kehityksestä ja strategioista sekä asennoitumisesta matematiikkaan. Tutkimuksessa on oppilaita luokilta 1–3 sekä Suomesta että Virossa.

Pyydän Teitä ystävällisesti toimittamaan oppilailenne kyselykaavakkeet ja vastamaan itse opettajille tarkoitettuihin kysymyksiin (kaavakkeet I ja II). Aikaa tähän kuluu yksi oppitunti seuraavasti

Alkuun opettajan ohje oppilaalle (2 min)

Tällä tunnilla saatte osallistua päässä-laskusta tehtävään tutkimukseen, jossa on mukana oppilaita myös Viron kouluista. Tarkoituksena on tutkia, miten hyvin te osaatte laskea päässä-nne. Laskut ovat helppoja, joten te osaatte laskea ne. Olkaa vain huolellisia ja keskittykää tehtäviin, jotka opettaja teille jakaa ja lukee, mitä tehtävissä kysytään.

Oppilaiden ajan käyttö

A Päässä-laskukoe oppilaille

Epäselvyyksien välttämiseksi on parasta, että opettaja lukee kunkin tehtävän sanallisen osuuden (n.30s–1min), jonka jälkeen oppilaat laskevat päässä-laskutehtävät itseksensä seuraavan aikataulun mukaan:

Puhtaat päässä-laskut: opettajanluenta + oppilaan laskemiseen käyttämä aika	10 min.
Sanalliset tehtävät:	8 min.
Yhteensä	18 min.

B. Strategiakysely eli kysymykset, miten tehtävät ratkaistiin

Opettaja lukee kaavakkeen alussa olevan suoritusohjeen, jonka jälkeen oppilaat vastaavat omaa tahtiaan edeten siten, että koko kaavakkeen täyttöön on aikaa 18 min.

C. Asennekysely tapahtuu samassa rintamassa edeten eli opettaja lukee tehtävän kerrallaan ja pyytää oppilaita miettimään tarkkaan, mitä mieltä hän on kysymyksestä, minkä jälkeen oppilaat ruksaavat sopivan vaihtoehdon ja kirjoittavat tehtävään 5 myös perustelun. Aikaa tähän osioon 7 min.

Kiitos!

Sirje Piht
Tohtoritutkintoa suorittava jatko-opiskelija
Turun Yliopisto
Kasvatustieteiden tiedekunta

HYVÄ 1. LUOKAN OPPILAS!

LASKE SEURAAVAT TEHTÄVÄT.

Max pistemäärä 20 p.

1. PIRJOLLA ON 17 EUROA, JORMALLA 6 EUROA VÄHEMMÄN. MONTAKO EUROA ON JORMALLA?

..... (1 p.)

VASTAUS:.....EUROA. (1 p.)

2. KIRJOITA VAIN VASTAUS. (10 p.)

$3 + 2 = \dots\dots$

$10 - 6 = \dots\dots$

$4 - 3 = \dots\dots$

$12 + 5 = \dots\dots$

$6 + 3 = \dots\dots$

$16 + 4 = \dots\dots$

$8 - 4 = \dots\dots$

$19 - 4 = \dots\dots$

$7 + 3 = \dots\dots$

$20 - 8 = \dots\dots$

3. TÄYTÄ TAULUKKO. (6 p.)

+	2	5	8
2			

-	3	6	9
10			

4. LAUTASELLA ON 5 OMENAA JA 3 PÄÄRYNÄÄ. MONTAKO HEDELMÄÄ LAUTASELLA ON YHTEENSÄ?

..... (1 p.)

VASTAUS:HEDELMÄÄ. (1 p.)

KIITOS!

HAASTATTELU 1. luokka

Oppilaan numero

Poika _____ tyttö _____

Ikä _____ vuotta

Tehtävä 1.

Oppilas ratkaisi tehtävän (oikein; väärin)

Kerro, kuinka laskit.

.....

.....

.....

.....

.....

Tehtävä 2.

Oikeita vastauksia:.....

Vääriä vastauksia:

Selitä, kuinka laskit. Selitys sille, missä on virhe.

Oppilas selittää 4 tehtävää, ei enempää, jos ei ole laskenut väärin. Tehtävät vaihtelevat.

Päässä-lasku ja vastaus	Oppilaan selitys
$3 + 2 =$	
$4 - 3 =$	
* $6 + 3 =$	
$8 - 4 =$	
$7 + 3 =$	
* $10 - 6 =$	
* $12 + 5 =$	
$16 + 4 =$	

19 - 4 =	
* 20 - 8 =	

Tehtävä 3.

Oikeita vastauksia:.....

Vääriä vastauksia:

Kerro, miksi laskit sillä tavalla? (Selittää, jos on väärä vastaus.)

* merkittyyn tehtävään selitys, jos oppilas oli laskenut oikein.

+	2	* 5	8
2			
Oppilaan selitys			

-	* 3	6	9
10			
Oppilaan selitys			

Tehtävä 4.

Millainen tehtävä se on? (Haluan tiedä, osaako oppilas sanoa, että se on sanallinen tehtävä.)

Millainen sana auttoi Sinua ratkaisemaan tehtävän?

.....
.....

