TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL

MATEMAATIKAINSTITUUT

Eugen Paal

LINEAARALGEBRA

Veebiõpik

TALLINN

2006

Printversioon: Eugen Paal, Lineaaralgebra, TTÜ Kirjastus,
Tallinn, 2004, 208 lk. ISBN 9985-59-446-0

Viitenumber TTÜ Raamatukogu õpikute osakonnas: **512/P-01**

ISBN 9985-59-506-8

Eessõna

Veebiõpik on koostatud autori loengute põhjal Tallinna Tehnikaülikooli üliõpilastele ning koosneb suhteliselt iseseisvatest peatükkidest. Seda võiks soovitada eeskätt neile, kes tutvuvad ainega esmakordselt. Mahtu piiravaks asjaoluks oli loengute ja harjutustundide arv (32+32 tundi).

Õpik sisaldab ka näiteid ja ülesandeid. Osa teoreetilist materjali on samuti vormistatud ülesannetena. Lõpus on ülesannete vastused ja aineregister.

Tekstis on kasutatud järgmisi lühendeid:

- LVS – lineaarvõrrandisüsteem,
- VS – vektorisüsteem,
- LK – lineaarkombinatsioon,
- LFS – lahendite fundamentaalsüsteem,
- $\square$ – tõestuse või lahenduse lõpp.

Autor tänab kõiki, kes annavad teada leitud ebakohtadest.

Eugen Paal

SISUKORD

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 8 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

1. Determinandid

1.1. Determinandi mõiste

Idee selgitus

Algul defineerime *esimest järku determinandi*, siis esimest järku determinandi abil *teist järku determinandi*, seejärel teist järku determinandi abil *kolmandat järku deteremi-nandi* jne, n-järku determinandi defineerime $(n-1)$-järku determinandi kaudu. Sellist defineerimisviisi nimetatakse *induktiivseks* ja vastavat objekti *induktiivseks konstruktsiooniks.*

Eelnevalt on soovitatav põgusalt tutvuda (ruut)maatriksi mõistega (vt **2.1**).

Esimest järku determinant

Arvu a determinandi $|a|$ ehk *esimest järku determinandi* defineerime valemiga $|a| \doteq \det a \doteq a$.

Näide 1.1. $|-5| = -5,\ |\pi| = \pi$ jne.

Teist järku determinant

Olgu $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ arvud. *Teist järku determinandi* defineerime *arendusvalemiga*

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &\doteq \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &\doteq a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

Näide 1.2. Arvutame teist järku determinandi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Kolmandat järku determinant

Olgu a_{ij} arvud ning indeksid $i, j = 1, 2, 3$. *Kolmandat järku determinandi* defineerime *arendusvalemiga*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &\doteq \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\doteq a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Näide 1.3. Arvutame kolmandat järku determinandi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(0 \cdot 6 + 1 \cdot 1) + 1(1 \cdot 6 + 1 \cdot 2) + 3(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Tähistusi

Samamoodi edasi toimides saame defineerida kõrgemat järku determinandid. Olgu a_{ij} arvud ning indeksid $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tähistame *n-järku ruutmaatriksi A determinandi*

Koduleht
Tiitelleht
Lk 11 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

$\det A$ ehk (lühidalt öeldes) *n-järku determinandi* järgmiselt:

$$\det A \doteq \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \doteq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinandi $\det A$ ridade ja veergude all mõeldakse maatriksi A ridu ja veerge.

Miinor ja alamdeterminant

Maatriksi $A = (a_{ij})$ elemendi a_{ij} *miinoriks* M_{ij} nimetatakse determinanti, mille saame maatriksi A determinandist i-nda rea ja j-inda veeru eemaldamisel. Elemendi a_{ij} *alamdeterminandiks* ehk *algebraliseks täiendiks* nimetatakse arvu $A_{ij} \doteq (-1)^{i+j} M_{ij}$. Suurust $(-1)^{i+j}$ nimetame elemendi a_{ij} ja alamdeterminandi A_{ij} *märgiteguriks*.

Determinandi (induktiivne) definitsioon

Defineerime *n-järku determinandi* $(n-1)$-järku determinantide kaudu *arendusvalemiga*

$$\det A \doteq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \doteq a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 12 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Seega on det funktsioon, mis seab igale ruutmaatriksile A arendusvalemi abil vastavusse kindla arvu, $A \xmapsto{\det} \det A$. Teisiti öeldes on funktsiooni det argumendiks *ruutmaatriks* ja väärtuseks *arv*.

Näide 1.4. Vastavalt determinandi definitsioonile

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$- 5\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Siin esinevad kolmandat järku determinandid on omakorda võimalik arvutada arendusvalemi abil. Determinandi väärtuse arvutamise jätame lugejale iseseisvaks ülesandeks.

1.2. Arendusteoreemid ja arendusvalemid

Kroneckeri sümbol

Kroneckeri [1] *sümboli* δ_{ij} defineerime valemiga

$$\delta_{ij} \doteq \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j \\ 0, & \text{kui } i \neq j \end{cases}$$

[1] Leopold Kronecker (1823–1891), saksa matemaatik.

Arendusteoreemid

Teoreem 1.5. *Olgu A ruutmaatriks ning A_{ij} elemendi a_{ij} alamdeterminant. Siis*

$$\delta_{ij} \det A = \begin{cases} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} \end{cases}$$

Arendusvalemid

Võtame arendusteoreemides $j = i$. Saame nn *arendusvalemid*

$$\det A = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} \end{cases}$$

Esimene valem on determinandi arendus i-nda rea järgi ning teine valem on determinandi arendus i-nda veeru järgi. Esimesest arendusvalemist saame $i = 1$ korral determinandi definitsiooni.

Arendusvalemeid võib kasutada ka determinandi arvutamiseks. Otstarbekas on kasutada arendusi eeskätt nende ridade ja veergude järgi, mis sisaldavad nulle.

Näide 1.6. Arendame kolmandat järku determinandi teise rea ja kolmanda veeru järgi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= +a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Võrduste kehtivuse kontrollimise jätame lugejale.

1.3. Determinantide omadusi ja arvutamine

Arendusvalemid on determinantide arvutamiseks üldiselt liiga töömahukad. Mugavam on arvutada determinante alljärgnevate omaduste abil. Enne aga defineerime *kolmnurkse* determinandi.

Kolmnurkne determinant

Ütleme, et determinant on *kolmnurksel kujul* ehk *kolmnurkne*, kui tema peadiagonaalist allpool (ülalpool) asetsevad elemendid on nullid.

Determinantide omadusi

Teoreem 1.7. *Determinantidel on järgmised omadused.*

1. *Kolmnurkne determinant võrdub peadiagonaali elementide korrutisega.*
2. *Kui determinandis on kaks ühesugust rida (veergu), siis on determinant null.*
3. *Determinant ei muutu, kui tema read kirjutada ümber veergudena (loomulikus järjestuses).*
4. *Vahetame determinandis kaks rida (veergu). Tulemus võrdub esialgse determinandi vastandarvuga.*
5. *Korrutame determinandi mingit rida (veergu) arvuga. Tulemus võrdub esialgse determinandi ja arvu korrutisega. Teisiti öeldes võib determinandi rea või veeru ühise teguri tuua determinandi märkide ette.*
6. *Determinant ei muutu, kui reale (veerule) liita arvkordne teine rida (veerg).*

7. *Olgu determinandi mingi rea (veeru) iga element kahe liidetava summa. Siis avaldub determinant kahe determinandi summana. Esimeses determinandis on vaadeldavas reas (veerus) esimesed liidetavad ja teise determinandi vaadeldavas reas (veerus) teised liidetavad. Ülejäänud read (veerud) on endised.*

Determinantide arvutamine

Kasutades ülaltoodud determinantide omadusi, teisendame determinandi kolmnurkseks ning seejärel kasutame omadust 1 teoreemist 1.7.

Näide 1.8. Arvutame determinandi omaduste abil

$$\begin{array}{l}\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}\begin{array}{l}\leftrightarrow R_3 \\ \\ \\ \\ \end{array} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -4R_1 \\ \\ \end{array} \\
= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & -14 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -R_3 \end{array} \\
= -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ -2R_3 \end{array} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
= -6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 2 = 24\end{array}$$

1.4. Ülesanded

Arvutada determinandid.

Teist järku determinandid

1.4.1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **1.4.2** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ **1.4.3** $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$

1.4.4 $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ **1.4.5** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ **1.4.6** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

1.4.7 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$ **1.4.8** $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$

1.4.9 $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$ **1.4.10** $\begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{1-t^2} & \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$

1.4.11 Kontrollida determinantide omadusi teist järku determinantide korral.

Kolmandat järku determinandid

1.4.12 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ **1.4.13** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ **1.4.14** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$

1.4.15 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **1.4.16** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ **1.4.17** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

1.4.18 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ **1.4.19** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **1.4.20** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

1.4.21 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **1.4.22** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **1.4.23** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

1.4.24 $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$ **1.4.25** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$

1.4.26 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$

1.4.27 Kontrollida determinantide omadusi kolmandat järku determinantide korral.

Kõrgemat järku determinandid

1.4.28 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **1.4.29** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

1.4.30 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **1.4.31** $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

1.4.32 $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ **1.4.33** $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 9 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

1.4.34 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ **1.4.35** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

1.4.36 $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ **1.4.37** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$

1.4.38 $\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 19 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

1.4.39 $\begin{vmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

1.4.40 Arvutada *Vandermonde'i determinant*

$$V_n(x_1, \dots, x_n) \doteq \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2. Maatriksarvutus

2.1. Maatriksi mõiste ja elementaartehted

Maatriksi mõiste

Maatriksiks nimetame (arvuliste elementidega) tabelit, mille elemendid on paigutatud ridadeks ja veergudeks.

Olgu a_{ij} arvud ning $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$. Need arvud paigutame maatriksisse A järgmiselt:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} \doteq (a_{ij})$$

Elemendis a_{ij} näitab esimene indeks i rida (*reaindeks*), teine indeks j osutab veergu (*veeruindeks*), kus element a_{ij} asetseb. Arvupaari $k \times n \doteq (k, n)$ nimetatakse maatriksi A *järguks*. Selguse huvides võib maatriksi järku näidata ka tähistuses nt $(a_{ij})_{k \times n}$.

Kui $k = n$, siis öeldakse, et A on *ruutmaatriks*. Ruutmaatriksi järguks nimetame lihtsalt selle maatriksi ridade (ehk veergude) arvu. Elementide järjendit $a_{11}, a_{22}, \ldots$ nimetatakse (ruut)maatriksi A *peadiagonaaliks*.

Kõigi $k \times n$-järku reaalarvuliste elementidega maatriksite hulka tähistame edaspidi $\mathrm{Mat}_{k \times n} \doteq \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 21 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Aritmeetilised vektorid

Üherealisi ja üheveerulisi maatrikseid nimetatakse ka (aritmeetilisteks) *vektoriteks*. Aritmeetilise vektori elemente nimetatakse tavaliselt *vektori koordinaatideks* ehk *komponentideks*. Aritmeetiliste vektorite hulkadeks on seega $\mathrm{Mat}_{1\times n}$ ja $\mathrm{Mat}_{k\times 1}$.

Maatriksi ridadest moodustatud üherealisi maatrikseid nimetatakse maatriksi *reavektoriteks*. Maatriksi veergudest moodustatud üheveerulisi maatrikseid nimetatakse maatriksi *veeruvektoriteks*.

Maatriksite võrdsus

Öeldakse, et maatriksid $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ on *võrdsed* ja kirjutatakse $A = B$, kui

1) neil on ühesugused järgud,
2) nende vastavad elemendid on võrdsed, s.t $a_{ij} = b_{ij}$.

Maatriksite liitmine

Olgu $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ ühesuguste järkudega maatriksid. Maatriksite A ja B *summaks* $A+B$ nimetatakse maatriksit elementidega

$$(A+B)_{ij} \doteq a_{ij} + b_{ij}$$

Teiste sõnadega, maatriksite liitmisel liidame *vastavad* elemendid.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 22 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 2.1 (summa arvutamine)**.** Arvutame maatriksite summa

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -6 & 4 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3 & 2-2 & 3+1\\ 4-6 & 5+4 & 6-5\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}4 & 0 & 4\\ -2 & 9 & 1\end{pmatrix}$$

Maatriksi korrutamine arvuga

Maatriksi $A = (a_{ij})$ ja arvu α *korrutiseks* αA nimetatakse maatriksit elementidega $(\alpha A)_{ij} \doteq \alpha a_{ij}$. Korrutis $A\alpha$ defineeritakse valemiga $(A\alpha)_{ij} \doteq a_{ij}\alpha$. Ilmselt $A\alpha = \alpha A$, sest (arvude korral) $a_{ij}\alpha = \alpha a_{ij}$.

Teiste sõnadega, maatriksi korrutamisel arvuga korrutame antud arvuga maatriksi *kõik* elemendid.

Näide 2.2 (korrutise arvutamine)**.** Arvutame maatriksi ja arvu korrutise

$$3\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -6 & 4 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 3 & -3\cdot 2 & 3\cdot 1\\ -3\cdot 6 & 3\cdot 4 & -3\cdot 5\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}9 & 6 & 3\\ -18 & 12 & -15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -6 & 4 & -5\end{pmatrix}3$$

Nullmaatriks

Maatriksit, mille *kõik* elemendid on *nullid*, nimetatakse *nullmaatriksiks* ehk *nulliks* ja tähistatakse

$$0 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \doteq (0_{ij})$$

Paneme tähele, et nullmaatriksi tähistamiseks kasutame arvu 0. Lugeja peab kontekstist mõistma, millal on tegemist arvuga 0 ja millal nullmaatriksiga. Seda mugavat kahemõttelist tähistust on tülikas vältida. Selguse huvides võib nullmaatriksi järku näidata ka tähistuses, nt $0_{k \times n}$ on $k \times n$-järku nullmaatriks. Nullmaatriksi järku tavaliselt ei eksponeerita, see selgub kontekstist. Näiteks nullmaatriksi liitmisel mingi teise maatriksiga peavad summa eksisteerimiseks järgud olema ühesugused.

Lause 2.3 (nullmaatriksi neutraalsus)**.** $A + 0 = A = 0 + A$

Tõestus. Tõepoolest

$$\begin{aligned} (A+0)_{ij} &= a_{ij} + 0_{ij} = a_{ij} + 0 \\ &= a_{ij} \\ &= 0 + a_{ij} = 0_{ij} + a_{ij} \\ &= (0+A)_{ij} \end{aligned}$$

□

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 24 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Vastandmaatriks

Maatriksi A *vastandmaatriksiks* nimetatakse maatriksit $-A \doteq (-1)A$. Teiste sõnadega, vastandmaatriksi elemendid on maatriksi elementide vastandarvud, s.t $(-A)_{ij} \doteq -a_{ij}$.

Lause 2.4. $A + (-A) = 0 = -A + A$

Tõestus. Tõepoolest

$$\begin{aligned}
[A + (-A)]_{ij} &= a_{ij} + (-A)_{ij} = a_{ij} - a_{ij} \\
&= 0 = 0_{ij} \\
&= -a_{ij} + a_{ij} = (-A)_{ij} + a_{ij} \\
&= [-A + A]_{ij}
\end{aligned}$$

□

2.2. Maatrikstehete omadusi

Elementaarsed omadused

Maatrikstehete lihtsamaid omadusi kirjeldame järgmiselt.

Teoreem 2.5 (maatrikstehete omadused)**.** *Olgu A, B, C ühesuguste järkudega maatriksid ning α, β arvud. Siis*

1) $A + B = B + A$ *(liitmise kommutatiivsus),*
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(liitmise assotsiatiivsus),*
3) $A + 0 = A = 0 + A$ *(nullmaatriksi olemasolu),*
4) $A + (-A) = 0 = -A + A$ *(vastandmaatriksi olemasolu),*

5) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ *(distributiivsus),*
6) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ *(distributiivsus),*
7) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ *(arvuga korrutamise assotsiatiivsus),*
8) $1A = A$ *(unitaalsus).*

Tõestus. Me juba tõestasime omaduse 3) lausega 2.3 ja omaduse 4) lausega 2.4. Tõestame veel omaduse 5). Arvutame

$$\begin{aligned}[\alpha(A+B)]_{ij} &= \alpha(A+B)_{ij} = \alpha(a_{ij}+b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} \\ &= (\alpha A)_{ij} + (\alpha B)_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij}\end{aligned}$$

Ülejäänud omadused tõestatakse samamoodi. □

Maatriksite vahe

Maatriksite A ja B *vahe* $A-B$ defineeritakse valemiga

$$A - B \doteq A + (-B)$$

Maatrikstehete omadusi illustreerib hästi järgmise teoreemi tõestus.

Teoreem 2.6. *Võrrandi* $A + X = B$ *ainus lahend on* $X = B - A$.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $B-A$ on võrrandi lahend

$$\begin{aligned}A + (B-A) &= A + B + (-A) = A + B + (-1)A \\ &= 1A + (-1)A + B = [1 + (-1)]A + B \\ &= 0A + B = 0 + B = B\end{aligned}$$

Olgu Y veel mingi lahend, s.t $A + Y = B$. Siis

$$\begin{aligned} Y &= 0 + Y = (-A + A) + Y = -A + (A + Y) \\ &= -A + B = B + (-A) = B - A \end{aligned}$$

mis ütlebki, et lahend $B - A$ on ainus. $\square$

Järeldus 2.7. *Võrrandi $A + X = A$ ainus lahend on nullmaatriks.*

Seda omadust kasutatakse sageli nullmaatriksi defineerimiseks. Nullmaatriks defineeritakse siis kui võrrandi $A + X = A$ (ainus) lahend.

Järeldus 2.8. *Võrrandi $A + X = 0$ ainus lahend on maatriksi A vastandmaatriks $-A$.*

Seda omadust kasutatakse sageli vastandmaatriksi defineerimiseks. Maatriksi A vastandmaatriks $-A$ defineeritakse siis kui võrrandi $A + X = 0$ (ainus) lahend.

2.3. Maatriksite korrutamine

Aritmeetiliste vektorite skalaarkorrutis

Aritmeetiliste vektorite

$$u \doteq (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad v \doteq (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

skalaarkorrutiseks nimetatakse arvu

$$(u|v) \doteq u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{s=1}^{n} u_s v_s$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 27 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 2.9. Olgu $u = (2, -3, 4, -5)$ ja $v = (4, 5, 2, -3)$. Siis

$$(u|v) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 16$$

Maatriksite korrutamine

Olgu $A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}$ ja $B \in \mathrm{Mat}_{n\times l}$. Maatriksite A ja B *korrutiseks* nimetatakse maatriksit $AB \in \mathrm{Mat}_{k\times l}$, mille i-ndas reas ja j-indas veerus asetseb maatriksi A i-nda reavektori ja maatriksi B j-inda veeruvektori skalaarkorrutis

$$(AB)_{ij} \doteq a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

Tähelepanek

1. Korrutise AB eksisteerimiseks peab maatriksi A *veergude arv* võrduma maatriksi B *ridade arvuga*. Seda korrutise eksisteerimise eeldust võib nimetada *tegurite järkude koosõla* tingimuseks.
2. Korrutises AB on sama palju ridu kui maatriksis A ja sama palju veerge kui maatriksis B.

Näide 2.10 (erinevat järku maatriksite korrutis)**.** Vaatleme maatriksite korrutisi

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
&= \left(\begin{smallmatrix} 3\cdot2-1\cdot0-2\cdot1 & 3\cdot1-1\cdot2+2\cdot0 \\ 0\cdot2+1\cdot0-4\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot2+4\cdot0 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
&= \left(\begin{smallmatrix} 2\cdot3+1\cdot0 & -2\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot2+1\cdot4 \\ 0\cdot3+2\cdot0 & 0\cdot1+2\cdot1 & 0\cdot2+2\cdot4 \\ -1\cdot3+0\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot1 & -1\cdot2+0\cdot4 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Näide 2.11 (rea- ja veeruvektorite korrutised)**.** Vaatleme rea- ja veeruvektorite korrutisi

$$
(1,2,3)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 4\cdot1 & 4\cdot2 & 4\cdot3 \\ 5\cdot1 & 5\cdot2 & 5\cdot3 \\ 6\cdot1 & 6\cdot2 & 6\cdot3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}
$$

Näide 2.12 (ruutmaatriksite korrutised)**.** Vaatleme ruutmaatriksite korrutisi

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 46\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4\\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}$$

Maatrikskorrutise mittekommutatiivsus

Öeldakse, et maatriksid A ja B *kommuteeruvad*, kui $AB = BA$. Eelmised näited ütlevad, et maatrikskorrutamine on üldiselt *mittekommutatiivne* tehe, s.t $AB \neq BA$. Korrutamine on üldiselt mittekommutatiivne ka siis, kui tegurid on ruutmaatriksid.

Avaldist $[A, B] \doteq AB - BA$ (kui leidub) nimetatakse maatriksite A ja B *kommutaatoriks* ehk *Lie korrutiseks*. Kommutaator on määratud vaid *ühesuguste järkudega ruutmaatriksite* korral. Kommutaatori omadusi vaatleme allpool (teoreem 2.18).

Näide 2.13. Arvutame

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}6 & 9\\ -4 & -6\end{pmatrix}^2 &\doteq \begin{pmatrix}6 & 9\\ -4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9\\ -4 & -6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}6\cdot 6-9\cdot 4 & 6\cdot 9-9\cdot 6\\ -4\cdot 6+6\cdot 4 & -4\cdot 9+6\cdot 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Tulemus ütleb, et leidub $A \neq 0$ nii, et korrutis $AA = 0$. Osutub, et korrutis AB võib olla null ($AB = 0$) ka siis, kui mõlemad tegurid on nullist erinevad ja $A \neq B$. Seda omadust nimetatakse *nullitegurite* olemasoluks.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 30 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 2.14 (nullitegurid)**.** Vaatleme maatriksite korrutist

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{\text{nullitegur}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{\text{nullitegur}} = \begin{pmatrix}0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 0\\ 0\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$$

Korrutades aga teises järjekorras, saame

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq 0_{2\times 2}$$

Ühtlasi veendusime veelkord maatrikskorrutise mittekommutatiivsuses.

Ühikmaatriks

Ruutmaatriksit, mille *peadiagonaalil* on *ühed* ning mujal *nullid*, nimetatakse *ühikmaatriksiks* ehk *ühikuks* ehk *üheks* ning tähistatakse

$$I \doteq \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} \doteq (I_{ij}) \doteq (\delta_{ij})$$

Siin on δ_{ij} Kroneckeri sümbol. Ühikmaatriksi tähistamiseks kasutatakse sageli ka arvu 1. Sellisel juhul peab kontekstist mõistma, millal on tegemist arvuga 1 ja millal ühikmaatriksiga.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 31 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Ühikmaatriksi korrutamisel mingi teise maatriksiga peavad tegurite järgud olema kooskõlas. Selguse huvides võib ühikmaatriksi järku näidata ka tähistuses, nt I_n on n-järku ühikmaatriks. Ühikmaatriksi (nagu ka nullmaatriksi) järku tavaliselt ei eksponeerita, see selgub kontekstist.

