

**John-Tagore Tevet**

# **STRUKTUURISEMIOOTIKA KOKKUVÕTTEV KÄSITLUS**

## **Sisukord**

<b>Sissejuhatus</b>	<b>3</b>
<b>1. GRAAFI STRUKTUUR ehk STRUKTUURI GRAAF</b>	<b>5</b>
1.1. Struktuurimudel ja isomorfismiprobleem	5
1.2. Struktuuri regulaarsus ja sümmeetria	8
1.3. Struktuurimudel kui kanooniline „tekst“	13
<b>2. STRUKTUURIMUUTUSED</b>	<b>20</b>
2.1. Elementaarsed struktuurimuutused	20
2.2. Naaberstruktuurid ja Ulami hüpotees	23
2.3. Struktuuri genees	24
<b>Lõpetuseks</b>	<b>29</b>
<b>Kirjanduse loetelu</b>	<b>30</b>

ISBN 9789949333776

**S.E.R.R.**  
Tallinn 2013



## Sissejuhatus

Struktuurisemiootika on uurimisvaldkond *graafiteooria* ja *semiootika* piirimail. See tekkis huvist graafi struktuuri ja struktuurimuutustega seotud ilmingute vastu. Graafe on käsitlenud peamiselt *kombinatorika* aspektist [3, 13]. Tegelikult on graafid „mitmepalgelised“, paljuaspektilised moodustised ja nende ühekülgsel käsitlemisel piiratusel juhiti tähelepanu juba 1976 aastal [17]. Nüüdseks on neid erinevate autorite poolt uuritud ka *algebraalisest* [2], *algoritmilisest* [6, 10], *ekstreemsest* [5], *geomeetrisest* [8], *spektraalsest* [9], *topoloogilisest* [11], *tõenäosuslikust* [4] ja teistest aspektidest. Paraku pole paljud neist veel õppekavadesse jõudnud.

Ikkagi leidub graafidel veel „varjatud külgi“ mille tundmaõppimiseks vajame uusi lähenemisi, meetodeid ja algoritme. Antud juhul on seda tehtud graafi struktuuri *semiootilisest aspektist*, mis avaldub siin struktuursete invariantide tõlgendamise näol [24-43].

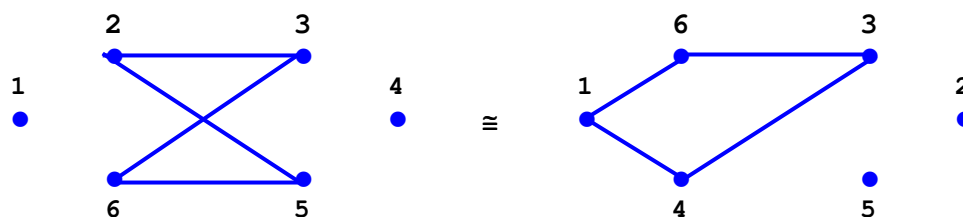
Semiootikat iseloomustab pluralism, *semiootikavälja* ehk *semiosfääri* kuuluvad nii kultuurisemiootika kui ka arvutisemiootika. Semiootika on seotud ka *informaatika* ja *intellektitehnikaga*.

Struktuurisemiootika baasil seostuvad omavahel kolm *elementidest (osistest)* ja nendevahelistest *seostest (suhetest)* koosnevat moodustist, need on *süsteem*, *struktuur* ja *graaf*. Süsteem on kooslus kus olulist rolli mängivad selle elementide ja nendevaheliste seoste *empüüriilised omadused*, samuti selle *funktsioon* ja *struktuur*. Struktuur kujutab endast süsteemse objekti *korrastruktuurlikku*, *siseehituslikku külge* [19, 23]. Struktuur on seotud *invariantsuse* ja *isomorfismiga* ning esitatakse *graafi* kujul. Isomorfsed graafid omavad ühesugust struktuuri [35].

Struktuurisemiootiline lähenemine on *heuristiline*. Heuristika, kui nõ segaste nähtuste selgitamise ja formaliseerimise alane tegevus seisneb siin graafina esitatava *struktuuri elementidevaheliste suhete* kindlaksmääramises ja formaliseerimises. *Semiootika*, kui märgisüsteeme käsitleva distsipliini roll avaldub aga nende formaliseeritud suhete ja teiste struktuursete atribuutide interpreteerimises ja tähenduse omistamises ehk *märgendamises*.

Struktuuris omavad erilist tähendust selle elementide *struktuursed positsioonid*. Positsioonid on struktuuri lahutamatud atribuudid nii nagu seda on ahelad (teed), tsüklid (vööd), klikid jt. Positsioon on *ekvivalentsusklass*, mida rühmateooria aspektist *AutG automorfismide transitivsuspiirkonnaks* ehk *orbiidiks* nimetatakse [29, 34, 37]. Erinevus seisneb siin vaid nende tuvastamise tehnikas. Ainuüksi rühma *AutG* orbiitide põhjal ei ole võimalik tuvastada elementidevahelisi suhteid ega struktuuri.

Näide 1. Kaks kuuelemendilist ühesuguse struktuuriga ehk isomorfset graafi:

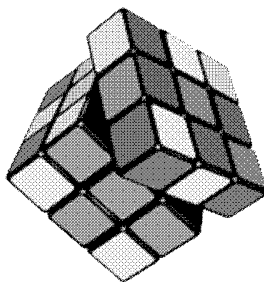


Selgitus:

Nende graafide elemendid (tipud) jagunevad *kahte positsiooni*, antud juhul nõ „sidusasse“, vastavalt (2, 3, 5, 6) ja (1, 3, 4, 6) ning „mittesidusasse“ positsiooni (1, 4) ja (2, 5).

Lihtsalt ja piltlikult võib *süsteemi*, *struktuuri*, *positsiooni* ja *invariandi* mõisteid selgitada *Rubiku kuubiku* alusel. Selle 54-elementilise mänguasja põhifunktsioon seisneb tema erivärviliste elementide vaheliste naabrussuhetega manipuleerimises. Seda teeme siingi, kuid mitte tavapäraselt.

Näide 2. Rubiku kuubiku puhul vaadeldem kaht momenti: 1) Missuguseid *positsioone* omavad kuubiku elemendid? 2) Kas kuubiku kihti pöörates muutub selle *süsteem* või *struktuur*?



Selgitused:

- a) Rubiku kuubiku igal tahul on üks element *keskel*, neli elementi *servades* ja neli elementi *nurkades*. Seega moodustavad kuubiku 6 elementi „*keskpositsiooni*“, 24 elementi „*nurkpositsiooni*“ ja 24 elementi „*servpositsiooni*“.
- b) Kihti suvaliselt pöörates *muutub süsteem* selle elementide empiiriliste (värvidevaheliste) suhete mõttes, kuid *struktuur ei muutu*, kuna elementide *positsioonid ei muutu*, need on *invariantsed*. Näiteks, tahu *keskel* olev märgistatud element jääb tahku pöörates ikka *keskele*, jne.
- c) Rubiku kuubik on esitatav struktuuri säilitava sidusa *graafina* mille igal elemendil (tipul) on neli naabrit: „ülemine“, „alumine“, „parem-“ ja „vasak“ ning kus selle 54 tippu jagunevad eelmainitud *kolme positsiooni*.

Struktuurisemiootika keskne atribuut on struktuuri elementidevaheliste formaliseeritud suhete, *binaarsuhete*, korrastamise teel saadud *struktuurimudel* (varem on nimetatud ka semiootiliseks mudeliks). Struktuurimudel esitab graafi struktuuri *binaarsuhete, positsioonide ja isomorfismi täpsusega*. See mudel avab struktuuri „varjatud külgi“, selle baasil on võimalik lahendada mõningaid klassikalisi probleeme mitteklassikalisel, lihtsamal viisil, samuti püstitada ja lahendada uusi. Esile tuua võiks siin isomorfismi, positsioonide, sümmeetriaomaduste, binaarmärkide täpsustamise ja lihtsustamise ning struktuurimuutustega seotud probleemid.

Võib väita ka, et struktuurimudel kujutab endast struktuuri esitavat „teksti“, selle elementidel on *märgiline tähendus* [26]. Märk seotud tunnetuse ja mõtlemisega, sellest on välja loetav huvipakkuv teave objekti kohta.

Paljude empiiriliste objektide nagu *keemiliste ühendite, ökoloogiliste koosluste, geneetiliste moodustiste, kommunikatsioonivõrkude jt* struktuur on esitatav graafi, seega ka struktuurimudeli kujul. See võimaldab neid uurida ja käsitleda struktuursest aspektist [42].

Struktuurisemiootika alaseid teavikke ja artikleid on viimase kahekümne aasta jooksul avaldatud ligi poolsada kus on kajastatud selle valdkonna erinevaid tahke. Siin viidatakse peamiselt vaid mõnede eestikeelsetele teavikele. Käesolevaga tehakse katse kõik oluline elementaarselt ja näitlikustatult kokku võtta. Oluliste seaduspärasuste eristamisest propositsioonide kujul ei pääse siingi. Orienteerumise kergendamiseks on mõned kesksed sätted esitatud paksus kirjas.

# 1. GRAAFI STRUKTUUR ehk STRUKTUURI GRAAF

## 1.1. Struktuurimudel ja isomorfismiprobleem

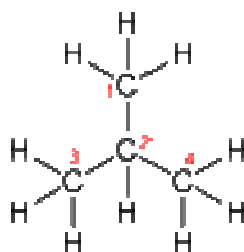
Tõepoolest, graaf esitab struktuuri ja struktuur on esitatav graafina. Lähtugem hüpoteetilisest kuid töötavast printsiibist, et struktuur  $S$  on graafi  $G$  isomorfismi täpsusega *identifitseeritav (möödetav) atribuut*:

$$S = \mathfrak{F}(G)$$

Identifitseerigu graafi *binaarsuhteid* (tipupaare  $ij$ ) nende vaheliste *ümbruste ühisosa*  $N_i \cap N_j$  kujutav alamgraaf ehk *binaargraaf*  $g_{ij}$ . Vastav algoritm *SIA* fikseerib iga tipupaari jaoks selle binaargraafi  $g_{ij}$  *invariandineliku*  $\pm d.n.m.$  <sub>$ij$</sub>  ehk *binaarmärki*, kus  $+d$  on *kolateraalne-* ja  $-d$  *tavakaugus*,  $n$  – tippude ja  $m$  – servade arv selles alamgraafis. Binaarmärkide korrastatud (dekomponeeritud) süsteem – *struktuurimudel SM* – tuvastab nii binaarsuhteid kui ka positsioonid [21, 27, 28, 40].

Binaarmärk on *semiootiline identifikaator*. Struktuurimudel kujutab endast *struktuuri kanoonilist esitist*, mis on põhiline vahend *struktuuri uurimiseks*. Struktuurist rääkides eelistagem *tipu* asemel kasutada sõna *element*, ja *serva* asemel *seos*.

Näide 1.1. *Isobutaan* on isomeeride rühma kuuluv süsivesinik valemiga  $C_4H_{10}$ . Isobutaani struktuurivalem, binaarmärgid ja struktuurimudel **SM**:



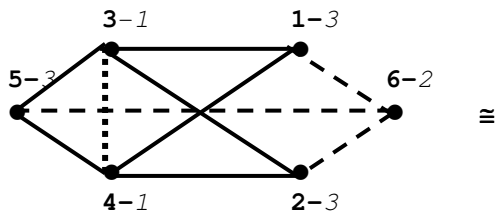
$$A: -4.5.4; \quad B: -3.4.3; \quad C: -2.3.2; \\ D: +1.2.1.$$

														$u_i$				$s_i$			
														$a$	$i$	$ABCD$	$k$	$1234$			
2   1   3   4   11   5   6   7   8   9   10   12   13   14	C   C   C   C   H   H   H   H   H   H   H   H   H   H	0   D   D   D   D   -C   -C   -C   -C   -C   -C   -C   -C   -C	0   -C   -C   -C   -C   D   D   D   -B   -B   -B   -B   -B   -B	0   -C   -C   -B   -B   -B   -B   D   D   D   -B   -B   -B	0   -C   -B   -B   -B   -B   -B   -B   D   D   D	0   -B   -B   -B   -B   -B   -B   -B   -B   -B	0   -C   -C   -A   -A   -A   -A   -A   -A	0   -C   -A   -A   -A   -A   -A   -A	0   -A   -A   -A   -A   -A   -A	0   -C   -C   -A   -A   -A	0   -C   -A   -A   -A	0   -A   -A   -A	0   -C   -C	0   -C	0	C	2	0094	1	0310	
																C	1	0634	2	1003	
																C	3	0634	2	1003	
																C	4	0634	2	1003	
																H	11	0931	3	1000	
																H	5	6331	4	0100	
																H	6	6331	4	0100	
																H	7	6331	4	0100	
																H	8	6331	4	0100	
																H	9	6331	4	0100	
																H	10	6331	4	0100	
																H	12	6331	4	0100	
																H	13	6331	4	0100	
																H	14	6331	4	0100	

Selgitused:

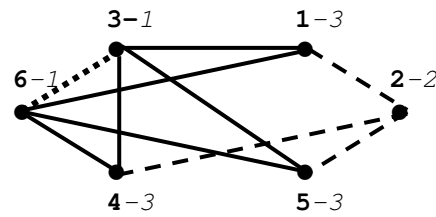
- Kahe elemendi C ja H jagunemine nelja positsiooni ei tohiks küsimusi tekitada.
- Mudeli veerg  $u_i$  koosneb *sagedusvektoritest*, mis kokkuvõtlikult esitavad antud elemendi  $i$  suhteid teiste elementidega. Samade vektorite  $u_i$  alusel on järjestatud positsioonid mudelis.
- Mudeli veerg  $s_i$  koosneb *positsioonivektoritest*, mis esitavad elemendi  $i$  seotust vastavatel positsioonidel  $k$  asuvate elementidega. Kui sagedusvektorite raames esineb positsioonivektorite erinevusi, siis tehakse viimaste abil täiendav klassijaotus.

Näide 1.2. Graafid  $G_A$  ja  $G_B$ , nende binaarmärgid ja struktuurimudelid  $SM_A$  ja  $SM_B$ :



$A: -2.5.7; B: -2.5.6;$   
 $C: +2.3.3; D: +2.5.7; E: +3.6.10.$

							$u_i$	$s_i$		
1	1	2	3	3	3		$i$	$k$	$123$	
3	4	6	1	2	5		3	01310	1	103
0	D	-B	C	C	C		4	01310	1	103
	0	-B	C	C	C		3	01310	1	103
	0	E	E	E	E		6	02003	2	003
	0	-A	-A				1	20201	3	210
		0	-A				2	20201	3	210
		0					5	20201	3	210



$A: -2.5.7; B: -2.5.6;$   
 $C: +2.3.3; D: +2.5.7; E: +3.6.10.$

							$u_i$	$s_i$		
1	1	2	3	3	3		$i$	$k$	$123$	
3	6	2	1	4	5		3	01310	1	103
0	D	-B	C	C	C		3	01310	1	103
	0	-B	C	C	C		6	01310	1	103
	0	E	E	E	E		2	02003	2	003
	0	-A	-A				1	20201	3	210
		0	-A				4	20201	3	210
		0					5	20201	3	210

Selgitused:

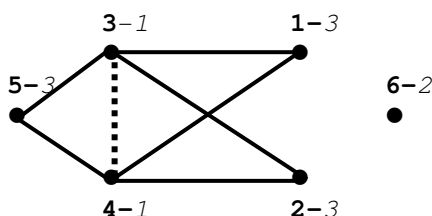
- Erinevad graafid  $G_A$  ja  $G_B$  omavad siin ekvivalentseid struktuurimudeleid  $SM_A$  ja  $SM_B$ ! See tähendab, et struktuurid on *ekvivalentsed* ehk graafid on *isomorfsed*  $G_A \cong G_B$ .
- Struktuuri elemendid jagunevad *kolmeks positsiooniks*  $\Omega_k$  ning elemendipaarid *viieks positsiooniks*  $\Omega_n$ , sh naaberelemendid ehk seosed *kolmeks binaarpositsiooniks* (täisjoon, punktiir, kriipsjoon), mis antud juhul langevad kokku binaarmärkidega, vastavalt  $C, D, E$ .