Kerro, kuinka ratkaisit tehtävän.

.....
.....
.....

Oppilas ratkaisi tehtävän (oikein; väärin)

1. luokan oppilaan HAASTATTELU

Oppilaan numero

poika _____ tyttö _____

Ikä _____ vuotta

1. Mitä pidät päässä laskusta?

Pidän erittäin paljon ⁽⁴⁾ _____ pidän paljon ⁽³⁾ _____ en pidä siitä ⁽²⁾ _____ inhoan sitä ⁽¹⁾ _____

2. Mitä pidät matematiikasta?

Pidän erittäin paljon ⁽⁴⁾ _____ pidän paljon ⁽³⁾ _____ en pidä siitä ⁽²⁾ _____ inhoan sitä ⁽¹⁾ _____

3. Kuinka usein harjoittelet päässä laskua?

Joka päivä ⁽⁴⁾ _____ aika usein ⁽³⁾ _____ hyvin harvoin ⁽²⁾ _____ en koskaan ⁽¹⁾ _____

4. Päässä laskun osaaminen on sinulle

hyvin tärkeä ⁽⁴⁾ _____ tärkeä ⁽³⁾ _____ ei ole tärkeä ⁽²⁾ _____ en tarvitse sitä koskaan ⁽¹⁾ _____

5. Onko päässä laskeminen sinusta helppoa?

Kyllä _____

Ei _____

Perustele minkä takia:

.....

6. Missä käytät päässä laskemista eniten?

Kotona ⁽⁵⁾ _____ koulussa ⁽⁴⁾ _____ kaupassa ⁽³⁾ _____ leikeissä ⁽²⁾ _____ joka paikassa ⁽¹⁾ _____

7. Kuinka usein luokassasi harjoitellaan päässä laskua?

joka matematiikan tunnilla ⁽⁴⁾ _____ kerran viikossa ⁽³⁾ _____ harvoin ⁽²⁾ _____ ei koskaan ⁽¹⁾ _____

Kiitos Sinulle!

Hyvä 2. luokan oppilas!

Oppilaan numero

A. PÄÄSSÄLASKUJA

Max pistemäärä 14 p.

Kirjoita seuraaviin vain vastaus. (10 p.)

1) $12 + 7 = ___$ 2) $20 - 9 = ____$ 3) $7 + 8 = ____$ 4) $13 - 5 = ____$

5) $24 + 12 = ____$ 6) $76 - 46 = ____$ 7) $53 + 8 = ____$ 8) $81 - 9 = ____$

9) $28 + 12 = ____$ 10) $50 - 14 = ____$

Jos osaat laskea päässäsi, kirjoita seuraaviin laskuihin vain vastaus. Jos et osaa laskea päässä, niin laske ruudukkoon.

11) Minnalla on 14 postikorttia ja Mialla 12. Montako postikorttia tytöillä on yhteensä? (1 p.)

Vastaus: _____

12) Juhanilla on 24 euroa, Juhalla on 5 euroa enemmän. Montako euroa Juhalla on? (1 p.)

Vastaus: _____

B. SELITÄ PÄÄSSÄLASKEMINEN

Oppilaan numero

Seuraavassa on samoja tehtäviä, mitkä laskit edellä. Kirjoita nyt laskun eri vaiheet eli kuinka ajattelit päässäsi ja laskit ne. Kerro myös käytitkö apunasi sormia tai jotain muuta.

a) $12 + 7 =$

b) $7 + 8 =$

c) $20 - 9 =$

d) $50 - 14 =$

e) Minnalla on 14 postikorttia ja Miialla 12. Montako postikorttia tyttöillä on yhteensä?

f) Juhanilla on 24 euroa, Juhalla on 5 euroa enemmän. Montako euroa Juhalla on?

.....
.....
.....

.....
.....
.....

g) Paulin lautasella on 37 pähkinää, Jussilla on 18 pähkinää enemmän. Montako pähkinää pojilla on yhteensä?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Kiitos Sinulle!

Hyvä 2. luokan oppilas!

Oppilaan numero

Ole hyvä ja vastaa seuraaviin kysymyksiin. Vastaa rehellisesti.

Olen poika _____ olen tyttö _____

Ikäni on _____ vuotta

C. Merkitse rastilla vastauksesi seuraaviin kysymyksiin:

1. Mitä pidät matematiikasta?

Pidän erittäin paljon ⁽⁴⁾ _____ pidän paljon ⁽³⁾ _____ en pidä siitä ⁽²⁾ _____ inhoan sitä ⁽¹⁾ _____

2. Mitä pidät päässälaskusta?

Pidän erittäin paljon ⁽⁴⁾ _____ pidän paljon ⁽³⁾ _____ en pidä siitä ⁽²⁾ _____ inhoan sitä ⁽¹⁾ _____

3. Kuinka usein harjoittelet päässälaskua?

Joka päivä ⁽⁴⁾ _____ aika usein ⁽³⁾ _____ hyvin harvoin ⁽²⁾ _____ en koskaan ⁽¹⁾ _____

4. Päässälaskun osaaminen on sinulle

hyvin tärkeä ⁽⁴⁾ _____ tärkeä ⁽³⁾ _____ ei ole tärkeä ⁽²⁾ _____ en tarvitse sitä koskaan ⁽¹⁾ _____

5. Onko päässä laskeminen sinusta helppoa?

Kyllä _____

Ei _____

Perustele minkä takia:

.....
.....
.....

