I

SISSEJUHATUS MAATRIKSALGEBRASSE

1.1 DEFINITSIOONID

1.1.1 Maatriks, vektor, skalaar

Maatriksiks nimetatakse ridadesse ja veergudesse (tabelisse) paigutatud elementide hulka. Elementideks võivad olla arvud, matemaatilised avaldised, teised maatriksid. Maatrikseid tähistatakse tavaliselt trükitähtedega ja nende elemente vastavate kirjatähtedega, lisades vajadusel indeksid.

Näiteks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ või $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Maatriksi dimensiooniks (järguks, suuruseks) nimetatakse tema ridade ja veergude arvu.

Näiteks ülaltoodud maatriks **A** on 2×3-maatriks.

Vahel näidatakse maatriksi järk ära alumises indeksis - $\mathbf{A}_{2\times 3}$.

Vektoriks nimetatakse maatriksit, millel on vaid üks rida või üks veerg, ja kõneldakse siis vastavalt rea- või veeruvektorist. Kui pole täpselt määratletud, kas on tegu rea- või veeruvektoriga, mõistetakse vektori all veeruvektorit. Vektori elementide tähistamisel kasutatakse vaid üht indeksit.

Näiteks $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Skalaariks nimetatakse maatriksit, millel on 1 rida ja 1 veerg, s.t. 1×1-maatriksit.

Näiteks $\lambda = 1$.

1.1.2 Erikujulised maatriksid

Ruutmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille ridade ja veergude arv on võrdsed. Vastasel juhul on tegu ristkülikmaatriksiga. Kõik vektorid on ristkülikmaatriksid.

Diagonaalmaatriksiks nimetatakse ruutmaatriksit, mille kõik väljaspool peadiagonaali paiknevad elemendid võrduvad nulliga ($d_{ij} = 0$, kui $i \neq j$).

Näiteks $\mathbf{D}_{n\times n} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$ või $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Ühikmaatriksiks nimetatakse diagonaalmaatriksit, mille peadiagonaali elemendid võrduvad ühega. Ühikmaatriksit tähistatakse:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ruutmaatriksit, mille kõik elemendid allpool (ülalpool) peadiagonaali võrduvad nulliga, nimetatakse alumiseks (ülemiseks) kolmnurkmaatriksiks.

Näiteks maatriksid $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ on vastavalt ülemine ja alumine kolmnurkmaatriks.

Sümmeetriline maatriks on ruutmaatriks, mille ülalpool peadiagonaali paiknevad elemendid on võrdsed vastavate allpool peadiagonaali paiknevate elementidega, s.t. element a_{ij} on võrdne elemendiga a_{ji}.

Näiteks maatriks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ on sümmeetriline, sest $a_{12} = a_{21} = 6$, $a_{13} = a_{31} = 8$ ja $a_{23} = a_{32} = 3$.

1.1.3 Blokkmaatriksid

Blokkmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille elementideks on omakorda maatriksid.

Näiteks $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, kus $\mathbf{a} = (3)$, $\mathbf{b} = (1\ \ 2)$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2 MAATRIKSOPERATSIOONID

1.2.1 Liitmine ja lahutamine

Kahte maatriksit saab liita ja lahutada vaid siis, kui neil on sama arv ridu ja veerge, s.t. nad on sama järku. Maatrikseid liidetakse ja lahutatakse elementide kaupa. Seega, kui maatriks **C** = **A** + **B** ja **E** = **A** - **B**, siis $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ja $e_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 \\ 35 & -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 32 \end{pmatrix}$.

Siis $$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 40+7 & 21+5 \\ 35+(-6) & -20+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 26 \\ 29 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 40-7 & 21-5 \\ 35-(-6) & -20-32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 16 \\ 41 & -52 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Korrutamine

Maatriksi korrutamisel skalaariga korrutatakse sellega läbi maatriksi iga element.

Näide. $k = 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 \\ 35 & -20 \end{pmatrix}$. Siis $k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\cdot 40 & 2\cdot 21 \\ 2\cdot 35 & 2\cdot(-20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 42 \\ 70 & -40 \end{pmatrix}$.