Semiootika avaldub siin binaarmärkide  $\pm d.n.m.$  tähenduses [26]. Miinusmärgiga, st binaar(-)märgi esimene liige esitab lühima tee ehk kauguse  $-d$  elementide  $i$  ja  $j$  vahel, kus see on fikseeritud kõiki vastavaid teid (ahelaid) pidi. Binaarmärgi teine liige esitab elementide arvu  $n$  ja kolmas liige seoste arvu  $m$  vastavas binaargaafis. Mittesidusaid elemente esitab binaarmärk  $-u.2.0$ . Plussmärgiga, st, binaar(+)märgi esimene liige esitab omavahel seotud elementide (naaberelementide) vahelise kolateraalse kauguse  $+d$ , st antud elemendipaari (ja nendevahelise seose) kuulumist ringi(desse) (vöödesse) pikkusega  $+d+1$ . Erandi moodustab siin hargnevust ehk „oksa“ lüli iseloomustav binaarmärk  $+1.2.1$  mis esitab kauguse  $d=1$ , seda kaugust iseloomustavate elementide arvu  $n=2$  ja seoste arvu  $m=1$ .

Siin võib märkida, et esimene primitiivne „kauguste maatriks“ esitati juba 1973. aastal S. Toida poolt [46] kui isomorfismi tuvastamise atribuut. Tõepoolest võib kauguste maatriksi abil tuvastada küllaltki paljude graafide puhul nende isomorfismi või mitteisomorfismi, kuid see ei ole kaugeltki mitte usaldusväärne.

Näide 1.3. Graafi  $G_A$  (Näide 1.2) tipupaari 3-4 ( $D: +2.5.7$ ) ehk seost (punktiir) iseloomustav *binaargraaf*  $g_{3,4}$ , selle binaarmärgid ja struktuurimudel  $SM_{3,4}$ :

$A: -2.4.5; B: -u.2.0; C: +2.3.3; D: +2.5.7.$

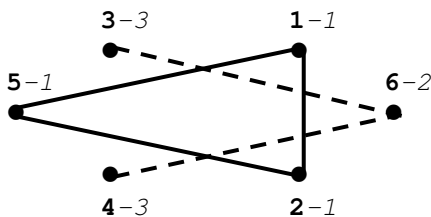


							$u_i$	$k$	$s_i$	
1	1	2	3	3	3		$i$	$k$	$123$	
3	4	6	1	2	5		3	01311	1	103
0	D	-B	C	C	C		3	01311	1	103
	0	-B	C	C	C		4	01311	1	103
	0	-B	-B	-B			6	05000	2	000
	0	-A	-A				1	21200	3	200
		0	-A				2	21200	3	200
		0					5	21200	3	200

Struktuuri käsitlemisel on soovitatav vaadelda ka selle *täiendit*, see avab struktuuri kui terviku.

Näide 1.4. Graafi  $G_A$  (Näide 1.2) täiend  $\mathcal{G}_A$  ja selle struktuurimudel  $SM$ :

$$A: -2.3.2; \quad B: -u.2.0; \quad C: +1.2.1; \quad D: +2.3.3.$$



	1	1	1	2	3	3		$u_i$	$k$	$s_i$
	1	2	5	6	3	4	$i$	ABCD		123
	0	D	D	-B	-B	-B	1	0302	1	200
		0	D	-B	-B	-B	2	0302	1	200
			0	-B	-B	-B	5	0302	1	200
				0	C	C	6	0320	2	002
					0	-A	3	1310	3	010
						0	4	1310	3	010

Selgitused:

- Graafi  $G_A$  ja selle täiendi  $\mathcal{G}_A$  elemendipositsioonid  $\Omega V_k$  langevad kokku, kuid kuna algoritm järjestab positsioonid uute sagedusvektorite  $u_i$  järgi, siis on antud juhul tegemist üks-ühese vastavusega: antud juhul  $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1$ .
- Kokku langevad ka binaarpositsioonid  $\Omega R_n$ , kuid viimased on täiendil vastupidise märgiga, st  $G_A$  igale binaar(+)positsioonile („servapositsioonile“) vastab  $\mathcal{G}_A$  binaar(-)positsioon („mitteserva positsioon“), ja vastupidi. Täiendil  $\mathcal{G}_A$  on kaks binaar(+)positsiooni (täisjoon ja kriipsjoon).

**Propositsioon 1.1.** Graafid  $G$  ja  $H$  isomorfised  $G \cong H$  parajast siis kui nende struktuurimudelid on ekvivalentsed,  $SM_G \approx SM_H$ . [27, 36, 37, 40].

**Isomorfismiprobleem** kujutab endast kahe graafi isomorfismi tuvastamise algoritmi konstrueerimist. Graafid on isomorfised parajasti siis kui nad erinevad vaid elementide nummerduse ja/või asetuse poolest. Graafi  $G_A$  isomorfne kujutus graafi  $G_B$  on bijektsioon  $\varphi: V_A \rightarrow V_B$ :

$$\begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_i & \dots & v_n \\ \varphi(v_1) & \varphi(v_2) & \dots & \varphi(v_i) & \dots & \varphi(v_n) \end{matrix}$$

Isomorfismi tuvastamise ainuke „rangelt põhjendatud“ algoritm seisneb graafi  $G_B$  seosmaatriksi ridade ja veergude ümberpaigutamises seni, kui see langeb kokku graafi  $G_A$  seosmaatriksiga. Paraku läheneb selle sammude arv  $n!$  ( $n$ -faktoriaalini). Pea kõikides olemasolevates isomorfismituvastuse heuristilistes algoritmides on püütud seda erinevatel viisidel vältida. Näiteks algoritmis [7] kasutatakse küll mittetäielikke struktuurimudeleid kuid isomorfismituvastamine on viidud siiski tipubijektsioonide tasemele. Algoritm [20] ei küüni tipubijektsioonideni kuid võimaldab mõõta struktuuride „sarnasust“ [36, 37]. Struktuurimudelite moodustamise ja nende ekvivalentsuse tuvastamise käib viisil mille puhul oleks kohatu rääkida selle algoritmi suurest keerukusest.

**Propositsioon 1.2.** Struktuurimudelite ekvivalentsuse  $SM_A \equiv SM_B$ , seega ka vastavate graafide isomorfismi kindlaksmääramise tarvilikuks ja piisavateks tingimusteks on:

- binaarmärgijadade  $\{\pm d.n.m.ij\}_A$  ja  $\{\pm d.n.m.ij\}_B$  kokkulangevus;
- sagedusvektorite  $\{u_i\}_A$  ja  $\{u_i\}_B$  kokkulangevus;
- positsioonivektorite  $\{s_i\}_A$  ja  $\{s_i\}_B$  kokkulangevus.

Arvatavasti ei vaja fakt, et isomorfsetel graafidel on ühesugune struktuur, mis avaldub struktuurimudelite ekvivalentsuse näol, siin enam üleselgitamist. Kuid lisagem:

- Isomorfism on üks-ühene vastavus elementide tasemel.
- Isomorfismituvastus ei tuvasta struktuuri, kuid struktuurimudel tuvastab struktuuri nõ isomorfismi täpsusega.
- Struktuurimudelite ekvivalentsus on kokkulangevus binaarmärkide, binaar- ja elemendipositsioonide tasemel.
- Positsioonide kindlaksmääramine binaarmärkide vahendusel on märgatavalt lihtsam kui orbiitide tuvastamine rühma  $AutG$  põhjal.
- Mõnede sümmeetriliste graafide puhul on nõutav binaarmärkide täpsustamine (Prop. 1.8).

## 1.2. Struktuuri regulaarsus ja sümmeetria

Juhuslike graafide puhul esineb regulaarsust ja sümmeetriat küll väga harva, kuid seda intrigeerivam see on. Sümmeetriaga on graafide puhul tekkinud segadusi. Mõned nimetavad sümmeetriliseks lihtgraafi, kuna selle servad ei ole suunatud. Teised nimetavad sümmeetriliseks tippudest või servadest transitiivset graafi, kus transitiivsuse all mõeldakse rühma *AutG* elementide automorfismide transitiivsuspiirkonda ehk orbiiti. Viimasega tuleb nõustuda. Ka transitiivsuse mõiste kasutamise on möödarääkimisi kuna leidub neid kes seostavad seda vaid suunatud graafidega.

**Sümmeetria eelduseks on regulaarsus, kuid mitte vastupidi. Regulaarsusi on mitu ja need on struktuurimudelid lihtsalt välja loetavad [37, 38, 40]. Määratlegem need.**

### Definitsioonid 1.1. Regulaarsuse liigid:

- D1.1.1. Struktuur (graaf), mille struktuurimudeli *SM* iga elemendi binaar(+)märkide *+dnm* arv  $\nu$  on konstantne on  *$\nu$ -valents-regulaarne*.
- D1.1.2. Valentsregulaarne struktuur (graaf), mille struktuurimudeli *SM* kõikide binaar(-)märkide *-dnm* osamärgid *-d* on konstantsed on *d-distants-regulaarne*.
- D1.1.3. Valentsregulaarne struktuur (graaf), mille struktuurimudeli *SM* kõikide binaar(+)märkide *+dnm* osamärgid *+d* on konstantsed on *(d+1)-vöö-regulaarne*.
- D1.1.4. Valentsregulaarne struktuur (graaf), mille iga element kuulub klikki võimsusega  $n < |V|$  on *n-kliik-regulaarne*, kus  $|V|$  on struktuurielementide arv.
- D1.1.5. Valentsregulaarne struktuur (graaf), mille iga naaberelementide paar omab  $a \geq 0$  ühist naabrit ja mitte-naaberelementide paar  $b \geq 1$  ühist naabrit on *tugev-regulaarne*.

Näiteid regulaarsuste kohta vt Näide 1.6. Soovitav on tunda ka neid puudutavaid seaduspärasusi.

### Propositsioonid 1.3. Regulaarsuste seaduspärasusi:

- P1.3.1. *Kliik-* (või *vöö-*) *regulaarse* struktuuri iga element  $\nu_i$  kuulub parajasti  $a \geq 1$  klikki (vöösse) ja iga seos  $e_{ij}$  parajasti  $b \geq 1$  klikki (vöösse).
- P1.3.2. *Kliikregulaarse* struktuuri klikid on *komponentsed, sidusad* või *lõikuvad*. Lõikuvus võib esineda kas elementide või seoste tasemel.
- P1.3.3. Arv  $m$  *komponentsest n-klikist* koosneva struktuuri *täiend* on *m-aluseline täisgraaf*, st on *n-m-kliik* – ja vastupidi.

Suurus	Graaf	Selle täiend
$m$	Komponentsete klikkide arv	Aluste arv
$n$	Komponentsete klikkide võimsus	Aluste võimsus

- P1.3.4.  $m$ -aluselise struktuuri täiend on võrdsete aluste  $n$  puhul *n-kliikregulaarne*, mittelõikuvate  $n$ -klikkide arvuga  $m$ .
- P1.3.5. *n-m-kliik* sisaldab (tava)klikki võimsusega  $m$ , see on *m-kliikregulaarne* (st bi-kliik on 2-kliik-regulaarne, tri-kliik 3-kliik-regulaarne jne).
- P1.3.6. Kõik *n-m-klikid* on *tugevregulaarsed*, kuid mitte vastupidi.
- P1.3.7. Tugevregulaarse struktuuri *sidus täiend* on tugevregulaarne.

Ollakse väga harjunud nõrgesümmeetriaga ning tõrgutakse kuulda võtmast, et *sümmeetria* on struktuurne omadus mis avaldub objekti ühetaoliste elementide (osiste) kordumises ruumis või ajas [19, 23]. Tõepoolest, mida suurem(ad) on positsioon(id) seda suurem on struktuuri sümmeetria. Struktuuri *sümmeetria* sõltub positsioonide arvust ja suurusest [29, 33, 34, 40]. On osutunud tarvilikuks määratleda sümmeetria liigid.

### Definitsioonid 1.2. Sümmeetria liigid:

- D1.2.1. *Täisstruktuuril* (-graafil) on *üks* elemendi-  $\Omega V_k$  ja *üks* binaarpositsioon  $\Omega R_n$  ning see on *täissümmeetriline*.
- D1.2.2. *Transitiivsel* struktuuril (graafil), nagu seda graafiteoorias tihti nimetatakse, on *üks* elemendipositsioon  $\Omega V_k$  ning see on *elementidest sümmeetriline*.



- D1.2.3. *Elementidest sümmeetriline* struktuur (graaf), millel on üks binaar(+)positsioon  $\Omega R_n^+$  („servapositsioon“) ja üks binaar(-)positsioon („mitteservapositsioon“)  $\Omega R_n^-$  on *bisümmeetriline* (vt Näide 1.6).
- D1.2.4. *Elementidest sümmeetriline* struktuur (graafi), millel on üks binaar(+)positsioon  $\Omega R_n^+$  ja mitu binaar(-)positsiooni  $\Omega R_n^-$  on *seostest sümmeetriline* ehk (+)sümmeetriline (näiteks Hamiltoni graaf, Heawoodi graaf).
- D1.2.5. *Elementidest sümmeetriline* struktuur (graaf), millel on mitu binaar(+)positsiooni  $\Omega R_n^+$  ja mitu binaar(-)positsiooni  $\Omega R_n^-$  on *polü-sümmeetriline* (vt Näide 1.8).
- D1.2.6. Struktuuri (graafi), mis *ei ole* elementidest sümmeetriline, st millel on *rohkem kui üks* elemendipositsioon  $\Omega V_k$ , kuid omab *üht* binaar(+)positsiooni  $\Omega R_n^+$  on *semi-sümmeetriline* (vt Näide 1.5).
- D1.2.7. Struktuuri (graafi), mis *ei ole* elementidest sümmeetriline, st millel on *rohkem kui üks* elemendipositsioon, kusjuures nendest *vähemalt ühte* positsiooni  $\Omega V_k$  kuulub *vähemalt kaks* elementi on *ositi sümmeetriline* (vt Näited 1.1 – 1.4, 1.7, 2.1, 2.2).
- D1.2.8. Struktuuri (graafi), mille elemendipositsioonide  $\Omega V_k$  arv  $K$  võrdub elementide arvuga  $|V|$  on *0-sümmeetriline* ehk (*täis*)*asümmeetriline* (vt Näide 1.9).

Sümmeetria on mõõdetav [27, 29, 37]. *Sümmeetria mõõt* sõltub positsioonide võimsusest ja arvust, mis on esitatavad *sümmeetria märkide* kujul.

Definitsioonid 1.3. Sümmeetria märgid:

- D1.4.1. Vektor elementidega  $|\Omega V|^m$ , kus  $|\Omega V|$  on tipuorbiidi võimsus ja  $m$  antud võimsusega positsioonide arv, kujutab endast *elementsümmeetria märki SVV*.
- D1.4.2. Vektor elementidega  $|\Omega R|^m$ , kus  $|\Omega R|$  on binaarorbiidi võimsus ja  $m$  antud võimsusega positsioonide arv, kujutab endast *binaarsümmeetria märki SRV*.

Näites 1.2 esitatud struktuuri GS22 (Graafiatlases [22] G189) elemendisümmeetria märk  $SVV = 1^2 3^1$ , binaarsümmeetria märk  $SRV = 1^2 3^2 6^1$ , sh „servasümmeetria“ märk  $SEV = 1^1 3^1 6^1$ .

Nende alusel on Shannoni valemi abil struktuuri *binaarinfo maht HR* kus *binaarsümmeetria mõõt* avaldub kujul  $SR = 1 - HR : \log |R|$ , kus  $0 \leq SR \leq 1$ . Sama struktuuri *binaarinfo maht HR* = 2.106, *binaarsümmeetria mõõt SR* = 0.461, sh *seossümmeetria* („servasümmeetria“) *mõõt SE* = 0.610 ning *elementsümmeetria* („tipusümmeetria“) *mõõt SV* = 0.478.

Sümmeetria ja regulaarsus on omavahel seotud.

Propositsioonid 1.4. Sümmeetria ja regulaarsuse suhetest:

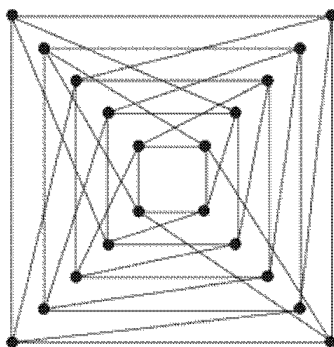
- P1.4.1. *Elementidest sümmeetriline (transitiivne)* struktuur on *valents-* ja *vöö-* või *klikk-regulaarne*.
- P1.4.2. *Seostest sümmeetrilise vööregulaarse* struktuuri *täiend* on *klikkregulaarne* ja vastupidi.
- P1.4.3. Sidus *bisümmeetriline* struktuur on *tugevregulaarne*, peale selle ka *vöö-*, või *klikk-regulaarne*.
- P1.4.4. Sidusa *bisümmeetrilise* struktuuri tugevregulaarsus on kahe binaarmärgi  $+d.n.m$  olemasolu näol mõõdapääsmatu, sest  $+d=2$  puhul tähendab  $n-2$  just elemendipaari *ühiste naaberelementide arvu*.
- P1.4.5. Kui regulaarse struktuuri kõik  $m$  komponentset klikki on *võrdse võimsusega n*, siis on struktuur ja selle täiend *bisümmeetrilised*.
- P1.4.6. Regulaarne *bisümmeetriline n-m-klikk* sisaldab  $s=n^m$  (*tava*)klikki võimsusega  $m$ . Bisümmeetrilise *n-m-kliki* seoste arv  $E$  võrdub aluste võimsuse ruudu  $n^2$  ja nende arvule  $m$  vastava tavakliki servade arvu korrutisega.