Näide 2.15 (madalat järku ühikmaatriksid)**.** Esimesed ühikmaatriksid on

$$I_1 \doteq (1), \quad I_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{jne}$$

Maatrikskorrutise omadusi

Võtame kokku maatrikskorrutise lihtsamad omadused.

Teoreem 2.16 (maatrikskorrutise omadused)**.** *Olgu maatriksid A, B, C sellised, et allpool esinevad tehted on määratud ning olgu α arv. Siis*

1) $(AB)C = A(BC)$ *(korrutamise assotsiatiivsus),*
2) $(A \pm B)C = AC \pm BC$ *(korrutamise distributiivsus),*
3) $A(B \pm C) = AB \pm AC$ *(korrutamise distributiivsus),*
4) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$
(arvuga korrutamise assotsiatiivsus),
5) $IA = A = AI$ *(unitaalsus),*
6) $\det AB = \det A \cdot \det B$*.*

Tõestus. Tõestame näiteks omaduse 2)

$$\begin{aligned}[(A+B)C]_{ij} &= (A+B)_{i1}c_{1j} + \ldots + (A+B)_{in}c_{nj} \\ &= (a_{i1}+b_{i1})c_{1j} + \ldots + (a_{in}+b_{in})c_{nj} \\ &= \underbrace{a_{i1}c_{1j} + \ldots + a_{in}c_{nj}}_{(AC)_{ij}} + \underbrace{b_{i1}c_{1j} + \ldots + b_{in}c_{nj}}_{(BC)_{ij}} \\ &= (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC+BC)_{ij}\end{aligned}$$

mis tõestabki nõutava võrduse. Ülejäänud omadustest 1) – 5) tõestatakse samamoodi. Omadus 6) tõestatakse determinantide teoorias. □

Ruutude vahe valem

Lause 2.17. *Olgu A ja B ühesuguse järguga ruutmaatriksid. Siis*

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - [A,B]$$

Tõestus. Tõepoolest

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= A(A-B) + B(A-B) \\ &= AA - AB + BA - BB \\ &= A^2 - B^2 - [A,B]\end{aligned}$$ □

Viimasest lausest järeldub

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \quad \Longleftrightarrow \quad [A,B] = 0$$

mis ütleb, et *ruutude vahe valemit* võib kasutada siis ja ainult siis, kui maatriksid A ja B kommuteeruvad.

Lie-Poissoni algebra (kommutaatori omadused)

Teoreem 2.18 (kommutaatori omadused). *Olgu A, B ja C ühesuguse järguga ruutmaatriksid ning olgu α arv. Siis*

1) $[A, B] = -[B, A]$ *(antisümmeetria),*
2) $[A \pm B, C] = [A, C] \pm [B, C]$ *(aditiivsus),*
3) $[\alpha A, B] = [A, \alpha B] = \alpha[A, B]$ *(homogeensus),*
4) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ *(Leibnizi valem),*
5) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$ *(Jacobi identsus).*

Omadused 1) – 5) on nn *Lie-Poissoni algebra* definitsioonseosed. Neid algebraid kasutatakse laialdaselt mehhaanikas.

2.4. Transponeerimine

Transponeerimine

Maatriksi $A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}$ *transponeeritud* maatriksiks nimetatakse maatriksit $A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times k}$, mille veergudeks on maatriksi A read.

Näide 2.19. Transponeerime maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 2}$$

$$\Rightarrow (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 34 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 2.20. Transponeerime reavektori

$$a = (1,2,3,4) \in \mathrm{Mat}_{1\times 4} \Rightarrow a^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 1}$$

$$\Rightarrow (a^T)^T = (1,2,3,4) = a \in \mathrm{Mat}_{1\times 4}$$

Sümmeetria ja antisümmeetria

Maatriksit A nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui $A^T = A$, ning *antisümmeetriliseks*, kui $A^T = -A$.

Tähelepanek

Nii sümmeetrilised kui ka antisümmeetrilised maatriksid on *ruutmaatriksid*. Antisümmeetrilise maatriksi peadiagonaalil asetsevad nullid.

Näide 2.21. Selles näites on A sümmeetriline ja B antisümmeetriline maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

Teoreem 2.22 (transponeerimise omadused)**.** *transponeerimise omadusi*

Maatriksid A ja B olgu sellised, et allpool esinevad tehted on määratud ning olgu α arv. Siis

1) $(A^T)^T = A$
2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
4) $(AB)^T = B^T A^T$
5) $\det A^T = \det A$

Paneme tähele tegurite järjekorra muutumist omaduses 4).

Lause 2.23. *Iga ruutmaatriksi A korral on maatriks $A + A^T$ sümmeetriline ja maatriks $A - A^T$ antisümmeetriline.*

Tõestus. Tõepoolest

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$$
$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) \qquad \square$$

Teoreem 2.24. *Iga ruutmaatriks on üheselt esitatav sümmeetrilise ja antisümmeetrilise maatriksi summana.*

Tõestus. Võrdus

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{sümmeetriline}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{antisümmeetriline}}$$

koos lausega 2.23 ütleb, et selline esitus (avaldis) leidub. Ühesuse näitamiseks oletame, et $A = B + C$, kus B on *sümmeetriline* ja C *antisümmeetriline* maatriks. Siis ilmselt $A^T = B^T + C^T = B - C$. Võrranditest

$$\begin{cases} A &= B + C \\ A^T &= B - C \end{cases}$$

järeldub, et $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ja $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$. □

2.5. Pöördmaatriks

Pöördmaatriks

Ruutmaatriksi A *pöördmaatriksiks* nimetatakse sellist maatriksit B, mis rahuldab tingimust $AB = I = BA$.

Lause 2.25 (pöördmaatriksi ainsus)**.** *Kui maatriksil on olemas pöördmaatriks, siis on ta määratud üheselt.*

Tõestus. Olgu B ja C maatriksi A pöördmaatriksid, s.t

$$AB = I = BA \qquad \text{ja} \qquad AC = I = CA$$

Arvutame, kasutades maatrikskorrutise assotsiatiivsust

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$ □

Pööratavus

Maatriksit nimetatakse *pööratavaks* ehk *regulaarseks*, kui tal leidub pöördmaatriks. Pööratava maatriksi A (ainsat) pöördmaatriksit tähistatakse $A^{-1} \doteq \frac{1}{A}$, s.t

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

Mittepööratavat maatriksit nimetatakse *singulaarseks*.

Pöördmaatriksi omadusi

Pöördmaatriksi omadusi kirjeldame kokkuvõtvalt.

Teoreem 2.26 (pöördmaatriksi omadused)**.** *Olgu maatriksid A, B ning arv α sellised, et allpool esinevad tehted on määratud. Siis*

1) $I^{-1} = I$
2) $(A^{-1})^{-1} = A$
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$
5) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
6) $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

Tõestus. Tõestame näiteks omaduse 3). Arvutame

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

mis ütleb, et $B^{-1}A^{-1}$ on maatriksi AB pöördmaatriks. Ülejäänud omadustest 1) – 5) tõestatakse samamoodi. Omadus 6) järeldub valemist $\det A \cdot \det B = \det AB$. □

Paneme tähele tegurite järjekorra muutumist omaduses 3).

Pöördmaatriksi olemasolu ja arvutamine

Definitsioon 2.27. Olgu A_{ij} maatriksi $A = (a_{ij})$ elemendi a_{ij} alamdeterminant. Maatriksit $\operatorname{adj} A \doteq (A_{ij})^T$ nimetatakse maatriksi A *adjungeeritud* maatriksiks.

Teoreem 2.28. $A \operatorname{adj} A = (\operatorname{adj} A)A = |A|I$.

Tõestus. Need valemid järelduvad determinantide arendusteoreemidest (vt teoreem 1.5). □

Siit järeldub kergesti

Teoreem 2.29. *Ruutmaatriks A on pööratav parajasti siis, kui* $\det A \neq 0$. *Pöördmaatriksi olemasolu korral*

$$A^{-1} \doteq \frac{1}{A} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \qquad (*)$$

Tõestus. $\Longrightarrow$: Olgu maatriks A pööratav. Siis seosest $AA^{-1} = I$ järeldub

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |A| \neq 0$$

Kuna $\det A \neq 0$, siis eelnenud teoreemis 2.28 antud valemi võime kirjutada kujul

$$A\,\frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}\,A = I \tag{$**$}$$

Et pöördmaatriks on määratud üheselt, siis on ta antud valemiga $(*)$.

$\Longleftarrow$ Kui $\det A \neq 0$, siis teoreemist 2.28 järeldub valem $(**)$, mis ütlebki, et ruutmaatriks A on pööratav ning maatriks $\operatorname{adj} A/\det A$ on maatriksi A pöördmaatriks. $\square$

Näide 2.30. Arvutame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriksi. Kõigepealt arvutame determinandi

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Nüüd leiame alamdeterminandid

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Siis saame

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Näide 2.31. Arvutame peast

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Maatriksite jagamisest

Maatriksite *mittekommutatiivsuse* tõttu üldiselt

$$A^{-1}B \neq BA^{-1}, \quad \text{s.t} \quad \frac{1}{A}B \neq B\frac{1}{A}$$

Siit järeldub, et tähistus (jagatis) $\frac{B}{A}$ on *kahemõtteline*. Pööratava A korral on jagamistehteid üldiselt kaks, *parem- ja vasakpoolne*

$$B/A \doteq BA^{-1}, \qquad A\backslash B \doteq A^{-1}B, \qquad \det A \neq 0$$

Vaid *kommuteeruvate* maatriksite korral on jagatis *üheselt* defineeritud ning tähistus $\frac{B}{A}$ korrektne.

2.6. Maatriksvõrrandid

Maatriksvõrrandites on oluline tundmatu maatriksi asetus korrutistes. Vaatleme vaid lihtsamaid lineaarseid maatriksvõrrandeid.

Tundmatu maatriks X on korrutises paremal

Lause 2.32. *Pööratava maatriksi A korral on võrrandi $AX = B$ ainus lahend $X = A^{-1}B$.*

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $A^{-1}B$ on võrrandi $AX = B$ lahend. Tõepoolest

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$$

Olgu Y veel mingi lahend, s.t $AY = B$. Siis

$$Y = IY = (A^{-1}A)Y = A^{-1}(AY) = A^{-1}B$$

Siit järeldub, et $A^{-1}B$ on võrrandi $AX = B$ *ainus* lahend. $\square$

Seega peame maatriksi X avaldamiseks võrrandist $AX = B$ seda võrrandit korrutama maatriksiga A^{-1} *vasakult.*

Järgnevad laused tõestatakse samamoodi.

Tundmatu maatriks X on korrutises vasakul

Lause 2.33. *Pööratava maatriksi A korral on võrrandi $XA = B$ ainus lahend $X = BA^{-1}$.*

Seega peame maatriksi X avaldamiseks võrrandist $XA = B$ seda võrrandit korrutama maatriksiga A^{-1} *paremalt.*

Tundmatu maatriks X on korrutises keskel

Lause 2.34. *Kui A ja B on pööratavad, siis on võrrandi $AXB = C$ ainus lahend $X = A^{-1}CB^{-1}$.*

Seega peame maatriksi X avaldamiseks võrrandist $AXB = C$ seda võrrandit korrutama maatriksiga A^{-1} *vasakult* ja maatriksiga B^{-1} *paremalt.*

Näide 2.35. Lahendada maatriksvõrrand

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Tundmatu maatriks X on korrutises *paremal*. Kasutame lauset 2.32. Maatriksi $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pöördmaatriksi arvutasime eespool. Seega

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 4\cdot 2 \\ -1\cdot 3 - 1\cdot 0 - 3\cdot 2 \\ -1\cdot 3 - 2\cdot 0 - 5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -\ \ 9 \\ -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lahendi kontrollimiseks arvutame

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -\ \ 9 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 11 + 2\cdot 9 - 2\cdot 13 \\ 2\cdot 11 - 1\cdot 9 - 1\cdot 13 \\ 1\cdot 11 - 0\cdot 9 - 1\cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 44 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

2.7. Ülesanded

Elementaartehted maatriksitega

2.7.1 Lahendada lineaarne maatriksvõrrandite süsteem ja kontrollida lahendit.

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ -4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.7.2 Lahendada lineaarne maatriksvõrrandite süsteem ja kontrollida lahendit.

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ -4X + Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.7.3 Kontrollida maatrikstehete omadusi aritmeetriliste vektorite korral.

2.7.4 Kontrollida maatrikstehete omadusi teist järku ruutmaatriksite korral.

Maatriksite korrutamine

2.7.5 Arvutada AB ja BA, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7.6 Arvutada AB ja BA, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

2.7.7 Veenduda, et $(AB)C = A(BC)$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.7.8 Arvutada $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$

2.7.9 Arvutada $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$

2.7.10 Leida $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad (n \in \mathbb{N})$

2.7.11 Leida $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \quad (n \in \mathbb{N})$

2.7.12 Leida $D(\alpha)D(\beta)$, $D^{-1}(\alpha)$ ja $D^n(\alpha)$ $(n \in \mathbb{N})$, kui

$$D(\alpha) \doteq \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Veenduda, et $D(\alpha)$ on ortogonaalmaatriks (vt alapunkt **??**).

2.7.13 Ruutmaatriksi A *jälg* tr A on tema peadiagonaali elementide summma. Tõestada, et teist järku ruutmaatriks A rahuldab ruutvõrrandit

$$x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A = 0$$

Maatrikskorrutise omadusi

2.7.14 Kontrollida maatrikskorrutise omadusi teist järku ruutmaatriksite korral.

2.7.15 Kontrollida transponeerimise omadusi teist järku ruutmaatriksite korral.

2.7.16 Kontrollida pöördmaatriksi omadusi teist järku ruutmaatriksite korral.

2.7.17 Tõestada Lie-Poissoni algebra definitsioonseosed.

Pöördmaatriks ja maatriksvõrrandid

2.7.18 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2.7.19 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 9\end{pmatrix}$$

2.7.20 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$X\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$$

2.7.21 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$$

2.7.22 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$$

2.7.23 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$X\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$$

2.7.24 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

2.7.25 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

2.7.26 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

2.7.27 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

2.7.28 Tõestada pöördmaatriksi arvutusvalem teoreemis 2.29.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 49 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

3. Maatriksi astak

3.1. Maatriksi miinorid

Maatriksi *miinorid* on selle maatriksi ridade ja veergude eemaldamise teel moodustatud determinandid.

Näide 3.1. Leiame maatriksi

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

miinoreid. *Esimest järku* miinorid moodustuvad maatriksi elementidest nt $2, 7, 1$ jne. *Teist järku* miinorid on näiteks

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{jne}$$

Kolmandat järku miinorid on näiteks

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{jne}$$

Kolmest kõrgemat järku miinorid antud maatriksil puuduvad.

3.2. Astaku mõiste

Maatriksi *astak* on selle maatriksi *nullist erinevate* miinorite *kõrgeim* järk. Teisiti öeldes, maatriksi astak on r, kui sellel maatriksil

1) leidub vähemalt üks *nullist erinev* r-järku miinor,
2) puuduvad *nullist erinevad* r-ist kõrgemat järku miinorid.

Kui maatriksitel A ja B on ühesugused järgud ning astakud, siis nimetame neid *ekvivalentseteks* ja kirjutame $A \sim B$.

Maatriksi A astakut tähistame $\operatorname{rank} A$ või $r(A)$.

Ekvivalentsi omadusi

1) Refleksiivsus. $A \sim A$.
2) Sümmeetria. Kui $A \sim B$, siis $B \sim A$.
3) Transitiivsus. Kui $A \sim B$ ja $B \sim C$, siis $A \sim C$.

Kasutades neid ekvivalentsi omadusi, saab maatriksi astakut ökonoomselt leida maatriksi nn *elementaarteisenduste* abil.

3.3. Maatriksi elementaarteisendused

Maatriksi *esimest liiki elementaarteisenduseks* nimetatakse maatriksi mis tahes rea (või veeru) korrutamist *nullist erineva* arvuga.

Maatriksi *teist liiki elementaarteisenduseks* nimetatakse maatriksi mingile reale (veerule) *arvkordse* sama maatriksi mõne teise rea (veeru) liitmist.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 51 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Maatriksi elementaarteisenduseks nimetame ka maatriksi ridade (veergude) *järjestuse* muutmist. See teisendus ei ole aga sõltumatu, vaid on realiseeritav esimest ja teist liiki elementaarteisenduste kompositsioonina. Näiteks

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{-R_1} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b-a \end{pmatrix}^{+R_2} \Longrightarrow \begin{pmatrix} b \\ b-a \end{pmatrix}_{-R_1} \Longrightarrow \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}_{\cdot(-1)} \Longrightarrow \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Näeme, et read vahetusid. Samamoodi toimime veergudega.

Teoreem 3.2. *Maatriksi elementaarteisendused ei muuda selle maatriksi astakut ja järku.*

Tõestus. Selles saab veenduda determinantide omaduste abil. □

3.4. Juhtelement ja treppmaatriks

Juhtelement

Maatriksi rea *juhtelemendiks* nimetatakse selle rea (vasakult) esimest nullist erinevat elementi.

Treppmaatriks

Ütleme, et maatriks on *trepikujuline* ehk *treppmaatriks*, kui

1) read, mis koosnevad nullidest, on maatriksi põhjas (all),

2) mis tahes rea juhtelement asetseb *rangelt vasakul* temale järgneva rea juhtelemendist (kui leidub).

Treppmaatriksi astak

Teoreem 3.3. *Treppmaatriksi astak võrdub selle maatriksi juhtelementide arvuga.*

Tõestus. Eemaldame need read ja veerud, mis *ei sisalda* juhtelemente. Saame kolmnurkse determinandi, mille peadiagonaalil asetsevad juhtelemendid. See determinant on ilmselt nullist erinev. □

3.5. Astaku leidmine

Kasutades elementaarteisendusi, teisendame maatriksi treppmaatriksiks, seejärel kasutame teoreemi 3.3 treppmaatriksi astakust.

Näide 3.4. Leida maatriksi

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

astak.

Lahendus. Kasutades elementaarteisendusi, arvutame

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -3R_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftrightarrow R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 53 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

$$
\begin{aligned}
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ \\ \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{11} & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Tulemus ütleb, et antud maatriksi astak on 2. Viimase maatriksi juhtelemendid on $\boxed{\textit{raamitud}}$.

3.6. Ülesanded

Leida maatriksi astak.

3.6.1 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ **3.6.2** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

3.6.3 $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$ **3.6.4** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 54 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

3.6.5 $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$

3.6.6 $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$

Uurida maatriksi astaku sõltuvust parameetrist λ.

3.6.7 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **3.6.8** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

3.6.9 $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$ **3.6.10** $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

3.6.11 $\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$

3.6.12 $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$

4. Lineaarvõrrandisüsteemid

4.1. LVS ja tema lahend

Tähistusi ja mõisteid

Lineaarvõrrandisüsteemiks (LVS-iks) nimetatakse järgmist võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Siin

- a_{ij} on LVS-i *kordajad*,
- b_i on LVS-i *vabaliikmed*,
- x_i on LVS-i *tundmatud*.

Tundmatute arv n ja võrrandite arv k on sõltumatud. LVS-i kordajate maatriksit $A = (a_{ij})$ nimetatakse lihtsalt *LVS-i maatriksiks*. LVS-i maatriksi laiendamisel vabaliikmete veeruga saadakse LVS-i *laiendatud* maatriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}$$

LVS on ilmselt üheselt määratud oma laiendatud maatriksiga.

Lahendi mõiste

Arvude järjendit nimetatakse võrrandisüsteemi *lahendiks*, kui

1) järjendi elementide arv võrdub süsteemi tundmatute arvuga,
2) järjendi elementide asendamine (loomulikus järjestuses) süsteemi mis tahes võrrandisse tundmatute asemele muudab selle võrrandi samasuseks.

Lahenduvusega seotud mõisteid

Võrrandisüsteemi nimetatakse *kooskõlaliseks*, kui tal leidub *vähemalt üks* lahend. Öeldakse, et süsteem on *määratud*, kui tal leidub *parajasti üks* lahend. Süsteemi nimetatakse *vasturääkivaks*, kui tal *puuduvad* lahendid.

Näide 4.1. Võrrand $0x = 0$ on kooskõlaline (lõpmata palju lahendeid). Võrrand $2x = 6$ on määratud (parajasti üks lahend). Võrrand $0x = 1$ on vasturääkiv (lahendid puuduvad).

4.2. LVS-i maatrikskuju

Defineerime maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Siis on LVS 4.1 samaväärne maatriksvõrrandiga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Samaväärsuses võib veenduda maatriksarvutuse reeglite abil. Korrutades maatriksid A ja x, saame maatriksvõrduse

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

mille vastavate elementide võrdsustamine annabki süsteemi 4.1 võrrandid.

Seega saab LVS-i kompaktselt esitada maatrikskujul maatriksvõrrandina $Ax = b$. Võrrandi $Ax = b$ lahendi all mõistame sellist aritmeetilist (veeru)vektorit, mille asendamisel võrrandisse saame samasuse.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 59 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

4.3. Homogeense LVS-i omadusi

Homogeenne LVS

LVS-i nimetatakse *homogeenseks*, kui vabaliikmed on *nullid*, s.t $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Seega on homogeenne LVS on järgmine:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Homogeenne LVS on samaväärne maatriksvõrrandiga $Ax = 0$.

Kooskõlalisus

Lause 4.2. *Homogeenne LVS on kooskõlaline.*

Tõestus. Tõepoolest, homogeense LVS-i üheks lahendiks on nn *triviaalne lahend* $x = 0$ (nullvektor). □

Triviaalne lahend ja mittetriviaalsed lahendid

Homogeense LVS-i $Ax = 0$ lahendit $x = 0$ nimetatakse *triviaalseks* lahendiks. Homogeense LVS-i ülejäänud lahendeid (kui leiduvad) nimetatakse *mittetriviaalseteks*.

Lahendite omadusi

Teoreem 4.3. *Olgu a ja b homogeense LVS-i $Ax = 0$ lahendid, s.t $Aa = 0 = Ab$. Siis on $a + b$ ja αa samuti lahendid.*

Tõestus. Tõepoolest, kasutades maatrikstehete omadusi, saame

1) $A(a + b) = Aa + Ab = 0 + 0 = 0$
2) $A(\alpha a) = (A\alpha)a = (\alpha A)a = \alpha(Aa) = \alpha 0 = 0$ □

Seega on homogeense LVS-i lahendihulk (kui aritmeetilise vektorruumi alamhulk) kinnine liitmise ja arvuga korrutamise suhtes.

Kui tundamatute arv = võrrandite arv ($n = k$)

Kui $n = k$ ja $\det A \neq 0$, siis leidub homogeensel LVS-il vaid triviaalne lahend. Kui $n = k$, siis peab *mittetriviaalse* lahendi olemasoluks $\det A = 0$.