Kahte maatriksit saab omavahel korrutada, kui esimese maatriksi veergude arv on võrdne teise maatriksi ridade arvuga. Korrutismaatriksi ridade arv on võrdne esimese maatriksi ridade arvuga ja veergude arv teise maatriksi veergude arvuga – $\mathbf{C}_{n\times m} = \mathbf{A}_{n\times k}\mathbf{B}_{k\times m}$. Korrutismaatriksi element kohal ij (reas i veerus j) leitakse kui esimese maatriksi i-nda rea ja teise maatriksi j-nda veeru vastavate elementide korrutiste summa – $c_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **C = AB** elemendid leitakse järgmiselt:

$c_{11} = 1\cdot 2 + 4\cdot 4 + (-1)\cdot 6 = 12$

(maatriksi **A** 1. rida korrutatuna maatriksi **B** 1. veeruga),

$c_{21} = 2\cdot 2 + 5\cdot 4 + 0\cdot 6 = 24$ (**A** 2. rida korrutatuna **B** 1. veeruga),

$c_{31} = 3\cdot 2 + 6\cdot 4 + 1\cdot 6 = 36$ (**A** 3. rida korrutatuna **B** 1. veeruga),

$c_{12} = 1\cdot 5 + 4\cdot 3 + (-1)\cdot 1 = 16$ (**A** 1. rida korrutatuna **B** 2. veeruga),

$c_{22} = 2\cdot 5 + 5\cdot 3 + 0\cdot 1 = 25$ (**A** 2. rida korrutatuna **B** 2. veeruga),

$c_{23} = 3\cdot 5 + 6\cdot 3 + 1\cdot 1 = 34$ (**A** 3. rida korrutatuna **B** 2. veeruga).

Seega $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 25 \\ 36 & 34 \end{pmatrix}$.

Seejuures on maatriks **C** 3×2-maatriks, kus 3 on maatriksi **A** ridade arv ja 2 on maatriksi **B** veergude arv.

Omadused

1. **AB** ≠ **BA**.
2. **IA** = **AI** =**A**, kus **I** on ühikmaatriks.
3. **ABC** = **A**(**BC**) = (**AB**)**C**.
4. **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**.

1.2.3 Maatriksite otsekorrutis

Maatriksite $\mathbf{G}_{n\times m}$ ja $\mathbf{A}_{t\times s}$ otsekorrutiseks (Kroneckeri korrutiseks) nimetatakse maatriksit

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} g_{11}\mathbf{A} & g_{12}\mathbf{A} & \cdots & g_{1m}\mathbf{A} \\ g_{12}\mathbf{A} & g_{22}\mathbf{A} & \cdots & g_{2m}\mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}\mathbf{A} & g_{n2}\mathbf{A} & \cdots & g_{nm}\mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Saadud korrutismaatriks on järku $nt \times ms$.

Näide. $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \oplus \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 40 & 0 & 5 & 20 \\ 10 & 40 & 10 & 5 & 20 & 5 \\ 5 & 0 & 10 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 5 & 20 & 0 & 20 & 80 \\ 5 & 20 & 5 & 20 & 80 & 20 \end{pmatrix}$.

Otsekorrutis leiab rakendust mitmemõõtmelisel analüüsil, s.t. kui soovitakse korraga hinnata faktorite mõju enam kui ühele tunnusele (näiteks geneetilise korrelatsiooni arvutamisel).

1.2.4 Transponeerimine, ortogonaalsed ja idempotentsed maatriksid

Maatriksi **A** transponeeritud maatriks, mida tähistatakse tavaliselt **A'** või $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, saadakse, vahetades esialgse maatriksi read ja veerud, s.t. kui $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, siis $b_{ji} = a_{ij}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Omadused

1. Kui **A** on sümmeetriline, siis $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.
3. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Maatriksit nimetatakse idempotentseks, kui tema korrutis iseendaga annab tulemuseks iseenda, s.t. maatriks **A** on idempotentne, kui **AA** = **A**. Vaid ruutmaatriks saab olla idempotentne.

Ortogonaalne maatriks on ruutmaatriks, mille korrutis oma transponeeritud maatriksiga võrdub ühikmaatriksiga – maatriks **U** on ortogonaalne, kui $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

1.2.5 Determinant

Olgu maatriks **A** 2×2-maatriks. Tema determinandiks nimetatakse suurust $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Vahel tähistatakse determinanti ka det(**A**). Enam kui kahedimensionaalse ruutmaatriksi determinant on leitav valemist

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\,|\mathbf{A}_{ij}|,$$

kus i tähistab maatriksi **A** i-ndat rida ja $\mathbf{A}_{ij}$ on maatriksi **A** alammaatriks, mis on saadud esialgsest maatriksist i. rea ja j. veeru ärajätmise tulemusena. Sellist alammaatriksit nimetatakse miinoriks.