6. Missä käytät päässä laskemista eniten?

Kotona ⁽⁵⁾ _____ koulussa ⁽⁴⁾ _____ kaupassa ⁽³⁾ _____ leikeissä ⁽²⁾ _____ joka paikassa ⁽¹⁾ _____

7. Kuinka usein luokassasi harjoitellaan päässälaskua?

joka matematiikan tunnilla ⁽⁴⁾ _____ kerran viikossa ⁽³⁾ _____ harvoin ⁽²⁾ _____ ei koskaan ⁽¹⁾ _____

Kiitos Sinulle!

Hyvä 3. luokan oppilas!

Oppilaan numero

A. PÄÄSSÄLASKUTEHTÄVÄT

Max pistemäärä 23 p.

Jos osaat, laske päässä ja kirjoita vain vastaus. Älä pyyhi! Jos huomaat, että vastauksesi on väärä, vedä viiva sen yli ja kirjoita viereen oikea vastaus. Jos et osaa laskea päässä, laske kirjallisesti jatkoviivalle. (20 p.)

a)

1) $7 + 5 =$ _____

2) $17 - 8 =$ _____

3) $6 \cdot 8 =$ _____

4) $45 : 9 =$ _____

5) $64 + 3 =$ _____

6) $97 - 4 =$ _____

7) $83 + 9 =$ _____

8) $57 - 8 =$ _____

9) $47 + 35 =$ _____

10) $72 - 36 =$ _____

b)

11) $3 \cdot 17 =$ _____

12) $84 : 3 =$ _____

13) $0 \cdot 7 =$ _____

14) $23 - 0 =$ _____

15) $14 \cdot 1 =$ _____

16) $68 : 1 =$ _____

17) $34 + 23 + 6 =$ _____

18) $5 + 7 \cdot 6 =$ _____

19) $(48 - 16) : 4 =$ _____

20) $(12 + 4) \cdot 5 =$ _____

Laske päässä. Kirjoita viivalle vain vastaus. Älä taaskaan pyyhi, vaan jos huomaat, että vastauksesi on väärä, vedä viiva sen yli ja kirjoita viereen oikea vastaus.

21) Puoli kiloa nakkimakkaroida maksaa 4 euroa. Paljonko maksaa 1 kg? (1 p.)

22) Pauli osti 1 kg appelsiineja, jotka maksoivat 2 euroa ja 4 kg omenia, joiden kilohinta oli 3 euroa. Pauli maksoi 50 euron rahalla. Kuinka monta euroa hän sai takaisin? (1 p.)

23) Punaisessa rasiassa on 20 nappia. Sieltä otetaan pois 5 nappia, jotka siirretään siniseen nappirasiaan. Nyt on molemmissa rasioissa yhtä monta nappia. Montako nappia sinisessä rasiassa oli aluksi? (1 p.)

B. SELITÄ PÄÄSSÄLASKEMINEN

Oppilaan numero

Seuraavassa on samoja tehtäviä, mitkä laskit edellä. Kirjoita nyt laskun eri vaiheet eli kuinka ajattelit päässäsi ja laskit ne. Kerro myös käytitkö apunasi sormia tai jotain muuta.

1) $64 + 3 =$

2) $72 - 36 =$

3) $6 \cdot 8 =$

4) $45 : 9 =$

5) $3 \cdot 17 =$

6) $84 : 3 =$

7) $34 + 23 + 6 =$

8) $(12 + 4) \cdot 5 =$

9) $(48 - 16) : 4 =$

11) Puoli kilo nakkimakkaroiita maksaa 4 euroa. Paljonko maksaa 1 kg?

12) Pauli osti 1 kg appelsiineja, jotka maksoivat 10 euroa kilo ja 3 kg omenia kilohinnalla 7 euroa. Pauli maksoi 50-euron rahalla. Montako euroa hän sai takaisin?

13) Punaisessa rasiassa on 20 nappia. Sieltä otetaan pois 5 nappia ja ne lisätään siniseen rasiaan. Nyt on molemmissa rasioissa yhtä monta nappia. Montako nappia oli aluksi sinisessä rasiassa?

Kiitos Sinulle!

C. Hyvä 3. luokan oppilas!

Oppilaan numero

Ole hyvä ja vastaa seuraaviin kysymyksiin. Vastaa rehellisesti.

Olen poika _____ olen tyttö _____

Ikäni on _____ vuotta

Merkitse rastilla vastauksesi seuraaviin kysymyksiin:

1. Mitä pidät matematiikasta?

⁽⁴⁾ Pidän erittäin paljon _____ ⁽³⁾ pidän paljon _____ ⁽²⁾ en pidä siitä _____ ⁽¹⁾ inhoan sitä _____

2. Mitä pidät päässälaskusta?

⁽⁴⁾ Pidän erittäin paljon _____ ⁽³⁾ pidän paljon _____ ⁽²⁾ en pidä siitä _____ ⁽¹⁾ inhoan sitä _____

3. Kuinka usein harjoittelet päässälaskua?

⁽⁴⁾ Joka päivä _____ ⁽³⁾ aika usein _____ ⁽²⁾ hyvin harvoin _____ ⁽¹⁾ en koskaan _____

4. Päässälaskun osaaminen on sinulle

⁽⁴⁾ hyvin tärkeä _____ ⁽³⁾ tärkeä _____ ⁽²⁾ ei ole tärkeä _____ ⁽¹⁾ en tarvitse sitä koskaan _____

5. Onko päässä laskeminen sinusta helppoa?

Kyllä _____

Ei _____

Perustele minkä takia:

.....