Tõestus. Tõepoolest, kui $n = k$, siis on regulaarse A korral võrrandil $Ax = 0$ parajasti üks lahend, selleks on $x = A^{-1}0 = 0$. □

4.4. Crameri valemid

Crameri peajuht

Öeldakse, et LVS-i korral on tegemist *Crameri* [2] *peajuhuga*, kui

[2] Gabriel Cramer (1704–1752), šveitsi matemaatik.

1) tundmatute arv *võrdub* võrrandite arvuga,
2) süsteemi maatriksi determinant *erineb nullist*.

Tähistusi

Crameri peajuhul on LVS järgmise kujuga:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

kusjuures $\det A \neq 0$. Maatriksil A leidub siis teatavasti pöördmaatriks A^{-1}.

Olgu A_i maatriks, mis on saadud maatriksist A i-nda *veeru* asendamisel LVS-i *vabaliikmete* veeruga.

Crameri valemid

Teoreem 4.4. *Crameri peajuhul on LVS-il* parajasti üks *lahend. Lahend avaldub valemitega*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i = 1, \dots, n$$

Tõestus. Kasuta pöördmaatriksit. □

4.5. Kroneckeri-Capelli teoreem

LVS-i kooskõlalisust kirjeldab nn *Kroneckeri-Capelli* [3] *teoreem.*

Teoreem 4.5 (Kroneckeri-Capelli teoreem, astakutingimus)**.** *LVS on kooskõlaline parajasti siis, kui tema maatriksi astak võrdub laiendatud maatriksi astakuga.*

Tõestus. Tõestus on esitatud alapunktis 6.13. □

Ülesanne. Näidata, et süsteem

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

on *kooskõlaline.*
Ülesanne. Näidata, et süsteemil

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 4 \\ 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 10 \end{cases}$$

puuduvad lahendid. Uurida (selgitada) põhjust.

[3] Alfredo Capelli (1855–1910) , itaalia matemaatik.

Lahendite arvust

Teoreem 4.6. *Kooskõlalisel LVS-il 4.1 on*

1) parajasti üks lahend, kui $n = r(A)$,
2) lõpmata palju lahendeid, kui $n > r(A)$.

4.6. Üld- ja erilahend

Üld- ja erilahendi mõiste

LVS-i *üldlahend* on selline parameetritest sõltuv lahend, mis rahuldab järgmist tingimust: parameetritele arvväärtuste omistamise teel on võimalik saada antud LVS-i *kõik* lahendid.

Lahendeid, mis saadakse üldlahendist parameetritele (kõigile või osale neist) arvväärtuste omistamise teel, nimetatakse LVS-i *erilahenditeks*.

Vabad tundmatud

Osutub, et LVS-i üldlahendi parameetreid saab valida tundmatute hulgast. Tundmatuid, mis on valitud üldlahendi parameetriteks, nimetatakse *vabadeks tundmatuteks*.

LVS-i vabade tundmatute arvu ($v.t.a.$) leidmiseks võib kasutada järgmist teoreemi.

Teoreem 4.7. *Kooskõlalise LVS-i maatriksi astak võrdub tundmatute arvu (t.a.) ja vabade tundmatute arvu (v.t.a.) vahega.*

Seega on meil lihtne valem

$$\boxed{v.t.a. = t.a. - r}$$

Kui süsteemil on vähemalt üks vaba tundmatu, siis on tal ilmselt lõpmata palju lahendeid.

Homogeense LVS-i mittetriviaalse lahendi olemasolu

Teoreem 4.8. *Kui homogeensel LVS-il on tundmatute arv suurem võrrandite arvust, siis leidub tal mittetriviaalne lahend.*

Tõestus. Olgu LVS 4.1 homogeenne ning olgu tundmatute arv suurem võrrandite arvust, s.t $n > k$. Olgu r sellise süsteemi maatriksi astak. Ilmselt $r \leq k$, $r \leq n$ ning

$$v.t.a. = n - r = (n - k) + (k - r) > 0$$

Seega on teoreemi eeldustel LVS-i üldlahendis *vähemalt üks* vaba tundmatu. Siit järeldubki, et antud juhul leidub LVS-il *mittetriviaalseid lahendeid.* □

4.7. Gaussi meetod

Nüüd selgitame LVS-ide lahendamist elementaarteisendustega, mida kirjanduses tuntakse ka *Gaussi* [4] *meetodi* nime all.

LVS-ide ekvivalentsus

Öeldakse, et LVS-id on *ekvivalentsed* ehk *samaväärsed*, kui neil on ühesugused lahendihulgad, s.t esimese LVS-i iga lahend on teise LVS-i lahendiks ja vastupidi, teise LVS-i iga lahend on esimese LVS-i lahendiks.

LVS-ide ekvivalentsuse tähistamiseks kasutame sümbolit $\sim$.

[4] Carl Friedrich Gauss (1777–1855) , saksa matemaatik.

Ekvivalentsi omadusi

1. Refleksiivsus. Iga LVS on ekvivalentne iseendaga, s.t $LVS \sim LVS$.
2. Sümmeetria. Kui $LVS(1) \sim LVS(2)$, siis $LVS(2) \sim LVS(1)$.
3. Transitiivsus. Kui $LVS(1) \sim LVS(2)$ ja $LVS(2) \sim LVS(3)$, siis $LVS(1) \sim LVS(3)$.

LVS-i elementaarteisendused

LVS-i *esimest liiki elementaarteisenduseks* nimetatakse LVS-i mis tahes võrrandi läbikorrutamist *nullist erineva* arvuga.

LVS-i *teist liiki elementaarteisenduseks* nimetatakse LVS-i mingile võrrandile sama süsteemi mõne teise *arvkordse* võrrandi liitmist.

LVS-i elementaarteisenduseks nimetatakse ka LVS-i võrrandite *järjestuse* muutmist. See elementaarteisendus ei ole aga sõltumatu, vaid on realiseeritav esimest ja teist liiki elementaarteisenduste kompositsioonina (samamoodi maatriksi ridade järjestuse muutmisega).

Teoreem 4.9. *LVS-i elementaarteisendused ei muuda LVS-i lahendihulka.*

Tõestus. Soovitav tõestada iseseisva harjutusena. □

Trepikujuline LVS

Ütleme, et LVS on *trepikujuline*, kui tema kordajate maatriks on treppmaatriks.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 66 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Gaussi meetodi idee

Gaussi meetod on lineaarvõrrandisüsteemide ökonoomne lahendusmeetod elementaarteisenduste abil. Meetodi aluseks on tähelepanek, et LVS-i elementaarteisendusi võib sooritada maatriksesituses, kasutades LVS-i laiendatud maatriksi (peamiselt ridade) elementaarteisendusi. LVS teisendatakse elementaarteisenduste abil ekvivalentsele trepp-kujule. Meetod võimaldab

1) leida LVS-i maatriksi ja tema laiendatud maatriksi astakud,
2) kontrollida astakutingimust (kooskõlalisust),
3) selekteerida välja vabad tundmatud (kui leiduvad),
4) kooskõlalisuse korral leida LVS-i kõik lahendid, olemasolu korral üldlahend.

Gaussi meetod (LVS-i lahendamine)

1. Kirjutame välja LVS-i laiendatud maatriksi, eraldades selgelt vabaliikmete veeru.
2. Kasutades ridade elementaarteisendusi, teisendame LVS-i laiendatud maatriksi *ekvivalentsele* treppkujule. Veergude elementaarteisendustest on lubatud veergude järjestuse muutmine, sellega kaasneb tundmatute järjestuse muutmine.
3. Leiame LVS-i maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud ning kontrollime astakutingimust.
4. Kooskõlalisuse korral leiame LVS-i *vabade tundmatute arvu.*
5. Kirjutame välja LVS-i ekvivalentse treppkuju.
6. Tundmatud selekteerime *juhtivateks* ja (olemasolu korral) *vabadeks.* Juhttundmatud asetsevad treppmaatriksi juhtelementide kõrval.

7. LVS-i ekvivalentsest treppkujust avaldame *juhttundmatud* vabaliikmete ja (olemasolu korral) vabade tundmatute kaudu. Kasutada saab
   a) asendusmeetodit,
   b) Crameri valemeid,
   c) pöördmaatriksit.
8. Kirjutame välja üldlahendi, näidates ära vabad tundmatud.
9. Kahtluse korral kontrollime lahendit. Üldlahendi asendamisel LVS-i võrranditesse peavad vabad tundmatud *koonduma*.

Gaussi meetodi kokkuvõte

LVS teisendatakse ekvivalentsele treppkujule nii, et eralduksid juhttundmatud ja vabad tundmatud. Tulemus kuulutatakse üldlahendiks ja lahendamine lõpetatuks. Juhttundmatute avaldamine vabade tundmatute kaudu on vaid mugavuse küsimus.

Näide 4.10. Lahendada LVS

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Lahendus. Selle süsteemi laiendatud maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & \mathbf{6} \\ 3 & 5 & 2 & 2 & \mathbf{4} \\ 9 & 4 & 7 & 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Ridade elementaarteisendustega leidsime, et maatriksiga A *ekvivalentne* treppmaatriks on

$$\begin{pmatrix} 1 & -\ 2 & -1 & -1 & -\ \mathbf{2} \\ 0 & 11 & -1 & 5 & \mathbf{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Vahetades nüüd (murdude vältimiseks järgnevates arvutustes) *teise ja kolmanda veeru*, saame

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -\ 2 & -1 & -\ \mathbf{2} \\ 0 & \boxed{-1} & 11 & 5 & \mathbf{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Ilmselt $r(A) = 2$ ja süsteemi $v.\ t.\ a. = 4 - 2 = 2$. Kirjutame välja esialgse LVS-iga *ekvivalentse* süsteemi

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_3 - \ 2x_2 - 1x_4 = -\ 2 \\ 0x_1 - 1x_3 + 11x_2 + 5x_4 = \ 10 \\ 0x_1 + 0x_3 + \ 0x_2 + 0x_4 = \ 0 \end{cases}$$

Triviaalsed liikmed ja võrrandid eemaldame ning *juhttundmatud raamime*. Siis saame

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_3 - \ 2x_2 - \ x_4 = -\ 2 \\ \qquad -\boxed{x_3} + 11x_2 + 5x_4 = \ 10 \end{cases}$$

Vabadeks (parameetriteks) loeme tundmatud x_2 ja x_4. Nüüd avaldame juhttundmatud x_1, x_3 vabaliikmete ja vabade tundmatute x_2, x_4 kaudu. Seda on mugav teha nii, et kõigepealt avaldame x_3 *teisest* võrrandist. Saame

$$x_3 = -10 + 11x_2 + 5x_4$$

Edasi arvutame esimesest võrrandist

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - \boxed{x_3} + 2x_2 + x_4 \\ &= -2 - (-10 + 11x_2 + 5x_4) + 2x_2 + x_4 \\ &= 8 - 9x_2 - 4x_4 \end{aligned}$$

Üldlahend on

$$\begin{cases} x_1 = \quad 8 - \ 9x_2 - 4x_4 \\ x_3 = -10 + 11x_2 + 5x_4 \\ x_2, x_4 - \text{vabad tundmatud} \end{cases}$$

Kahtluse korral kontrollime lahendit. Üldlahendi asendamisel süsteemi võrranditesse peavad vabad tundmatud *koonduma*. Kontrollime üldlahendit näiteks *esimese* võrrandiga

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 3x_4 &= 2(8 - 9x_2 - 4x_4) + 7x_2 \\ &\qquad + (-10 + 11x_2 + 5x_4) + 3x_4 \\ &= 6 \quad \Longrightarrow \quad 6 = 6 \end{aligned}$$

Ülejäänud võrranditega kontrollitakse lahendit samamoodi. □

4.8. Ülesanded

Lahendada Crameri valemite abil LVS ja kontrollida lahendit.

4.8.1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$ **4.8.2** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Lahendada Gaussi meetodiga LVS ja kontrollida lahendit.

4.8.3 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

4.8.4 $\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

4.8.5 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

4.8.6 $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

4.8.7 $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3= \ \ 8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3= \ \ 9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3= \ \ 7 \\ \ \ x_1+8x_2-7x_3=12 \end{cases}$

4.8.8 $\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5= \ \ 1 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+\ \ x_4+2x_5= \ \ 3 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 \qquad\quad =-7 \\ 9x_1+6x_2+\ \ x_3+3x_4+2x_5= \ \ 2 \end{cases}$

Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

4.8.9 $X\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ **4.8.10** $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

4.8.11 $X\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ **4.8.12** $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & -6\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

4.8.13 $X\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ **4.8.14** $\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

4.8.15 $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}X-X\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

4.8.16 $X\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 72 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Leida kõik maatriksid, mis kommuteeruvad antud maatriksiga ja kontrollida tulemuse kommuteerumist selle maatriksiga.

4.8.17 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **4.8.18** $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ **4.8.19** $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

4.8.20 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

4.8.21 Tõestada, et LVS-i elementaarteisendused jätavad lahendihulga samaks.

4.8.22 Kontrollida Crameri valemeid teist järku determinantide korral.

4.8.23 Kontrollida Crameri valemeid kolmandat järku determinantide korral.

4.8.24 Tõestada Crameri valemid.

5. Kompleksarvud

5.1. Kompleksarvu mõiste

Kompleksarvuks nimetatakse reaalarvuliste elementidega teist järku ruutmaatriksit, milles

1) peadiagonaali elemendid on võrdsed,
2) kõrvaldiagonaalil asetsevad teineteise vastandarvud.

Kõigi kompleksarvude hulka tähistame $\mathbb{C}$ ja nimetame *kompleksarvude korpuseks.*

Tähistusi

Seega maatriks $z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$, kui

1) $z_{11} = z_{22} \in \mathbb{R}$
2) $z_{12} = -z_{21} \in \mathbb{R}$

Mugav on tähistada

$$z_{11} = z_{22} = a \in \mathbb{R}, \qquad z_{12} = -z_{21} = -b \in \mathbb{R}$$

Avaldist

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

nimetame kompleksarvu z *maatrikskujuks* ehk *maatriksesituseks.*

Näide 5.1. Kerge on näha, et

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} -\pi & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} \notin \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} \notin \mathbb{C}$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 74 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Reaal- ja imaginaarosa

Arvu $a \in \mathbb{R}$ nimetatakse kompleksarvu $z = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}$ *reaalosaks* ja tähistatakse $a = \operatorname{re} z$. Arvu $b \in \mathbb{R}$ nimetatakse kompleksarvu $z = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}$ *imaginaarosaks* ja tähistatakse $b = \operatorname{im} z$.

Ühik, imaginaarühik ja null

Kompleksarvu

$$I \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \doteq 1$$

s.t teist järku ühikmaatriksit nimetatakse *ühikuks* ehk *üheks*. Kompleksarvu

$$i \doteq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nimetatakse *imaginaarühikuks*. Kompleksarvu

$$0 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nimetatakse *nulliks*.

Lause 5.2. *Iga kompleksarv $z \in \mathbb{C}$ avaldub üheselt ühiku ja imaginaarühiku lineaarkombinatsioonina*

$$z = (\operatorname{re} z)I + (\operatorname{im} z)i \quad \in \mathbb{C}$$

Tõestus. Tõepoolest

$$(\operatorname{re} z)I = (\operatorname{re} z)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname{re} z & 0\\ 0 & \operatorname{re} z\end{pmatrix}$$
$$(\operatorname{im} z)i = (\operatorname{im} z)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\operatorname{im} z\\ \operatorname{im} z & 0\end{pmatrix}$$

Liites saame

$$\begin{aligned}(\operatorname{re} z)I + (\operatorname{im} z)i &= \begin{pmatrix}\operatorname{re} z & 0\\ 0 & \operatorname{re} z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\operatorname{im} z\\ \operatorname{im} z & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\operatorname{re} z & -\operatorname{im} z\\ \operatorname{im} z & \operatorname{re} z\end{pmatrix} = z\end{aligned}$$

mis tõestabki nõutava võrduse. Ühesus järeldub kergesti maatriksite võrdsuse definitsioonist. □

Märkus

Korrutamist ühikuga (ühega) I tavaliselt ei eksponeerita. Seega kirjutatakse

$$z = \operatorname{re} z + (\operatorname{im} z)i = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z$$

Kompleksarvu algebraline kuju

Avaldist

$$z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z = a + ib$$

nimetatakse kompleksarvu z *algebraliseks kujuks*.

Arvutusi kompleksarvudega sooritamegi mitte maatrikskujul, vaid eelistatavalt algebralisel kujul.

Kompleksarvude võrdsuse tunnus

Lause 5.3. *Kompleksarvud on võrdsed parajasti siis, kui*

1) on võrdsed nende reaalosad,
2) on võrdsed nende imaginaarosad.

Tõestus. Kasuta maatriksite võrdsuse definitsiooni. □

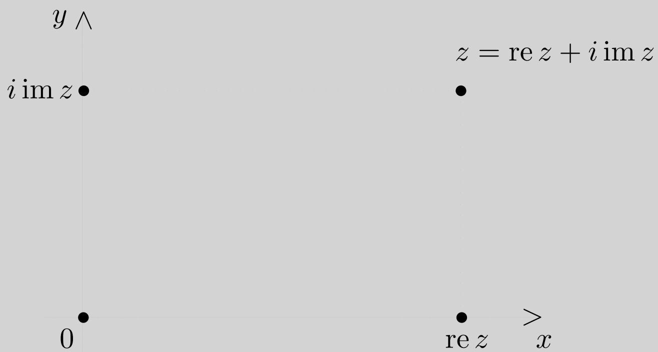
Kompleksarvu geomeetriline tõlgendus

Et kompleksarv $z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z$ sõltub kahest *reaalarvulisest* parameetrist ($\operatorname{re} z$ ja $\operatorname{im} z$), on kompleksarv reaalarvu *tasandiline* üldistus. Piltlikult öeldes ongi kompleksarv *tasandiline* (ehk 2-*mõõtmeline*) arv. Piltlikustamiseks võib kasutada xy-tasandit (joonis 1), kus kompleksarvu z x-koordinaat on $\operatorname{re} z$ ning y-koordinaat on $\operatorname{im} z$. Sellises tõlgenduses nimetatakse xy-tasandit *komplekstasandiks*, x-telge nimetatakse *reaalteljeks* ja y-telge *imaginaarteljeks*. Kompleksarvu võib kujutada komplekstasandi punktina.

5.2. Tehted kompleksarvudega

Idee selgitus

Kompleksarve nimetatakse *arvudeks* ehk *skalaarideks* eeskätt sellepärast, et nendega saab sooritada *aritmeetilisi* tehteid: liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist. Teh-



Joonis 1: Komplekstasand

ted saab defineerida maatrikstehetena. Osutub, et tehete tulemuseks on samuti kompleksarvud, s.t $\mathbb{C}$ on *kinnine* aritmeetiliste tehete suhtes.

Tehete definitsioon

Kompleksarvude liitmine, lahutamine ja korrutamine defineeritakse kui maatriksite liitmine, lahutamine ja korrutamine. Kompleksarvu pöördarvuks (kui leidub) on tema pöördmaatriks. Jagamine defineeritakse pöördarvu abil, seda selgitame hiljem.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 78 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

5.2.1. Liitmine ja lahutamine

Summa ja vahe

Kompleksarvude summa ja vahe defineeritakse kui maatriksite summa ja vahe.

Kinnisus

Lause 5.4. $\mathbb{C}$ *on kinnine liitmise ja lahutamise suhtes, s.t kompleksarvude summa ja vahe on samuti kompleksarv. Kompeksarvude liitmisel (lahutamisel) liidame (lahutame) reaal- ja imaginaarosad eraldi*

$$\boxed{(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i}$$

Tõestus. Tõepoolest, kasutades (vaikimisi) maatrikstehete omadusi, arvutame

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) &= a_1 + b_1 i \pm a_2 \pm b_2 i \\ &= a_1 \pm a_2 + b_1 i \pm b_2 i \\ &= (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

□

Näide 5.5 (summa ja vahe arvutamine)**.** Arvutame summa

$$\begin{aligned}(2 - 5i) + (-1 + 7i) &= 2 - 5i - 1 + 7i = 2 - 1 - 5i + 7i \\ &= (2 - 1) + (-5 + 7)i = 1 + 2i\end{aligned}$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 79 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Arvutame vahe

$$
\begin{aligned}
(2-5i)-(-1+7i) &= 2-5i+1-7i = 2+1-5i-7i \\
&= (2+1)-(5+7)i = 3-12i
\end{aligned}
$$

5.2.2. Korrutamine

Korrutise mõiste

Kompleksarvude korrutamine defineeritakse kui maatriksite korrutamine. Korrutamistehet võimaluse korral ei eksponeerita, s.t $z_1 z_2 \doteq z_1 \cdot z_2$.

Korrutamist illustreerime kõigepealt näidetega.

Näide 5.6 (imaginaarühiku ruut)**.** Kasutades maatrikskorrutist, arvutame

$$
\begin{aligned}
i^2 \doteq ii &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -1I = -I = -1
\end{aligned}
$$

kus viimaste võrduste väljakirjutamisel arvestasime seda, et korrutamist *ühikutega* (tavaliselt) ei eksponeerita. Ühikute mitteeksponeerimine on heas kooskõlas tähistusega $I = 1$.

Märkus 5.7 (imaginaarühiku mõistest)*.* Seost

$$
\boxed{i^2 = -1}
$$

loetakse sageli imaginaarühiku definitsiooniks ja kirjutatakse

$$i \doteq \sqrt{-1}$$

Imaginaarühik $\sqrt{-1}$ ei ole tõlgendatav reaalarvuna (sest reaalarvude ruudud on *mitte-negatiivsed*), küll aga spetsiifilise teist järku ruutmaatriksina, nagu eespool veendusime. Korrektne on näiteks kirjutada

$$\boxed{\sqrt{-1} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Leidub ka teisi tõlgendusi (esitusi).

Näide 5.8 (imaginaarühiku pöördarv)**.** Võrduse $i^2 = -1$ korrutame arvuga -1 ja kirjutame tulemuse kujul

$$i(-i) = 1 = (-i)i$$

See valem ütleb, et imaginaarühiku pöördarv avaldub kujul

$$\frac{1}{i} \doteq i^{-1} = -i$$

Näide 5.9 (korrutise arvutamine)**.** Kasutades vaikimisi maatrikstehete omadusi, arvutame

$$(2-5i)(-4+3i) = -2 \cdot 4 + 2(3i) + (5i)4 - (5i)(3i)$$

$$
\begin{aligned}
&= -8 + (2 \cdot 3)i + (5 \cdot 4)i - (5 \cdot 3)i^2 \\
&= (-8 + 15) + (6 + 20)i = 7 + 26i
\end{aligned}
$$

Muutes tegurite järjekorda, saame

$$
\begin{aligned}
(-4 + 3i)(2 - 5i) &= -4 \cdot 2 + 4(5i) + (3i)2 - (3i)(5i) \\
&= -8 + (4 \cdot 5)i + (3 \cdot 2)i - (3 \cdot 5)i^2 \\
&= (-8 + 15) + (20 + 6)i = 7 + 26i
\end{aligned}
$$

5.2.3. Korrutise üldvalem

Korrutise üldvalemi esitame järgmise lause tõestuses.