Maatriksit nimetatakse singulaarseks, kui tema determinant võrdub nulliga ja mittesingulaarseks, kui tema determinant on nullist suurem.

Omadused

1. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$.
2. Kui maatriksid **A** ja **B** on sama järku ruutmaatriksid, siis $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
3. $|\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$, **A** on n×n-maatriks ja α suvaline skalaar.
4. $|\mathbf{I}_n| = 1$.
5. Kui maatriks sisaldab kahte või enamat võrdset rida või veergu, siis tema determinant võrdub nulliga.
6. Diagonaalmaatriksi determinant võrdub tema diagonaalielementide korrutisega, s.t. kui

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ siis } |\mathbf{D}| = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}.$$

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Võttes $i = 1$, s.t. kasutades arvutamisel maatriksi **A** esimese rea elemente ja nendele vastavaid miinoreid, avaldub determinant kujul

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= [1 \cdot (3-4)] - [1 \cdot (1-2)] + [1 \cdot (2-3)] = -1 .$$

Sama tulemuse saaksime ka teisi ridasid (s.t. $i = 2$ või 3) aluseks võttes, samuti kasutades rea asemel veergu ja sellele vastavaid miinoreid.

1.2.6 Pöördmaatriks

Maatriksi **A** <u>pöördmaatriks</u> $\mathbf{A}^{-1}$ on maatriks, millega esialgset maatriksit vasakult või paremalt korrutades on tulemuseks ühikmaatriks – $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ ja $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Pöördmaatriks leidub igal mittenullilise determinandiga (mittesingulaarsel) ruutmaatriksil.

Üldine valem maatriksi **A** pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ elementide leidmiseks on järgmine

$$a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} \, |\mathbf{A}_{ij}|}{|\mathbf{A}|},$$

kus a_{ij}^{-1} tähistab maatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ ij.-t elementi ja $\mathbf{A}_{ij}$ on maatriksi **A** ij. miinor.

Kui A on 2×2-maatriks, avaldub tema pöördmaatriks kujul

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Pöördmaatriks leiab rakendust näiteks <u>lineaarvõrranditesüsteemide lahendamisel</u>: korrutades maatriksvõrduse

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$$

mõlemad pooled vasakult läbi kordajate maatriksi **A** pöördmaatriksiga, saame lahendivektori **x** kujul

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} .$$

Omadused

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
2. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$, kui **A** on mittesingulaarne.
3. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

4. $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$; **A**, **B**, **C** - mittesingulaarsed.
5. Diagonaalmaatriksi pöördmaatriks on samuti diagonaalmaatriks, kusjuures tema diagonaalielementideks on esialgse maatriksi diagonaalielementide pöördelemendid, s.t. kui $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$, siis $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/d_{nn} \end{pmatrix}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8\cdot 4 - 6\cdot 4}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,75 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näide. Olgu meil tarvis lahendada lineaarvõrranditesüsteem $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2y + z = 13 \\ x + 4z = 5 \end{cases}$.

Sama süsteem maatrikskujul on $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$,

millest $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,6 & 2,4 & -0,6 \\ -0,2 & 0,8 & -0,2 \\ 0,4 & -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

ehk $x = 17$, $y = 8$ ja $z = -3$.

1.2.7 Lineaarne sõltumatus ja maatriksi astak

Maatriksit **A** nimetatakse lineaarselt sõltumatuks, kui ei leidu ühtki vektorit **k** peale nullvektori **0**, mille korral **Ak** = **0**.

Maatriksi astakuks nimetatakse tema maksimaalset lineaarselt sõltumatute ridade või veergude arvu. Maatriksi **A** astakut tähistatakse r(**A**). Kui ruutmaatriksi astak võrdub tema ridade või veergude arvuga, siis öeldakse, et maatriks on täisastakuga.

Kui ruutmaatriks ei ole täisastakuga, siis tema determinant võrdub nulliga ja pöördmaatriksit ei eksisteeri.

Omadused

1. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.
2. Kui **A** on $p\times q$-maatriks, siis $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \le \min(p, q)$.
3. Kui **A** ja **B** on $p\times q$-maatriksid, siis $\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A}) + \mathrm{r}(\mathbf{B})$.