6. Missä käytät päässä laskemista eniten?

⁽⁵⁾ Kotona _____ ⁽⁴⁾ koulussa _____ ⁽³⁾ kaupassa _____ ⁽²⁾ leikeissä _____ ⁽¹⁾ joka paikassa _____

7. Kuinka usein luokassasi harjoitellaan päässälaskua?

⁽⁴⁾ joka matematiikan tunnilla _____ ⁽³⁾ kerran viikossa _____ ⁽²⁾ harvoin _____ ⁽¹⁾ ei koskaan _____

Kiitos Sinulle!

Hea 1. klassi õpetaja

Viime läbi uurimust esimese kooliastme õpilaste peastarvutamise oskuse kujunemisest, strateegiate kasutamisest ning suhtumisest matemaatikasse ja peastarvutamisse. Uurimuses osalevad Eesti ja Soome 1.-3. klassi õpilased. Palume Teie abi õpilaste hulgas testimise ja küsitluse läbiviimisel. Testimisele kulub üks õppetund, kus peastarvutamise testile on arvestatud 25 minutit järgmiselt:

Enne testi õpetaja juhendab õpilasi (2 min)

Tänases tunnis saad osaleda peastarvutamise oskuse uurimuses. Selles uurimuses osalevad lisaks teile ka Soome õpilased. Eesmärk on teada saada, kui hästi sa oskad peast arvutada. Ülesanded on lihtsad, sa saad kindlasti nende lahendamiseга hakkama. Ole tähelepanelik ja keskendu ülesannete lahendamisele, mille õpetaja sulle jagab. Loe, mida ülesandes küsitakse.

Peastarvutamisele kuluv aeg (23min)

Segaduse vältimiseks on hea, kui õpetaja loeb iga ülesande töökäsud (n.30s—1min), seejärel sooritavad õpilased peastarvutamise ülesanded järgnevalt:

Ainult peastarvutamine: õpetaja ettelugemine + arvutusaeg	11 min.
Tabelarvutused :	7min.
Tekstülesanded:	5min.
Kokku 23 min, millest õpilase arvutamise aega	u.20min.

Uurijate tegevus:

Starteegiate väljaselgitamine ehk kuidas peastarvutamise ülesanne sooritati ja õpilaste suhtumise väljaselgitamine intervjuude käigus ajavahemikul 2. —12.5.2006 u10—15 min/õpilane.

Täna!

Sirje Piht
TLÜ Haapsalu Kolledž
Õpetajakoolituse osakond

Hea 2. klassi õpetaja

Viime läbi uurimust esimese kooliastme õpilaste peastarvutamise oskuse kujunemisest, strateegiate kasutamisest ning suhtumisest matemaatikasse ja peastarvutamisse. Uurimuses osalevad Eesti ja Soome 1.-3. klassi õpilased. Palume Teie abi õpilaste hulgas testimise ja küsitluse läbiviimisel. Testimisele kulub üks õppetund järgmiselt:

Enne testi õpetaja juhendab õpilasi (2 min)

Tänases tunnis saad osaleda peastarvutamise oskuse uurimuses. Selles uurimuses osalevad lisaks teile ka Soome õpilased. Eesmärk on teada saada, kui hästi sa oskad peast arvutada. Ülesanded on lihtsad, sa saad kindlasti nende lahendamiseга hakkama. Ole tähelepanelik ja keskendu ülesannete lahendamisele, mille õpetaja sulle jagab. Loe, mida ülesandes küsitakse.

Peastarvutamisele kuluv aeg

A Peastarvutamise test õpilastele

Segaduse vältimiseks on hea, kui õpetaja loeb iga ülesande töökäsud (n.30s—1min), seejärel sooritavad õpilased peastarvutamise ülesanded järgnevalt:

Ainult peastarvutamine: õpetaja ettelugemine + õpilase arvutusaeg	6 min.
Tekstülesanded: „ „	9 min.
Kokku	15 min.

B. Strateegiate küsitlus ehk küsimused, mille abil selgitatakse, kuidas õpilane arvutas. Õpetaja loeb ette küsimustiku alguses oleva juhendi. Seejärel õpilased vastavad küsimustele. Kogu küsimustiku täitmiseks on aega 18 minutit.

C. Õpilaste suhtumise väljaselgitamiseks loeb õpetaja küsimuse ja palub õpilastel mõelda ning märkida talle sobiva vastusevariandi, samas palub põhjendada viienda küsimuse vastust. Aega selleks on 10 minutit.

Tänan!