Sümmeetrilised graafid omavad *positsioonistruktuure* [27, 29, 30, 33, 37, 40].

Definitsioon 1.4. *Positsioonistruktuur GS<sub>n</sub>* on *ühte binaarpositsiooni ΩR<sub>n</sub>* kuuluvatest elemendipaaridest koosnev struktuur. Struktuuri positsioonistruktuuride arv võrdub binaarpositsioonide arvuga.

Positsioonistruktuurid avavad käsitletava struktuuri mitmesuguseid „varjatud külgi“, mis vahest ka „müstilisteks“ osutada võivad. Põhimõtteliselt on positsioonistruktuurid, kui struktuuri osised, sama paratamatud kui katted, klikid ja teised atribuudid, mille tuvastamist väga praktiliseks ja vajalikuks peetakse.

Näide 1.5. Folkmani kahealuseline ja semi-sümmeetriline  $Fol$ , selle binaarmärgid, struktuurimudel ja positsioonistruktuuride  $GS_n$  loetelu:



$A:-4.14.21$ ;  $B:-3.8.10$ ;  $C:-2.6.8$ ;  $D:-2.4.4$ ;  $E:-2.3.2$ ;  $F:+3.6.8$ .

																				$u_i$	$k$	$s_i$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$i$	ABCDEF		
0	-E	-E	-E	-E	-E	-E	-E	-E	-C	F	-B	-B	F	-B	F	-B	-B	-B	-F	11	061084	1	04
0	-E	-E	-E	-E	-E	-E	-C	-E	-B	F	-B	-B	F	-B	-B	-B	-B	F	F	12	061084	1	04
0	-E	-E	-E	-E	-C	-E	-E	-E	F	-B	F	-B	-B	-B	-B	-B	F	F	B	13	061084	1	04
0	-E	-E	-C	-E	-E	-E	-E	-B	F	-B	F	-B	-B	-B	F	F	-B	-B	14	061084	1	04	
0	-C	-E	-E	-E	-E	-E	-B	-B	F	-B	F	F	F	-B	-B	-B	15	061084	1	04			
0	-E	-E	-E	-E	-E	-B	-B	F	-B	F	F	F	F	-B	-B	-B	16	061084	1	04			
0	-E	-E	-E	-E	-B	-B	F	-B	F	-B	-B	F	F	-B	-B	17	061084	1	04				
0	-E	-E	F	-B	F	-B	-B	-B	-B	F	F	-B	18	061084	1	04							
0	-E	-B	F	-B	-B	F	-B	-B	-B	F	F	19	061084	1	04								
0	F	-B	-B	F	-B	F	-B	-B	-B	F	20	061084	1	04									
0	-A	-D	-D	-A	-D	-A	-D	-D	-D	1	360604	2	40										
0	-A	-D	-D	-A	-D	-D	-D	-D	2	360604	2	40											
0	-A	-D	-D	-D	-D	-D	-A	3	360604	2	40												
0	-A	-D	-D	-D	-A	-D	4	360604	2	40													
0	-D	-D	-A	-D	-D	5	360604	2	40														
0	-D	-A	-A	-D	6	360604	2	40															
0	-D	-A	-A	7	360604	2	40																
0	-D	-A	8	360604	2	40																	
0	-D	9	360604	2	40																		
0	10	360604	2	40																			

Selgitusi:

- Graaf  $Fol$  jaguneb vastavalt oma binaarpositsioonidele  $-A$ ,  $-B$ ,  $-C$ ,  $-D$ ,  $-E$  ja  $F$  kuueks positsioonistruktuuriks:
- Binaarpositsioonile  $-A$  vastav positsioonistruktuur  $Fol_{n=-A}$  on **Peterseni graaf** (vt Näide 1.6). See tähendab, et  $Fol$  täiendi struktuurimudeli alumises segmendis  $SM_{2,2}$ , on sealse  $-A$  asemel märk  $+4.10.15$  ja sealse  $-D$  asemel  $-2.3.2$  ning see segment on ekvivalentne Peterseni struktuurimudeliga.
- Binaarpositsioonile  $-B$  vastav positsioonistruktuur  $Fol_{n=-B}$  osutub V. Titovi [45] poolt konstrueeritud kahealuseliseks semi-sümmeetriliseks graafiks, mille üks positsioonistruktuur on teada olevalt samuti **Peterseni graaf**.
- Binaarpositsioonile  $-C$  vastav positsioonistruktuur  $Fol_{n=-C}$  on **10-komponentne**, 2-klikkidest koosnev graaf. Antud juhul on 2-kliki üks tipp paaris- ja teine paaritunumbriline.
- Binaarpositsioonile  $-D$  vastav positsioonistruktuur  $Fol_{n=-D}$  osutub **Peterseni graafi täiendiks(!)**, st Peterseni graafi teiseks positsioonistruktuuriks.
- Binaarpositsioonile  $-E$  vastav positsioonistruktuur  $Fol_{n=-E}$  on positsioonistruktuuri  $Fol_{n=-C}$  täiend, st **2-kvinta klikk**.
- Binaarpositsioonile  $+F$  vastav positsioonistruktuur  $Fol_{n=+F}$  on muidugi **Folkmani graaf** ise.

Positsioonistruktuuride tähtsus seisneb struktuursete omaduste selgitamises. Need tuvastavad ka erinevate struktuuride ühesuguseid osiseid. Näiteks võib väita, et 20-tipulised semi-sümmeetrilised kahealuselised graafid moodustavad mingi „spetsiifilise rühma”, mille teatud positsioonistruktuurid osutuvad Peterseni graafideks. Sellised positsioonistruktuuride vahelisi suhteid esineb mitmel viisil. Ka kõikide  $n$ -tahukate graafid on osutunud laialtlevinud positsioonistruktuurideks.

Positsioonistruktuurid  $GS_n$  avavad oma baasstruktuuri  $GS$  erinevaid külgi. Kui struktuur on aluseline või sisaldab komponente, klikke, ringe jt, siis kerkivad neid atribuute kujutavad elemendikogumid positsioonistruktuurides mingil teisel kujul esile.

**Propositsioonid 1.5. Positsioonistruktuuride omadusi:**

- P1.5.1. Positsioonistruktuurid  $GS_n$  avavad oma baasstruktuuri  $GS$  „varjatud külgi“.
- P1.5.2. Positsioonistruktuur on elementidest sümmeetriline, st selle elemendid moodustavad ühe positsiooni  $\Omega V_{k=l}$ .
- P1.5.3. Binaar(+)positsioonile  $\Omega R_n^+$  vastav positsiooni(+)struktuur  $GS_n^+$  on struktuuri  $GS$  osastruktuur; binaar(-)positsioonile  $\Omega R_n^-$  vastav positsiooni(-)struktuur  $GS_n^-$  on selle täiendi  $\bar{GS}$  osastruktuur (nagu seda on Peterseni graaf Folkmani graafis).
- P1.5.4. Struktuuri  $GS$  igale binaar(+)positsioonile  $\Omega R_n^+$  vastab selle täiendi  $\bar{G}$  binaar(-)positsioon  $\Omega R_n^-$  ning nende positsioonistruktuurid langevad kokku,  $GS_n^+ \equiv \bar{GS}_n^-$ .
- P1.5.5. Struktuuri mõni positsioonistruktuur  $GS_n$  võib osutada isomorfseks struktuuri  $GS$  endaga,  $GS_n \cong GS$ . Näiteks kuubi üks positsioonistruktuur on samuti kuup.
- P1.5.6. Struktuuri  $GS$  erinevad positsioonistruktuurid  $GS_n$  või erinevate struktuuride positsioonistruktuurid võivad osutada isomorfseteks või langeda kokku.
- P1.5.7. Kui positsioonistruktuuri  $GS_n$  binaar(+)märk hõlmab kõiki selle elemente ja seoseid, siis on see selle positsioonistruktuuri  $GS_n$  täielik invariant. Tegemist on muidugi raskelt tõestatava, kuid ilmselt ümberlukkamatu hüpoteesiga. Tuntud graafide hulgas omavad selliseid binaar(+)märke, näiteks Peterseni, Heawoodi, Coxeteri, kuup-, oktaeder- jt graafid. Niisugused struktuurid on põhimõtteliselt konstrueeritavad oma binaarmärgi järgi.

Vaatluse all on ka graafi teist ja kõrgemat järku positsioonistruktuurid, st positsioonistruktuuride positsioonistruktuurid.

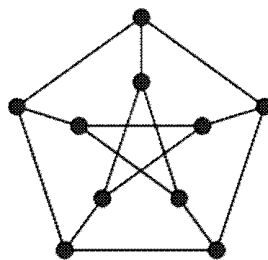
**Propositsioonid 1.6. Kõrgemat järku positsioonistruktuuride omadusi:**

- P1.6.1. Struktuuri teist või kõrgemat järku positsioonistruktuur võib olla isomorfne või kokku langeda madalamat järku positsioonistruktuuri või oma baasstruktuuriga. Positsiooni- ja baasstruktuuri kokkulangemine on midagi rohkemat kui isomorfism.
- P1.6.2. Kõrgemat järku positsioonistruktuurid ei ava enam täiendavaid „varjatud külgi“, need hakkavad korduma.
- P1.6.3. Kõrgemat järku positsioonistruktuuride indutseerimine on koonduv protsess, see lõpeb alati mõne madalamat järku positsioonistruktuuri või baasstruktuuriga isomorfse struktuuri esiletuleku või selle taastamisega.

Positsioonistruktuuride kõrval on soovitatav mitte tähelepanuta jätta struktuurimudeli baasil tuvastatavale tugevregulaarsusele, bisümmeetriale, klikkidele, klikkregulaarsusele, vöödele ja vöö regulaarsusele jt (vt Näide 1.6).

Esitame siin Peterseni graafi kahel põhjusel: 1) kui Folkmani graafi oluline positsioonistruktuur; 2) kui tugevate sümmeetriaomadustega graafi, näitlikustamas eelnevates ja järgnevates propositsiooni-des esitatud regulaarsuse, sümmeetria jt atribuute.

Näide 1.6. Peterseni graaf  $Pet$ , selle binaarmärgid ja struktuurimudel nii Peterseni graafi kui ka selle täiendi  $PetC$  kohta:



A: -2.3.2; B: +4.10.15.

A: -2.6.12; B: +2.5.8.

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1										$u_i$			1 1 1 1 1 1 1 1 1 1										$u_i$		
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10										$i \quad AB \quad k$			1 2 3 4 5 6 7 8 9 10										$AB$		
0 B -A -A B B -A -A -A -A										1 63 1			0 -A B B -A -A B B B B										36		
0 B -A -A -A B -A -A -A										2 63 1			0 -A B B B -A B B B										36		
0 B -A -A -A B -A -A										3 63 1			0 -A B B B -A B B										36		
0 B -A -A -A B -A										4 63 1			0 -A B B B -A B										36		
0 -A -A -A -A B										5 63 1			0 B B B B -A										36		
0 -A B B -A										6 63 1			0 B -A -A B										36		
0 -A B B										7 63 1			0 B -A -A										36		
0 -A B										8 63 1			0 B -A										36		
0 -A										9 63 1			0 B										36		
0										10 63 1			0										36		

Selgitusi näitamaks, mida on võimalik struktuurimudelitest välja lugeda:

- Elementide nummerdus algab siin ülemisest elemendist ning kulgeb päripäeva.
- Peterseni graaf on **bisümmeetriline** (st omab kaht binaarpositsiooni), on iseenda positsioonistruktuur  $Pet_{n=+B}=Pet$ . Sellel on üksainus alamstruktuur  $GS\mathcal{V}_{e_{ij}}$  (mida kajastavad selle 15 isomorfset naaber-alamgraafi) ja üksainus ülemstruktuur  $GS\mathcal{U}_{e_{ij}}$  (mida kajastavad selle 30 isomorfset naaber-ülemgraafi).
- Peterseni graafi bisümmeetrilisusest järeldub P1.4.4 alusel ka selle **tugevregulaarsus**.
- Binaarmärk **+4.10.15** tähendab, et Peterseni graaf on **5-vöö-regulaarne**. Selle 10 elementi ja 15 seost moodustavad kaksteist 5-vööd, antud juhul on need niisugused: (1-2-3-4-5-1), (6-8-10-7-9-6), (1-2-3-8-6-1), (1-2-7-10-5-1), (1-5-4-9-6-1), (2-3-4-9-7-2), (3-4-5-10-8-3), (1-2-7-9-6-1), (1-5-10-8-6-1), (2-3-8-10-7-2), (3-4-9-6-8-3) ja (4-5-10-7-9-4). Iga element esineb 6 vöös. Iga seos esineb 4 vöös.
- Peterseni graafi täiend  $PetC$  on **4-kliik-regulaarne**. Ilmutatud klikitunnust küll ei esine, kuid binaarmärk **+2.5.8** esitav binaargraaf sisaldab 4-kliiki. Näiteks elemendipaari 1-3 iseloomustava binaarmärgile **+2.5.8** vastav binaargraafi struktuurimudel sisaldab 4-kliiki märki **+2.4.6**, kus on näha, et see avab 4-kliiki (1,3,9,10):

$$-A: -2.4.5; \quad B: +2.3.3; \quad C: +2.4.6; \quad D: +2.5.8.$$

1 3   9 10   7					$i \quad ABCD \quad k$			123	
0 D   C   C   B					1 0121			1 121	
0 C   C   B					3 0121			1 121	
0 C   -A					9 1030			2 210	
0 -A					10 1030			2 210	
0					7 2200			3 200	

- Kokku on täiendus on viis lõikuvat 4-kliiki, antud juhul elementidega: (1,3,9,10), (2,4,6,10), (1,4,7,8), (2,5,8,9) ja (3,5,6,7). Iga element esineb kahes klikis. Iga seos esineb ühes klikis.

Mitte iga tugevregulaarne struktuur ei ole bisümmeetriline. Kuni 20-tipuliste graafide hulgas esineb 39 sidusat bisümmeetrilist + tugevregulaarset + kliikregulaarset või vööregulaarset struktuuri, sh 27 lihtsalt konstrueeritavat  $n$ - $m$ -kliiki ja 12 „mitte- $m$ - $n$ -kliiki“ kuhu kuulub ka Peterseni graaf. Reeglina on tugevregulaarseks peetud graafide nimekirjad puudulikud, mida struktuurimudelite abil täiendada õnnestus [29, 33].

Tegemist on bisümmeetria ja tugevregulaarsuse osalise kokkulangevusega. Bisümmeetria hõlmab ka veel mittesidusaid struktuure ning tugevregulaarsus võib esineda ka seostest-, polü- ja ositi sümmeetria korral, kuigi kuni 20-tipuliste hulgas viimaseid siiski ei ole täheldatud [37].

Siin sai käsitletud vaid sümmeetrilisi, st mahukaid positsioone omavaid graafe. Enamus struktuure sisaldab rohkem väiksemamahulisi positsioone kuni selleni, et iga element moodustab omaette positsiooni  $\Omega V_k$  (seega ka igal elemendipaaril on omaette positsiooni). Viimast nimetatakse *0-sümmeetriliseks* ning nende käsitlemine käib omaette radu pidi.

### 1.3. Struktuurimudel kui kanooniline „tekst“

Graafi *kanooniline esitus* tähendab graafi esitamist mingil selle struktuuri esitaval kujul, soovitatavalt *isomorfismi täpsusega*. Kanoonilise esituse probleemi püstitas arvatavasti Lazlo Babai 1977. aastal [1]. Graafide kanoonilisi esitusviise on välja pakutud hulgi [12], üheks selliseks on näiteks ka *3-kuup-koodid* [16]. Paraku ei sisalda need peaaegu mingit teavet struktuuri kohta.