4. Kui **A** on $p \times q$-maatriks ja **B** $q \times r$-maatriks, siis $\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \le \min\left[\mathrm{r}(\mathbf{A}), \mathrm{r}(\mathbf{B})\right]$.

Näide. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **E** astak $\mathrm{r}(\mathbf{E}) = 2$, sest kolmas rida avaldub kahe esimese rea summana ja seega ei saa lineaarselt sõltumatuid ridu olla rohkem kui kaks. Seega ka $|\mathbf{E}| = 0$ ja pöördmaatriksit $\mathbf{E}^{-1}$ ei leidu.

1.2.8 Üldistatud pöördmaatriks

Maatriksi **A** üldistatud pöördmaatriksiks nimetatakse maatriksit $\mathbf{A}^{-}$, mis rahuldab võrdust $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Üldistatud pöördmaatriks ei ole ühene ja võib olla leitud mitmel erineval viisil.

Lihtsaim viis maatriksi **A** üldistatud pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-}$ leidmiseks on

- võtta maatriksist **A** välja maksimaalne lineaarselt sõltumatu alammaatriks (miinor) **B**,
- leida selle pöördmaatriks $\mathbf{B}^{-1}$,
- asendada maatriksis **A** miinor **B** tema pöördmaatriksiga $\mathbf{B}^{-1}$ ning kõik ülejäänud elemendid nullidega.

Näide. Eelmises näites toodud maatriksi **E** maksimaalne lineaarselt sõltumatu miinor on $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Selle pöördmaatriks $\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ ning maatriksi **E** üldistatud pöörd-maatriks $\mathbf{E}^{-}$ esitub kujul

$$\mathbf{E}^{-} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.9 Jälg

Ruutmaatriksi **A** jäljeks tr(**A**), nimetatakse tema peadiagonaalil paiknevate elementide summat – $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Omadused

1. tr(**ABC**) = tr(**BCA**) = tr(**CAB**).
2. Kui **A** ja **B** on $n \times n$-maatriksid ja a ja b on konstandid siis $\mathrm{tr}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + b\,\mathrm{tr}(\mathbf{B})$.

3. Kui **A** ja **B** on n×n-maatriksid ja leidub $\mathbf{B}^{-1}$, siis $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BAB}^{-1})$.
4. Kui **A** on idempotentne, siis $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.
5. $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 71 & 43 & 9 \\ 9 & 23 & -14 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 3 + 43 + (-14) = 32$.

1.2.10 Omaväärtused ja omavektorid

Skalaari λ nimetatakse n×n-maatriksi **A** omaväärtuseks (ladina juureks, karakteristlikuks juureks), kui leidub selline n×1 mittenulliline vektor **x**, mis rahuldab võrdust

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}.$$

Viimane on teisiti üleskirjutatav ka kujul

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Seega on λ maatriksi **A** omaväärtus siis ja ainult siis, kui $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ on singulaarne ($|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n| = 0$ – seda võrrandit nimetatakse ka karakteristlikuks võrrandiks).

Maatriksi **A** kõigi omaväärtuste hulka $\{\lambda_i : i = 1,...,n\}$ nimetatakse maatriksi **A** spektriks.

Maatriksi **A** omaväärtusele λ vastavat mittenullilist vektorit **x** nimetatakse maatriksi **A** omavektoriks. S.t., et mittenulliline vektor **x** on n×n-maatriksi **A** omaväärtusele λ vastav omavektor siis ja ainult siis kui ta on homogeense lineaarvõrrandisüsteemi $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{z} = \mathbf{0}$ lahendiks (**z** suhtes).

Omadused

1. Maatriksid **A** ja $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ on samade omaväärtustega
2. Ruutmaatriksi **A** omaväärtuste summa võrdub tema jäljega ning korrutis determinandiga.
3. Sümmeetrilise maatriksi astak võrdub tema mittenulliliste omaväärtuste arvuga.
4. Kui λ on maatriksi **A** omaväärtus, siis λ^k on maatriksi $\mathbf{A}^k$ omaväärtus.
5. Olgu **B** n×n-maatriks, **D** diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil paiknevad maatriksi **B** omaväärtused ning **L** n×n-maatriks, mis koosneb maatriksi **B** omaväärtustele vastavatest omavektoritest. Kui **L** on mittesingulaarne, siis on maatriks **B** avaldatav kujul $\mathbf{B} = \mathbf{LDL}^{-1}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksile **A** vastav karakteristlik võrrand on

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|=0,\ \text{s.t.}\ \left|\begin{pmatrix}1-\lambda & 4\\ 9 & 1-\lambda\end{pmatrix}\right|=0.$$

Kirjutades viimase determinandi lahti saame, et $(1-\lambda)^2-36=0$, millest maatriksi **A** omaväärtused tulevad: $\lambda_1=-5$ ja $\lambda_2=7$.