Lause 5.10. $\mathbb{C}$ *on kinnine korrutamise suhtes, s.t kompleksarvude korrutis on ka kompleksarv. Korrutamine on kommutatiivne.*

Tõestus. Kasutades maatrikstehete omadusi, arvutame korrutise

$$
\begin{aligned}
z_2 z_1 &= (a_2 + b_2 i)(a_1 + b_1 i) \\
&= a_2 a_1 + a_2(b_1 i) + (b_2 i)a_1 + (b_2 i)(b_1 i) \\
&= a_2 a_1 + (a_2 b_1)i + (b_2 a_1)i + (b_2 b_1)i^2 \\
&= (a_2 a_1 - b_2 b_1) + (a_2 b_1 + b_2 a_1)i \quad \in \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

Muutes tegurite järjekorda, saame kommutatiivsuse

$$
\boxed{z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i = z_2 z_1}
$$

See on ka korrutise $z_1 z_2$ üldvalem. □

5.3. Kaaskompleksarv ja kompleksne konjugeerimine

Kaaskompleksarvu mõiste

Kompleksarvu $z = a + bi$ *kaaskompleksarv* on $z^* \doteq a - bi$. Funktsiooni $z \mapsto z^*$, s.t kaaskompleksarvu leidmist nimetatakse (komplekssseks) *konjugeerimiseks*.

Näide 5.11. Kerge on näha, et

$$(2+3i)^* = 2-3i, \quad (-2-3i)^* = -2+3i \quad \text{jne}$$

Tõlgendusi

Geomeetriliselt on kaaskompleksarv antud kompleksarvu peegeldus reaaltelje suhtes. Maatriksesituses ilmselt $z^* = z^T$.

Komplekse konjugeerimise omadusi

1) $(z^*)^* = z$
2) $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$
3) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$
4) $\operatorname{re} z = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \operatorname{im} z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

5.4. Maatriksid üle kompleksarvude

Kõigi $k \times n$-järku kompleksarvuliste elementidega maatriksite hulka tähistame $\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{C})$.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 83 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Hermiitiline konjugeerimine

Maatriksi $A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{C})$ *hermiitiliselt*[5] *konjugeeritud* kaasmaatriks $A^\dagger$ defineeritakse valemiga

$$A^\dagger \doteq (A^*)^T = (A^T)^* \quad \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{C})$$

Näide 5.12. Ilmselt

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2+i & 6 \\ 5i & 3-2i \end{pmatrix} \quad &\Longrightarrow \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} 2-i & -5i \\ 6 & 3+2i \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \quad (A^\dagger)^\dagger = \begin{pmatrix} 2+i & 6 \\ 5i & 3-2i \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Teoreem 5.13 (hermiitilise konjugeerimise omadusi)**.** *Olgu maatriksid A ja B sellised, et allpool esinevad tehted on määratud ning $\alpha \in \mathbb{C}$. Siis*

1) $(A^\dagger)^\dagger = A$
2) $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$
3) $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
4) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

Hermiitiline ja antihermiitiline maatriks

Maatriksit A nimetatakse *hermiitiliseks*, kui $A^\dagger = A$ ja *antihermiitiliseks*, kui $A^\dagger = -A$.

[5]Charles Hermite (1822–1901), prantsuse matemaatik.

Näide 5.14. Järgnev maatriks on hermiitiline

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Näide 5.15. Järgnev maatriks on antihermiitiline

$$\begin{pmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix}^\dagger = -\begin{pmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1+i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Antihermiitilise maatriksi peadiagonaalil asetsevad puhtimaginaarsed arvud või nullid.

Kerge on näha, et iga ruutmaatriks on (üheselt) esitatav hermiitilise ja antihermiitilise maatriksi summana

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) + \frac{1}{2}(A - A^\dagger)$$

Unitaarne maatriks

Ruutmaatriksit A nimetatakse *unitaarseks*, kui

$$AA^\dagger = A^\dagger A = I \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = A^\dagger$$

Reaalne unitaarne maatriks on ilmselt ortogonaalmaatriks.

5.5. Moodul

Mooduli mõiste

Kompleksarvu $z = a + bi$ *moodul* $|z|$ defineeritakse valemiga

$$|z| \doteq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Moodul on ilmselt *mittenegatiivne* reaalarv.

Näide 5.16. Ilmselt

$$|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

Tõlgendusi

Geomeetriliselt on moodul kompleksarvu kaugus koordinaatide alguspunktist kompleks-tasandil. Maatriksesituses $|z| = \sqrt{\det z}$.

Ruutude summa valem

$$\boxed{(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2}$$

Tõestus. Tõepoolest, kasutades maatrikstehete omadusi, arvutame

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= aa - abi + bia - bibi \\ &= a^2 - abi + bai - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

□

Mooduli omadusi

1) $zz^* = |z|^2 = z^*z$
2) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

Tõestus. Esimene valem on ruutude summa valem. Teine valem jäägu iseseisvaks harjutuseks. □

5.6. Pöördarv

Pöördarvu mõiste

Kompleksarvu $z \in \mathbb{C}$ pöördarv (kui leidub) on tema pöördmaatriks z^{-1}. Teisiti öeldes

$$zz^{-1} = 1 = z^{-1}z$$

Pöördarvu omadusi

1) $(z^{-1})^{-1} = z$
2) $(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1}$

Pöördarvu olemasolu ja arvutamine

Teoreem 5.17. *Igal $0 \neq z \in \mathbb{C}$ leidub parajasti üks pöördarv $z^{-1} \in \mathbb{C}$ ning see avaldub valemiga*

$$\boxed{z^{-1} \doteq \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}z^* = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1z^*}{zz^*}}$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 87 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Tõestus. Et $z \neq 0$, siis $|z| \neq 0$ ning $\frac{z^*}{|z|^2}$ on määratud. Tuleb kontrollida pöördarvu (pöördmaatriksi) definitsioonseost

$$z\frac{z^*}{|z|^2} = \frac{zz^*}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

Samamoodi kontrollitakse võrdust $\frac{z^*}{|z|^2}z = 1$. Pöördarvu ainsus järeldub maatriksi pöördmaatriksi ainsusest. □

Näide 5.18 (imaginaarühiku pöördarv)**.** Leiame i^{-1}

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$$

Näide 5.19. Leiame i^{-99}, arvestades seost $i^4 = 1$

$$i^{-99} = \frac{1}{i^{99}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 24 + 3}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 24} \cdot i^3} = \frac{1}{(i^4)^{24} \cdot i^2 \cdot i} = -\frac{1}{i} = i$$

Näide 5.20 (pöördarvu arvutamine)**.** Leiame $2 - 5i$ pöördarvu

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-5i} &= \frac{1(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2+5i}{4-(5i)^2} = \frac{2+5i}{4-25i^2} = \frac{2+5i}{4+25} \\ &= \frac{2+5i}{29}\end{aligned}$$

5.7. Jagamine

Et kompleksarvude korrutamine on *kommutatiivne*, siis on jagamistehe üheselt määratud.

Jagatise mõiste

Kompleksarvude z_1 ja z_2 *jagatis* defineeritakse valemiga

$$\boxed{\tfrac{z_1}{z_2} \doteq z_1 \tfrac{1}{z_2} = \tfrac{1}{z_2} z_1, \quad z_2 \neq 0}$$

Jagatise arvutamine

Pöördmaatriksi arvutamise asemel on otstarbekam kasutada valemit

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

Tõestus. Tõepoolest, kasutades maatrikskorrutise omadusi, saame

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2} = z_1 \frac{z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} \qquad \square$$

Jagatis algebralisel kujul

Näitame, kuidas jagatist algebralisele kujule teisendada. Kasutades maatrikstehete omadusi, arvutame

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + b_1 i a_2 - b_1 i b_2 i}{a_2^2 - b_2^2 i^2} \end{aligned}$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 89 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a_1a_2 - a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\
&= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} \\
&= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i
\end{aligned}
$$

Näide 5.21 (jagamine)**.** Arvutame jagatise

$$
\begin{aligned}
\frac{2+3i}{3-4i} &= \frac{(2+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{6+8i+9i+12i^2}{9-16i^2} = \frac{6-12+17i}{9+16} \\
&= \frac{-6+17i}{25} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i
\end{aligned}
$$

5.8. Arvutusseadused kompleksarvudega

Teoreem 5.22. *Olgu $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Siis kehtivad järgmised arvutusseadused:*

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *(*liitmise kommutatiivsus*),*
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *(*liitmise assotsiatiivsus*),*
3) $\exists 0 \in \mathbb{C}$ *nii, et* $z + 0 = z = 0 + z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ *(*nulli 0 olemasolu*),*
4) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists -z \in \mathbb{C}$ *nii, et* $z + (-z) = 0 = -z + z$
*(*vastandarvu $-z$ olemasolu*),*
5) $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ *(*korrutamise assotsiatiivsus*),*
6) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ *(*distributiivsus*),*
7) $\exists 1 \in \mathbb{C}$ *nii, et* $1z = z$ *(*unitaalsus*),*

8) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ *(*korrutamise kommutatiivsus*),*
9) $\forall\, 0 \neq z \in \mathbb{C} \quad \exists z^{-1} \in \mathbb{C} \quad nii, et \quad zz^{-1} = 1 = z^{-1} z$
*(*pöördarvu z^{-1} olemasolu*).*

Tõestus. Kompleksarvud defineerisime kui erikujulised teist järku ruutmaatriksid. Tehete omadused 1)−7) järelduvad maatrikstehete vastavatest omadustest. Kommutatiivsuse (omadus 8) ja pöördarvu olemasolu (omadus 9) tõestasime eespool. □

Märkus 5.23 (korpuse mõistest). Omadused 8) ja 9) maatriksite korral üldiselt ei kehti. Arvutusseadused 1) − 9) kehtivad ka *ratsionaalarvude* ja *reaalarvude* korral. Need arvutusseadused võetakse aluseks abstraktse *korpuse* defineerimisel. Seda käsitleme hiljem.

5.9. Ruutvõrrand üle kompleksarvude

Idee selgitus

Osutub, et ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendusvalemi

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

tuletamisel kasutatakse vaid (korpuse) omadusi 1) − 9) (vt teoreem 5.22) ja *ruutjuure* mõistet. Defineerides ruutjuure kompleksarvude jaoks, võime seda lahendusvalemit kasutada ka kompleksarvuliste kordajate a, b, c korral.

Kompleksarvu ruutjuur

Kompleksarvu $z \in \mathbb{C}$ *ruutjuur* $\sqrt{z}$ defineeritakse valemiga

$$(\sqrt{z})^2 = z$$

Näide 5.24 (ruutjuure arvutamine)**.** Leiame $\sqrt{-15-8i}$.

Lahendus. Tähistame

$$\sqrt{-15-8i} = \alpha + \beta i, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Vastavalt ruutjuure definitsioonile

$$(\alpha+\beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i + \beta^2 i^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = -15 - 8i$$

Reaal- ja imaginaarosad peavad olema vastavalt võrdsed

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -15 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases}$$

Mõlemad võrrandid tõstame ruutu

$$\begin{cases} (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 225 \\ (2\alpha\beta)^2 = 64 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = 225 \\ 4\alpha^2\beta^2 = 64 \end{cases}$$

Liidame saadud võrrandid

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 4\alpha^2\beta^2 = 225 + 64 &\Longrightarrow (\alpha^2+\beta^2)^2 = 289 \\ &\Longrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{289} = 17 \end{aligned}$$

Teine juur (-17) ei kõlba, sest $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$. Moodustame uue süsteemi

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -15 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 17 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases}$$

Liidame ja lahutame kaks esimest võrrandit. Saame

$$\begin{cases} 2\alpha^2 = -15 + 17 = 2 \\ 2\beta^2 = 17 + 15 = 32 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ \beta^2 = 16 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \beta = \pm 4 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases}$$

Et $2\alpha\beta = -8$ (*negatiivne*), siis saame kaks lahendit

$$\begin{cases} \alpha_1 = +1, \quad \beta_1 = -4 \\ \alpha_2 = -1, \quad \beta_2 = +4 \end{cases}$$

ning võrrand $2\alpha\beta = -8$ on rahuldatud. Kokku võttes on ruutjuurel kaks väärtust

$$\sqrt{-15 - 8i} = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 i \\ \alpha_2 + \beta_2 i \end{cases} = \begin{cases} 1 - 4i \\ -1 + 4i \end{cases} = \pm(1 - 4i)$$

Kontrollime tulemust. Tõepoolest

$$[\pm(1 - 4i)]^2 = (1 - 4i)^2 = 1 - 8i + 16i^2 = 1 - 16 - 8i = -15 - 8i$$

Näide 5.25 (ruutvõrrandi lahendamine)**.** Lahendada ruutvõrrand

$$x^2 - (3 - 2i)x + (5 - i) = 0$$

Lahendus. Kasutades ruutvõrrandi lahendusvalemit, saame

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{3-2i \pm \sqrt{(3-2i)^2 - 4(5-i)}}{2} \\
&= \frac{3-2i \pm \sqrt{9-12i+4i^2-20+4i}}{2} \\
&= \frac{3-2i \pm \sqrt{-15-8i}}{2} = \frac{3-2i \pm (1-4i)}{2}
\end{aligned}
$$

Siin kasutasime ruutjuure $\sqrt{-15-8i}$ väärtusi näitest 5.24. Nüüd saame

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3-2i+(1-4i)}{2} = \frac{4-6i}{2} = 2-3i \\
x_2 &= \frac{3-2i-(1-4i)}{2} = \frac{3-2i-1+4i}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i
\end{aligned}
$$

Kontrollime esimest juurt. Arvutame

$$
\begin{aligned}
&(2-3i)^2 - (3-2i)(2-3i) + 5 - i \\
&\quad = 4 - 12i + 9i^2 - 6 + 9i + 4i - 6i^2 + 5 - i \\
&\quad = (4-9-6+6+5) + (-12+9+4-1)i = 0 + 0i = 0
\end{aligned}
$$

Teist juurt kontrollime samamoodi

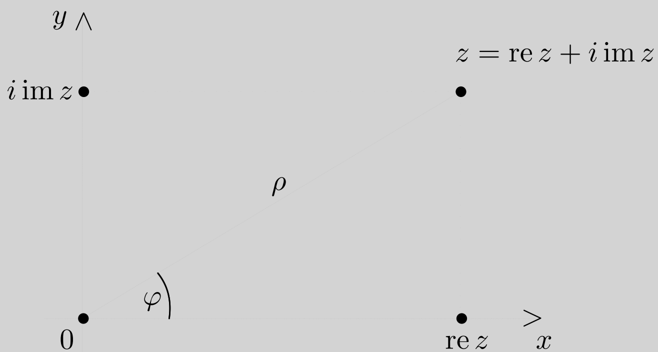
$$
\begin{aligned}
&(1+i)^2 - (3-2i)(1+i) + 5 - i \\
&\quad = 1 + 2i + i^2 - 3 - 3i + 2i + 2i^2 + 5 - i \\
&\quad = (1-1-3-2+5) + (2-3+2-1)i = 0 + 0i = 0
\end{aligned}
$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 94 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

5.10. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Tähistusi ja mõisteid

Olgu $z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z \in \mathbb{C}$. Vastavalt kompleksarvu geomeetrilisele tõlgendusele on reaalosa $\operatorname{re} z$ ja imaginaarosa $\operatorname{im} z$ kompleksarvu z ristkoordinaadid komplekstasandil. Lähme üle *polaarkoordinaatidele* (joonis 2).



Joonis 2: Polaarkoordinaadid ρ, φ

Olgu ρ kompleksarvu z kaugus koordinaatide alguspunktist (*polaarkaugus*) ning φ *polaarnurk*. Lepime kokku: kui nurka φ mõõdame reaaltelje positiivsest poolest *vastupäeva*, siis $\varphi > 0$, kui mõõdame reaaltelje positiivsest poolest *päripäeva*, siis $\varphi < 0$.

Üleminekuvalemid ristkoordinaatidelt polaarkoordinaatidele ρ, φ on järgmised:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(\operatorname{re} z)^2 + (\operatorname{im} z)^2} = |z| \\ \operatorname{re} z = \rho \cos\varphi = |z| \cos\varphi \\ \operatorname{im} z = \rho \sin\varphi = |z| \sin\varphi \end{cases}$$

Ilmselt

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{im} z}{\operatorname{re} z}$$

Kasutades üleminekuvalemeid polaarkoordinaatidele, saame

$$z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z = |z| \cos\varphi + i|z| \sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Avaldist

$$\boxed{z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)}$$

nimetatakse kompleksarvu z *trigonomeetriliseks* kujuks (ehk esituseks). Polaarnurka φ nimetatakse kompleksarvu z *argumendiks* ning tähistatakse $\varphi \doteq \operatorname{Arg} z$.

Punkti z asukoht komplekstasandil ei muutu, kui polaarnurka φ muuta mingi täisarv korda 2π võrra. Seega on kompleksarvu argument määratud vaid 2π täisarvulise kordseni. Polaarnurga väärtust $\arg z$, mis rahuldab võrratust

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

nimetatakse *argumendi peaväärtuseks*. Seega avaldub kompleksarvu argument oma peaväärtuse kaudu valemiga

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 96 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Sageli võetakse $\arg z$ muutumispiirkonnaks vahemik $[0, 2\pi)$.

Kompleksarvude võrdsuse tunnus trigonomeetrilises esituses

Lause 5.26. *Kompleksarvud on võrdsed parajasti siis, kui*

1) nende moodulid on võrdsed,
2) nende argumentide vahe on 2π kordne.

Näide 5.27. Esitame lihtsad näited.

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0), \qquad i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi), \qquad -i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

5.11. Euleri valemid ja kompleksarvu eksponentkuju

Euleri funktsioon

Funktsiooni

$$\boxed{e^{i\varphi} \doteq \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

nimetame *Euleri* [6] *funktsiooniks*. Maatriksesituses ilmselt

$$e^{i\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

[6]Leonhard Euler (1707–1783), šveitsi matemaatik.

Euleri funktsiooni seost *eksponentfunktsiooniga* selgitatakse matemaatilises analüüsis.

Kompleksarvu eksponentkuju

Avaldist

$$\boxed{z = |z|e^{i\varphi}}$$

kus φ on kompleksarvu z polaarnurk, nimetatakse kompleksarvu z *eksponentkujuks* (eksponentesituseks).

Näide 5.28. Ilmselt

$$1 = e^{i0}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi}$$

Euleri valemid

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}$$

Tõestus. Kasuta Euleri funktsiooni definitsiooni. □

Euleri funktsiooni omadusi

$$\boxed{e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}}$$

Tõestus. Kasuta Euleri funktsiooni definitsiooni ja trigonomeetriliste funktsioonide omadusi. □

De Moivre'i valem

Järgnev valem kannab de Moivre [7] nime

$$\boxed{(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}}$$

Tõestus. Kasuta matemaatilise induktsiooni meetodit. □

Korrutamine ja jagamine eksponentesituses

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Näide 5.29. Arvutame

$$\begin{aligned}\frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{1-i\sqrt{3}} &= \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{11}{12}\pi} \\ &= \sqrt{2}\left[\cos(\frac{11}{12}\pi) + i\sin(\frac{11}{12}\pi)\right]\end{aligned}$$

[7] Abraham de Moivre (1667–1754), prantsuse matemaatik.

5.12. Algebra põhiteoreem ja ühejuured

Polünoom

n-astme *polünoom* $P_n(x)$ ehk *hulkliige* defineeritakse valemiga

$$P_n(x) \doteq a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

kus $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 0 \neq a_n \in \mathbb{C}$ on polünoomi $P_n(x)$ *kordajad*, n on polünoomi $P_n(x)$ aste, x on polünoomi $P_n(x)$ muutuja (parameeter).

Polünoomi juur

Arvu $x_0 \in \mathbb{C}$ nimetame polünoomi $P_n(x)$ *r-kordseks juureks*, kui

1) $P_n(x_0) = P_n'(x_0) = \cdots = P_n^{(r-1)}(x_0) = 0$
2) $P_n^{(r)}(x_0) \neq 0$

Näide 5.30. Arv $x_0 = 1$ on polünoomi

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

2-kordne juur, sest

1) $p(1) = p'(1) = 0$
2) $p''(1) = 2 \neq 0$

Teoreem 5.31. *Kui polünoomi kordajad on reaalsed ning $x_0 \in \mathbb{C}$ on selle polünoomi r-kordne juur, siis ka x_0^* on sama polünoomi r-kordne juur.*

Algebra põhiteoreem

Teoreem 5.32. *Igal kompleksarvuliste kordajatega n-astme polünoomil leidub parajasti n kompleksarvulist juurt (kordsused kaasa arvatud).*

Ühejuured

Polünoomi $x^n - 1$ kompleksarvulisi juuri nimetatakse n-järku *ühejuurteks*. Kõigi n-järku ühejuurte hulka tähistatakse $\sqrt[n]{1}$.

Ühejuurte arvutamine

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \doteq \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}}$$

Tõestus. Tähistame $\varepsilon_k \doteq e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Kasutades de Moivre'i valemit, arvutame

$$\begin{aligned}(\varepsilon_k)^n - 1 &= \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n - 1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}n} - 1 = e^{i2k\pi} - 1 \\ &= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) - 1 = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Et trigonomeetrilised funktsioonid cos ja sin on *perioodilised*, siis rohkem juuri pole. □

Koduleht
Tiitelleht
Lk 101 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Ühejuurte geomeetriline tõlgendus

Osutub, et n-järku ühejuured asetsevad komplekstasandil korrapärase hulknurga tippudes. Hulknurga tipud asetsevad ühikringjoonel, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis.

Näide 5.33. Leiame $\sqrt[2]{1}$.

Lahendus. Arvutame

$$\begin{aligned}\sqrt[2]{1} &= \left\{e^{i\frac{2k\pi}{2}}, \quad k=0,1\right\} = \left\{e^{ik\pi}, \quad k=0,1\right\} = \{e^{i0}, e^{i\pi}\} \\ &= \{1,-1\} = \pm 1\end{aligned}$$

Näide 5.34. Leiame $\sqrt[3]{1}$.

Lahendus. Teame, et

$$\sqrt[3]{1} = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \quad k=0,1,2\right\}$$

Arvutame

$$\begin{aligned} k=0: &\qquad \varepsilon_0 = e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\ k=1: &\qquad \varepsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=2: &\qquad \varepsilon_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Seega

$$\sqrt[3]{1} = \left\{1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

Kolmandat järku ühejuured paiknevad korrapärase kolmnurga tippudes. Kolmnurga tipud asetsevad ühikringjoonel, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis. Joonise koostamine jäägu iseseisvaks harjutuseks.