Sirje Piht
TLÜ Haapsalu Kolledž
Õpetajakoolituse osakond

Hea 3. klassi õpetaja

Viime läbi uurimust esimese kooliastme õpilaste peastarvutamise oskuse kujunemisest, strateegiate kasutamisest ning suhtumisest matemaatikasse ja peastarvutamisse. Uurimuses osalevad Eesti ja Soome 1.-3. klassi õpilased.

Palume Teie abi õpilaste hulgas testimise ja küsitluse läbiviimisel. Testimisele kulub üks õppetund järgmiselt:

Enne testi õpetaja juhendab õpilasi (2 min)

Tänases tunnis saad osaleda peastarvutamise oskuse uurimuses. Selles uurimuses osalevad lisaks teile ka Soome õpilased. Eesmärk on teada saada, kui hästi sa oskad peast arvutada. Ülesanded on lihtsad, sa saad kindlasti nende lahendamisega hakkama. Ole tähelepanelik ja keskendu ülesannete lahendamisele, mille õpetaja sulle jagab. Loe, mida ülesandes küsitakse.

Peastarvutamisele kuluv aeg

A Peastarvutamise test õpilastele

Segaduse vältimiseks on hea, kui õpetaja loeb iga ülesande töökäsud (n.30s—1min), seejärel sooritavad õpilased peastarvutamise ülesanded järgnevalt:

Ainult peastarvutamine: õpetaja ettelugemine + õpilase arvutusaeg	10 min.
Tekstülesanded: „ „	8 min.
Kokku	18 min.

B. Strateegiate küsitlus ehk küsimused, mille abil selgitatakse, kuidas õpilane arvutas. Õpetaja loeb ette küsimustiku alguses oleva juhendi. Seejärel õpilased vastavad küsimustele. Kogu küsimustiku täitmiseks on aega 18 minutit.

C. Õpilaste suhtumise väljaselgitamiseks loeb õpetaja küsimuse ja palub õpilastel mõelda ning märkida talle sobiva vastusevariandi, samas palub põhjendada viienda küsimuse vastust. Aega selleks on 7 minutit.

Tänan!

Sirje Piht

TLÜ Haapsalu Kolledž

Õpetajakoolituse osakond

HEA 1. KLASSI ÕPILANE!

A. ARVUTA.

Max 20 punkti

1. PIRETIL ON 17 KROONI, JÜRIL ON 6 KROONI VÄHEM. MITU KROONI ON JÜRIL?

..... (1 p.)

VASTUS:.....KROONI. (1 p.)

2. KIRJUTA AINULT VASTUS. (10 p.)

$3 + 2 = \dots\dots$

$10 - 6 = \dots\dots$

$4 - 3 = \dots\dots$

$12 + 5 = \dots\dots$

$6 + 3 = \dots\dots$

$16 + 4 = \dots\dots$

$8 - 4 = \dots\dots$

$19 - 4 = \dots\dots$

$7 + 3 = \dots\dots$

$20 - 8 = \dots\dots$

3. TÄIDA TABEL. (6 p.)

+	2	5	8
2			

-	3	6	9
10			

4. KAUSIS ON 5 ÕUNA JA 3 PIRNU. MITU PUUVILJA ON KAUSIS KOKKU?

..... (1 p.)

VASTAS:PUUVILJA. (1 p.)

KIITOS!

Õpilase number

B. Intervjuu 1. klass

Poiss _____ tüdruk _____

Vanus _____ aastat

Ülesanne 1.

Õpilane lahendas ülesande (õigesti; valesti)

Selgita, kuidas lahendasid.

.....

.....

.....

.....

.....

Ülesanne 2.

Õigeid vastuseid:.....

Valesid vastuseid:

Selgita, kuidas arvutasid. Selgitus ülesandele, mis oli valesti lahendatud.

Õpilane selgitab 4 ülesannet, mitte rohkem, kui ei ole arvutanud valesti. Ülesanded vahelduvad.

Ülesanne ja vastus	Õpilase selgitus
3 + 2 =	
4 - 3 =	
* 6 + 3 =	
8 - 4 =	
7 + 3 =	
* 10 - 6 =	
* 12 + 5 =	
16 + 4 =	

$19 - 4 =$	
* $20 - 8 =$	

Ülesanne 3.

Õigeid vastuseid:.....

Valesid vastuseid:

Selgita, kuidas sa arvutasid? (Selgitab, kui vastus on vale.)

* märgitud ülesannete selgitus, kui õpilane oli arvutanud õigesti.

	+	2	* 5	8
	2			
Õpilase selgitus				

	-	* 3	6	9
	10			
Õpilase selgitus				

Ülesanne 4.

Mis ülesanne see on? (Tahan teada, kas õpilane oskab öelda, et tekstülesanne.)

.....

Missugune sõna aitas sind ülesande lahendamisel?

.....

Selgita, kuidas lahendasid ülesande.

.....
.....
.....

Õpilane lahendas ülesande (õigesti, valesti).