Leitud omaväärtustele vastavate omavektorite leidmine pole enam nii lihtne. Siinkohal võiks vaid märkida, et kuna

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}\ \text{ja}\ \begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix},$$

siis on vektorid $\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$ ning $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$ omaväärtustele –5 ning 7 vastavad omavektorid (rahuldavad võrdust $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$).

1.2.11 Ruutvormid, positiivne ja negatiivne määratus

Olgu **a** $n\times 1$-vektor ja **A** $n\times n$-maatriks. Avaldist $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ nimetatakse lineaarvormiks ja avaldist $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}$ ruutvormiks vektori **x** suhtes.

Seejuures võime alati eeldada, et maatriks **A** on sümmeetriline, sest kui ta seda pole, võime asendada **A** sümmeetrilise maatriksiga $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})/2$ ning saada esialgsega võrdse ruutvormi:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)\mathbf{x}.$$

Olgu nüüd maatriks **A** sümmeetriline. Öeldakse, et maatriks **A** on

positiivselt määratud (negatiivselt määratud), kui $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}>0$ ($\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}<0$) iga $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ korral;

positiivselt poolmääratud (negatiivselt poolmääratud), kui $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}\geq 0$ ($\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}\leq 0$) iga **x** korral.

Omadused

1. Kui **A** on positiivselt määratud, siis on seda ka $\mathbf{A}^{-1}$.
2. Maatriks **A** on positiivselt määratud, kui kõik tema omaväärtused on positiivsed ($\lambda_i>0$).
3. $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ ja $\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}$ on positiivselt poolmääratud, **B** – $m\times n$-maatriks.

1.2.12 Maatrikstuletis

Maatrikseid sisaldavate matemaatiliste avaldiste diferentseerimine järgib sarnaseid skalaare sisaldavate avaldiste diferentseerimise reegleid.

Olgu $c=3x_1+5x_2+9x_3$. Tähistades $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}:=\begin{pmatrix}3 & 5 & 9\end{pmatrix}$ ja $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}:=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}$, võib kirjutada $c=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

Et $\frac{\partial c}{\partial x_1} = 3$, $\frac{\partial c}{\partial x_2} = 5$ ja $\frac{\partial c}{\partial x_3} = 9$, siis $\frac{\partial c}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$.

Üldine reegel on: $\frac{\partial \mathbf{Ax}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Olgu nüüd $c = 9x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}$.

Et $\frac{\partial c}{\partial x_1} = 2(9x_1) + 6x_2$ ja $\frac{\partial c}{\partial x_2} = 6x_1 + 2(4x_2)$, siis $\frac{\partial c}{\partial x} = 2\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{Ax}$.

Üldiselt, kui maatriks **A** on sümmeetriline, siis $\frac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{Ax}$,

vastasel juhul (**A** ei ole sümmeetriline) $\frac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

1.3 ÜLESANDED

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Näidake, et

   $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 10 & 20 \\ 8 & -2 & 22 & 18 \end{pmatrix} = \mathbf{AB} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$.

2. Millega võrdub $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$?
3. Näidake, et $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ on sümmeetriline.
4. Näidake, et suvalise $p \times q$-maatriksi **H** korral korrutismaatriksid $\mathbf{HH}^{\mathrm{T}}$ ja $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$ on sümmeetrilised.
5. Kontrollige, kas $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, kui $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Millega võrdub $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$?
7. Näidake, et $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$.
8. Näidake, et 2×2-maatriksi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ korral $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.
9. Leidke $\mathrm{tr}(\mathbf{I}_{n \times n})$.

10. Kontrollige, kas omaväärtuste ja –vektorite peatüki lõpus toodud näite korral kehtib omadus $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^{-1}$, kus 2×2-maatriks **L** koosneb maatriksi **A** omavektoritest ja maatriks **D** on maatriksi A omaväärtuste diagonaalmaatriks.