Kompleksarvu juurimine

Polünoomi $x^n - a$ kõigi kompleksarvuliste juurte hulka tähistatakse $\sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[n]{a}$ arvutamine

Teoreem 5.35. *Olgu $a = |a|e^{i\varphi}$. Siis*

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = \left\{ \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}}$$

kus $\sqrt[n]{|a|}$ tähistab polünoomi $x^n - |a|$ ainsat mittenegatiivset *reaalarvulist juurt.*

Tõestus. Samasugune ühejuurte valemi tõestusega. □

Näide 5.36. Leiame $\sqrt[n]{i}$.

Lahendus. Et $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$, siis

$$\sqrt[n]{i} = \left\{ e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

Võtame näiteks $n = 3$. Saame

$$\sqrt[3]{i} = \left\{ e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2 \right\}$$

Leiame $\sqrt[3]{i}$ elemendid trigonomeetrilisel ja algebralisel kujul.

$$\begin{aligned}
k = 0: &\qquad x_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\
k = 1: &\qquad x_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\
k = 2: &\qquad x_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i
\end{aligned}$$

Tulemuseks saame

$$\sqrt[3]{i} = \left\{ \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}, -i \right\}$$

5.13. Ülesanded

Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul

5.13.1 Esitada kompleksarvud algebralisel kujul.

(1) $(2+i)(3-i)+(2+31)(3+4i)$

(2) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$

(3) $(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)$ **(4)** $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$

(5) $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$ **(6)** $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$ **(7)** $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$

(8) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$ **(9)** $(2+i)^3+(2-i)^3$

(10) $(3+i)^3-(3-i)^3$ **(11)** $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ **(12)** $(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$

5.13.2 Arvutada imaginaarühiku i astmed.

(1) i^{77} **(2)** i^{-76} **(3)** i^{98} **(4)** i^{-97} **(5)** i^{57} **(6)** i^{-58}
(7) i^{33} **(8)** i^{-31}

5.13.3 Arvutada determinandid.

(1) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & e^2 \\ e^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.13.4 Lahendada LVS ja kontrollida lahendit.

(1) $\begin{cases} iz_1 + (1+\ \ i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (1-i)z_1 - 3z_2 = -i \\ 2iz_1 + (-1+3i)z_2 = -3+5i \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i \\ (2+4i)z_1 - 5iz_2 = 2-i \end{cases}$

Komplekse konjugeerimise omadusi

5.13.5 Tõestada valemid.

(1) $(z^*)^* = z$ **(2)** $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$ **(3)** $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

(4) $\operatorname{re} z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ **(5)** $\operatorname{im} z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

Hermiitilise konjugeerimise omadusi

5.13.6 Kontrollida teist järku ruutmaatriksite korral maatriksite omadused.

(1) $(A^\dagger)^\dagger = A$ **(2)** $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$ **(3)** $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$

(4) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

Ruutvõrrand üle kompleksarvude

5.13.7 Lahendada ruutvõrrand ja kontrollida lahendit.

(1) $z^2 = -24 - 10i$ **(2)** $z^2 = 3 - 4i$ **(3)** $z^2 = 5 - 12i$

(4) $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$ **(5)** $iz^2 - 5iz - 10 + 4i = 0$

(6) $iz^2 - (2+7i)z + 1 + 13i = 0$

(7) $z^2 - (5+i)z + 12 + 5i = 0$

Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju

5.13.8 Lahendada võrrand ja kontrollida lahendit.

(1) $|z| + z = 8 + 4i$ **(2)** $|z| - z = 8 + 12i$

5.13.9 Tõestada valem $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

5.13.10 Tõestada Euleri valemid.

5.13.11 Tõestada valemid

$$(\mathbf{1}) \quad e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad (\mathbf{2}) \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

5.13.12 Leida kompleksarvude trigonomeetrilised ja ekponentkujud. Kujutada joonisel. Kontrollida tulemust.

(1) ± 3 **(2)** ± 5 **(3)** $\pm 3i$ **(4)** $\pm 1 \pm i$

(5) $\pm 1 \pm \sqrt{3}i$ **(6)** $\pm\sqrt{3} \pm i$

Kompleksarvu astendamine ja juurimine

5.13.13 Tõestada de Moivre'i valem.

5.13.14 Astendada.

(1) $(1+i)^{1000}$ **(2)** $(1+i\sqrt{3})^{150}$ **(3)** $(\sqrt{3}+i)^{30}$

(4) $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{12}$ **(5)** $(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i})^{30}$

5.13.15 Juurida ja kontrollida tulemust astendamisega.

(1) $\sqrt[4]{1}$ **(2)** $\sqrt[3]{i}$ **(3)** $\sqrt[6]{i}$ **(4)** $\sqrt[3]{1+i}$

(5) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$ **(6)** $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}$

Trigonomeetriliste funktsioonide omadusi

5.13.16 Esitada järgmised funktsioonid $\sin x$ ja $\cos x$ astmete kaudu.

(1) $\sin 3x$ **(2)** $\cos 3x$ **(3)** $\sin 4x$ **(4)** $\cos 4x$
(5) $\sin 5x$ **(6)** $\cos 5x$

5.13.17 Esitada järgmised funktsioonid $\sin nx$ ja $\cos nx$ kaudu.

(1) $\sin^3 x$ **(2)** $\cos^3 x$ **(3)** $\sin^4 x$ **(4)** $\cos^4 x$
(5) $\sin^5 x$ **(6)** $\cos^5 x$

6. Vektorruumid

6.1. Korpuse mõiste

Hulka $\mathbb{K} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ nimetatakse *korpuseks*, kui hulgal $\mathbb{K}$ on defineeritud elementide *liitmine* ja *korrutamine* nii, et on täidetud järgmised tingimused (korpuse arvutusseadused):

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
(liitmise kommutatiivsus),
2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
(liitmise assotsiatiivsus),
3) $\exists\, 0 \in \mathbb{K}$ nii, et $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$
(nulli $0 \in \mathbb{K}$ olemasolu),
4) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \quad \exists - \alpha \in \mathbb{K}$ nii, et $\alpha + (-\alpha) = 0 = -\alpha + \alpha$
(vastandelemendi $-\alpha$ olemasolu),
5) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
(korrutamise assotsiatiivsus),
6) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
(distributiivsus),
7) $\exists\, 1 \in \mathbb{K}$ nii, et $1\alpha = \alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$
(unitaalsus),
8) $\alpha\beta = \beta\alpha \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
(korrutamise kommutatiivsus),
9) $\forall\, 0 \neq \alpha \in \mathbb{K} \quad \exists\, \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ nii, et $\alpha\alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1}\alpha$
(pöördelemendi α^{-1} olemasolu).

Korpuse elemente nimetatakse *skalaarideks* ehk *arvudeks*. Lisaks eeldatakse, et $\mathbb{K}$ on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes, s.t skalaaride summad ja korrutised kuuluvad samuti korpusesse $\mathbb{K}$.

Näide 6.1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

6.2. Vektorruumi mõiste

Vektorrumi mõiste

Hulka $V = \{a, b, c, \dots\}$ nimetatakse *vektorruumiks* üle korpuse $\mathbb{K}$, kui on defineeritud hulga V elementide *liitmine* ja hulga V elementide *korrutamine* korpuse $\mathbb{K}$ skalaaridega nii, et on täidetud järgmised tingimused (vektorruumi arvutusseadused):

1) $a + b = b + a \quad \forall\, a, b \in V$
(liitmise kommutatiivsus),
2) $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall\, a, b, c \in V$
(liitmise assotsiatiivsus),
3) $\exists\, o \in V$ nii, et $a + o = a = o + a \quad \forall\, a \in V$
(*nullvektori* $o \in V$ olemasolu),
4) $\forall\, a \in V \quad \exists - a \in V$ nii, et $a + (-a) = o = -a + a$
(*vastandvektori* $-a$ olemasolu),
5) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall\, a, b \in V$
(distributiivsus),
6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall a \in V$
(distributiivsus),

7) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall\, a \in V$
(skalaariga korrutamise assotsiatiivsus),
8) $1a = a \quad \forall\, a \in V$
(unitaalsus).

Vektorruumi elemente nimetatakse *vektoriteks*. Lisaks eeldatakse, et V on kinnine vektorite liitmise ja skalaaridega korrutamise suhtes, s.t vektorite summad ja vektorite korrutised skalaaridega kuuluvad vektorruumi V.

Edaspidi eeldame vaikimisi, et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$. Vastavat vektorruumi nimetatakse *ratsionaalseks, reaalseks* või *kompleksseks*.

Vektorruumi nullvektori tähistamiseks kasutatakse ka arvu 0. Lugeja peab kontekstist mõistma, millal on tegemist arvuga 0 ja millal nullvektoriga. Selguse huvides võib kasutada ka tähistust 0_V.

Näide 6.2 (nullruum)**.** *Nullruumiks* nimetatakse vektorruumi $O \doteq \{o\}$, milles on üksainus element – nullvektor o. Nullruumi tähistamiseks võib kasutada jällegi arvu 0. Nullruumi nimetatakse ka *triviaalseks* vektorruumiks. Nullruume üle erinevate korpuste tuleb lugeda erinevateks.

Näide 6.3 (korpused)**.** Iga korpus on vektorruum üle iseenda.

Näide 6.4 (maatriksruumid)**.** $\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$ on vektorruum üle $\mathbb{K}$. Arvutusoperatsioonid defineerisime 2. peatükis.

Näide 6.5 (aritmeetilised vektorruumid)**.** Aritmeetilised vektorid on üherealised ja üheveerulised maatriksid elementidega korpusest $\mathbb{K}$. Aritmeetilised vektorruumid on

$$\mathbb{K}^n \doteq \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{K})$$

$$\begin{aligned} &= \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\} && \text{reavektorite ruum} \\ {}'\mathbb{K}^n &\doteq \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n)^T | x_i \in \mathbb{K}\} && \text{veeruvektorite ruum} \end{aligned}$$

Tehted aritmeetiliste vektoritega toimuvad maatriksarvutuse reeglite kohaselt.

Näide 6.6 (geomeetrilised vektorid)**.** *Geomeetriline vektor* on suunatud sirglõik. Vektorite liitmine defineeritakse rööpküliku reegliga. Korrutamine arvuga defineeritakse lõigu pikendamise või lühendamise teel ja negatiivsete arvude korral veel lisaks suuna muutmisega vastupidiseks.

Näide 6.7 (funktsiooniruum)**.** Olgu $C[a, b]$ kõigi lõigus $[a, b]$ *pidevate* reaalarvuliste väärtustega funktsioonide hulk. Olgu $f, g \in C[a, b]$ ning $\alpha \in \mathbb{R}$. Tehted defineerime järgmiselt:

1) $(f + g)(x) \doteq f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$,
2) $(\alpha f)(x) \doteq \alpha f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$,
3) $o(x) \doteq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$ (nullfunktsioon),
4) $(-f)(x) \doteq -f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$ (vastandfunktsioon).

Ülaltoodud tehete suhtes on $C[a, b]$ vektorruum üle $\mathbb{R}$ (matemaatilise analüüsi teoreem). Samamoodi defineeritakse *diferentseeruvate* ja *siledate* funktsioonide ruumid.

Näide 6.8 (homogeense LVS-i lahendiruum)**.** Kirjutame homogeense LVS-i maatrikskujul $Ax = 0$. Ilmselt on nullvektor o lahend (nn triviaalne lahend), sest $Ao = o$. Olgu a ja b lahendid, s.t $Aa = o = Ab$. Siis on $a + b$ ja αa samuti lahendid, sest maatrikstehete omaduste järgi

1) $A(a+b) = Aa + Ab = o + o = o$
2) $A(\alpha a) = (A\alpha)a = (\alpha A)a = \alpha(Aa) = \alpha o = o$

Seega homogeense LVS-i lahendihulk (kui aritmeetilise vektorruumi alamhulk) on kinnine liitmise ja arvuga korrutamise suhtes. Siit järeldub, et homogeense LVS-i lahendiruum on vektorruum.

6.3. Vektorite omadusi

Esimest liiki lineaarne vektorvõrrand

Lause 6.9. *Võrrandil $\alpha x = v$ leidub $\forall\, 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ ja $v \in V$ korral parajasti üks lahend. Selleks lahendiks on vektor*

$$x = \frac{v}{\alpha} \doteq \alpha^{-1} v \in V$$

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $\alpha^{-1}v$ on võrrandi $\alpha x = v$ lahend. Tõepoolest

$$\alpha(\alpha^{-1}v) = (\alpha\alpha^{-1})v = 1v = v$$

Olgu y veel mingi lahend, s.t $\alpha y = v$. Siis ilmselt

$$y = 1y = (\alpha^{-1}\alpha)y = \alpha^{-1}(\alpha y) = \alpha^{-1}v$$

Tulemus ütleb, et $\alpha^{-1}v$ on võrrandi $\alpha x = v$ *ainus* lahend. $\square$

Nullvektori ainsus

Lause 6.10. *Vektorruumis on parajasti üks nullvektor.*

Tõestus. Olgu o' samuti nullvektor. Siis

$$\begin{cases} o' + o = o \\ o + o' = o' \end{cases} \quad \xRightarrow{o'+o=o+o'} \quad o' = o \qquad \square$$

Koondamisreegel

Lause 6.11 (koondamisreegel). *Olgu a, u, v vektorruumi V vektorid.*

$$Kui \quad a + u = a + v, \quad siis \quad u = v$$

Tõestus. Ilmselt

$$-a + (a + u) = -a + (a + v)$$

Kasutades kõigepealt liitmise assotsiatiivsust, seejärel vastandvektori ja nullvektori definitsiooni, saame viimasest võrdusest

$$(-a + a) + u = (-a + a) + v \Longrightarrow o + u = o + v \Longrightarrow u = v \qquad \square$$

Vastandvektori ühesus

Lause 6.12. *Igal vektoril on parajasti üks vastandvektor.*

Tõestus. Olgu $b \in V$ samuti vektori $a \in V$ vastandvektor, s.t $a+b=o$. Et $a+(-a)=o$, siis ilmselt

$$a+b=o=a+(-a)$$

Kasutades koondamisreeglit (lauset 6.11), saame $b=-a$. □

Vahevektor

Vektorite a ja b *vahe* $a-b$ defineeritakse valemiga

$$a-b \doteq a+(-b)$$

Teist liiki lineaarne vektorvõrrand

Lause 6.13. *Võrrandil $a+x=b$ leidub $\forall\, a,b \in V$ korral parajasti üks lahend. Selleks lahendiks on $x=b-a \in V$.*

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $b-a$ on võrrandi $a+x=b$ lahend. Tõepoolest

$$a+(b-a)=a+b-a=(a-a)+b=o+b=b$$

Olgu y veel mingi lahend, s.t $a+y=b$. Siis ilmselt

$$a+y=b=a+(b-a)$$

Kasutades koondamisreeglit (lauset 6.11), saame $y=b-a$, s.t $b-a$ on võrrandi $a+x=b$ *ainus* lahend. □

Näide 6.14. Võrrandi $a+x=a$ *ainus* lahend on $x=a-a=o$, s.t *nullvektor*.

Näide 6.15. Võrrandi $a+x=o$ *ainus* lahend on $x=o-a=-a$, s.t vektori a *vastandvektor*.

Vektori korrutamine nulliga

Lause 6.16. $0a = o \quad \forall\, a \in V$

Tõestus. Tõepoolest

$$o + 0a = 0a = (0+0)a = 0a + 0a$$

millest koondamisreegli (lause 6.11) põhjal $0a = o$. □

Nullvektori korrutamine skalaariga

Lause 6.17. $\alpha o = o \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$

Tõestus. Tõepoolest

$$o + \alpha o = \alpha o = \alpha(o+o) = \alpha o + \alpha o$$

millest koondamisreegli põhjal $\alpha o = o$. □

Vastandvektori arvutamine

Lause 6.18. $-a = (-1)a \quad \forall\, a \in V$

Tõestus. Tõepoolest

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1-1)a = 0a = o = a + (-a)$$

millest koondamisreegli (lause 6.11) põhjal $(-1)a = -a$. □

Vektori korrutamine vastandarvuga

Lause 6.19. $(-\alpha)a \overset{(A)}{=} -(\alpha a) \overset{(B)}{=} \alpha(-a) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall\, a \in V$

Tõestus. Tõestame kõigepealt võrduse (A). Peame näitama, et $(-\alpha)a$ on vektori αa *vastandvektor*. Tõepoolest

$$\alpha a + (-\alpha)a = (\alpha - \alpha)a = 0a = o \quad \Longrightarrow \quad (-\alpha)a = -(\alpha a)$$

Nüüd arvutame

$$(-\alpha)a = (-\alpha 1)a = [\alpha(-1)]a = \alpha[(-1)a] = \alpha(-a)$$

mis viib nõutud võrduseni (B). □

Nulliteguri te puudumine vektorruumis

Lause 6.20. *Vektorruumis puuduvad nullitegurid, s.t*

$$\alpha a = o \iff \alpha = 0 \quad \text{või} \quad a = o$$

Tõestus. $\Longrightarrow$: Olgu $\alpha a = o$. Oletame *vastuväiteliselt*, et leiduvad *nullitegurid*, s.t $\alpha \neq 0$ ja $a \neq o$. Siis $\exists\, \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ ning

$$a = 1a = (\alpha^{-1}\alpha)a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1}o = o$$

mis on vastuolus oletusega, et $a \neq o$. Tulemus (vastuolu) ütleb, et korrutises $\alpha a = o$ peab vähemalt üks teguritest olema 0.

$\Longleftarrow$: Olgu $\alpha = 0$ või $a = o$. Siis $\alpha a = o$ eespool tõestatud lausete 6.16 ja 6.17 põhjal. □

Näide 6.21. Avaldada vektorid x, y vektorite a, b kaudu, kui

$$\begin{cases} x - 4y = a \\ 2x + 3y = b \end{cases}$$

Lahendus. Esitame süsteemi maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Olgu $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Siis $A^{-1} = \frac{1}{11} \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3a + 4b \\ -2a + b \end{pmatrix}$$

Seega

$$\begin{cases} x = +\frac{3}{11}a + \frac{4}{11}b \\ y = -\frac{2}{11}a + \frac{1}{11}b \end{cases}$$

Kahtluse korral kontrollime lahendit. Kontrollime lahendit näiteks esimese võrrandiga

$$\begin{aligned} x - 4y &= \frac{3}{11}a + \frac{4}{11}b - 4(-\frac{2}{11}a + \frac{1}{11}b) \\ &= \frac{3}{11}a + \frac{4}{11}b + \frac{8}{11}a - \frac{4}{11}b = a \end{aligned}$$

Samamoodi kontrollitakse lahendit teise võrrandiga.

6.4. Lineaarne sõltuvus

Lineaarkombinatsioonid

Vektorite $v_1, \dots, v_n \in V$ *lineaarkombinatsiooniks* (LK-ks) kordajatega $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ nimetatakse avaldist (vektorit)

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$$

Selle vektori kohta öeldakse ka, et ta on *avaldatud (arendatud)* lineaarselt vektorite $v_1, \dots, v_n$ kaudu.

Lineaarkombinatsiooni nimetatakse *triviaalseks*, kui kõik tema kordajad on nullid. Lineaarkombinatsiooni nimetatakse *mittetriviaalseks*, kui tal leidub vähemalt üks *nullist erinev* kordaja.

Näide 6.22. Toome järgmised lihtsad näited:

1) $1a, 1o, 1o + 0a$ on mittetriviaalsed LK-d,
2) $0a$ ja $0o$ on triviaalsed LK-d.

Lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Vektorisüsteemi (VS-i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ nimetatakse *lineaarselt sõltuvaks*, kui antud süsteemi vektorite mingi *mittetriviaalne* LK võrdub nullvektoriga. Vastasel juhul, s.t kui nullvektoriga võrduvat mittetriviaalset lineaarkombinatsiooni ei leidu, nimetatakse VS-i *lineaarselt sõltumatuks*.

Sageli räägitakse vektorisüsteemi lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse asemel (süsteemi kuuluvate) vektorite lineaarsest sõltuvusest ja sõltumatusest.

Näide 6.23 (tühihulga lineaarne sõltumatus)**.** Kui VS on tühihulk, siis süsteemi vektorite lineaarkombinatsioone *ei leidu*. Puuduvad nii triviaalsed kui ka mittetriviaalsed LK-d. Seega on tühihulk lineaarselt sõltumatu.

Näide 6.24. Uurime VS-i

$$\begin{cases} e_1 \doteq (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 \doteq (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n \doteq (0, 0, 0, \dots, 1) \end{cases}$$

lineaarset sõltuvust.

Lahendus. Peame uurima võrrandit (seost)

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = o$$

Tundmatud on $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Arvutame

$$\begin{cases} \alpha_1 e_1 = \alpha_1 (1, 0, 0, \dots, 0) = (\alpha_1, 0, 0, \dots, 0) \\ \alpha_2 e_2 = \alpha_2 (0, 1, 0, \dots, 0) = (0, \alpha_2, 0, \dots, 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n e_n = \alpha_n (0, 0, 0, \dots, 1) = (0, 0, 0, \dots, \alpha_n) \end{cases}$$

Liites saame

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = o = (0, 0, \dots, 0)$$

Siit järeldub, et

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Tulemus ütleb, et VS $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ on lineaarselt sõltumatu.

Kui vektorisüsteem koosneb ühest vektorist

Lause 6.25. *VS, mis koosneb ainult nullvektorist, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Tõepoolest, siis leidub nullvektoriga võrduv mittetriviaalne LK: $1o = o$. □

Lause 6.26. *Ühest vektorist koosnev VS on lineaarselt sõltumatu parajasti siis, kui see vektor ei ole nullvektor.*

Tõestus. $\Longrightarrow$: Olgu $\{v\}$ lineaarselt sõltumatu. Siis $v \neq o$, sest $\{o\}$ oleks lineaarselt sõltuv, mis on vastuolus eeldusega.

$\Longleftarrow$: Kui $v \neq o$, siis võrdusest $\alpha v = o$ järeldub (nulliteguri puudumise tõttu) $\alpha = 0$. Seega ei leidu nullvektoriga võrduvat mittetriviaalset lineaarkombinatsiooni, s.t VS $\{v \neq o\}$ peab olema lineaarselt sõltumatu. □

Lause 6.27. *Ühest vektorist koosnev VS on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui see vektor on nullvektor.*

Tõestus. $\Longrightarrow$: Olgu VS $\{v\}$ lineaarselt sõltuv. Kui v ei ole nullvektor, siis eelnenud lause põhjal on see VS lineaarselt sõltumatu, mis on vastuolus eeldusega. Seega peab $v = o$.