C. INTERVJUU 1.klass

Õpilase number

poiss _____ tüdruk _____

vanus _____ aastat

1. Kuivõrd sulle meeldib peastarvutamine?

(4) (3) (2) (1)
meeldib väga _____ meeldib _____ ei meeldi _____ vihkan peastarvutamist _____

2. Kuivõrd sulle meeldib matemaatika?

(4) (3) (2) (1)
meeldib väga _____ meeldib _____ ei meeldi _____ vihkan matemaatikat _____

3. Kui sageli sa harjutad peastarvutamist?

(4) (3) (2) (1)
iga päev _____ sageli _____ väga harva _____ mitte kunagi _____

4. Peastarvutamise oskamine on sinule

(4) (3) (2) (1)
väga tähtis _____ tähtis _____ ei ole tähtis _____ ma ei vaja seda kunagi _____

5. Kas peastarvutamine on sinu arvates kerge?

Jah _____

Ei _____

Põhjenda miks:

.....
.....
.....

6. Kus sa kasutad peastarvutamist kõige rohkem?

(5) (4) (3) (2) (1)
kodus _____ koolis _____ poes _____ mängides _____ igal pool _____

7. Kui sageli sinu klassis peastarvutamist harjutatakse?

(4) (3) (2) (1)
igas matemaatikan tunnis _____ üks kord nädalas _____ harva _____ mitte kunagi _____

Aitäh!

Hea 2. klassi õpilane!

Õpilase number

A. PEASTARVUTAMINE

Max 14 punkti.

Arvuta ja kirjuta ainult vastus. (10 p.)

1) $12 + 7 = \underline{\quad}$ 2) $20 - 9 = \underline{\quad}$ 3) $7 + 8 = \underline{\quad}$ 4) $13 - 5 = \underline{\quad}$

5) $24 + 12 = \underline{\quad}$ 6) $76 - 46 = \underline{\quad}$ 7) $53 + 8 = \underline{\quad}$ 8) $81 - 9 = \underline{\quad}$

9) $28 + 12 = \underline{\quad}$ 10) $50 - 14 = \underline{\quad}$

Kui oskad peast arvutada, kirjuta järgmistesse ülesannetesse ainult vastused. Kui vaja, arvuta ruudustikus.

11) Minnal on 14 postikaarti ja Mial on neid 12. Mitu postikaarti on tüdrukutel kokku? (1 p.)

Vastus: _____

12) Juhanil on 24 krooni, Jussil on 5 krooni rohkem. Mitu krooni on Jussil? (1 p.)

Vastus: _____

B. SELGITA PEASTARVUTAMINE

Õpilase number

Järgnevalt on samad ülesanded, mida sa juba arvutasid. Kirjuta joonele, kuidas sa mõtlesid ja arvutasid. Kirjuta, kas sa kasutasid abiks sõrmi või muid abivahendeid.

a) $12 + 7 =$

b) $7 + 8 =$

c) $20 - 9 =$

d) $50 - 14 =$

f) Minnal on 14 postkaarti ja Mial on neid 12. Mitu postkaarti on tüdrukutel kokku?

f) Juhanil on 24 krooni, Jussil on 5 krooni rohkem. Mitu krooni on Jussil?

.....
.....
.....
.....
.....
.....

g) Pauli taldrikul on 37 pähklit, Jussil on 18 pähklit rohkem. Mitu pähklit on poistel kokku?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Aitäh!

C. Hea 2. klassi õpilane!

Õpilase number

Ole hea ja vasta järgmistel küsimustele. Vasta ausalt!

Olen poiss _____ olen tüdruk _____ olen _____ -aastane

Märgi sulle sobiv vastus ristiga (X):

1. Kuivõrd sulle meeldib peastarvutamine?

(4) (3) (2) (1)
meeldib väga _____ meeldib _____ ei meeldi _____ vihkan peastarvutamist _____

2. Kuivõrd sulle meeldib matemaatika?

(4) (3) (2) (1)
meeldib väga _____ meeldib _____ ei meeldi _____ vihkan matemaatikat _____

3. Kui sageli sa harjutad peastarvutamist?

(4) (3) (2) (1)
iga päev _____ sageli _____ väga harva _____ mitte kunagi _____

4. Peastarvutamise oskamine on sinule

(4) (3) (2) (1)
väga tähtis _____ tähtis _____ ei ole tähtis _____ ma ei vaja seda kunagi _____

5. Kas peastarvutamine on sinu arvates kerge?

Jah _____

Ei _____

Põhjenda miks:

.....
.....
.....

6. Kus sa kasutad peastarvutamist kõige rohkem?

(5) (4) (3) (2) (1)
kodus _____ koolis _____ poes _____ mängides _____ igal pool _____

7. Kui sageli sinu klassis peastarvutamist harjutatakse?

(4) (3) (2) (1)
igas matemaatikan tunnis _____ üks kord nädalas _____ harva _____ mitte kunagi _____

Aitäh!

Hea 3. klassi õpilane!

Õpilase number

A. PÄÄSSÄLASKUTEHTÄVÄT

Max 23 punkti.