**Propostsioon 1.7.** Struktuurimudel SM on struktuuri (graafi) *isomorfismi täpsusega* esitav kanooniline tekst sellest väljaloetavate binaarmärkide, positsioonide ja teiste struktuursete atribuutidega.

Struktuurimudelile SM sobib lisada kogu väljaloetav teave: *karakteristikud, mõõdud jt.*

**Näide 1.7.** Üks Boris Weisfeileri [49, lk 166(1)] *tugevregulaarse ositi sümmeetrilise graafi Wei* kanooniline esitis struktuurimodeli SM näol:

$$A: -2.8.20; B: -2.8.19; C: -2.8.18; \\ D: +2.7.13; E: +2.7.14; F: +2.7.15.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$u_i$	$k$											
20	24	12	14	1	2	9	19	6	10	16	8	18	4	7	11	17	13	15	23	3	22	21	25	5	$i$	ABCDEF	*
0	F	C	C C	B F	C C	B	F C	E F	C E	F E	C B	F F	F	C F	20	039	039	1									
0	C	C B	C C	F C	F	B E	C C	F F	E C	E B	F F	C	F F	24	039	039	1										
0	F F	C C	C B	F B	F B	F B	F E	C F	E F	F C	F F	C E	F E	12	039	039	2										
0 C	F C	C B	C	F F	B F	B C	E E	F F	F C	F C	F C	F C	F E	14	039	039	2										
0	F F	C E	F C	F B	F E	F C	F C	F C	F C	F B	C C	E	1	039	039	3											
0 C	F E	C	F B	F E	F C	F C	F C	F C	F B	C C	E	2	039	039	3												
0	F E	F C	F E	F C	B F	F F	C F	F C	F B	E C	B C	9	039	039	4												
0	E C	F E	F C	F F	B C	F F	B C	F F	F B	E B	C C	19	039	039	4												
0	C	C B	B B	B E	E F	F F	F F	F C	F F	F C	F F	6	066	066	5												
0	B F	E F	E B	E B	E B	B B	C E	E C	10	066	066	6															
0	E F	E F	E B	E B	B B	B C	E E	C 16	066	066	6																
0	C F	B F	B C	C E	C B	C E	E E	8	066	066	7																
0 B	F B	F C	C E	C B	E C	E E	18	066	066	7																	
0	C C	C B	E C	E E	E B	B B	4	066	066	8																	
0	C C	E B	C E	E B	E B	7	066	066	8																		
0	B E	F C	B B	E C	F F	11	066	066	9																		
0	F E	C B	B C	E F	17	066	066	9																			
0	B B	C E	B F	B B	13	066	066	10																			
0	B C	E F	B B	15	066	066	10																				
0	E D	F F	E 23	066	147	11																					
0	E F	F D 3	066	147	12																						
0	B B B 22	093	174	13																							
0	E A 21	147	066	14																							
0	A 25	147	066	14																							
0	5	255	174	15																							

Põhilised invariandid ja mõõdud:

Sümmeetria	V	R	K	N	SVV	SV	SRV	HR	SR
Ositi sümmeetria	25	300	15	154	$1^5 2^{10}$	0.1723	$1^{20} 2^{128} 4^6$	2.1576	0.1290

Wei ja selle täiendi WeiC täpsustavad invariandid ja mõõdud:

G	E	k	N <sup>t</sup>	N <sup>r</sup>	P	CL	MC	DM	SEV <sup>t</sup>	SE	TRA	BRA
Wei	150	1	80	74	6	4	3	2	$1^{12} 2^{67} 4^1$	0.1310	1.000	0
WeiC	150	1	74	80	6	4	3	2	$1^8 2^{61} 4^5$	0.1494	1.000	0

Selgitused:

- a) Struktuurimudelil on väljaloetav, et Wei on *12-valents-, 2-distants-, 3-vöö- (triangulaarne) ja tugevregulaarne ositi sümmeetriline*. Vaid kuue binaarmärgi baasil on  $25 \times 25$  struktuurimudel  $u$ - ja  $s$ -vektorite (paraku viimane näitese ei mahtunud) abil dekomponeeritud 15 *elemendispositsiooniks* ja 115 osamudeliks  $SM_{ki,kj}$ .

- b) *Wei* 150 „mittenaaberpaari” moodustavad 74 **binaar(-)positsiooni**, kus  $-A$  moodustab ühe kaheelemendilise positsiooni,  $-B$  33 positsiooni, sh 4 üheelemendilist ja 29 kaheelemendilist positsiooni,  $-C$  moodustab 40 positsiooni, sh 4 üheelemendilist, 31 kaheelemendilist ja 5 neljaelemendilist positsiooni.
- c) *Wei* 150 naaberpaari moodustavad 80 **binaar(+)**positsiooni, sh  $+D$  2 üheelemendilist,  $+E$  32 positsiooni, sh 4 üheelemendilist, 27 kaheelemendilist ja 1 neljaelemendilise positsiooni, ja  $+F$  moodustab 46 positsiooni, sh 6 ühe- ja 40 kaheelemendilist positsiooni.
- d) *Wei* täiend *WeiC* omab samuti 15 *elemendipositsiooni*, on 12-valents-, 2-distants-, 3-vöö- (triangulaarne) ja tugevregulaarne ositi sümmeetriline. *WeiC* binaar(-)positsioonid vastavad *Wei* binaar(+)*positsioonidele* ja vastupidi,

On ilmne, et suur osa binaarmärke ei ole täielikud invariandid. Mõnede sümmeetriliste struktuuride puhul vajavad binaarmärgid **täpsustamist** – selleks on mitu võimalust [27, 36, 37, 40].

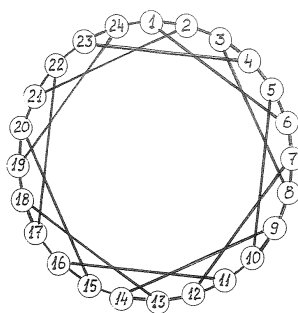
### **Propositsioonid 1.8. Binaarmärkide täpsustamine:**

- P1.8.1. Kasutada **kõrgemat järku  $m$**  binaargraafe  $g_{ij}^m$ , st binaargraafe mis jäävad elementide  $i$  ja  $j$  vahele pärast esialgse binaargraafi  $g_{ij}$  elimineerimist.
- P1.8.2. Kasutada binaargraafi  $g_{ij}$  **lokaalseid struktuurimudeleid**  $SM_{ij}$ .
- P1.8.3. Kasutada **märgistruktuure**  $GS_p$ , st positsioonist sõltumatult kindlasse binaarmärkide klassi kuuluvatest elemendipaaridest koosnevat struktuuri (nende arv võrdub erinevate binaarmärkide arvuga). Valitud märk peaks aga esinema iga struktuurielemendi juures.
- P1.8.4. Kasutada **seosmaatriksi  $E$  korrutamist (astendamist)**  $E \times E \times E \times \dots = E^n$  teatud astmeni  $n$  mil suurenevad nii selle elementide  $e_{ij}^n$  väärtused kui ka kui ka **väärtuste erinevuste arv  $p$** , mis edasisel astendamisel enam ei suurene.

Esialgsed binaarmärgid sellega oma tähendust ei kaota. Need jäävad ikkagi iseloomustama elementide ja nendevaheliste seoste kuulumist ahelatesse ja vöödesse, mis struktuuri käsitlemisel vajalik on. Täpsustatud binaarmärk kujutab endast nelikut  $\pm d.n.m.e_{ij}^n$ , mille viimane märk esitab täpsustamisel saadut.

Vaatleme nüüd üht hõredat polüüsummeetrilist graafi **Ct36**. Binaarmärkide täpsustamiseks saab siin kasutada nii **märgistruktuure** (P1.8.3) kui ka **seosmaatriksi astendamist** (P1.8.4). Binaarmärkide täpsustamiseks kaasneb ka **binaarpositsioonide täpsustamine**.

Näide 1.8. Graaf **Ct36**, selle lähte binaarmärgid ning teised struktuursed atribuudid:



$A: -5.18.23$ ;  $B: -4.9.10$ ;  $C: -4.8.8$ ;  $D: -4.7.7$ ;  $E: -3.8.9$ ;  $G: -3.4.3$ ;  $H: -2.3.2$ ;  
 $I: +5.10.12$ ;  $J: +5.12.15$ ;  $K: +5.14.18$ .

Järgnevas tabelis on esitatud:

- 1) Graafi **Ct36** lähte binaarmärgid  $dnm_{ij}$ , nende tähistused  $p$  ja järjekorranumbrid  $n$ .
- 2) Selle graafi **märgistruktuuri**  $Ct36_{p=-F}$  binaarmärgid  $dnm_{ij}^{p=F}$ , nende tähistused  $p^*$ .
- 3) Vastavate binaarpositsioonide järjekorranumbrid  $n^*$ .
- 4) Graafi **Ct36 seosmaatriksi-astmete (korrutiste)**  $E^6$  ja  $E^7$  elemendid  $e_{ij}^6$  ja  $e_{ij}^7$  binaarmärkide täpsustamiseks, kus 6 ja 7 on seosmaatriksi maatriksi aste.

$dnm_{ij}$	$P$	$n$	$dnm_{ij}^{p=-F}$	$p^*$	$n^*$	$e_{ij}^6$	$e_{ij}^7$
-5.18.23	-A	1	-5.10.12	A1	1	0	108
			-5.8.8	A2	2	0	107
-4.9.10	-B	2	-4.7.7	B	3	42	0
-4.8.8	-C	3	-2.4.4	C	4	32	0
-4.7.7	-D	4	-2.3.2	D	5	33	0
-3.8.9	-E	5	-3.10.12	E	6	0	243
-3.6.6	-F	6	+3.4.4	F1	7	0	191
			+5.8.10	F2	8	0	201
			+3.4.4	F3	9	0	173
-3.4.3	-G	7	-3.8.10	G1	10	0	150
			-3.6.6	G2	11	0	139
			-3.4.3	G3	12	0	130
-2.3.2	-H	8	-6.20.26	H1	13	65	0
			-4.7.7	H2	14	75	0
			-2.3.2	H3	15	84	0
+5.10.12	I	9	-3.6.6	I	16	0	239
+5.12.15	J	10	-3.4.3	J	17	0	248
+5.14.18	K	11	-5.8.8	K	18	0	258

Struktuurimodeli ridu iseloomustav sagedusvektor  $u_i$ :

-A1	-A2	-B	-C	-D	-E	-F1	-F2	-F3	-G1	-G2	-G3	-H1	-H2	-H3	I	J	K
1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1

Ct36 struktuurimodel SM:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	i	k
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	J	1	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	2	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	3	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	4	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	5	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	6	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	7	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	8	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	9	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	10	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	11	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	12	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	13	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	14	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	15	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	16	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	17	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	18	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	19	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	20	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	21	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	22	1
0	K	H3	E	H2	I	H1	F1	B	G1	D	G3	C	A2	D	A1	B	G2	H1	F3	H2	F2	H3	I	23	1
0	J	H3	F2	H2	F3	H1	G2	B	A1	D	A2	C	G3	D	G1	B	F1	H1	I	H2	E	H3	I	24	1

Ct36 ja selle täiendi Ct36C ühised ja eristavad invariandid ja mõõdud:

Symmetry	V	R	K	N	SVV	SV	SRV	HR	SR
Poly-symmetry	24	276	1	18	24 <sup>1</sup>	1.000	12 <sup>13</sup> 24 <sup>5</sup>	1.2308	0.4957

G	E	k	N <sup>+</sup>	N <sup>-</sup>	P	CL	MC	DM	SEV <sup>+</sup>	SE <sup>+</sup>	TRA	BRA
Ct36	36	1	3	15	18	2	6	5	12 <sup>3</sup>	0.6934	0	0
Ct36C	240	1	15	3	18	12	3	2	12 <sup>10</sup> 24 <sup>5</sup>	0.5166	1.000	0

Selgitused:

- Ct36** on *3-valents-, 5-distants, 6-vööregulaarne* ja *polüsümmeetriline*, selle täiend **Ct36C** on *20-valents-, 2-distants-, 3-vööregulaarne* ja samuti *polüsümmeetriline*.
- 6-vöö regulaarsusest järeldub *kahealuselisus*, alustega antud juhul paarisnumbrilistest elementidest ja paaritunumbrilistest elementidest.
- Kuna **Ct36** on kahealuseline, kuid mitte bi-klikk, siis selle täiend **Ct36C** koosneb kahest omavahel sidusast 12-klikist ning on seega *12-klikkregulaarne*. Klikid vastavad **Ct36** alustele.
- Ct36**  $23 \times 24 : 2 = 276$  tipupaari moodustavad 18 *binaarpositsiooni*, sh 240 „mitte-naaberpaari” poolt on moodustatud 15 binaar(-)positsiooni, kus binaarmärkidele  $-A1, -A2, -C, -E, -F1, -F2, -F3, -G1, -G2, -G3$  vastavad positsioonid on 12-elementilised ning  $-B, -D, -H1, -H2, -H3$  on 24-elementilised.
- Ct36** 36 naaberpaari moodustavad kolm binaar(+)positsiooni, kus  $+I, +J$  ja  $+K$  on 12-elementilised.
- Binaarpositsioonide, st ka positsioonistruktuuride, arv  $N=18$  ja nende võimsused langevad **Ct36** ja **Ct36C** puhul kokku, kuid need on vastupidise märgiga.
- Ct36** ja selle täiend **Ct36C** jagunevad vastavalt positsioonidele  $18^{ks}$  *positsioonstruktuuriks*. **Ct36** positsioonidele tunnustega  $-A1, -A2, -C, -E, -F1, -F2, -F3, -G1, -G2, -G3, I, J$ , ja  $K$  vastavad positsioonistruktuurid (binaartunnustega  $-A:-0.2.0; +B:+1.2.1$ ) on *bisümmeetrilised, 2-klikk-regulaarsed* ning on omavahel *isomorfsed*. Positsioonidele tunnustega  $-B, -D, -H1, -H2$  ja  $-H3$  vastavad positsioonistruktuurid kujutavad *ringe* ja *ringikesi*.
- Polüsümmeetrilise graafi **Ct36** 276 võimalikku *naabergraafi* (vt Def. 2.1) jaotuvad  $15^{ks}$  *naaber-ülemstruktuuriks* ja *kolmeks naaber-alamstruktuuriks* (vt Prop. 2.2).

Sellega on veelkord näidatud struktuurimudeli olulisust graafi struktuuri uurimisel. Samuti ka positsiooni- ja märgistruktuuride osa selles ning struktuuri ja selle täiendi vastastikuse käsitlemise olulisust. Struktuuri tuvastamise *ajaline keerukus* sõltub vaid tipupaaride arvust.

Sümmeetrilised struktuurid on väga haruldased, neid tuleb kas ise konstrueerida või otsida. Pääaegu kõik graafid on tegelikult *0-sümmeetrilised* (iga element kujutab omaette positsiooni), *sidusad* ja *diameetri*ga 2.

\*

Reaalsete empiiriliste objektide nagu kommunikatsioonivõrkude jt struktuur on enamasti *0-sümmeetriline*. Kuid ka niisugustel juhtudel võib tekkida vajadus *elemente rühmitada*. See nõuab *lihtsustamist* [37, 40, 42].

Kuna reaalsed kommunikatsioonivõrgud on väga suured, siis kujutlegem siin üht isevärki seltskonda **Z** kuhu kuuluvad *Linda, Martin, Naima, Olav, Piret, Rein, Salme, Toomas, Urve ja Vaino*. Olgu nad omavahel kokku leppinud selles, et igäüks suhtleb parajasti viie kindla meile teadaoleva seltskonnakaaslasega. Viimane asjaolu vajas muidugi koordineerimist, ja keegi nendest pidi seda tegema. Antud juhul on tegemist *5-valents-regulaarse* struktuuriga kus kõik liikmed näivad „võrdses positsioonis“ olevat. Koostagem seda olukorda esitava graafi **Z** struktuurimudel.