$\Longleftarrow$: $\{o\}$ on ilmselt lineaarselt sõltuv, sest $1o = o$. □

Kui vektorisüsteem sisaldab nullvektorit

Lause 6.28. *VS, mis sisaldab nullvektorit, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Olgu $\{o, v_1, \dots, v_n\}$ vaadeldav VS. Siis

$$\underbrace{1o + 0v_1 + \dots + 0v_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

millest järeldub nõutav lineaarne sõltuvus. □

Kui vektorisüsteem sisaldab vastandvektoreid

Lause 6.29. *VS, mis sisaldab koos mingi vektoriga ka selle vektori vastandvektorit, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Olgu $\{v, -v, v_1, \dots, v_n\}$ vaadeldav VS. Siis

$$\underbrace{1v + (-v) + 0v_1 \cdots + 0v_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

millest järeldub nõutav lineaarne sõltuvus. □

Kui vektorisüsteem sisaldab ühesuguseid vektoreid

Lause 6.30. *VS, mis sisaldab ühesuguseid vektoreid, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Olgu $\{v, v, v_1, \ldots, v_n\}$ vaadeldav VS. Siis

$$\underbrace{1v + (-1)v + 0v_1 \cdots + 0v_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

millest järeldub nõutav lineaarne sõltuvus. □

Kui vektorisüsteem sisaldab lineaarselt sõltuvat alamsüsteemi

Lause 6.31. *VS, mis sisaldab lineaarselt sõltuvat alamsüsteemi, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Olgu $\{v_1, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_k\}$ selline vektorisüsteem, et alamsüsteem $\{v_1, \ldots, v_n\}$ on lineaarselt sõltuv. Siis leidub nullvektoriga võrduv *mittetriviaalne* LK

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

Siit järeldub, et

$$\underbrace{\overbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n}^{\text{mittetriviaalne LK}} + 0v'_1 + \cdots + 0v'_k}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

seega VS $\{v_1, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_k\}$ on lineaarselt sõltuv. □

Lineaarselt sõltumatu vektorisüsteemi alamsüsteemidest

Lause 6.32. *Lineaarselt sõltumatu vektorisüsteemi iga alamsüsteem on lineaarselt sõltumatu.*

Tõestus. Järeldub lausest 6.31. □

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 123 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Lineaarselt sõltumatu vektorisüsteemi laiendamisest

Teoreem 6.33. *Kui VS* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *on lineaarselt sõltumatu ning VS* $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ *on lineaarselt sõltuv, siis avaldub vektor* v *vektorite* $v_1, \ldots, v_n$ *LK-na.*

Tõestus. VS-i $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ lineaarse sõltuvuse tõttu

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha v}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

Viimases seoses peab $\alpha \neq 0$, sest vastasel juhul oleksid *kõik* kordajad *nullid*. Vektor v avaldub siis ilmselt vektorite $v_1, \ldots, v_n$ LK-na

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha} v_n \qquad \square$$

Lineaarse sõltumatuse tunnus

Teoreem 6.34. *VS* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *on lineaarselt sõltumatu parajasti siis, kui võrdusest*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = o \qquad \textit{järeldub} \qquad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Tõestus. $\Longrightarrow$: Olgu VS $\{v_1, \ldots, v_n\}$ lineaarselt sõltumatu. Peame näitama, et võrdusest

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = o \quad \text{järeldub} \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Oletame vastuväiteliselt, et vähemalt üks kordajatest tuleb nullist erinev. Siis oleks VS $\{v_1, \ldots, v_n\}$ lineaarselt sõltuv, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult peab $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 124 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

$\Longleftarrow$: Kui võrdusest

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = o \quad \text{järeldub} \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

siis *ei leidu* nullvektoriga võrduvat *mittetriviaalset* lineaarkombinatsiooni. Seega VS $\{v_1, \ldots, v_n\}$ on lineaarselt *sõltumatu.* □

Lineaarse sõltuvuse tunnus

Teoreem 6.35. *VS, mis sisaldab vähemalt kahte vektorit, on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänute LK-na.*

Tõestus. $\Longrightarrow$: Olgu VS $\{v_1, \ldots, v_{n\geq 2}\}$ lineaarselt sõltuv. Siis leidub nullvektoriga võrduv mittetriviaalne LK

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \cdots + \alpha_n v_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

Olgu näiteks $\alpha_1 \neq 0$. Arvutame

$$\alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n$$

Korrutame nüüd arvuga α_1^{-1} vasakult, siis saame

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

mis ütleb, et v_1 avaldub ülejäänud vektorite LK-na.

$\Longleftarrow$: Avaldugu v_1 ülejäänud vektorite LK-na

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

Siit saame

$$\underbrace{1v_1 - \beta_2 v_2 - \cdots - \beta_n v_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

s.t VS $\{v_1, \ldots, v_n\}$ on lineaarselt *sõltuv*. □

6.5. Moodustajad ja baas

Moodustajad

VS-i nimetatakse vektorruumi V *moodustajate süsteemiks*, kui V iga vektor on avaldatav selle süsteemi vektorite LK-na. Moodustajate süsteemi vektoreid nimetatakse vektorruumi *moodustajateks*.

Näide 6.36. Iga vektorruum on iseenda moodustajate süsteem, sest $v = 1v$. Et iga vektorruum sisaldab nullvektorit, siis see näide ütleb, et vektorruumi moodustajate süsteemid võivad olla lineaarselt *sõltuvad*.

Baas

Öeldakse, et vektorisüsteem B on vektorruumi $V \neq 0$ *baas* ehk *koordinaatsüsteem*, kui

1) B on V moodustajate süsteem,
2) B on lineaarselt *sõltumatu*.

Kui vektorruum on nullruum, siis võib tema baasiks defineerida tühihulga (see on teatavasti lineaarselt *sõltumatu*). Seega oleks nullruumi baasis 0 vektorit.

Lõplikumõõtmelised ruumid

Vektorruumi nimetatakse *lõplikumõõtmeliseks*, kui tal leidub *lõplik* baas, s.t baas, mis sisaldab lõpliku arvu vektoreid. Vektorruumi nimetatakse *lõpmatumõõtmeliseks*, kui ta ei ole lõplikumõõtmeline.

Näide 6.37. Tõestame, et VS

$$\{e_i \doteq (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,0,\dots,0) \mid i = 1,\dots,n\}$$

on aritmeetilise vektorruumi $\mathbb{K}^n$ baas (seda nimetatakse *standardbaasiks*).

Tõestus. Näitest 6.24 teame, et VS $\{e_i \,|\, i = 1,\dots,n\}$ on lineaarselt *sõltumatu*. Peame näitama, et ta on ka vektorruumi $\mathbb{K}^n$ moodustajate süsteem. Olgu $a = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Paneme tähele, et

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

s.t $\forall\, a \in \mathbb{K}^n$ avaldub (lineaarselt sõltumatute) vektorite $e_1,\dots,e_n$ LK-na. Siit järeldub, et VS $\{e_i \,|\, i = 1,\dots,n\}$ on vektorruumi $\mathbb{K}^n$ *baas*. □

6.6. Mõõde

Esimene fundamentaallemma

Lemma 6.38. *Vektorid $b_1,\dots,b_n$ avaldugu vektorite $a_1,\dots,a_k$ lineaarkombinatsioonidena. Kui $n > k$, siis VS $\{b_1,\dots,b_n\}$ on lineaarselt sõltuv.*

Koduleht
Tiitelleht
Lk 127 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Tõestus. Vastavalt eeldusele

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{k1}a_k \\ b_2 = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{k2}a_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{kn}a_k \end{cases}$$

Moodustame LVS-i

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n = 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1}\lambda_1 + \alpha_{k2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{kn}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

Antud LVS on homogeensuse tõttu kooskõlaline. Üheks lahendiks on ilmselt triviaalne lahend $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Et tundmatuid on *rohkem* kui võrrandeid $(n > k)$, siis leidub sellel LVS-il *mittetriviaalne* lahend $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$, s.t vähemalt üks arvudest $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ erineb nullist. Vaatame *mittetriviaalset* lineaarkombinatsiooni

$$\begin{aligned} \underbrace{\lambda'_1 b_1 + \lambda'_2 b_2 + \cdots + \lambda'_n b_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = &+ \lambda'_1(\alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{k1}a_k) \\ &+ \lambda'_2(\alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{k2}a_k) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \lambda'_n(\alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{kn}a_k) \end{aligned}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 128 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

(avame sulud ja rühmitame liidetavad ümber)

$$\begin{aligned}
&= + (\alpha_{11}\lambda_1' + \alpha_{12}\lambda_2' + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n')a_1 \\
&\quad + (\alpha_{21}\lambda_1' + \alpha_{22}\lambda_2' + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n')a_2 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + (\alpha_{k1}\lambda_1' + \alpha_{k2}\lambda_2' + \cdots + \alpha_{kn}\lambda_n')a_k \\
&= 0a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_k \\
&= o
\end{aligned}$$

Näitasime, et leidub vektorite $b_1, \ldots, b_n$ nullvektoriga võrduv mittetriviaalne LK. Järelikult peab VS $\{b_1, \ldots, b_n\}$ olema lineaarselt *sõltuv.* □

Teine fundamentaallemma

Lemma 6.39. *Olgu VS $\{b_1, \ldots, b_n\}$ lineaarselt sõltumatu ning VS $\{a_1, \ldots, a_k\}$ olgu V moodustajate süsteem. Siis $n \leq k$.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $n > k$. Siis peaks vektorisüsteem $\{b_1, \ldots, b_n\}$ esimese fundamentaallemma 6.38 põhjal olema lineaarselt *sõltuv*, mis on vastuolus eeldusega. □

Teoreem vektorite arvust baasides

Teoreem 6.40. *Lõplikumõõtmelise vektorruumi kõikides baasides on ühepalju vektoreid.*

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 129 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Tõestus. Olgu $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ja $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ lõplikumõõtmelise vektorruumi V baasid. Peame näitama, et $k = n$. Paneme tähele, et

$$\begin{cases} B = \{b_1, \ldots, b_n\} & \text{on lineaarselt sõltumatu,} \\ A = \{a_1, \ldots, a_k\} & \text{on } V \text{ moodustajate süsteem.} \end{cases}$$

Lemma 6.39 põhjal $n \leq k$. Samamoodi, kui A ja B vahetavad kohad, saame $k \leq n$. Kokku võttes $k = n$. □

Mõõde

Lõplikumõõtmelise vektorruumi *mõõtmeks* ehk *dimensiooniks* nimetatakse vektorite arvu selle vektorruumi baasis. Vektorruumi V mõõdet tähistatakse $\dim V$.

Nullruum on 0-mõõtmeline, s.t $\dim O = 0$ (nullruumi baas on tühihulk).

Märkus 6.41. Selle definitsiooni korrektsus on garanteeritud teoreemiga 6.40.

Näide 6.42. Eespool toodud näite 6.37 põhjal $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Kui vektorisüsteemis on rohkem kui $\dim V$ vektorit

Teoreem 6.43. *VS, milles on rohkem kui* $\dim V$ *vektorit, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Tähistame $\dim V = k$. Olgu

$$\begin{cases} \{a_1, \ldots, a_k\} & \text{vektorruumi } V \text{ baas} \\ \{b_1, \ldots, b_{n>k}\} & \text{mingi VS} \end{cases}$$

Lemma 6.38 põhjal on VS $\{b_1, \ldots, b_{n>k}\}$ lineaarselt sõltuv. □

Vektorite arvust moodustajate süsteemis

Teoreem 6.44. *Vektorruumi V igas moodustajate süsteemis on vähemalt* $\dim V$ *vektorit.*

Tõestus. Tähistame $\dim V = n$. Olgu

$$\begin{cases} \{b_1, \ldots, b_n\} & \text{vektorruumi } V \text{ baas} \\ \{a_1, \ldots, a_k\} & \text{vektorruumi } V \text{ moodustajate süsteem} \end{cases}$$

Peame näitama, et $k \geq n$. Paneme tähele, et $\{b_1, \ldots, b_n\}$ on lineaarselt sõltumatu (baas). Lemma 6.39 põhjal $n \leq k$. □

6.7. Homogeense lineaarvõrrandisüsteemi LFS

LFS-i mõiste

Homogeense LVS-i lahendiruum on teatavasti vektorruum. Homogeense LVS-i *lahendite fundamentaalsüsteemiks* (LFS-iks) nimetatakse selle süsteemi lahendiruumi baasi.

Homogeense süsteemi lahendiruumi mõõtmest

Teoreem 6.45. *Olgu homogeense LVS-i tundmatute arv n ja süsteemi maatriksi astak r. Siis on süsteemi lahendiruum $(n - r)$-mõõtmeline.*

See teoreem ütleb, et homogeense süsteemi lahendite fundamentaalsüsteem koosneb $n - r$ vektorist. Homogeense süsteemi *üldlahend* avaldub (vektoresituses) LFS-i vektorite lineaarkombinatsioonina, kusjuures kordajateks on *suvalised konstandid* (üldlahendi parameetrid).

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 131 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

LFS-i leidmine

LFS-i saame, kui vabadele tundmatutele (mille arv on $(n-r)$) omistame sobivalt arv-väärtusi 1 ja 0.

Näide 6.46. Leiame homogeense süsteemi

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 + \ \ x_4 = 0 \end{cases}$$

lahendite fundamentaalsüsteemi.

Lahendus. Süsteemi üldlahend on

$$\begin{cases} x_1 = -9x_2 - 4x_4 \\ x_3 = 11x_2 + 5x_4 \\ x_2, x_4 - \text{vabad tundmatud} \end{cases}$$

Üldlahend vektoresituses on

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9x_2 - 4x_4 \\ x_2 \\ 11x_2 + 5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Süsteemi LFS sisaldab $4-2=2$ vektorit. Vabadele tundmatutele x_2 ja x_4 omistame nüüd arvväärtusi 1 ja 0. Saame erilahendid

$$v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Süsteemi *üldlahend* avaldub lahendite fundamentaalsüsteemi vektorite lineaarkombinatsioonina, kusjuures kordajateks on *suvalised konstandid* (vabad tundmatud)

$$x = x_2 v_1 + x_4 v_2$$

6.8. Koordinaadid ja koordinaatvektor

Olgu $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vektorruumi V baas, siis $\dim V = n$. Eelnevast teame, et iga vektor $a \in V$ on avaldatav baasi vektorite LK-na

$$a = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

Selle lineaarkombinatsiooni kordajaid $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nimetatakse vektori $a \in V$ *koordinaatideks* baasis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Vektori a kohta öeldakse, et ta on *arendatud* baasi B järgi. Vektori a *koordinaatvektoriks* baasis B nimetame üheveerulist maatriksit

$$C_B(a) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Põhjus, miks kasutame veergu rea asemel, selgub hiljem.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 133 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Lause 6.47 (koordinaatvektori omadusi). *Olgu B vektorruumi V baas. Siis*

1) $C_B(v_1 + v_2) = C_B(v_1) + C_B(v_2)$
2) $C_B(\alpha v) = \alpha C_B(v)$

Tõestus. Soovitatav tõestada iseseisva harjutusena. □

Vektori koordinaatide ühesus antud baasis

Teoreem 6.48. *Vektori koordinaadid antud baasis on määratud üheselt.*

Tõestus. Olgu $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vektorruumi V baas ning

$$a = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n = \alpha'_1 b_1 + \cdots + \alpha'_n b_n$$

Võrdusest $a - a = o$ saame

$$\begin{aligned} &\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n - (\alpha'_1 b_1 + \cdots + \alpha'_n b_n) \\ &\qquad = (\alpha_1 - \alpha'_1) b_1 + \cdots + (\alpha_n - \alpha'_n) b_n = o \end{aligned}$$

Baasi B lineaarse sõltumatuse tõttu peab

$$\alpha'_i = \alpha_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

mis tähendabki koordinaatide ühesust baasis B. □

Vektorite võrdsuse tunnus

Teoreem 6.49. *Vektorid on võrdsed parajasti siis, kui on võrdsed nende vastavad koordinaadid (koordinaatvektorid) mingis baasis.*

Tõestus. Olgu $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ vektorruumi V baas ning $a, c \in V$. Siis

$$a = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \quad \text{ja} \quad c = \gamma_1 b_1 + \cdots + \gamma_n b_n$$

Arvutame

$$\begin{aligned} a - c &= \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n - (\gamma_1 b_1 + \cdots + \gamma_n b_n) \\ &= (\alpha_1 - \gamma_1) b_1 + \cdots + (\alpha_n - \gamma_n) b_n \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$: Võrdusest $a = c$ järeldub, et $\alpha_i = \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, sest B on lineaarselt sõltumatu.

$\Longleftarrow$: Võrdustest $\alpha_i = \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ järeldub ilmselt, et $a = c$. □

6.9. Baasiteisendused

Üleminekumaatriks

Vektorruumi baas ei ole üldiselt üheselt määratud, s.t vektorruumis võib olla rohkem kui üks baas. Olgu $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ja $B' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ n-mõõtmelise vektorruumi V kaks baasi, vektorite arv neis on teatavasti ühesugune (vt teoreem 6.40). Arendame

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 135 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

baasi B' vektorid baasi B järgi

$$\begin{cases} b'_1 = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \cdots + \alpha_{n1}b_n \\ b'_2 = \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \cdots + \alpha_{n2}b_n \\ \dotfill \\ b'_n = \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \cdots + \alpha_{nn}b_n \end{cases}$$

Maatriksit

$$P_{B\leftarrow B'} \doteq \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse *üleminekumaatriksiks* baasilt B' baasile B. Paneme tähele, et üleminekumaatriksi $P_{B\leftarrow B'}$ i-ndaks *veeruks* on baasivektori b'_i arenduse koordinaadid baasis B

$$P_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} C_B(b'_1) & C_B(b'_2) & \cdots & C_B(b'_n) \end{pmatrix}$$

Vektori koordinaatide teisenemine

Teoreem 6.50. *Olgu B ja B' vektorruumi V baasid. Siis*

$$C_B(v) = P_{B\leftarrow B'}C_{B'}(v) \quad \forall\, v \in V$$

Tõestus. Arendame vektori $v \in V$ baaside B ja B' järgi

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = \lambda'_1 b'_1 + \cdots + \lambda'_n b'_n$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \lambda_1'(\alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \cdots + \alpha_{n1}b_n) \\
& + \lambda_2'(\alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \cdots + \alpha_{n2}b_n) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \lambda_n'(\alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \cdots + \alpha_{nn}b_n)
\end{aligned}
$$

(avame sulud ja rühmitame liidetavad ümber)

$$
\begin{aligned}
= & + (\alpha_{11}\lambda_1' + \alpha_{12}\lambda_2' + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n')b_1 \\
& + (\alpha_{21}\lambda_1' + \alpha_{22}\lambda_2' + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n')b_2 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + (\alpha_{n1}\lambda_1' + \alpha_{n2}\lambda_2' + \cdots + \alpha_{nn}\lambda_n')b_n
\end{aligned}
$$

Vektori arendus baasi järgi on ühene. Järelikult

$$
\begin{cases}
\lambda_1 = \alpha_{11}\lambda_1' + \alpha_{12}\lambda_2' + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n' \\
\lambda_2 = \alpha_{21}\lambda_1' + \alpha_{22}\lambda_2' + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_n = \alpha_{n1}\lambda_1' + \alpha_{n2}\lambda_2' + \cdots + \alpha_{nn}\lambda_n'
\end{cases}
$$

mis on vektori v *koordinaatide teisenemisvalemid* baasilt B' baasile B. Tulemuse võime ilmselt kirjutada maatrikskujul

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix} \qquad \square
$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 137 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 6.51. Leida vektori $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ koordinaadid baasis

$$B' = \{b'_1 = (1,1,0), \quad b'_2 = (1,0,1), \quad b'_3 = (0,1,0)\}$$

Lahendus. Baasiks B on standardbaas

$$B = \{e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)\}$$

Siis

$$v = (1,2,3) = 1e_1 + 2e_2 + 3e_3 \quad \Longrightarrow \quad C_B(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Leiame üleminekumaatriksi $P_{B\leftarrow B'}$. Paneme tähele, et

$$\begin{cases} (1,1,0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\ (1,0,1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\ (0,1,0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad P_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nüüd paneme tähele, et

$$C_B(v) = P_{B\leftarrow B'} C_{B'}(v) \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_{B'}(v)$$

Siit saame

$$C_{B'}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Kontrollides saame

$$\begin{aligned} v &= -2b_1' + 3b_2' + 4b_3' \\ &= -2(1,1,0) + 3(1,0,1) + 4(0,1,0) \\ &= (-2,-2,0) + (3,0,3) + (0,4,0) \\ &= (1,2,3) \end{aligned}$$

Üleminekumaatriksi omadusi

Lemma 6.52. *Olgu* $\dim V = n$ *ning* $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ *vektorruumi* V *baas. Kui* A *on* $n \times n$*-maatriks, siis*

$$A[C_B(v)] = o \quad \forall\, v \in V \Longrightarrow A = 0$$

Tõestus. Tõepoolest, $A[C_B(b_i)](= o)$ on maatriksi A i-s veerg, sest $C_B(b_i)$ on ühikmaatriksi I_n i-s veerg. □

Teoreem 6.53. *Olgu* B, B' *ja* B'' *vektorruumi* V *kolm baasi. Siis*

1) $P_{B\leftarrow B} = I$
2) $P^{-1}_{B\leftarrow B'} = P_{B'\leftarrow B}$ *(pööratavus)*
3) $P_{B''\leftarrow B'} P_{B'\leftarrow B} = P_{B''\leftarrow B}$ *(transitiivsus)*

Tõestus. Esimese omaduse jätame iseseisvaks harjutuseks.

Teine omadus järeldub esimesest ja kolmandast. Võttes kolmandas omaduses $B'' = B$, saame esimese omaduse põhjal

$$P_{B\leftarrow B'} P_{B'\leftarrow B} = P_{B\leftarrow B} = I$$

Samamoodi, kui B ja B' vahetavad kohad, siis

$$P_{B'\leftarrow B}P_{B\leftarrow B'} = P_{B'\leftarrow B'} = I$$

Seega on üleminekumaatriks pööratav ja teine omadus (valem) kehtib järeldusena esimesest ja kolmandast. Jääb üle tõestada kolmas omadus.

Kasutades teoreemi 6.50, võime iga $v \in V$ korral kirjutada

$$C_{B'}(v) = P_{B'\leftarrow B}C_B(v), \quad C_{B''}(v) = P_{B''\leftarrow B'}C_{B'}(v)$$

Asendades viimases võrduses $C_{B'}(v)$, saame

$$C_{B''}(v) = P_{B''\leftarrow B'}P_{B'\leftarrow B}C_B(v)$$

Kuid jällegi teoreemi 6.50 tõttu võime kirjutada

$$C_{B''}(v) = P_{B''\leftarrow B}C_B(v)$$

Seega lahutades eelviimasest võrdusest viimase, saame

$$(P_{B''\leftarrow B'}P_{B'\leftarrow B} - P_{B''\leftarrow B})C_B(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Kolmas omadus järeldub nüüd lemma 6.52 kaasabil. □

Teoreem 6.54. *Üleminekumaatriksi astak on* $\dim V$*, s.t*

$$\det P_{B\leftarrow B'} \neq 0 \neq \det P_{B'\leftarrow B}$$

Tõestus. Arvutame (üleminekuʼ)maatriksite determinantide korrutise

$$\begin{aligned}\det P_{B\leftarrow B'} \cdot \det P_{B'\leftarrow B} &= \det(P_{B\leftarrow B'}P_{B'\leftarrow B}) = \det P_{B\leftarrow B} \\ &= \det I = 1\end{aligned}$$

Kuna korrutis erineb nullist, siis ei ole tegurid nullid. □

6.10. Alamruum ja lineaarne kate

Alamruum

Vektorruumi V *alamruumiks* nimetatakse tema sellist mittetühja osahulka $V' \subseteq V$, mis rahuldab järgmist tingimust:

$$a, b \in V' \quad \Longrightarrow \quad \alpha a + \beta b \in V' \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Näide 6.55. Vektorruum V on iseenda alamruum. Nullruum $O = \{o\}$, mis koosneb teatavasti vaid vektorruumi V nullvektorist o, on V alamruum. Neid alamruume nimetatakse vektorruumi V *triviaalseteks* alamruumideks. Kõiki ülejäänud alamruume (kui leiduvad) nimetatakse *mittetriviaalseteks*.