Arvuta peast ja kirjuta ainult vastus. Ära kustuta! Valele vastusele tõmba joon peale ja kirjuta kõrvale õige vastus. Kui vaja, kirjuta arvutus joonele. (20 p.)

a)

1) $7 + 5 =$ _____

2) $17 - 8 =$ _____

3) $6 \cdot 8 =$ _____

4) $45 : 9 =$ _____

5) $64 + 3 =$ _____

6) $97 - 4 =$ _____

7) $83 + 9 =$ _____

8) $57 - 8 =$ _____

9) $47 + 35 =$ _____

10) $72 - 36 =$ _____

b)

11) $3 \cdot 17 =$ _____

12) $84 : 3 =$ _____

13) $0 \cdot 7 =$ _____

14) $23 - 0 =$ _____

15) $14 \cdot 1 =$ _____

16) $68 : 1 =$ _____

17) $34 + 23 + 6 =$ _____

18) $5 + 7 \cdot 6 =$ _____

19) $(48 - 16) : 4 =$ _____

20) $(12 + 4) \cdot 5 =$ _____

Arvuta peast. Kirjuta joonele ainult vastus. Ära kustuta! Valele vastusele tõmba joon peale ja kirjuta kõrvale õige vastus.

21) Pool kilo viinereid maksab 24 krooni. Kui palju maksab 1 kg viinereid? (1 p.)

22) Priit ostis 1 kg apelsine, mis maksavad 10 kr kilogramm ja 3 kg õunu kilohinnaga 7 krooni. Priit tasus ostu eest 50-kroonisega. Mitu krooni sai ta tagasi? (1 p.)

23) Punases karpis on 20 nõöpi. Sealt võetakse 5 nõöpi ja lisatakse sinisesse karpis. Nüüd on mõlemas karpis võrdne arv nõöpe. Mitu nõöpi oli algul sinises karpis? (1 p.)

B. SELIGITA PEASTARVUTAMINE

Õpilase number

Järgnevalt on samad ülesanded, mida sa juba arvutasid. Kirjuta joonele, kuidas sa mõtlesid ja arvutasid. Kirjuta, kas sa kasutasid abiks sõrmi või muid abivahendeid.

1) $64 + 3 =$

2) $72 - 36 =$

3) $6 \cdot 8 =$

4) $45 : 9 =$

5) $3 \cdot 17 =$

6) $84 : 3 =$

7) $34 + 23 + 6 =$

8) $(12 + 4) \cdot 5 =$

9) $(48 - 16) : 4 =$

11) Pool kilo viinereid maksab 24 krooni. Kui palju maksab 1 kg viinereid?

12) Priit ostis 1 kg apelsine, mis maksavad 10 kr. kilogramm ja 3 kg õunu kilohinnaga 7 krooni. Priit tasus ostu eest 50-krooniseaga. Mitu krooni sai ta tagasi?

13) Punases karpis on 20 nõöpi. Sealt võetakse 5 nõöpi ja lisatakse sinisesse karpis. Nüüd on mõlemas karpis võrdne arv nõöpe. Mitu nõöpi oli algul sinises karpis?

Aitäh!

C. Hea 3. klassi õpilane!

Õpilase number

Ole hea ja vasta järgmistel küsimustele. Vasta ausalt!

Olen poiss _____ olen tüdruk _____ olen _____ -aastane

Märgi sulle sobiv vastus ristiga (X):

1. Kuivõrd sulle meeldib peastarvutamine?

(4) (3) (2) (1)
meeldib väga _____ meeldib _____ ei meeldi _____ vihkan peastarvutamist _____

2. Kuivõrd sulle meeldib matemaatika?

(4) (3) (2) (1)
meeldib väga _____ meeldib _____ ei meeldi _____ vihkan matemaatikat _____

3. Kui sageli sa harjutad peastarvutamist?

(4) (3) (2) (1)
iga päev _____ sageli _____ väga harva _____ mitte kunagi _____

4. Peastarvutamise oskamine on sinule

(4) (3) (2) (1)
väga tähtis _____ tähtis _____ ei ole tähtis _____ ma ei vaja seda kunagi _____

5. Kas peastarvutamine on sinu arvates kerge?

Jah _____

Ei _____

Põhjenda miks:

.....
.....
.....

6. Kus sa kasutad peastarvutamist kõige rohkem?

(5) (4) (3) (2) (1)
kodus _____ koolis _____ poes _____ mängides _____ igal pool _____

7. Kui sageli sinu klassis peastarvutamist harjutatakse?

(4) (3) (2) (1)
igas matemaatikan tunnis _____ üks kord nädalas _____ harva _____ mitte kunagi _____