Näide 1.9. Graafi **Z** binaarmärgid ja struktuurimudel:

$A:-2.6.10; B:-2.6.9; C:-2.5.8; D:-2.5.7; E:-2.5.6; F:-2.4.5; G:-2.4.4;$   
 $H: +2.3.3; I: +2.4.5; J: +2.5.7; K: +3.10.25.$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		$u_i$		$k$
	R	L	O	T	N	M	U	V	P	S	nimi	ABCDEFGHIJK		
0	-G	I	J	-D	-F	I	-E	I	H		Rein	00011111310	1	
0	H	-G	J	I	-D	I	-D	I			Linda	00020021310	2	
0	-C	I	-D	H	-E	I	-D				Olav	00121002300	3	
0	-E	H	I	-B	H	H					Toomas	01101013110	4	
0	H	-G	-A	H	H						Naima	10011013110	5	
0	I	I	-E	-A							Martin	10011102300	6	
0	H	-A	-D								Urve	10020012300	7	
0	K	H									Vaino	11002002201	8	
0	-B										Piret	11011002201	9	
0											Salme	11020004100	10	



Paraku on struktuur  $O$ -sümmeetriline, ei mingit „võrdsust“, iga indiviid on oma privaatsel positsioonil. *Erinev positsioon* tähendab erinevat seostatust, „suhteid“ teiste indiviididega. Kümne indiviidi vahel eksisteerib 11 erinevat suhet, mida iseloomustavad nende binaarmärgid (vt sagedusvektorid  $u_i$ ). Probleem seisneb siin rangelt eristatud indiviidide rühmitamises. See asjaolu viib meid tagasi *märgistruktuuride*  $GS_p$  juurde (vt P1.8.3). Märgi valikul tuleb lähtuda sellest, et:

- 1) Valitud märk esineks pea iga struktuurielemendi puhul.
- 2) Silmas pidama *märgi tähendust*, sest märgistruktuur moodustatakse märgi aspektist.

Põhimõtteliselt on seltskond  $Z$  binaarmärkide alusel lahutatav üheteistkümneks iseseisvaks märgistruktuuriks  $GS_p$ , kuid mõttekas on seda teha vaid niisuguste puhul, mis hõlmavad kõiki indiviide. Need on  $H$  ja  $I$ .

Näide 1.10. Seltskonna  $Z$  binaarmärkide  $H$  ja  $I$  alusel saadud märgistruktuurid  $GS_p$ ;

a) Binaarmärgi  $H$  järgi moodustatud märgistruktuuri  $ZS_{p=H}$  binaarmärgid ja struktuurimudel:

$$A: -6.8.8; \quad B: -5.7.7; \quad C: -5.6.5; \quad D: -4.6.6; \quad E: -4.5.4; \quad F: -3.5.5; \quad G: -3.4.3; \\ H: -2.5.6; \quad I: -2.4.4; \quad J: -2.3.2; \\ K: +1.2.1 \quad L: +3.5.6.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	$u_i$	$k$	$s_i$			
$V$	$S$	$U$	$N$	$T$	$R$	$O$	$M$	$P$	$L$	nimi	ABCDEFGHIJKL	deg	12345678	
0	K	K	-J	-J	-J	-J	-F	-F	-G	Vaino	000002100420	1	2	01100000
0	-J	L	L	K	-G	-I	-I	-E		Salme	000010102122	2	4	10021000
0	-G	-G	-G	K	-D	-D	-J			Urve	000200300220	3	2	10000100
0	-H	-J	-E	L	L	-C				Naima	0010101110203	4	3	01000020
0	-J	-E	L	L	-C					Toomas	0010101110203	4	3	01000020
0	-E	-F	-F	-C						Rein	001012100310	5	1	01000000
0	-B	-B	K							Olav	020030100120	6	2	00100001
0	-I	-A								Martin	110102002002	7	2	00020000
0	-A									Piret	110102002002	7	2	00020000
0										Linda	203010100110	8	1	00000100

b) Binaarmärgi  $I$  järgi moodustatud märgistruktuuri  $ZS_{p=I}$  binaarmärgid ja struktuurimudel:

$$A: -6.7.6; \quad B: -5.6.5; \quad C: -4.5.4; \quad D: -3.4.3; \quad E: -2.3.2; \\ F: +1.2.1; \quad G: +2.3.3.$$

	1	2	3	4	5	6	$u_i$	$k$	$s_i$					
$U$	$M$	$R$	$T$	$L$	$O$	$P$	$V$	$N$	$S$	nimi	ABCDEFG	deg	123456	
0	F	F	F	-E	-E	-E	-E	-D	-D	Urve	0002430	1	3	021000
0	-E	-E	G	-D	-D	G	-C	-E		Martin	0012312	2	3	100110
0	-E	-D	G	G	-D	-E	-C			Rein	0012312	2	3	100110
0	-D	-D	-D	-C	-C					Toomas	0024210	3	1	100000
0	-C	-C	G	-B	F					Linda	0122112	4	3	010011
0	G	-C	F	-B						Olav	0122112	4	3	010011
0	-C	-E	-B							Piret	0122202	5	2	010100
0	-B	-E								Vaino	0122202	5	2	010100
0	-A									Naima	1221210	6	1	000100
0										Salme	1221210	6	1	000100

On täiesti loomulik, et erinevate seostatuse, *suhte*, *binaarmärkide*, praegusel juhul  $H: +2.3.3$  (triangel, st ühe ühise suhtluspartneri kaaslus) ja  $I: +2.4.5$  (dopelt-triangel, st kahe ühise suhtluspartneri kaaslus) aspektist moodustatud komponentsete märgistruktuuride elementide positsioonid on erinevad.

Omapärsed märgistruktuurid on  $ZS_{p=J}$  ja  $ZS_{p=K}$ . Esimene kujutab endast vaid seoseid Linda–Martin ja Rein–Urve vahel. Teine binaarmärk  $K: +3.10.25$  esitab 4-vöö, millesse kuuluvad indiviidid Piret ja Vaino kuid nende(vaheline) suhe ise hõlmab struktuuri terviklikult (10 indiviidi, 25 suhet). Selle põhjal võib oletada, et Piretil ja Vainol on mingi eriline roll selles seltskonnas.

Nii mõnelgi juhul on kasulik toimida just teatud kindla märgi-aspekti järgi. Antud juhul tuleks leida mingi põhjendatum moodus. Olgu selleks indiviidide omavaheline „suhtlusviis“ tervikuna. Seda iseloomustavad siin näite 1.9 sagedusvektoreid moodustavad binaar(+)-märgid: **H, I, J, K** tervikuna.

Selle teostamine on lihtne, tuleb vaid selle **HIJK**-tunnuse järgi ümber järjestada struktuurimodeli read ja veerud ning rühmad R ongi tuvastatud.

Näide 1.11. **HIJK** järgi (Näide 1.9) transponeeritud struktuurimudel **Z**:

	1	2	4	5	3	6	7	8	9	10		$u_i$		
	R	L	T	N	O	M	U	V	P	S	nimi	k	HIJK	R
0	-G	J	-D	I	-F	I	-E	I	H		Rein	1	1310	1
0	-G	J	H	I	-D	I	-D	I			Linda	2	1310	1
0	-E	-C	H	I	-B	H	H				Toomas	4	3110	2
0	I	H	-G	-A	H	H					Naima	5	3110	2
0	-D	H	-E	I	-D						Olav	3	2300	3
0	I	I	-E	-A							Martin	6	2300	3
0	H	-A	-D								Urve	7	2300	3
0	K	H									Vaino	8	2201	4
0	-B										Piret	9	2201	4
0											Salme	10	4100	5

Saadud rühmitamine vastab etteantud „suhtlusviisi“ nõudele täielikult, kus kümne positsiooni  $k$  asemel saame viis,  $R=5$ , rühma indiviididega:

$$R_1 = (Linda, Rein), R_2 = (Toomas, Naima), R_3 = (Olav, Martin, Urve), \\ R_4 = (Vaino, Piret) \text{ ja } R_5 = (Salme).$$

Struktuurielementide „sarnasuse“ leidmiseks ehk positsioonide „koondamiseks“ võib kasutada ka ligikaudseid, „ümardatud“ ehk „ühendatud“ binaarmärke.

Näide 1.12. Näites 1.9 esitatud 5-valentsregulaarse kuid 0-sümmeetrilise graafi **Z** binaarmärkide ühendamine ning selle alusel positsioonide „koondamine“:

$$a = [A: -2.6.10; B: -2.6.9], \quad b = [C: -2.5.8; D: -2.5.7; E: -2.5.6], \\ c = [F: -2.4.5; G: -2.4.4], \\ d = [H: +2.3.3; I: +2.4.5; J: +2.5.7], \quad e = (K: +3.10.25).$$

Selle alusel on saadud järgmised ümardatud binaarmärgid:

$$a: (A, B) \approx -2.6, \quad b: (C, D, E) \approx -2.5, \quad c: (F, G) \approx -2.4, \quad d: (H, I, J) \approx +2 \text{ ja } e: K \approx +3.$$

	1	2	3	4	5		a	b	c	d	e	$u^*_i$							
	R	L	O	T	N	M	U	V	P	S	nimi	AB	CDE	FG	HIJK	k	abcde	$k^*$	
0	-G	I	J	-D	-F	I	-E	I	H		Rein	00	011	11	131	0	1	02250	1
0	H	-G	J	I	-D	I	-D	I			Linda	00	020	02	131	0	2	02250	1
0	-C	I	-D	H	-E	I	-D				Olav	00	121	00	230	0	3	03050	2
0	-E	H	I	-B	H	H					Toomas	01	101	01	311	0	4	12150	3
0	H	-G	-A	H	H						Naima	10	011	01	311	0	5	12150	3
0	I	I	-E	-A							Martin	10	011	10	230	0	6	12150	3
0	H	-A	-D								Urve	10	020	01	230	0	7	12150	3
0	K	H									Vaino	11	002	00	220	1	8	22041	4
0	-B										Piret	11	011	00	220	1	9	22041	4
0											Salme	11	020	00	410	0	10	22050	5

Kümne positsiooni  $k$  asemel saame viis,  $k^*=5$  „koondatud positsiooni“ indiviididega:

$$k^*_1 = (Rein, Linda), \quad k^*_2 = (Olav), \quad k^*_3 = (Toomas, Naima, Martin, Urve), \\ k^*_4 = (Vaino, Piret) \text{ ja } k^*_5 = (Salme).$$

Näeme, et selles on kokkulangevusi transponeerimise teel (Näide 1.11) saadud rühmitamisega. Transponeerimisviisi tuleb pidada eesmärgipäraseks ning sellest tulenevalt usaldusväärsemaks. Binaarmärkide „ümardamine“ võib osutada küllaltki suvaliseks. Tuleb äramärkida *Pireti ja Vaino* eriline roll selles seltskonnas, nendevaheline suhe ***K:+3.10.25*** hõlmab kõiki indiviide ja suhteid ning nad võivadki koordinaatorid olla.

Selle näite omapära avaldub *valents-regulaarse struktuuri 0-sümmeetrilisuses*.

**Niisuguseid 0-sümmeetrilisi struktuure võib käsitleda, uurida ja elemente rühmitada mitmel viisil:**

- 1) **Moodustada ja uurida valikuliselt märgistruktuure  $GS_p$**  (Näide 1.10).
- 2) **Uurida mitme valitud märgi baasil moodustatud nõ kompleksseid märgistruktuure.**
- 3) **Ümber järjestada struktuurimudeli read ja veerud etteantud märkide järgi** (Näide 1.11).
- 4) **Positsioonide „koondamiseks“ kasutada ühendatud või „ümardatud“ binaarmärke** (Näide 1.12).

Kõik see nõuab käsitletava objekti head tundmist ja sobiva aspekti valikut selle uurimiseks. Antud juhul on püütud näidata vaid *binaarmärkide* kui *suhete iseloomustajate* tähtsust niisugustes uuringutes.

## 2. STRUKTUURIMUUTUSED

### 2.1. Elementaarsed struktuurimuutused

Graafi elementaarne struktuurimuutus avaldub kahel viisil: 1) Graafi *serva eemaldamisel*  $G \setminus e_{ij}$  saadava suurima alamgraafi  $G^{sub}$  näol; 2) Graafile *serva lisamisel*  $G \cup e_{ij}$  saadava väikseima ülemgraafi  $G^{sup}$  näol. Esimeste arv võrdub servade arvuga, teiste arv „mitteservade“ arvuga .

**Definitsioon 2.1.** Suurimaid alamgraafe  $G^{sub}$  ja väiksemaid ülemgraafe  $G^{sup}$  nimetame graafi  $G$  *naabergraafideks*  $G^{adj}$ .

Graafi  $G$  ühe binaarpositsiooni  $\Omega R_n$  raames teostatud servaoperatsioonide  $f$  tulemusel saadud naabergraafid  $G^{adj}$  on *isomorfsed*. Formuleerigem see oluline asjaolu.

**Propositsioon 2.1.** Kui servaoperatsioonid  $f$  toimuvad graafi  $G$  binaarpositsiooni  $\Omega R_n = \Omega(r_{ij1}, \dots, r_{ijq})_n$  raames disjunktiivselt  $\{(f_{ij})_1 \vee \dots \vee (f_{ij})_q\}_n$ , siis moodustavad saadud naabergraafid isomorfismiklassi  $\Gamma_n = \{(G^{adj}_n)_1 \cong \dots \cong (G^{adj}_n)_q\}$ .

Nüüd ilmneb erinevus naabergraafi  $G^{adj}$  ja naaberstruktuuri  $GS^{adj}$  vahel. Struktuuri võib esindada isomorfismiklassi  $\Gamma_n$  suvalise „välimusega“ ja märgistatusega graaf, sest nende struktuurimudelid on ekvivalentsed [24, 27, 30, 40].

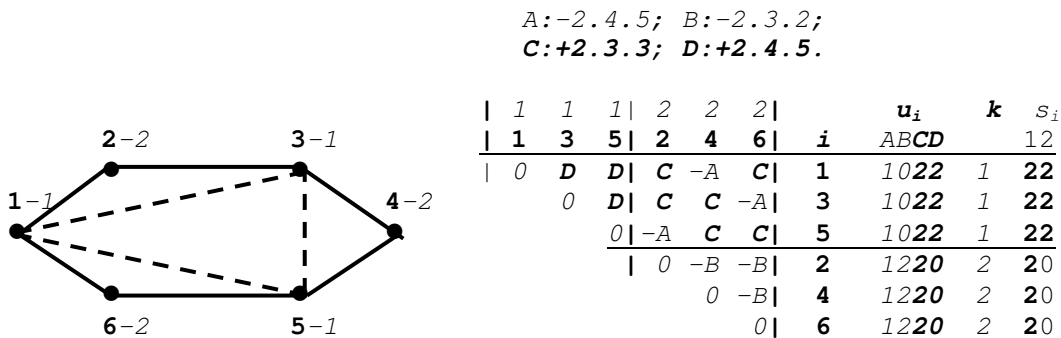
**Propositsioon 2.2.** Isomorfismiklassi  $\Gamma_n$  kuuluvate naabergraafide  $G^{adj}$  ekvivalentsed struktuurimudelid SM esitavad üht ja sama naaberstruktuuri  $GS^{adj}$ . Naaberstruktuuride  $GS^{adj}_n$  arv võrdub binaarpositsioonide  $\Omega R_n$  arvuga.

**Definitsioon 2.2.** Disjunktiivset servaoperatsiooni  $F_n = \{(f_{ij})_1 \vee \dots \vee (f_{ij})_q\}_n$ , mis muudab struktuuri  $GS$  selle naaberstruktuuriks  $GS^{adj}$  nimetagem *morfismiks*  $F_n, F_n: GS \rightarrow GS^{adj}$ .

Elementaarne struktuurimuutus siin käsitletav struktuuri  $GS$  tasemel, kus: 1) morfism  $F_{n-}: GS \rightarrow GS^{sup}_{n-}$  indutseerib  $GS$  binaar(-)positsiooni  $\Omega R_{n-}$  baasil selle naaber-ülemstruktuuri  $GS^{sup}_{n-}$ ; 2) morfism  $F_{n+}: GS \rightarrow GS^{sub}_{n+}$  indutseerib  $GS$  binaar(+)positsiooni  $\Omega R_{n+}$  baasil selle naaber-alamstruktuuri  $GS^{sub}_{n+}$ .

**Propositsioon 2.3.** Struktuuri  $GS$  binaarpositsioonide  $\Omega R_n$  võimsused  $\text{card}|\Omega R_n|$  määravad vastavale naaberstruktuurile  $GS^{adj}_n$  ülemineku  $F_n: GS \rightarrow GS^{adj}_n$  ehk *morfismi tõenäosuse*  $PF = \text{card}|\Omega R_n| : \text{card}|\Omega R_n|$ , kus  $\text{card}|\Omega R_n|$  on vastavate tipupaaride (st naaber- või „mittenaaber“ elementide) arv struktuuris  $GS$ .