Näide 6.56. Defineerime $V' \subset \mathbb{K}^2$ järgmiselt:

$$V' \doteq \{(x, -x) \in \mathbb{K}^2 | \, x \in \mathbb{K}\}$$

Kontrollime alamruumi tingimust. Olgu $(a, -a), (b, -b) \in V'$, siis

$$\begin{aligned} \alpha(a, -a) + \beta(b, -b) &= (\alpha a, -\alpha a) + (\beta b, -\beta b) \\ &= (\alpha a + \beta b, -(\alpha a + \beta b)) \in V' \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Tulemus ütleb, et V' on tõepoolest aritmeetilise vektorruumi $\mathbb{K}^2$ alamruum.

Näide 6.57 (alamruume funktsiooniruumis)**.** Toome mõned alamruumide näited funktsiooniruumis.

1. Diferentseeruvad funktsioonid moodustavad alamruumi pidevate funktsioonide ruumis.

2. Siledad funktsioonid moodustavad alamruumi diferentseeruvate funktsioonide ruumis.

Lause 6.58. *Vektorruumi iga alamruum on samuti vektorruum (üle sama korpuse).*

Tõestus. Sest kehtivad vektorruumi aksioomid. □

Lineaarne kate

VS-i $\{v_1, \dots, v_n\}$ *lineaarseks katteks* $\mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ nimetatakse selle süsteemi vektorite kõigi LK-de hulka

$$\mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_n\} \doteq \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V |\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

Sageli öeldakse, et $\mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ on vektorite $v_1, \dots, v_n$ lineaarne kate.

Teoreem 6.59. $\mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ *on vektorruumi* V *alamruum.*

Tõestus. Kontrolli alamruumi tingimust. □

Teoreem 6.60. *VS on lineaarselt sõltumatu parajasti siis, kui ta on oma lineaarse katte baas.*

Tõestus. $\Longrightarrow$: Olgu VS lineaarselt sõltumatu. See süsteem on ka oma lineaarse katte moodustajate süsteem. Järelikult on tegemist (lineaarse katte) baasiga.

$\Longleftarrow$: Kui VS on (oma lineaarse katte) *baas*, siis peab ta ilmselt olema lineaarselt sõltumatu. □

Definitsioon 6.61. Maatriksi A reavektorite lineaarset katet nimetatakse selle maatriksi *reavektorite ruumiks* ja tähistatakse $\mathrm{Row}\,A$. Maatriksi A veeruvektorite lineaarset katet nimetatakse selle maatriksi *veeruvektorite ruumiks* ja tähistatakse $\mathrm{Col}\,A$.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 142 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

6.11. Vektorisüsteemi astak. Astakuteoreem

Baasalamsüsteem

VS-i *baasalamsüsteem* on tema selline alamsüsteem, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1) baasalamsüsteem on lineaarselt *sõltumatu*,
2) täiendavate vektorite lisamine vektorisüsteemist baasalamsüsteemi muudab saadud (laiendatud) süsteemi lineaarselt *sõltuvaks*.

Lühidalt öeldes on VS-i baasalamsüsteem selle süsteemi *maksimaalne* lineaarselt sõltumatu alamsüsteem.

Teoreem 6.62 (lineaarse katte baasist)**.** *VS-i baasalamsüsteem on selle VS-i lineaarse katte baas.*

Tõestus. Teoreemi 6.33 põhjal avaldub VS-i iga vektor oma baasalamsüsteemi vektorite LK-na. Järelikult on VS-i baasalamsüsteem selle VS-i lineaarse katte moodustajate süsteem. Baasalamsüsteemi lineaarse sõltumatuse tõttu on tegemist baasiga. □

Teoreem 6.63 (vektorite arv baasalamsüsteemides)**.** *Vektorisüsteemi kõikides baasalamsüsteemides on ühepalju vektoreid.*

Tõestus. Teame, et VS-i lineaarne kate on vektorruum. Väide järeldub teoreemidest 6.62 ning 6.40. □

Vektorisüsteemi astak

VS-i *astakuks* nimetatakse vektorite arvu tema baas-alam-süs-tee-mis.

Märkus 6.64. Selle definitsiooni korrektsus on garanteeritud teoreemiga 6.63.

Teoreem 6.65. *VS-i astak võrdub selle süsteemi lineaarse katte mõõtmega*

$$\operatorname{rank} S = \dim \operatorname{Lin} S$$

Tõestus. Järeldub teoreemist 6.62. □

Teoreem 6.66 (astakuteoreem)**.** *VS-i astak võrdub selle süsteemi vektorite koordinaatide maatriksi astakuga.*

Astakuteoreemi on mugav kasutada VS-i astaku leidmiseks. Selle teoreemi tõestame järgmises alapunktis.

Teoreem 6.67. *Maatriksi A reavektorite süsteemi astak võrdub maatriksi A astakuga ning tema veeruvektorite süsteemi astak võrdub samuti maatriksi A astakuga. Kuna VS-i astak võrdub tema lineaarse katte mõõtmega, siis*

$$\dim \operatorname{Row} A = \operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A$$

6.12. Lineaarse sõltuvuse uurimine

Kirjeldame, kuidas leida VS-i baasalamsüsteemi ja tõestame astakuteoreemi.

Ülesanne. Olgu $\dim V = k$. Uurida VS-i $\{v_1, \ldots, v_n\}$ lineaarset sõltuvust.

Lahendus. Peame uurima võrrandit (seost)

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = o \qquad (*)$$

Tundmatud on $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Olgu $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ vektorruumi V baas. Kasutame arendust baasi B järgi

$$\begin{cases} v_1 = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \cdots + \alpha_{k1}b_k \\ v_2 = \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \cdots + \alpha_{k2}b_k \\ \dotfill \\ v_n = \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \cdots + \alpha_{kn}b_k \end{cases}$$

Vektorite $v_1, \ldots, v_n$ koordinaatide maatriksi tähistame

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_B(v_1) & C_B(v_2) & \ldots & C_B(v_n) \end{pmatrix}$$

Asendades ülaltoodud arendused seosesse $(*)$, saame

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \quad & \lambda_1(\alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \cdots + \alpha_{k1}b_k) \\ & + \lambda_2(\alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \cdots + \alpha_{k2}b_k) \\ & \dotfill \\ & + v_n(\alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \cdots + \alpha_{kn}b_k) \end{aligned}$$

(avame sulud ja rühmitame liidetavad ümber)

$$\begin{aligned}
= \quad & (\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n)b_1 \\
& + (\alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n)b_2 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + (\alpha_{k1}\lambda_1 + \alpha_{k2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{kn}\lambda_n)b_k \\
= 0 &
\end{aligned}$$

Et baas B on lineaarselt sõltumatu, peavad kordajad olema *nullid*

$$\begin{cases}
\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n = 0 \\
\alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{k1}\lambda_1 + \alpha_{k2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{kn}\lambda_n = 0
\end{cases}$$

Paneme tähele, et selle LVS-i maatriks on vektorite $v_1, \ldots, v_n$ koordinaatide maatriks $A = (\alpha_{ij})$. Olgu r maatriksi A astak. Kasutades Gaussi meetodit, lahendame viimase LVS-i, mis on homogeensuse tõttu kooskõlaline. Vabade tundmatute arv on teatavasti $n - r$. Olgu $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r$ *juhttundmatud* ning $\lambda'_{r+1}, \ldots, \lambda'_n$ *vabad tundmatud. Juhttundmatud avalduvad lineaarselt vabade tundmatute kaudu (kui leiduvad).* Selekteerime ka vektorid *vabadeks* ja (olemasolu korral) *juhtivateks*. Vektorit, mis asetseb LK-s vaba tundmatu kõrval, nimetame *juhtvektoriks*. Vektorit, mis asetseb LK-s juhttundmatu kõrval, nimetame *vabaks vektoriks*. Siis võime kirjutada

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \overbrace{\underbrace{\lambda_1' v_1' + \cdots + \lambda_r' v_r'}_{\text{vabad vektorid}}}^{\text{juhttundmatud}} + \overbrace{\underbrace{\lambda_{r+1}' v_{r+1}' + \cdots + \lambda_n' v_n'}_{\text{juhtvektorid}}}^{\text{vabad tundmatud}} = o$$

Juhtvektorid (kui leiduvad) avalduvad vabade vektorite lineaarkombinatsioonidena, kui vabadele tundmatutele omistada sobivalt arvväärtusi 1 ja 0. Seega on vabad vektorid antud vektorisüsteemi moodustajad. Näitame, et vabad vektorid on lineaarselt sõltumatud. Seega moodustavad vabad vektorid VS-i baasalamsüsteemi. See tõestabki, et vektorisüsteemi $\{a_1, \cdots, a_n\}$ astak on r.

Tõepoolest, olgu $\{v_1', \ldots, v_r'\}$ vabad vektorid ja avaldugu v_1' vastuväiteliselt ülejäänud vabade vektorite LK-na

$$v_1' = \beta_2 v_2' + \cdots + \beta_r v_r'$$

Siis avalduvad ka juhtvektorid $v_{r+1}', \ldots, v_n'$ vektorite $v_2', \ldots, v_r'$ lineaarkombinatsioonidena

$$\begin{cases} v_{r+1}' & = \beta_{2,r+1} v_2' + \beta_{3,r+1} v_3' + \cdots + \beta_{r,r+1} v_r' \\ v_{r+2}' & = \beta_{2,r+2} v_2' + \beta_{3,r+2} v_3' + \cdots + \beta_{r,r+2} v_r' \\ \cdots\cdot & \\ v_n' & = \beta_{2n} v_2' + \beta_{3n} v_3' + \cdots + \beta_{rn} v_r' \end{cases}$$

Lausest 6.47 järeldub, et maatriksi A veeruvektorite $C_B(v_j')$ jaoks kehtivad seosed

$$\begin{cases} C_B(v_1') = \sum_{i=2}^r \beta_i C_B(v_i') \\ C_B(v_j') = \sum_{i=2}^r \beta_{ij} C_B(v_i'), \quad j = r+1, \ldots, n \end{cases} \tag{$**$}$$

Leiame nüüd maatriksi A astaku veergude elementaarteisenduste $(**)$ abil

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} C_B(v_1) & C_B(v_2) & \dots & C_B(v_n) \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} C_B(v_1') & C_B(v_2') & \dots & C_B(v_r') & C_B(v_{r+1}') & \dots & C_B(v_n') \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & C_B(v_2') & \dots & C_B(v_r') & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tulemus ütleb, et nullist erinevaid veerge jääb vaid $r-1$, s.t maatriksil A peaks astak olema väiksem kui r, mis on vastuolus eeldusega, et maatriksi astak on r. Järelikult peavad vabad vektorid $v_1', \dots, v_r'$ olema lineaarselt sõltumatud. Seega moodustavad vabad vektorid antud vektorisüsteemi baasalamsüsteemi ja vektorisüsteemi astak on samuti r. □

Kui vabu tundmatuid ei ole, siis puuduvad ka juhtvektorid ning VS $\{v_1, \dots, v_n\}$ osutub lineaarselt sõltumatuks. Vektorisüsteemi astak on sellisel juhul n.

6.13. Kroneckeri-Capelli teoreem

Vaatleme LVS-i

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \tag{1}$$

Defineerime veeruvektorid

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

LVS-i (1) saab samaväärselt esitada vektorkujul

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b \tag{2}$$

Kroneckeri-Capelli teoreem

Teoreem 6.68 (astakutingimus)**.** *LVS* (1) *on kooskõlaline parajasti siis, kui VS-ide* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *ja* $\{a_1, \ldots, a_n, b\}$ *astakud on võrdsed.*

Tõestus. $\Longrightarrow$: Olgu LVS (1) kooskõlaline. See tähendab, et süsteemil (1) leidub mingi lahend $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$. Siis kehtib aga vektorvõrdus (2)

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3}$$

Olgu $r = \operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Siis sisaldavad VS-i $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baasalamsüsteemid r vektorit. Olgu näiteks $a_1, \ldots, a_r$ lineaarselt sõltumatud, siis avalduvad ülejäänud $n - r$ vektorit $a_{r+1}, \ldots, a_n$ vektorite $a_1, \ldots, a_r$ lineaarkombinatsioonidena. Võrdusest (3) järeldub, et ka vektor b avaldub vektorite $a_1, \ldots, a_r$ LK-na. Laiendatud vektorisüsteemi $\{a_1, \ldots, a_n, b\}$ baasalamsüsteem on seega samuti $\{a_1, \ldots, a_r\}$. Siit järeldub, et $\operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n, b\} = r$.

$\Longleftarrow$: Olgu

$$\operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n\} = \operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n, b\} = r$$

Siis VS-i $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baasalamsüsteemid sisaldavad r vektorit. Olgu näiteks vektorid $a_1, \ldots, a_r$ lineaarselt sõltumatud. Vaatleme laiendatud VS-i $\{a_1, \ldots, a_r, b\}$. Kuna $\operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n, b\} = r$ ja vektorid $a_1, \ldots, a_r$ on lineaarselt sõltumatud, siis VS $\{a_1, \ldots, a_r, b\}$ on lineaarselt sõltuv. Kui $b = 0$, siis avaldub vektor b vektorite $a_1, \ldots, a_r$ *triviaalse* LK-na. Kui $b \neq 0$, siis peab vektor b avalduma vektorite $a_1, \ldots, a_r$ LK-na (kasutame teoreemi 6.33). Seega leiduvad sellised skalaarid $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, et

$$b = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r$$

ehk

$$b = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + 0a_{r+1} + \cdots + 0a_n$$

See aga tähendab, et

$$x_1 = \alpha_1, \cdots, x_r = \alpha_r, \quad x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$$

on LVS-i (1) lahend. □

6.14. Ülesanded

Lineaarkombinatsioonid

6.14.1 Arendada vektor $v = (1, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$ vektorite

$$b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 2, 3), \quad b_3 = (2, -1, 1)$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 150 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

6.14.2 Arendada vektor $v = (2, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ vektorite

$$b_1 = (1, -3, 2), \quad b_2 = (2, -4, -1), \quad b_3 = (1, -5, 7)$$

lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

6.14.3 Arendada vektor $v = (7, 14, -1, 2)$ vektorite

$$\begin{cases} b_1 = (1, 2, -1, -2), \quad b_2 = (2, 3, 0, -1) \\ b_3 = (1, 2, 1, 4), \quad b_4 = (1, 3, -1, 0) \end{cases}$$

lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

6.14.4 Arendada maatriks M maatriksite A, B, C lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6.14.5 Arendada polünoom $p = t^2 + 4t - 3$ polünoomide

$$p_1 = t^2 - 2t + 5, \quad p_2 = 2t^2 - 3t, \quad p_3 = t + 1$$

lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

Moodustajad ja lineaarne kate

6.14.6 Näidata, et vektorid

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 2, 3), \quad v_3 = (1, 5, 8)$$

on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ moodustajad.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 151 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Lineaarne sõltuvus

6.14.7 Tõestada, et funktsioonisüsteem $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x | x \in \mathbb{R}\}$ on lineaarselt sõltuv.
6.14.8 Tõestada, et funktsioonisüsteem $\{\sin x, \cos x | x \in \mathbb{R}\}$ on lineaarselt sõltumatu.
6.14.9 Olgu VS $\{a, b\}$ lineaarselt sõltumatu. Tõestada, et siis on ka VS $\{a+b, a-b\}$ lineaarselt sõltumatu.
6.14.10 Tõestada, et funktsioonisüsteem $\{e^{i\varphi}, e^{-i\varphi} | \varphi \in \mathbb{R}\}$ on lineaarselt sõltumatu.

Lineaarse sõltuvuse uurimine

6.14.11 Leida VS-i astak ja mingi baasalamsüsteem, juhtvektorid arendada baasalamsüsteemi järgi. Kontrollida arendusi.

$$\begin{cases} v_1 = (1,0,0,-1), \quad v_2 = (2,1,1,0) \\ v_3 = (1,1,1,1), \quad v_4 = (1,1,3,4), \quad v_5 = (0,1,2,3) \end{cases}$$

6.14.12 Uurida VS-i

$$\begin{cases} v_1 = (6,3,3,9), \quad v_2 = (4,2,2,6), \quad v_3 = (5,4,-2,1) \\ v_4 = (2,1,1,3), \quad v_5 = (3,2,0,2), \quad v_6 = (1,3,-7,2) \end{cases}$$

lineaarset sõltuvust. Leida astak ja mingi baasalamsüsteem. Juhtvektorid arendada baasalamsüsteemi järgi. Kontrollida arendusi.
6.14.13 Uurida VS-i

$$\begin{cases} v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (2,3,4,5) \\ v_3 = (3,4,5,6), \quad v_4 = (4,5,6,7) \end{cases}$$

lineaarset sõltuvust. Leida astak ja mingi baasalamsüsteem. Juhtvektorid arendada baasalamsüsteemi järgi. Kontrollida arendusi.

6.14.14 Uurida VS-i

$$\begin{cases} v_1 = (1,1,1,1), & v_2 = (1,2,3,2) \\ v_3 = (2,5,6,4), & v_4 = (2,6,8,5) \end{cases}$$

lineaarset sõltuvust. Leida astak ja mingi baasalamsüsteem. Juhtvektorid arendada baasalamsüsteemi järgi. Kontrollida arendusi.

Baasiteisendused

6.14.15 Leida vektori $v = (5,3,4) \in \mathbb{R}^3$ koordinaadid baasis

$$(1,-1,0), \quad (1,1,0), \quad (0,1,1)$$

Kontrollida arendust.

6.14.16 Leida vektori $v = (-2,0,1) \in \mathbb{R}^3$ koordinaadid baasis

$$(5,2,1), \quad (-2,0,1), \quad (0,4,-3)$$

Kontrollida arendust.

6.14.17 Leida vektori $v = (5,5,-3) \in \mathbb{R}^3$ koordinaadid baasis

$$(4,-2,1), \quad (-7,3,-1), \quad (0,-8,6)$$

Kontrollida arendust.

Homogeense LVS-i lahendite fundamentaalsüsteem

Leida homogeense LVS-i lahendite fundamentaalsüsteem. Üldlahend arendada baasivektorite järgi. Kontrollida lahendit.

6.14.18

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

6.14.19

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

6.14.20

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$$

6.14.21

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 9x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 154 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

7. Skalaarkorrutis

7.1. Skalaarkorrutis reaalses vektorruumis

Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$.

Skalaarkorrutise mõiste

Öeldakse, et reaalses vektorruumis V on defineeritud *skalaarkorrutis*, kui igale kahele vektorile $a, b \in V$ on vastavusse seatud reaalarv $(a|b) \in \mathbb{R}$ nii, et on täidetud järgmised tingimused:

1) $(a|b) = (b|a)$ (sümmeetria),
2) $(a + b|c) = (a|c) + (b|c)$ (aditiivsus),
3) $(\alpha a|b) = \alpha(a|b)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (homogeensus),
4) kui $V \ni a \neq o$, siis $(a|a) > 0$ (positiivsus).

Reaalset skalaarkorrutisega vektorruumi nimetatakse *eukleidiliseks* vektorruumiks.

Näide 7.1 (skalaarkorrutis nullvektoriga)**.** Skalaarkorrutise omaduse 3) põhjal ilmselt

$$(o|a) = (0o|a) = 0(o|a) = 0 \qquad \forall\, a \in V$$

Siit järeldub, et ka $(o|o) = 0$.

Näide 7.2 (skalaarkorrutis reaalses aritmeetilises vektorruumis)**.** Olgu

$$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$$

Skalaarkorrutise defineerime valemiga

$$(a|b) \doteq \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n \in \mathbb{R}$$

Näide 7.3 (skalaarkorrutis funktsiooniruumis)**.** Olgu f ja g lõigul $[a,b]$ pidevad funktsioonid, s.t $f,g \in C[a,b]$. Skalaarkorrutise defineerime valemiga

$$(f|g) \doteq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

7.2. Skalaarkorrutis kompleksses vektorruumis

Olgu V vektorruum üle $\mathbb{C}$.

Skalaarkorrutise mõiste

Öeldakse, et kompleksses vektorruumis V on defineeritud *skalaarkorrutis*, kui igale kahele vektorile $a,b \in V$ on vastavusse seatud kompleksarv $(a|b) \in \mathbb{C}$ nii, et on täidetud järgmised tingimused:

1) $(a|b) = (b|a)^*$ (unitaarne sümmeetria),
2) $(a+b|c) = (a|c) + (b|c)$ (aditiivsus),
3) $(\alpha a|b) = \alpha(a|b) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$ (homogeensus),
4) kui $V \ni a \neq o$, siis $(a|a) > 0$ (positiivsus).

Komplekset skalaarkorrutisega vektorruumi nimetatakse *unitaarseks* vektorruumiks.

Näide 7.4 (skalaarkorrutis kompleksses aritmeetilises vektorruumis)**.** Kui

$$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{ja} \quad b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$$

siis defineerime skalaarkorrutise valemiga

$$(a|b) \doteq ab^\dagger = \alpha_1\beta_1^* + \alpha_2\beta_2^* + \cdots + \alpha_n\beta_n^* \in \mathbb{C}$$

Näide 7.5 (skalaarkorrutis kompleksses funktsiooniruumis)**.** Olgu f, g pidevad kompleksarvuliste väärtustega reaalmuutuja funktsioonid lõigul $[a, b]$. Skalaarkorrutise defineerime valemiga

$$(f|g) \doteq \int_a^b f(x)g^*(x)\,dx \in \mathbb{C}$$

7.3. Vektori pikkus

Vektori pikkuse mõiste

Vektori $a \in V$ *pikkus* ehk *norm* $|a| \doteq ||a||$ defineeritakse valemiga $|a| \doteq \sqrt{(a|a)}$. Vektori pikkus on ilmselt *mittenegatiivne* reaalarv.