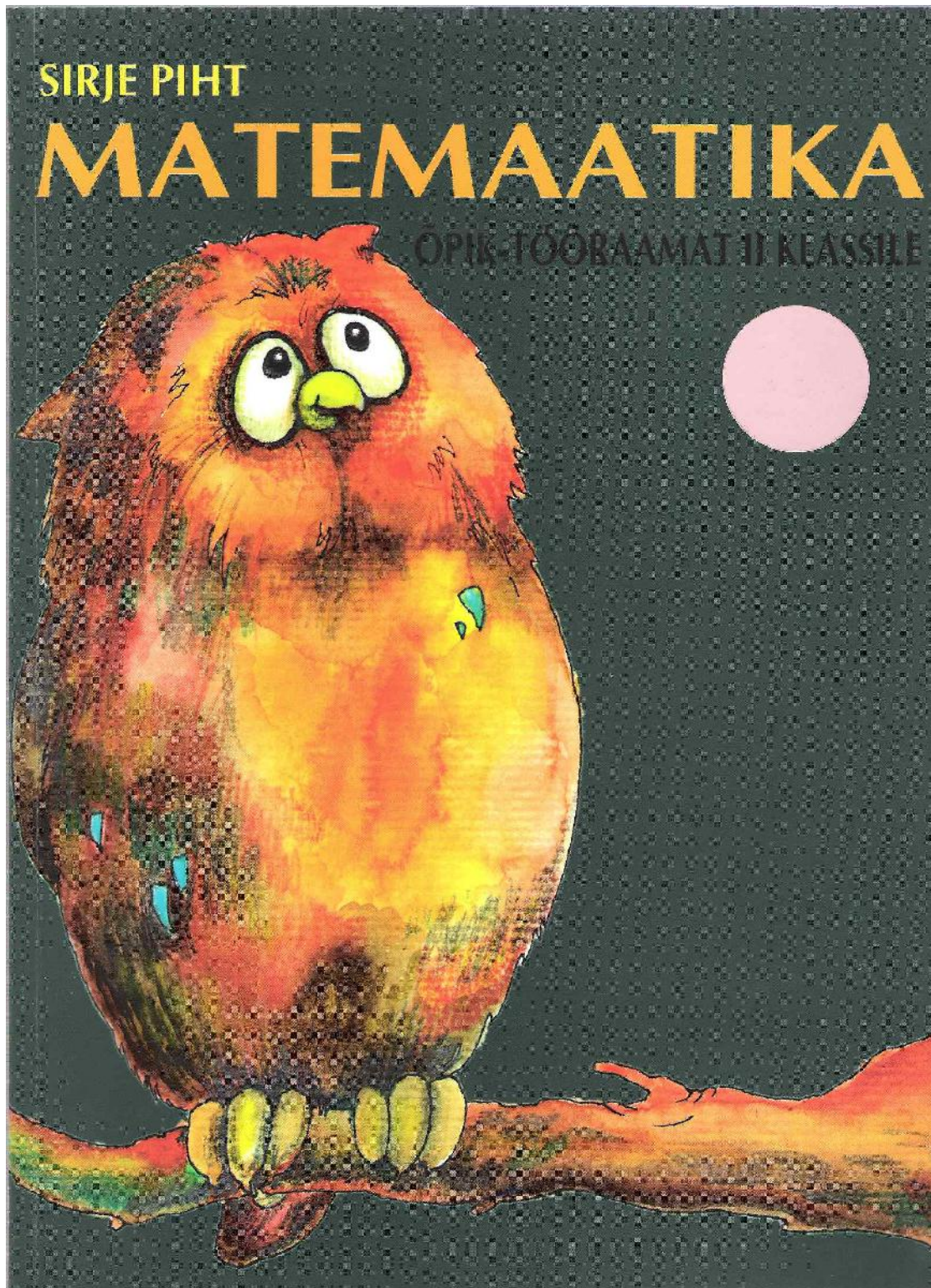
Aitäh!

Päässälasku tehtävätyypit luokittain

luokka	Päässälasku tehtäväsarja	Päässälasku tehtävätyyppi	Esimerkit
1. luokka	Päässälasku lukualueella 0-10	Yhteenlasku	3+2, 6+3
		Vähennyslasku	4-3, 8-4
	Päässälasku lukualueella 0-20	Yhteenlasku	12+5, 16+4
		Vähennyslasku	19-4, 20-8
Sanalliset päässälaskutehtävät	Lukualueella 0-10	5+3	
	Lukualueella 0-20	17-6	
2. luokka	Päässälasku lukualueella 0-100	Yhteen- ja vähennyslasku ilman kymmenen ylitystä	12+7, 24+12
		Yhteen- ja vähennyslasku kymmenen lukuun (kymmenenluvusta)	28+12, 76-46 50-14
		Yhteen- ja vähennyslasku kymmenen ylityksellä	53+8, 81-9
	Sanalliset päässälaskutehtävät	Yhteen- ja vähennyslasku ilman kymmenen ylitystä	14+12, 24+5
Yhteen- ja vähennyslasku kymmenen ylityksellä		37+18, 55+37	
3. luokka	Päässälasku lukualueella 0-100	Kahden luvun yhteen- ja vähennyslasku	64+3, 97-4, 47+35, 72-36
		Kolmen luvun laskeminen (myös sulut laskutehtävissä)	34+23+6
	Kertotaulu lukualueella 0-100	Kahden luvun kerto- ja jakolaskut	6 · 8, 3·17, 45:9, 84:3
		Kolmen luvun laskeminen (myös sulut laskutehtävissä)	5+7·6, (48-16):4
	Sanalliset päässälaskutehtävät	Kahden luvun kerto- ja jakolaskut	2·4
		Kolmen luvun laskeminen (myös sulut laskutehtävissä)	50-(2+4·3)
Kahden luvun yhteen- ja vähennyslasku		20-5, 15-5	

P.S. Kaikkien tehtävien hallinta edellytetään täällä luokalla, sekä Suomessa että Virossa.

Viron 2. luokan matematiikan oppikirja vuodesta 1996



Viron 2. luokan matematiikan oppikirja vuodesta 2004