**Näide 2.1.** Struktuuri  $GS.37$  (Graafiatlases [22] G163) esindav kahe elemendipositsiooni, kahe binaar(+)positsiooni ja kahe binaar(-)positsiooniga graaf, selle binaarmärgid, struktuurimudel ja üleminekukarakteristikud:



Naaberstruktuuridele ülemineku ja morfismide  $F_n$  karakteristikud:

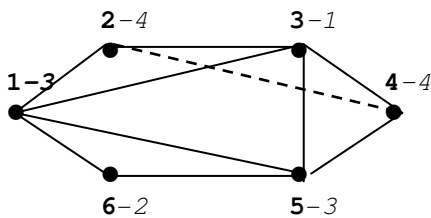
	$GS_n^{adj}$	1	2
<b>GS.37</b>	$GS_{n-}^{sup}$	<b>29</b>	<b>30</b>
	$k.k'(p)$	2.2 (-B)	1.2 (-A)
	$PF_{n-}^{sup}$	3/6	3/6
<b>GS.37</b>	$GS_{n+}^{sub}$	<b>72</b>	<b>76</b>
	$k.k'(p)$	1.1 (+D)	1.2 (+C)
	$PF_{n+}^{sub}$	3/9	6/9

Selgitused:

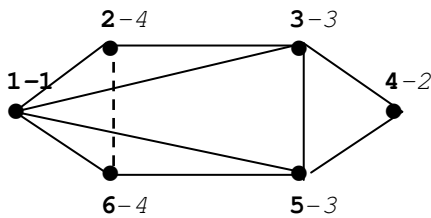
- $GS_{n-}^{sup}$  ja  $GS_{n+}^{sub}$  tähistavad vastavalt naaberülem- ja naaberalamstruktuuride järjekorranumbreid 6-elementiliste struktuuride süsteemis (vt Näide 2.4);
- $k,k'$  – binaarpositsiooni sisaldava osamudeli  $SM_{k,k'}$  indeks, kus  $(p)$  täpsustab binaarpositsiooni selles;
- $PF_n$  – binaarpositsiooni osakaal struktuuris ehk *morfismi tõenäosus*.

Näide 2.2. Struktuuri **GS.37** (vt Näide 2.1) binaar(-)positsiooni  $-B$  seoste 2-4, 2-6 ja 4-6 lisamisel (kriipsjoon) saadud *naaber-ülemstruktuuri*  $GS_{n=-B}^{sup}$ , (GS.29, [22] G184) esindavad *isomorfsed naaber-ülemgraafid*, nende *ühised binaarmärgid ja ekvivalentsed struktuurimudelid*  $SM_1 \equiv SM_2 \equiv SM_3$ :

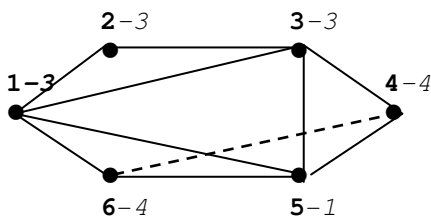
$$A: -2.5.8; B: -2.4.5; C: -2.3.2; \\ D: +2.3.3; E: +2.4.5.$$



	1	2	3	3	4	4	$u_i$	$s_i$		
	3	6	1	5	2	4	$i$ ABCDE	$k$ 1234		
	0	-B	E	E	E	E	3	01004	1	0022
	0	D	D	-C	-C		6	01220	2	0020
	0	E	D	-A			1	10022	3	1111
	0	-A	D				5	10022	3	1111
	0	D*					2	10121	4	1011
	0						4	10121	4	1011



	1	2	3	3	4	4	$u_i$	$s_i$		
	1	4	3	5	2	6	$i$ ABCDE	$k$ 1234		
	0	-B	E	E	E	E	1	01004	1	0022
	0	D	D	-C	-C		4	01220	2	0020
	0	E	D	-A			3	10022	3	1111
	0	-A	D				5	10022	3	1111
	0	D*					2	10121	4	1011
	0						6	10121	4	1011

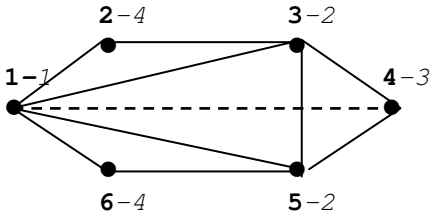


	1	2	3	3	4	4	$u_i$	$s_i$		
	5	2	1	3	4	6	$i$ ABCDE	$k$ 1234		
	0	-B	E	E	E	E	5	01004	1	0022
	0	D	D	-C	-C		2	01220	2	0020
	0	E	-A	D			1	10022	3	1111
	0	D	-A				3	10022	3	1111
	0	D*					4	10121	4	1011
	0						6	10121	4	1011

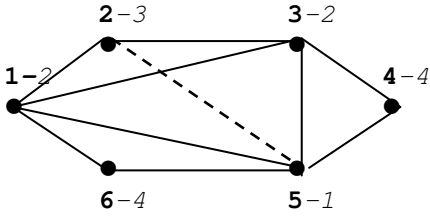
Selgitus: Ekvivalentsed struktuurimudelid erinevad üksteisest vaid nummerdatud elementide erinevas jagunemises positsioonidesse. Graafi struktuuri  $GS$  esitab suvaline struktuurimudel ekvivalentsete hulga.

Näide 2.3. Struktuuri **GS.37** binaar(-)positsiooni  $-A$  seoste 1-4, 2-5 ja 3-6 lisamisel (kriipsjoon) saadud *naaber-ülemstruktuuri*  $GS_{n=-A}^{sup}$ , (GS.30, [22] G180) esindavad *isomorfsed naaber-ülemgraafid*, nende *ühised binaarmärgid ja ekvivalentsed struktuurimudelid*  $SM_1 \equiv SM_2 \equiv SM_3$ :

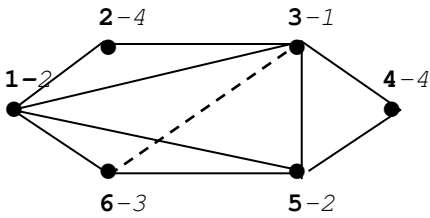
$$A: -2.4.5; B: -2.3.2; \\ C: +2.3.3; D: +2.4.5; E: +2.6.15.$$



1	2	3	4	4	$u_i$	$s_i$
1	3	5	4	2	6	$i$ ABCDE k 1234
0	E	E D*	C	C	1	00212 1 0212
0	D	D	C	-A	3	10121 2 1111
0	D	-A	C		5	10121 2 1111
0	-A	-A			4	20030 3 1200
0	-B				2	21200 4 1100
0					6	21200 4 1100



1	2	3	4	4	$u_i$	$s_i$
5	1	3	2	4	6	$i$ ABCDE k 1234
0	E	E D*	C	C	5	00212 1 0212
0	D	D	-A	C	1	10121 2 1111
0	D	C	-A		3	10121 2 1111
0	-A	-A			2	20030 3 1200
0	-B				4	21200 4 1100
0					6	21200 4 1100

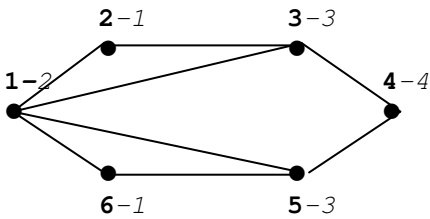


1	2	3	4	4	$u_i$	$s_i$
3	1	5	6	2	4	$i$ ABCDE k 1234
0	E	E D*	C	C	3	00212 1 0212
0	D	D	C	-A	1	10121 2 1111
0	D	-A	C		5	10121 2 1111
0	-A	-A			6	20030 3 1200
0	-B				2	21200 4 1100
0					4	21200 4 1100

Selgitus: Ühe binaarpositsiooni  $\mathcal{QR}_n$  baasil saadud naaberstruktuurid on *ekvivalentsed*, erinevate binaarpositsioonide baasil (Näide 2.2 ja 2.3) saadud naaberstruktuurid *ei ole ekvivalentsed*. Viimane kehtib muidugi ka *naaber-alamstruktuuride* korral.

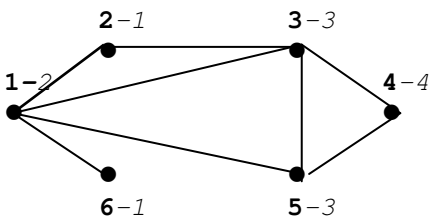
Näide 2.4. Struktuuri  $GS.37$  binaar(+)positsioonist  $+D$  seose 3-5 *eemaldamisel* saadud *naaber-alamstruktuur*  $GS^{sub}_{n=+D}$ , ( $GS.72$ , [12] G148) ja binaarpositsioonist  $+C$  seose 5-6 *eemaldamisel* saadud *naaber-alamstruktuur*  $GS^{sub}_{n=+C}$ , ( $GS.76$ , [22] G137) nende *erinevad binaarmärgid ja struktuurimudelid*  $SM_A$  ja  $SM_B$ :

$A: -2.4.4$ ;  $B: -2.3.2$ ;  
 $C: +2.3.3$ ;  $D: +3.4.4$ .



1	1	2	3	3	4	$u_i$	$s_i$
2	6	1	3	5	4	$i$ ABCD k 1234	
0	-B	C	C	-B	-B	2	0320 1 0110
0	C	-B	C	-B		6	0320 1 0110
0	C	C	-A			1	1040 2 2020
0	-A*	D				3	1121 3 1101
0	D					5	1121 3 1101
0						4	1202 4 0020

$A: -3.5.6$ ;  $B: -2.4.5$ ;  $C: -2.3.2$ ;  
 $D: +1.2.1$ ;  $E: +2.3.3$ ;  $F: +2.4.5$ .



1	2	3	4	5	6	$u_i$	$s_i$
3	1	5	2	6	4	$i$ ABCDEF k 123456	
0	F	F	E	-C	E	3	001022 1 011101
0	C	-B	C	-B		1	010121 2 101110
0	-B	-C	E			5	011021 3 110001
0	C*	-C				2	012020 4 110000
0	-A					6	103100 3 010000
0						4	111020 4 101000

Selgitus: Näeme jälle, et erinevate binaarpositsioonide baasil saadud naaberstruktuurid *ei ole ekvivalentsed*.

**Propositsioon 2.4.** Iga struktuur  $GS$  on mõne teise struktuuri naaber-ülemstruktuur  $G^{sup}_n$  ja/või naaber-alamstruktuur  $G^{sub}_n$ .

## 2.2. Naaberstruktuurid ja Ulami hüpotees

**Propositsioon 2.5.** Morfism  $F$  on *pöörduv* – struktuuri  $GS$  igal naaberstruktuuril  $GS^{adj}$  on “pöörav binaarpositsioon”  $\mathcal{R}^{rev}$ , millele rakendatud pöörduv morfism  $F^{rev}$  *taastab* lähtestruktuuri  $GS$ ,  $F^{rev}: GS^{adj} \rightarrow GS$ .

Näiteks, kui struktuur  $GS29$  (Näide 2.2) on lähtestruktuur  $GS$  mis omab naaber alamstruktuuri  $G^{sub}_n$  struktuuri  $GS37$  (Näide 2.1) näol, siis on  $GS29$  *taastatav* struktuuri  $GS37$  *pöörava binaarpositsiooni*  $-B$  baasil kolmel erineval viisil (2-4, 2-6, 4-6), antud juhul *morfismi tõenäosusega*  $PF^{rev}=3/6$ .

Seega, kui täpne olla, siis morfismid eksisteerivad struktuuride binaarpositsioonide vahel.

**Propositsioon 2.6.** Kui morfismid  $F_n: GS \rightarrow GS^{adj}_n$  on disjunktiivselt  $F_1 \vee \dots \vee F_n \vee \dots \vee F_N$  rakendatud  $GS$  binaarorbiitidele  $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n, \dots, \mathcal{R}_N$ , siis on struktuur  $GS$  *dekonstrueeritud* (*dekomponeeritud, lahutatud*) oma naaberstruktuurideks  $GS^{adj}_1, \dots, GS^{adj}_n, \dots, GS^{adj}_N$ .

Mitte-dekonstrueeritavaid (-dekomponeeritavad) struktuure ei ole olemas. On juba näidatud, et naaberstruktuur  $GS^{adj}_n$  kujutab endast *isomorfismiklassi*  $\Gamma^{adj}_n$ , mis võib sisaldada isomorfsed naabergraafe  $(G^{adj}_n)_1 \cong (G^{adj}_n)_2 \cong (G^{adj}_n)_3 \cong \dots \subseteq GS^{adj}_n \cong \Gamma^{adj}_n$  [24, 37, 40],

Graaf struktuuri  $GS$  *taastatavus* (*rekonstruktsioon*) on käsitletav naaberstruktuuride  $GS^{adj}$  hulga baasil.

**Propositsioon 2.7.** Kui struktuur  $GS$  on *dekonstrueeritud* (*dekomponeeritud, lahutatud*) oma *naaber-alamstruktuurideks*  $GS^{sub}_1, \dots, GS^{sub}_n, \dots, GS^{sub}_N$ , st suurimateks alamstruktuurideks  $(GS \setminus e_{ij})_n$ , siis nende *ühend*  $\cup (GS \setminus e_{ij})_n$ ,  $n^+ \in [1, N^+]$ , *rekonstrueerib* (*rekomponeerib*) ehk *taastab* struktuuri  $GS$ .

**Propositsioon 2.8.** Kui struktuur  $GS$  on *dekonstrueeritud* (*dekomponeeritud, lahutatud*) oma *naaber-ülemstruktuurideks*  $GS^{sup}_1, \dots, GS^{sup}_n, \dots, GS^{sup}_N$ , st väikseimaiks ülemstruktuurideks  $(GS \cup e_{ij})_n$ , siis nende *ühiosa*  $\cap (GS \cup e_{ij})_n$ ,  $n^- \in [1, N^-]$ , *rekonstrueerib* (*rekomponeerib*) ehk *taastab* struktuuri  $GS$ .

**Järeldus.** Struktuuri *lahutatavus ja taastatavus on möödapääsmatu, mittetaastatavaid struktuure ei esine.*

Rekonstruktsiooni- ehk taastatavuse probleem on tuntud peamiselt *Ulami hüpoteesi* nime all ja kujutab endast isomorfismisuhteid kahe graafi ja nende  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide vahel [48]. Hüpotees on sõnastatud järgmiselt: „Olgu graafi  $G$  tippude  $v_i$  arv  $p$  ja graafi  $H$  tippude  $u_i$  arv  $p$ , kus  $p \geq 3$ . Kui iga  $i$  puhul on alamgraafid  $G_i = G \setminus v_i$  ja  $H_i = H \setminus u_i$  isomorfsed, siis on graafid  $G$  ja  $H$  isomorfsed”.

See probleem on paljude uurijate tähelepanu all olnud juba 1946. aastast alates. Seda on käsitletud väga paljudes artiklites kuid paraku puudub sellel tänapäevani kindel ühene lahendus. Tõestatud on see vaid üksikute graafitüüpide puhul. Ilmselt on küsimus selles, kas graafi alamgraafid sisaldavad täit teavet graafi enda kohta. Struktuurisest seisukohast on Ulami hüpoteesi *sõnastus* nonsens, sest kui on antud graafid  $G$  ja  $H$ , siis struktuurimudelitel alusel on määratav nii nende isomorfisus või mitte-isomorfisus kui ka kõik sellega seonduv naaberstruktuuride kohta.

Ulami hüpoteesi originaal käsitleb taastatavust *tippude eemaldamise aspektist*, siin käsitletakse taastatavust aga *servade eemaldamise ja lisamise aspektist*. See aga ei muuda taastatavuse olemust, sest kõik jääb ikkagi graafi ja selle suurimate alamgraafide vaheliste suhete käsitlemise raamesse (servavariandi puhul ka väikseimate ülemgraafide raamesse). Juba vanameister W. T. Tutte rõhutas, et rekonstruktsiooniprobleemi peab lahendama *isomorfismiklasside* tasemel, millest siin ka kinni peetud on [47].

## 2.3. Struktuuri genes

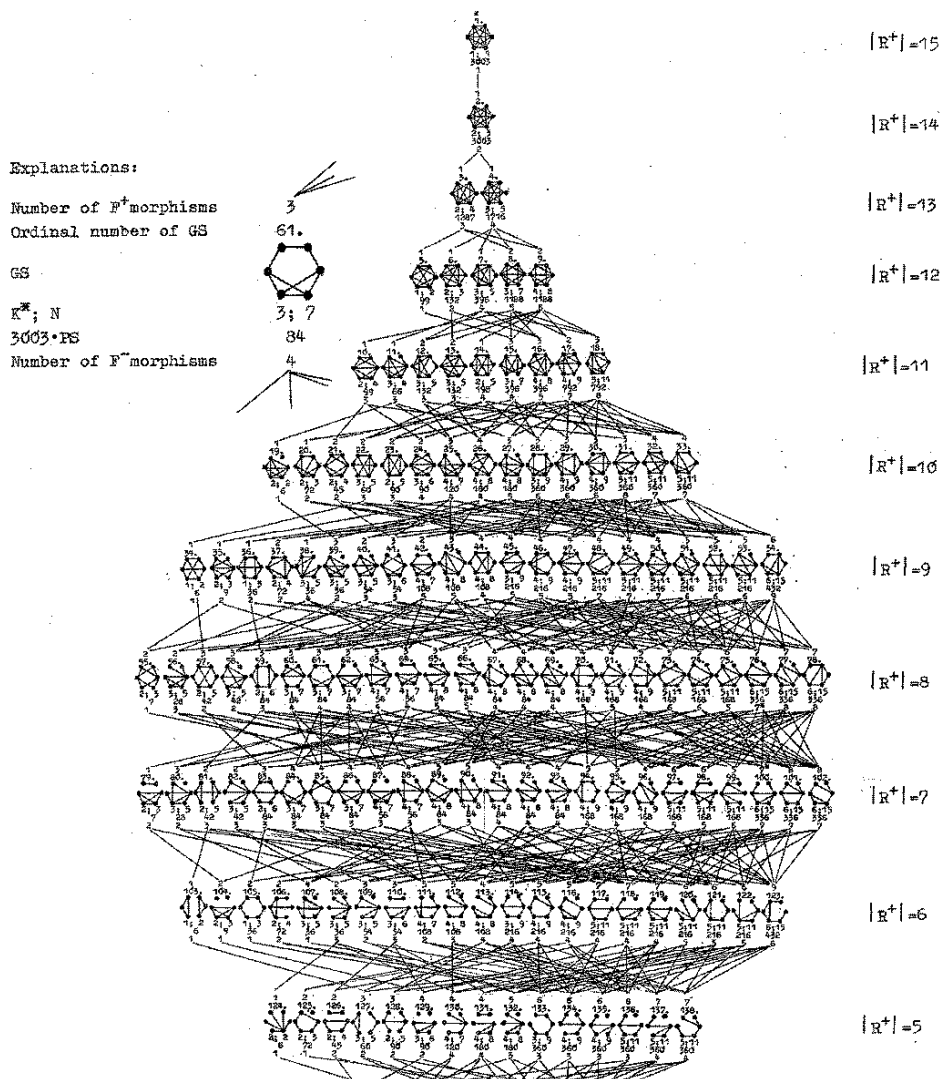
Struktuuri genes kujutab endast struktuurimodelite baasil  $|V|$ -elemendiliste struktuuride kõikide naaberstruktuuride genereerimist, st struktuuride „naaberstruktuuride naaberstruktuuride“ ehk „järglaste järglaste“ fikseerimist [24, 27, 37, 40].

Struktuurigeneesi idee on lihtne. Olgu meil antud selle esimene, tühi seisund elementide arvuga  $n$ . Geneesi esimesel sammul ilmugu sinna esimene seos. Teine samm on juba keerukam: sinna võib ilmuda seos elemendiga mis omab juba seost teise elemendiga, kuid võib ilmuda seos elementide vahele, mis ei oma veel seost. Seega, pärast teist sammu *hargneb* genes kaheks, st on tekkinud kaks võimalikku „järglast“.

Kolmandal sammul see võimalike järglaste õige hargnemine alles algab. Seoste edasisel lisandumisel struktuur tiheneb ja geneesi *hargnevus suureneb*, kuni saavutab *keskfaasi*. Alates keskfaasist hakkab *hargnevus vähenema*, kuigi tihenemine jätkub. Keskfaas on geneesi poolitaja, igale *struktuurile* geneesi esimeses pooles vastab tema *täiend* geneesi teises pooles. Geneesi viimaseks sammuks on viimase võimaliku seose lisandumine väga tihedasse struktuuri, et saavutada *täisstruktuur*.

Struktuurigeneesi võib kujutada võrena, mille elementideks on struktuurid (st neid struktuure esindavad graafid) ja seosteks morfismid. Struktuurigenees on teostatav struktuurimodelite järkjärgulise moodustamise teel. Struktuuri geneesi võib alustada kas tühi- või täisstruktuurist.

Näide 2.5. Osa kuueelemendiliste struktuuride geneesi võrest:





Selgitusi:

- a)  $\mathbb{R}^+$  tähistab *struktuurinivood*, st seoste arvu struktuurides.
- b) Iga graaf selles võres *esindab oma isomorfismiklassi* ehk struktuuri.
- c) Iga struktuur selles võres on mõne(de) teis(t)e struktuuri(de) *naaberstruktuur*.
- d) Näidetes 1.2 – 1.4 ja 2.1 – 2.4 esitatud struktuurid on selles võres kujutatud oma vastavate numbrite all
- e) Võres esitatud struktuuride *täiendid* asuvad sümmeetriliselt selle võre teises pooles.

Viielemendiliste struktuuride geneesi elementide täielik kirjeldus on esitatud teavikus [37], kuuelemendiliste genes teavikus [40].

Struktuuri genesimine toimub morfismide  $F_n$  genereerimise teel nii, et iga struktuurinivoo  $\mathbb{R}^+$  struktuuride  $GS$  raames formeeritakse selle *naaber-struktuurinivoo* struktuurid  $GS^{adj}$ . Struktuurigeneesi tulemus kujutab endast *struktuuride süsteemi*  $\mathfrak{S}$ .

### **Propositsioonid 2.9. Struktuurisüsteemide $\mathfrak{S}^{|\mathbb{V}|}$ üldisi omadusi:**

- P2.9.1. Kui süsteemi  $\mathfrak{S}^{|\mathbb{V}|}$  struktuurinivoo arv  $|\mathbb{R}^+|$  on *paarisarv* (nagu näiteks  $|\mathbb{V}|=6$  ja  $|\mathbb{V}|=7$  puhul), siis on selle võre *bilateraalset sümmeetriline* seda poolitava telje suhtes, mis lahutab struktuurid  $GS$  nende *täienditest*  $\overline{GS}$ .
- P2.9.2. Kui süsteemi  $\mathfrak{S}^{|\mathbb{V}|}$  struktuurinivoo arv  $|\mathbb{R}^+|$  on *paaritu arv* (nagu näiteks  $|\mathbb{V}|=4$ ,  $|\mathbb{V}|=5$ ,  $|\mathbb{V}|=8$  ja  $|\mathbb{V}|=9$  puhul), siis on poolitavaks teljeks nivoo, millel asuvad nii *struktuurid*  $GS$ , nende *täiendid*  $\overline{GS}$  kui ka *isetäienduvad* struktuurid  $GS = \overline{GS}$ .
- P2.9.3. Lihtne on näidata, et: a) Süsteemi  $\mathfrak{S}^{|\mathbb{V}|}$  morfismide klass  $F$  moodustab kompositsiooni  $F \& F$  mõttes *aditiivse rühma*  $A$ . b) Süsteemi  $\mathfrak{S}^{|\mathbb{V}|}$  struktuuride klass  $GS$  koos morfismide klassiga  $F$  moodustavad *kategooria*.

Struktuurigeneesi käigus on oluline roll juhuslikkusel. *Juhuslikkus* avaldub süsteemis  $\mathfrak{S}$  *naaber-struktuuride valiku*, st elementaarsete struktuurimuutuste näol. *Tõenäosused* selles süsteemis on seotud graafi struktuuri *sisemise mitmekesisuse*, st binaarpositsioonidega ning omavad olulist tähendust struktuurisüsteemide uurimisel.

### **Propositsioonid 2.10. Struktuurisüsteemide $\mathfrak{S}^{|\mathbb{V}|}$ tõenäosuslikud omadused:**

- P2.10.1. *Juhuslikkus* avaldub struktuurisüsteemis  $\mathfrak{S}$  struktuurilt  $GS$  selle *naaberstruktuurile*  $GS^{adj}_n$  ülemineku, st *morfismi tõenäosuses*  $PF_n$ .
- P2.10.2. Morfismi tõenäosuse kõrval on struktuurisüsteemis  $\mathfrak{S}$  määratletav ka *ülemineku tõenäosus*  $P_{ij}$  lähtestruktuurilt  $GS_i$  mitte-naaberstruktuurile  $GS_j$ .
- P2.10.3. Struktuurigeneesi üleminekutõenäosused  $P_{ij}$  moodustavad *statsionaarse Markovi ahela*  $PM$  (vt Näide 2.8).
- P2.10.4. Struktuuri *olekutõenäosus*  $PS$  süsteemis  $\mathfrak{S}$  iseloomustab struktuuri  $GS$  tõenäosust struktuurinivoo  $\mathbb{R}^+$  teiste struktuuride seas. See avaldub kujul:
- $$PS = \sum_{n=1}^{N-} PS_n^{sup} \times PF_n^{sub} = \sum_{n=1}^{N+} PS_n^{sub} \times PF_n^{sup}$$
- kus  $n$  on antud struktuuri binaarpositsiooni indeks,  $PS_n^{sup}$  on naaber ülemstruktuuri olekutõenäosus ja  $PF_n^{sub}$  selle morfismi tõenäosus.
- P2.10.5. Struktuurinivool  $\mathbb{R}^+$  asuvate struktuuride *olekutõenäosuste*  $PS_m$  *summa võrdub ühega*,  $\sum PS_m = 1$ .
- P2.10.6. Struktuuri ja selle täiendi *olekutõenäosused on võrdsed*,  $PS(GS) = PS(\overline{GS})$ .
- P2.10.7. Olekutõenäosused  $PS$  on *ratsionaalarvud*, kus selle *väikseimad ühisnimetajad* on otseselt seotud geneesi astakuga  $n$ .
- P2.10.8.  $PS$  jaotus struktuurinivool  $\mathbb{R}^+$  on parempoolse asümmeetriaga ja läheneb *logaritmilisele normaaljaotusele*.

Esimese, kuni 6-tipuliste mitteisomorfsete graafide kogumi esitas Frank Harary 1969. aastal [13]. Hiljem on F. Harary ja E. Palmer kombinatoorika baasil välja arvutanud kuni 24-elementiliste mitteisomorfsete graafide (st struktuuride) arvu ja kuni 9-elementiliste puhul täpsustanud neid arve ka seoste arvudest lähtuvalt [14]. R. Read ja F. Wilson on oma „Graafiatlases“ teiste hulgas ära toonud ka 1044 7-elementiliste mitteisomorfsete graafide (st struktuuride) diagrammid [22]. Kuid siamaani ei ole kusagil mujal räägitud graafidevahelistest seostest ehk morfismidest. Ega kombinatoorika baasil selleni ei jõuagi.

Näide 2.6. Mõnede  $|V|$ -elemendiliste struktuurisüsteemide  $\mathcal{G}$  arvulised karakteristikud:

Struktuuri- elementide arv $ V $	Struktuuride arv $p$	sh sidusate arv $p^*$	Struktuurinivoode arv $m$	Morfismide arv $q$	Binaarpositsioonide arv $q^*$
3	4	2	4	3	6
4	11	6	7	14	28
5	34	21	11	72	144
6	156	112	16	572	1144
7	1044	853	22		
8	12346	11117	29		

Selgitus:

Struktuurinivoode  $|R^+|$  arv  $m$  vastab  $|V|$ -elemendilise täisstruktuuri seoste arvule pluss üks, mis tähendab „tühistruktuuri“ (st 0 seosega struktuuri) olemasolu. Võib märkida veel, et  $|V|=10$  puhul on struktuuride arv 12005156,  $|V|=20$  puhul juba 645490122795799841856164683490742749440.

Esineb reaalseid süsteeme mille toimimist on võimalik kujutada selle struktuuri järkjärgulise muutumise näol ajas. Võib väita, et kõik *arengulised, evolutsioonilised ja revolutsioonilised* nähtused on seotud *struktuuri muutustega*. Struktuurset seisundeid esitavad struktuurimudelid sisaldavad teavet ka oma vahetult eelnenud ja vahetult järgnevat võimalike seisundite kohta.

Struktuurigeneesi pakuvad huvi ka struktuuride jadad, st *elementaarsete struktuurimuutuste jadad (järgnevused)* ja seda mitte ainult vajadusest uurida nende seaduspärasusi. Struktuurimuutused pakuvad huvi ka niisuguste reaalse protsesside uurimisel ja simuleerimisel, millede toimimine avaldub sammammuliste struktuurimuutuste põhjal [18, 24, 42].

Sammammuline struktuurimuutus on süsteemi  $\mathcal{G}^{|V|}$  võrel kujutatav kui *tee*. Seda saab ka vahetult modelleerida, lähtudes mingist konkreetsest struktuurist  $GS_0$ .

Definitsioon 2.3. Morfismid  $F_1 \& F_2 \& \dots \& F_t$  rakendatuna järjestikku struktuuridele  $GS$ ,

$${}^{F_1}: GS_0 \rightarrow {}^{F_2}: GS_1 \rightarrow {}^{F_3}: GS_2 \rightarrow \dots \rightarrow {}^{F_t}: GS_{t-1} \rightarrow GS_t,$$

moodustavad *struktuuride jada SF*.

**Propositsioonid 2.11. Struktuurijadade SF omadusi:**

P2.11.1. Struktuurijada  $SF$  võib olla *juhulik* või *mittejuhulik*. Kui morfismide valik toimub mingite kindlate tingimuste alusel, siis on tegemist *teleoloogilise struktuurijadaga*.

P2.11.2. Struktuurijadad mittenaaberstruktuuride  $GS_i$  ja  $GS_j$  vahel kujutavad süsteemis  $\mathcal{G}^{|V|}$  *struktuurijadade parve*.

P2.11.3. Struktuurimuutused, mis toimuvad ainult  $F^+$  morfismide või ainult  $F^-$  morfismide baasil kujutavad endast „*vertikaaljada*”.

P2.11.4. Struktuurijada  $SF$ , mille lähtestruktuur  $GS_i$  ja tulestruktuur  $GS_j$  asuvad samal struktuurinivool  $\mathcal{G}^m$  kujutab endast „*horisontaaljada*”. Sellised struktuurimuutused baseeruvad *morfismipaaridel*  $F^- \& F^+$  ja  $F^+ \& F^-$ , ning kujutab endast „seose ümberpaigutust“ struktuuris  $GS$  (vt Näide 2.7).

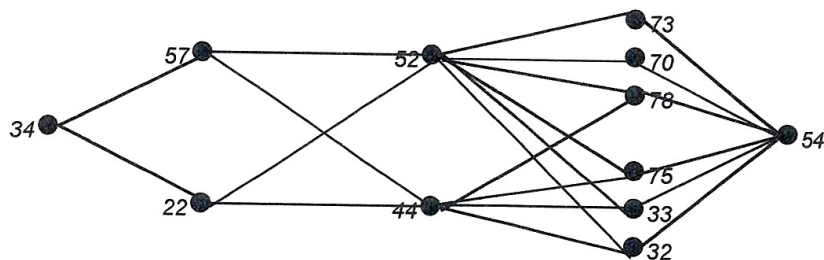
P2.11.5. Struktuurijada  $SF$ , kus struktuursete karakteristikute väärtused muutuvad monotoonselt, kujutab endast *monotoonset jada SFM* antud karakteristikute mõttes (Näide 2.9).

P2.11.6. Juhuliku,  $t$ -sammulise, *suktessiooni tõenäosus PSF* avaldub morfismi tõenäosuste korrutisena,

$$PSF = \prod_{i=1}^t [PF_i = PF_1 \times PF_2 \times \dots \times PF_t].$$

Vaatleme siin üht neljasammulist *horisontaaljadade parve* struktuurinivoo  $\mathcal{G}^{m=9}$  ühe sümmeetrilise ( $SR=0.751$ ) ning väiksema olekutõenäosusega ( $PS=6:3003$ ) struktuuri  $GS.34$  ja 0-sümmeetrilise ( $SR=0$ ) ning suurema tõenäosusega ( $PS=432:3003$ ) struktuuri  $GS.54$  vahel.

Näide 2.7. Horisontaaljadade parve esitav osasüsteem  $\mathbb{G}^{|\mathbb{V}|=6}_{34,54}$ :



Selle horisontaaljadade parve struktuurid kuuluvad struktuurinivoodesse  $m=8, m=9, m=10$ .

Näide 2.8. Horisontaaljadade parve *statsionaarne* Markovi ahel  $PM_{34,54}$  osasüsteemis  $\mathbb{G}^{|\mathbb{V}|=6}_{34,54}$ :

<i>GS</i>	<b>34</b>	<b>22</b>	<b>57</b>	<b>44</b>	<b>52</b>	<b>32</b>	<b>33</b>	<b>75</b>	<b>78</b>	<b>70</b>	<b>73</b>	<b>54</b>
<b>34</b>	0 20250	1 3375	1 4050	2 8100	2 16200	3 2160	3 2160	3 2160	3 4320	3 2160	3 2160	4 1728
<b>22</b>	1 3375	0	2 4050	1 10125	2 20250	2 2700	2 2700	2 2700	2 5400	2 2700	2 2700	3 2160
<b>57</b>	1 3375	2 2700	0	1 6750	1 13500	2 1800	2 1800	2 1800	2 3600	2 1800	2 1800	3 1440
<b>44</b>	2 450	1 3375	1 3375	0	2 4725	1 6750	1 6750	1 6750	1 13500	3 405	3 405	2 3600
<b>52</b>	2 350	1 3375	1 3375	2 1800	0	1 3375	1 3375	1 3375	1 6750	1 6750	1 6750	2 3600
<b>32</b>	3 60	2 450	2 450	1 3375	1 3375	0	2 1125	2 1125	2 2025	2 2700	2 2700	1 6750
<b>33</b>	3 60	2 450	2 450	1 3375	1 3375	2 1125	0	2 1125	2 2025	2 2700	2 2700	1 6750
<b>75</b>	3 60	2 450	2 450	1 3375	1 3375	2 1125	2 1125	0	2 2025	2 2700	2 2700	1 6750
<b>78</b>	3 60	2 450	2 450	1 3375	1 3375	2 1125	2 1125	2 1125	0	2 2700	2 2700	1 3375
<b>70</b>	3 60	2 450	2 450	3 420	1 6750	2 2700	2 2700	2 2700	2 1350	0	2 1350	1 6750
<b>73</b>	3 60	2 450	2 450	3 420	1 6750	2 2700	2 2700	2 2700	2 1350	2 1350	0	1 6750
<b>54</b>	4 24	3 180	3 180	2 900	2 1800	1 3375	1 3375	1 3375	1 3375	1 3375	1 3375	0

Selgitused:

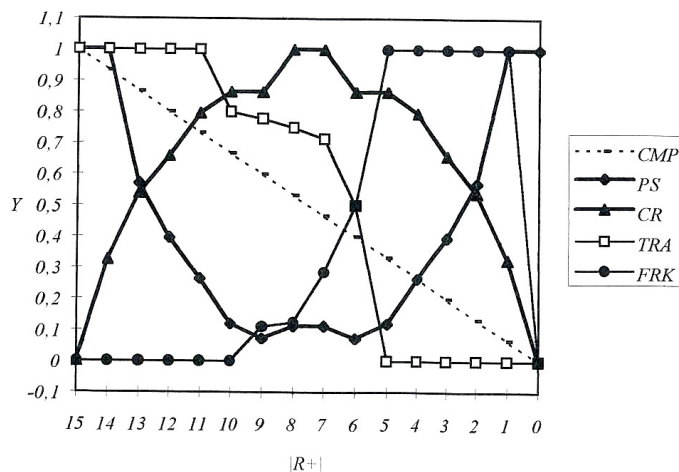
- Arvud 1 kuni 4 esitavad sammude arvu  $t$  ehk kaugust  $d$ .
- Arvud 24 kuni 30375 esitavad üleminekutõenäosusi  $P_{ij}$  suurendatult 50625 korda.
- On näha, et *üleminekutõenäosus*  $P_{ij}$  sümmeetriliselt struktuurilt  $GS_{34}$  0-sümmeetrilisele  $GS_{54}$   $P_{34,54}=1728:50625$  on  $1728:24=72$  korda suurem kui vastupidises suunas,  $P_{54,34}=24:50625!$
- Ka *olekutõenäosuste*  $PS$  erinevus on  $72$  kordne, kus  $PS_{34}=6:3003$  ja  $PS_{54}=432:3003$ .

**Propositsioon 2.11.** Ühel struktuurinivool  $\mathbb{G}^{m=6}$  asuva sümmeetrilise struktuuri olekutõenäosus  $PS$  on  $n$  korda väiksem kui mittesümmeetrilise struktuuri olekutõenäosus ja sümmeetrilise struktuuri üleminekutõenäosus  $P_{ij}$  mittesümmeetrilisele struktuurile on  $n$  korda suurem kui vastupidises suunas.

Struktuur on *kvalitatiivne nähtus*. Seega iga võimalik struktuurimuutus on *kvaliteedimuutus*. Samas on struktuur *mõõdetav* mitmest aspektist. Iga mõõt, st struktuurne karakteristik  $H$  iseloomustab mindagi kvantitatiivset. Kas kvantitatiivsuste hulk saab iseloomustada midagi kvalitatiivset?

Kas süsteemis  $\mathcal{G}^{IV=6}$  esineb selle kõiki struktuurinivoosid läbiv struktuurijada, mis on *monotoonne SFM*? On selgunud, et väga suure arvu vertikaaljadade hulgas esineb üksainus niisugust tingimust rahuldav, see on:  $GS_1 \rightarrow GS_2 \rightarrow GS_4 \rightarrow GS_8 \rightarrow GS_{17} \rightarrow GS_{33} \rightarrow GS_{53} \rightarrow GS_{76} \rightarrow GS_{100} \rightarrow GS_{122} \rightarrow GS_{138} \rightarrow GS_{146} \rightarrow GS_{151} \rightarrow GS_{154} \rightarrow GS_{155} \rightarrow GS_{156}$ . Monotoonseteks karakteristikuteks on siin *kompaktsus CMP*, *olekutõenäosus PS*, *sümmeetriaväärtus SR* (siin vastupidine – *asümmeetrilisus CR*), *triangulaarsus TRA*, *hargnevus FRK*.

Näide 2.9. Üks selle *monotoonse struktuurijada SFM* diagramme:



Selgitus: Vertikaaltelg – struktuurse karakteristiku normeeritud väärtus; horisontaaltelg  $R$  – struktuurinivoo järjekorranumber.

Kui see monotoonne jada (suktsessioon) *SFM* on juhuslik, siis selle tõenäosus on väga väike,  $PSF=2/(4725 \times 3003)=1.41 \times 10^{-7}$ .

Sellise monotoonse struktuurijada põhjal on esitatud üks elegantne, kuid abstraktne *ontogeneesi hüpoteesiline mudel* [24, 42]. Suktsessioonidele lihtsustatud lähenemise baasil on konstrueeritud ka üks ökoloogilise koosluse arengut – lihhogeneesi – simuleeriv struktuurne mudel, kus selle seisundid on graafidena kujutatud [18, 42].

Kui süsteemi  $\mathcal{G}^{IV}$  struktuure  $GS$  käsitleda kui *reaalse süsteemi seisundeid*  $S$ , siis struktuurijada  $SF=^{F1}:GS_0 \rightarrow ^{F2}:GS_1 \rightarrow ^{F3}:GS_2 \rightarrow \dots \rightarrow ^{Fi}:GS_{t-1} \rightarrow GS_t$  kujutab endast morfismide põhjal genereeritud *dünaamilist või evolutsioonilist nähtust*.

Süsteemi  $\mathcal{G}^{IV}$  struktuurimuutused on kirjeldatavad dünaamilise süsteemi kontseptsioonide aspektist [15].

Võib märkida, et *dünaamilise süsteemi* kontseptsioon on konkreetsem kui hästituntud *statsionaarse (kausaalse) süsteemi* põhimõte kus iga „käesolev moment“ („minevik“) muutub „järgmiseks momendiks“ („tulevik“). Süsteemi  $\mathcal{G}^{IV}$  raames avaldub dünaamiline süsteem selliselt, et:

- Üks ja sama „minevik“ võib muutuda erinevateks „tulevikkudeks“.
- Erinevad „minevikud“ võivad muutuda üheks ja samaks „tulevikuks“.

## Lõpetuseks

Kokkuvõtlikult võib väita, et struktuurisemiootika on struktuuri (graafi) elementidevaheliste suhete identifitseerimise ja korrastamise teel saadud *struktuurimudeli* baasil struktuuri „varjatud külgi“ uuriv tegevus. Nendeks „varjatud külgedest“ on seni uuritud *struktuurseid positsioone, positsioonistruktuure, sümmeetriaomadusi, struktuuride identifitseerimist, regulaarsuste ja sümmeetria vahelised suhteid, sümmeetria mõõte, naaberstruktuure ja taastatavust, struktuuri geneesiga seotud süsteemseid ja tõenäosuslikke seaduspärasusi*. Struktuurisemiootika uurib nii teistes graafiteooriates mitte-käsitletavaid objekte kui ka nendes käsitletavaid, kuid teisest aspektist. Kõik see annab see täiendavat teavet graafidest.

„Varjatud külgi“ on teisigi. Näiteks graafi seosmaatriksi astendamise seotud. Selles baasil on küll välja koorunud teadaolev graafi spektrite käsitlus ning eksisteerib koguni *spektraalne graafiteooria*. Paraku ei teata siiski, mida kujutavad endast astendatud seosmaatriksi elemendid ise ja mitmendasse astmesse on mõtet seda astendada. On vaid vihjatud, et need elemendid iseloomustavad graafi tippudevahelisi pikimaid ahelaid. Kuid see on kaheldav, sest need esinevad ka peadiagonaalil, samal ajal kui tippudevahelised seosed vahetevahel nulliks osutuvad. Ilmselt pole see kadagi veel huvitanud. Struktuurisemiootikas on vajaliku astmeni astendatud seosmaatriksi elemendid leidnud rakenduse sümmeetriliste graafide binaarmärkide täpsustamisel. Põhimõtteliselt võiks struktuurimudel rajaneda ainuüksi ka astendatud seosmaatriksite elementidel, kui oleks teada nende elementide tähendus. Praegu ei ole omavahel eristatavad isegi mitte naaber- ja mittenaaber elemendipaarid. Elemendipaare iseloomustavad binaarmärgid on seni asendamatud, seda enam, et tugevregulaarsete graafide puhul seosmaatriksite astendamine töötab vaid osaliselt.

Graafina esitatavat struktuuri omavad ka mitmesugused reaalsed objektid. On leidnud kinnitust, et struktuursetesse positsioonidesse jagunevad ka keemiliste ühendite, geneetiliste koodide, ökoloogiliste koosluste, kommunikatsioonivõrkude jt süsteemsete objektide elemendid. Seda fakti ignoreerida ei ole soovitatav.

## Kirjanduse loetelu

1. Babai, L. Canonical labelling of graphs. – *Proc. 15th ACM Symposium on Theory Computing, 1983, 171-183.*
2. Biggs, N. Algebraic Graph Theory. *Cambridge University Press, 1974.*
3. Bollobás, B. Graph Theory: An Introductory Course. *Springer, N.Y., 1979.*
4. Random Graphs. *Cambridge University Press, 2001.*
5. Extremal Graph Theory. *Amazon Books, 2004.*
6. Christofides, N. Graph Theory. An algorithm approach. *Academic Press, 1975.*
7. Dharwadker, A., Tevet, J.-T. The Graph Isomorphism Algorithm. ISBN 9781466394377. *Amazon Books, 2009.*
8. Eppstein, D. Geometric Graph Theory. *Computer Science 295, 2007.*
9. Fun Chung. Spectral Graph Theory. *A.M.S., 1992.*
10. Gippons, A. Algorithmic Graph Theory. *Amazon Books, 1985.*
11. Gross, J. L., Tucker, T. W. Topological Graph Theory. *Wiley Interscience, 1987.*
12. Gurevich, Y. From Invariants to Canonization. – *The Bull. of Euto. Assoc. for Comp. Sci. No 63, 1997.*
13. Harary, F. Graph Theory. *Addison-Wesley, 1969.*
14. Harary, F., Palmer, E. M. Graph Enumeration. *Academic Press, 1973.*
15. Kalman, R. et al. Topics in Mathematical System Theory. *N.Y., 1969.*
16. Locke, S. [www.math.fau.edu/locke/isotest](http://www.math.fau.edu/locke/isotest).
17. Mayer, J. Developments recents de la theorie des graphes. – *Historia Mathematica 3 (1976) 55-62.*
18. Martin, J., Tevet, J.-T. On the interrelations between structure, dynamics and evolution of epilithic lichen synusia. – *Proc. Estonian Acad. Sci., Biol., 37 (1988), N 1, 56-66.*
19. Новая философская энциклопедия, *Москва. 2001.*
20. Podsiadlo, B. [http://web.me.com/blazej.podsiadlo/poudis/Graph\\_Isomorphism.html](http://web.me.com/blazej.podsiadlo/poudis/Graph_Isomorphism.html).
21. Praust, V. Tevet's algorithm for graphs recognition. *Tallinn, 1995.*
22. Read, R. C., Wilson, R. J. An Atlas of Graphs. *Oxford, 2004.*
23. Schmidt, H. Philosophisches Wörterbuch. *Stuttgard, 1991.*
24. Tevet, J.-T. Interpretations on some Graph Theoretical Problems. *Edition of Estonian Acad. Sci., Tallinn, 1990*
25. Struktuurisemiootika: Struktuursuse kujutamise graafidel. *S.E.R.R., Tallinn, 1999.*
26. Graafid ja semiootika. Graafide struktuurikäsitluse keele alused. *S.E.R.R., Tallinn, 2001.*
27. Semiotic Testing of the Graphs. Principles, Using, Developments. *S.E.R.R., Tallinn, 2001.*
28. Graafide struktuuritöötuse heuristilised algoritmid. *S.E.R.R., Tallinn, 2004.*
29. \* Sümmeetria graafides. *S.E.R.R., Tallinn, 2004.*
30. \* Klikid. kaas- ja naabergraafid: Tunnusmaatriksit lugedes. *S.E.R.R., Tallinn, 2005.*
31. \* Graafide süsteemanalüüs: Algoritm ja rakendus. *S.E.R.R., Tallinn, 2005.*
32. Recognition the structure, symmetry and systems of graphs – *Baltic Horizons, No 8 (107) 33-75, December 2007.*
33. \* Bisümmeetrilise struktuuri semiootika. *S.E.R.R., Tallinn, 2007.*
34. \* Valik graafide struktuure. ISBN 9789949153763. *S.E.R.R., Tallinn, 2007.*
35. \* Mis on struktuur? ISBN 9789949180912, *S.E.R.R., Tallinn, 2008.*
36. \* Graafi semiootiliste invariantide müsteerium. ISBN 9789949185108, *S.E.R.R., Tallinn, 2009.*
37. \* Graafide varjatud külgi. ISBN 9789949213108, *S.E.R.R., Tallinn, 2010.*
38. Regularities in the Graphs. – *Baltic Horizons, No 14 (111) 74-85, December 2010.*
39. Semiotic 'Mystery' of Canonical Presentation, Isomorphism and Reconstructions. – *Baltic Horizons, No 14 (111) 119-147, December 2010.*
40. \* Semiotic Modelling of the Graphs. ISBN 9789949302475, *S.E.R.R., Tallinn, 2012.*

41. \* SERR'i lugu, 1999-2012. ISBN 9789949308774, S.E.R.R., Tallinn, 2012.
42. \* Struktuurimudelite kasutamine. ISBN 9789949331581, S.E.R.R., Tallinn, 2013.
43. Tevet, J.-T., Krasnoštšokova, R. Struktuursprintsiiip – hüpotees või modelleerimismoodus? – *Raku teooria. IX teoreetilise bioloogia kevadkool, Tartu, 1983, 106-117.*
44. Tevet, J.-T., Lambing, M. Visions about skeletons of artworks. – *Frontiers of Interstanding, Stockholm, 2000, 69-73.*
45. Титов, В. О симметрии в графах. *Вопросы кибернетики, 15, N2, 1975, 76-109.*
46. Toida, S. Isomorphism of graphs. – *Proc. 16<sup>th</sup> Midwest Symp. Circuit Theory, Waterloo, 1973, XVI. 5.1-5-7.*
47. Tutte, W. T. Graph Theory As I Have Known It. *Claerdon Press, Oxford, 1998.*
48. Ulam, S. M. A Collection of Mathematical Problems. *Wiley, New York, 1960.*
49. Weisfeiler, B. On Construction and Identification of Graphs. *Springer Lect. Notes Math. 558. 1976.*

Tärniga \* märgitud teavikud on kättesaadavad ka Rahvusraamatukogu digiarhiivis DIGAR.