Näide 7.6 (aritmeetilise vektori pikkus)**.** Aritmeetilise vektori

$$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$$

pikkus on

$$|a| \doteq \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 157 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 7.7 (funktsiooni norm)**.** Funktsiooni $f \in C[a,b]$ norm on

$$||f|| \doteq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}$$

Teoreem 7.8 (homogeensus)**.** $|\alpha a| = |\alpha||a| \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}, \forall\, a \in V$

Tõestus. Tõepoolest, arvutame

$$|\alpha a| = \sqrt{(\alpha a|\alpha a)} = \sqrt{\alpha\alpha^*(a|a)} = \sqrt{|\alpha|^2}\sqrt{(a|a)} = |\alpha||a| \qquad \square$$

Ühikvektor

Vektorit pikkusega 1 nimetatakse *ühikvektoriks.* Ühikvektori kohta öeldakse, et ta on *normeeritud.*

Näide 7.9. Vektorid

$$e_i \doteq (\overbrace{0,\ldots,0}^{i-1},1,0\ldots,0)$$

on ühikvektorid (ehk normeeritud).

Lause 7.10 (vektori normeerimine)**.** *Olgu $a \neq o$. Siis on vektor $\frac{a}{|a|}$ ühikvektor.*

Tõestus. Tõepoolest, arvutame

$$\left|\frac{a}{|a|}\right| = \left|\frac{1}{|a|}a\right| = \frac{1}{|a|}|a| = 1 \qquad \square$$

7.4. Cauchy-Schwarzi võrratus ja vektoritevaheline nurk

Cauchy-Schwarzi võrratus

Teoreem 7.11. *Olgu V unitaarne vektorruum. Siis kehtib nn Cauchy-Schwarzi*[8] *võrratus*

$$|(a|b)| \leq |a||b| \qquad \forall\, a, b \in V$$

Tõestus. Kui $a = o$ või $b = o$, siis on Cauchy-Schwarzi võrratus ilmne. Olgu $a \neq o$ ja $b \neq o$. Iga $\alpha \in \mathbb{C}$ korral kehtib võrratus

$$|\alpha a - b|^2 \geq 0$$

Kasutades skalaarkorrutise omadusi, saame

$$\begin{aligned} |\alpha a - b|^2 &= (\alpha a - b|\alpha a - b) \\ &= \alpha\alpha^*(a|a) - \alpha(a|b) - \alpha^*(b|a) + (b|b) \geq 0 \end{aligned}$$

Nüüd võtame

$$\alpha = \frac{(a|b)^*}{(a|a)}$$

Saame

$$\begin{aligned} &\alpha\alpha^*(a|a) - \alpha(a|b) - \alpha^*(b|a) + (b|b) = \\ &\quad = \frac{(a|b)^*(a|b)}{(a|a)(a|a)}(a|a) - \frac{(a|b)^*}{(a|a)}(a|b) - \frac{(a|b)}{(a|a)}(a|b)^* + (b|b) \end{aligned}$$

[8] Augustin Louis Cauchy (1789–1857), prantsuse matemaatik.
Karl Hermann Schwarz (1843–1921), saksa matemaatik.

$$= -\frac{|(a|b)|^2}{(a|a)} + (b|b) \geq 0$$

Korrutame saadud võrratust *positiivse* arvuga $(a|a)$. Tulemuseks saame

$$\begin{aligned} (a|a)(b|b) - |(a|b)|^2 \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad |(a|b)|^2 \leq |a|^2|b|^2 \\ &\Longrightarrow \quad |(a|b)| \leq |a||b| \end{aligned} \qquad \square$$

Näide 7.12 (Cauchy-Schwarzi võrratus aritmeetilises vektorruumis)**.** Kui

$$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{ja} \quad b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$$

siis on Cauchy-Schwarzi võrratus

$$|\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n| \leq \sqrt{|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2}\sqrt{|\beta_1|^2 + \cdots + |\beta_n|^2}$$

Näide 7.13 (Cauchy-Schwarzi võrratus funktsiooniruumis)**.** Olgu $f, g \in C[a, b]$. Siis on Cauchy-Schwarzi võrratus

$$\left| \int_a^b f(x) g^*(x)\, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\, dx}$$

Vektoritevaheline nurk

Olgu V unitaarne vektorruum. Olgu $V \ni a \neq o$ ja $V \ni b \neq o$. Vektorite a ja b vaheline nurk φ defineeritakse valemiga

$$\cos\varphi \doteq \frac{(a|b)}{|a||b|}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Märkus 7.14. Selle definitsiooni korrektsus on ilmselt garanteeritud Cauchy-Schwarzi võrratusega.

7.5. Kolmnurga võrratus

Teoreem 7.15. *Olgu V unitaarne vektorruum. Siis*

$$|a+b| \le |a| + |b| \qquad \forall a, b \in V$$

Tõestus. Kasutades Cauchy-Schwarzi võrratust, arvutame

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b|a+b) = (a|a) + (a|b) + (b|a) + (b|b) \\
&= (a|a) + (a|b) + (a|b)^* + (b|b) \\
&= (a|a) + 2\,\mathrm{re}(a|b) + (b|b) \\
&\le (a|a) + 2|\,\mathrm{re}(a|b)| + (b|b) \\
&\le (a|a) + 2|(a|b)| + (b|b) \\
&\le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\
&= (|a|+|b|)^2 \quad \Longrightarrow \quad |a+b| \le |a| + |b|
\end{aligned}$$

□

Näide 7.16 (kolmnurga võrratus aritmeetilises vektorruumis)**.** Olgu

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{ja} \quad b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$$

Siis on kolmnurga võrratus

$$\begin{aligned}
\sqrt{|\alpha_1+\beta_1|^2 + \cdots + |\alpha_n+\beta_n|^2} \le& \sqrt{|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2} \\
&+ \sqrt{|\beta_1|^2 + \cdots + |\beta_n|^2}
\end{aligned}$$

Näide 7.17 (kolmnurga võrratus funktsiooniruumis)**.** Kui $f, g \in C[a,b]$, siis on kolmnurga võrratus

$$\sqrt{\int_a^b |f(x)+g(x)|^2\,dx} \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx}$$

7.6. Ortogonaalsus ja ristbaas

Ortogonaalsus

Öeldakse, et unitaarse vektorruumi V vektorid $a, b \in V$ on *ortogonaalsed* ehk *risti*, kui $(a|b) = 0$. VS-i nimetatakse *ortogonaalseks*, kui süsteemi iga kaks *erinevat* vektorit on ortogonaalsed. VS-i nimetatakse *ortonormeerituks*, kui

1) ta on ortogonaalne,
2) süsteemi vektorid on ühikvektorid, s.t *normeeritud*.

Näide 7.18. Nullvektor on ortogonaalne unitaarse vektorruumi iga vektoriga, kaasa arvatud iseendaga.

Teoreem 7.19. *Ortogonaalne VS, mis ei sisalda nullvektorit, on lineaarselt sõltumatu.*

Tõestus. Olgu VS $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ortogonaalne, s.t

$$(a_i|a_j) = 0 \qquad \forall\, i \neq j$$

Peame näitama, et

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = o \quad \Longrightarrow \quad 0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 162 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Arvutame

$$\begin{aligned} 0 &= (o|a_j) = (\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n|a_j) \\ &= \alpha_1(a_1|a_j) + \cdots + \alpha_j(a_j|a_j) + \cdots + \alpha_n(a_n|a_j) \\ &= \alpha_j(a_j|a_j) \end{aligned}$$

Et $a_j \neq o$, siis $(a_j|a_j) \neq 0$. Järelikult $\alpha_j = o$ $(j = 1, \ldots, n)$. □

Ristbaas

Unitaarse vektorruumi baasi, mis on ortogonaalne, nimetatakse *ortogonaalbaasiks*. Unitaarse vektorruumi *ortonormeeritud* baasi nimetatakse ka *ristbaasiks*. Ristbaasi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ korral

$$(e_i|e_j) = \delta_{ij}$$

Teoreem 7.20. *Unitaarse ruumi ortogonaalne moodustajate süsteem, mis ei sisalda nullvektorit, on baas.*

Tõestus. Järeldub teoreemist 7.19. □

Teoreem 7.21. *Unitaarse vektorruumi ortonormeeritud moodustajate süsteem on ristbaas.*

Teoreem 7.22. *Olgu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ unitaarse vektorruumi V ristbaas. Siis kehtib arenduse*

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \in V$$

jaoks $\alpha_i = (a|e_i)$.

Tõestus. Tõepoolest, arvutame

$$\begin{aligned}(a|e_i) &= (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n|e_i)\\ &= (\alpha_1 e_1|e_i) + \cdots + (\alpha_i e_i|e_i) + \cdots + (\alpha_n e_n|e_i)\\ &= \alpha_1(e_1|e_i) + \cdots + \alpha_i(e_i|e_i) + \cdots + \alpha_n(e_n|e_i)\\ &= \alpha_i(e_i|e_i) = \alpha_i|e_i|^2 = \alpha_i\end{aligned}$$

mis tõestabki võrduse. □

7.7. Baasi ortogonaalimine

Lemma 7.23. *Olgu $\{v_1,\ldots,v_n\}$ ortonormaalne VS unitaarses vektorruumis V. Siis on iga vektori u korral vektor*

$$u' \doteq u - \sum_{i=1}^{n}(u|v_i)v_i$$

ortogonaalne iga vektoriga v_i $(i = 1,\ldots,n)$.

Tõestus. Arvutame vektori u' skalaarkorrutise vektoriga v_j

$$\begin{aligned}(u'|v_j) &= (u|v_j) - \sum_{i=1}^{n}(u|v_i)(v_i|v_j)\\ &= (u|v_j) - \sum_{i=1}^{n}(u|v_i)\delta_{ij}\\ &= (u|v_j) - (u|v_j) = 0\end{aligned}$$

□

Koduleht
Tiitelleht
Lk 164 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Grami-Schmidti ortogonaalimismeetod

Olgu $\{u_1, \ldots, u_n\}$ unitaarse vektorruumi V baas. Siis lineaarse sõltumatuse tõttu ilmselt $u_i \neq o$ ning $|u_i| > 0$ iga i korral. Näitame, kuidas konstrueerida ortonormeeritud baasi $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Olgu $v_1 \doteq u_1/|u_1|$. Lemma 9.2 põhjal on vektor

$$u'_2 \doteq u_2 - (u_2|v_1)v_1$$

ortogonaalne vektoriga v_1. Võttes $v_2 \doteq u'_2/|u'_2|$, saame ortonormaalse vektorisüsteemi $\{v_1, v_2\}$. Edasi näeme, et vektor

$$u'_3 \doteq u_3 - (u_3|v_1)v_1 - (u_3|v_2)v_2$$

on ortogonaalne vektoritega v_1 ja v_2. Võttes $v_3 \doteq u'_3/|u'_3|$, saame ortonormaalse süsteemi $\{v_1, v_2, v_3\}$. Nii jätkates saamegi ortonormeeritud süsteemi $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Selle süsteemi iga vektor on vektorite $u_1, \ldots, u_n$ lineaarkombinatsioon.

Kuna ortonormeeritud vektorisüsteem on lineaarselt sõltumatu, siis on $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vektorruumi V ortonormeeritud baas.

Ülalkirjeldatud vektorisüsteemi ortogonaalimismeetodit nimetatakse *Grami-Schmidti* [9] *ortogonaalimismeetodiks*.

Näide 7.24. Ortonormeerida vektorisüsteem

$$u_1 = (1, 1, 0), \qquad u_2 = (2, 1, 0), \qquad u_3 = (1, 1, 1)$$

[9] Jørgen Pedersen Gram (1850–1916), taani matemaatik.
Erhardt Schmidt (1876–1959), saksa matemaatik.

Lahendus. Vektorisüsteem $\{u_1, u_2, u_3\}$ on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baas (veenduda). Arvutame

$$|u_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

Vektorisüsteem $\{v_1\}$ moodustab ilmselt ortonormeeritud süsteemi ja me võime kasutada lemmat 9.2

$$\begin{aligned} u_2' &= u_2 - (u_2|v_1)v_1 = (2,1,0) - \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(1,-1,0)}{2} \end{aligned}$$

Nüüd arvutame

$$\begin{aligned} |u_2'| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad v_2 &= \frac{u_2'}{|u_2'|} = \sqrt{2} \cdot \frac{(1,-1,0)}{2} \\ &= \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Vektorisüsteem $\{v_1, v_2\}$ moodustab ilmselt ortonormeeritud süsteemi ja me võime kasutada lemmat 9.2

$$\begin{aligned} u_3' &= u_3 - (u_3|v_1)v_1 - (u_3|v_2)v_2 \\ &= (1,1,1) - \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \\ &\quad - \frac{1\cdot 1 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 166 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

$$= (0,0,1) - (0,0,0) = (0,0,1)$$

Lõpuks arvutame

$$|u_3'| = \sqrt{1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad v_3 = \frac{u_3'}{|u_3'|} = (0,0,1)$$

Seega $\mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathbb{R}^3$ ortonormeeritud baas on

$$v_1 = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, \qquad v_2 = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}, \qquad v_3 = (0,0,1)$$

Need baasivektorid rahuldavad seoseid $(v_i|v_j) = \delta_{ij}$ (veenduda).

7.8. Ülesanded

7.8.1 Olgu

$$a = (1,2,4), \quad b = (2,-3,5), \quad c = (4,2,-3) \qquad \in \mathbb{R}^3$$

Leida

$$(a|b), \quad (a|c), \quad (b|c), \quad (a+b|c), \quad |a|, \quad |b||c|$$

ning normeerida a, b ja c.

7.8.2 Olgu

$$f(t) = t+2, \quad g(t) = 3t-2, \quad h(t) = t^2 - 2t - 3$$

Defineerime $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Arvutada

$$(f|g), \quad (f|h), \quad |f|, \quad |g|$$

Normeerida f ja g.

7.8.3 Kontrollida skalaarkorrutise omadusi aritmeetilises vektorruumis.

7.8.4 Kontrollida skalaarkorrutise omadusi funktsiooniruumis.

7.8.5 Kontrollida Cauchy-Schwarzi ja kolmnurga võrratust ülesandes **7.8.1** antud vektorite korral.

7.8.6 Kontrollida Cauchy-Schwarzi ja kolmnurga võrratust ülesandes **7.8.2** antud funktsioonide korral.

7.8.7 Tõestada rööpküliku reegel

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$$

7.8.8 Leida $(a|b)$, kui $|a| = 4$, $|b| = 12$ ja $|a-b| = 10$.

7.8.9 Leida $|a-b|$, kui $|a| = 23$, $|b| = 11$ ja $|a+b| = 20$.

7.8.10 Leida $|a+b|$, kui $|a| = 19$, $|b| = 13$ ja $|a-b| = 22$.

7.8.11 Olgu

$$a = (1, 2, 3, -1, 2), \quad b = (2, 4, 7, 2, -1) \quad \in \mathbb{R}^5$$

Leida alamruumi $(\mathrm{Lin}\{a, b\})^\perp$ baas.

7.8.12 Koosnegu VS S vektorruumi $\mathbb{R}^4$ järgmistest vektoritest:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0, -1), \quad & v_2 &= (1, 2, 1, 3) \\ v_3 &= (1, 1, -9, 2), \quad & v_4 &= (16, -13, 1, 3) \end{aligned}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 168 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näidata, et S on vektorruumi $\mathbb{R}^4$ ortogonaalne baas. Leida vektori $a = (1, 2, 3, 4)$ koordinaadid baasis S. Kontrollida arendust.

7.8.13 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi $\mathbb{R}^4$ järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 1, 2, 4), \quad u_3 = (1, 2, -4, -3)$$

Leida $\operatorname{Lin} S$ ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.14 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi $\mathbb{R}^4$ järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (1, 2, 2, -1), \quad u_2 = (1, 1, -5, 3), \quad u_3 = (3, 2, 8, -7)$$

Leida $\operatorname{Lin} S$ ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.15 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi $\mathbb{R}^4$ järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (1, 1, -1, 2), \quad u_2 = (5, 8, -2, -3), \quad u_3 = (3, 9, 3, 8)$$

Leida $\operatorname{Lin} S$ ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.16 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi $\mathbb{R}^4$ järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (1, 1, -1, -1), \quad u_2 = (3, 2, 0, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1, 0)$$

Leida $\operatorname{Lin} S$ ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.17 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi $\mathbb{R}^4$ järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (2, 1, 3, -1), \quad u_2 = (7, 4, 3, -3)$$

$$u_3 = (1, 1, -6, 0), \quad u_4 = (5, 7, 7, 8)$$

Leida $\operatorname{Lin} S$ ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.18 Ortonormeerida polünoomisüsteem $\{1, x, x^2, x^3\}$ lõigul $[0, 1]$. Kontrollida valikuliselt tulemuse ortonormeeritust.

7.8.19 Ortonormeerida ülesandes **7.8.2** antud polünoomisüsteem lõigul $[0, 1]$. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

8. Maatriksi omaväärtused ja omavektorid

8.1. Omaväärtuse ja omavektori mõiste

Omaväärtusülesanne

Olgu A n-järku ruutmaatriks. Maatriksvõrrandit

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq o$$

nimetatakse *omaväärtusülesandeks*. Arvu λ nimetatakse maatriksi A *omaväärtuseks* ja (aritmeetrilist) veeruvektorit $v \neq o$ nimetatakse (omaväärtusele λ vastavaks) *omavektoriks*. Võrrandi $Av = \lambda v$ lahendiruumi E_λ nimetatakse omaväärtusele λ vastavaks *omaruumiks*. Omaruumi E_λ mõõdet nimetatakse omaväärtuse λ *geomeetriliseks kordsuseks*.

Lause 8.1. *Kui v on omaväärtusele λ vastav omavektor, siis on αv samuti omaväärtusele λ vastav omavektor.*

Tõestus. Tõepoolest, korrutades võrrandit $Av = \lambda v$ vasakult arvuga α, saame

$$\alpha A v = \alpha \lambda v \quad \Longrightarrow \quad (A\alpha)v = A(\alpha v) = \lambda(\alpha v) \qquad \square$$

Karakteristlik võrrand

Omaväärtusülesande võib kirjutada kujul

$$(A - \lambda I)v = o, \qquad v \neq o$$

See on homogeenne LVS vektori v komponentide määramiseks. Mittetriviaalne lahend leidub parajasti siis, kui

$$|A - \lambda I| = 0$$

Kerge on näha, et $|A - \lambda I|$ on polünoom λ suhtes, mille järk võrdub maatriksi A järguga. Seda polünoomi nimetatakse maatriksi A *karakteristlikuks polünoomiks*. Võrrandit $|A - \lambda I| = 0$ nimetatakse maatriksi A *karakteristlikuks võrrandiks*. Maatriksi A omaväärtusteks on ilmselt karakteristliku polünoomi juured. Juurte arv võrdub ruutmaatriksi A järguga, need võivad olla kompleksarvulised ja korduda. Karakteristliku polünoomi juure kordsust nimetatakse omaväärtuse *algebraliseks kordsuseks*. Maatriksi A kõigi omaväärtuste hulka nimetatakse maatriksi A *spektriks*.

8.2. Omaväärtuste ja omavektorite omadusi

Olgu maatriksi A karakteristliku polünoomi juured $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, viimased võivad olla kompleksarvulised ja korduda. Siis

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n \\ &= (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

Siit järeldub, et $a_n = (-1)^n$ ning

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = a_0 = \det A$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr} A$$

Seega saame omaväärtuste järgmised kaks tähtsat omadust:

1) omaväärtuste korrutis võrdub maatriksi determinandiga,
2) omaväärtuste summa võrdub maatriksi jäljega.

Esimesest omadusest järeldub, et maatriks on regulaarne parajasti siis, kui tema omaväärtused erinevad nullist. Teisiti öeldes, maatriks on singulaarne parajasti siis, kui üks tema omaväärtustest võrdub nulliga.

Omavektorite lineaarne sõltumatus

Teoreem 8.2. *Erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on lineaarselt sõltumatud.*

Tõestus. Olgu vektorid $x_1, \dots, x_k$ maatriksi A *erinevatele* omaväärtustele $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vastavad omavektorid. Siis

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \qquad i = 1, \dots, k \tag{1}$$

Oletame vastuväiteliselt, et VS $x_1, \dots, x_k$ on lineaarselt sõltuv. Olgu r $(< k)$ suurim selline täisarv, mille korral VS $x_1, \dots, x_r$ on lineaarselt sõltumatu. Siis VS $x_1, \dots, x_{r+1}$ on lineaarselt sõltuv. Siis peab leiduma nullvektoriga võrduv *mittetriviaalne* LK

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{r+1} x_{r+1}}_{\text{mittetriviaalne LK}} = 0 \tag{2}$$

Korrutades vasakult maatriksiga A ja kasutades (1), saame

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1} x_{r+1} = 0 \tag{3}$$

Korrutades (2) arvuga λ_{r+1} ja lahutades tulemuse seosest (3), saame

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) x_1 + \cdots + a_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) x_r = 0$$

Kuna VS $x_1, \ldots, x_r$ on lineaarselt sõltumatu ja omaväärtused on erinevad, siis

$$a_1 = \cdots = a_r = 0$$

Seosest (2) järeldub nüüd $\alpha_{r+1} x_{r+1} = 0$. Et $x_{r+1} \neq 0$, peab $\alpha_{r+1} = 0$. Saime vastuolu eeldusega, et vähemalt üks kordajatest α_i erineb nullist. $\square$

Sarnaste maatriksite omaväärtused ja omavektorid

Teoreem 8.3. *Olgu $B \doteq P^{-1}AP$. Siis on maatriksitel A ja B ühesugused omaväärtused. Kui x on maatriksi A mingile omaväärtusele vastav omavektor, siis on $P^{-1}x$ maatriksi B samale omaväärtusele vastav omavektor.*

Tõestus. Olgu x maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor. Siis $Ax = \lambda x$. Korrutades seda võrrandit vasakult maatriksiga P^{-1}, saame

$$\begin{aligned} P^{-1}Ax = \lambda P^{-1}x \quad &\Longrightarrow \quad P^{-1}AIx = \lambda P^{-1}x \\ &\Longrightarrow \quad P^{-1}APP^{-1}x = \lambda P^{-1}x \\ &\Longrightarrow \quad B(P^{-1}x) = \lambda(P^{-1}x) \end{aligned}$$

Seega on λ samuti maatriksi B omaväärtus ja vastav omavektor on $P^{-1}x$. $\square$

Diagonaalmaatriksi omaväärtused ja omavektorid

Diagonaalmaatriksi omaväärtusteks on selle maatriksi peadiagonaalil asetsevad elemendid. Omavektoriteks on standardbaasi vektorid.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 174 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Hermiitilise maatriksi omaväärtused ja omavektorid

Teoreem 8.4. *Hermiitilise maatriksi omaväärtused on reaalsed.*

Tõestus. Olgu λ hermiitilise maatriksi A omaväärtus ning x vastav omavektor. Siis

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

Seda võrrandit hermiitiliselt konjugeerides arvestusega $A^\dagger = A$, saame

$$x^\dagger A = \lambda^* x^\dagger \tag{2}$$

Korrutame (1) vasakult vektoriga $x^\dagger$ ja võrrandit (2) paremalt vektoriga x. Saame

$$x^\dagger A x = \lambda x^\dagger x, \qquad x^\dagger A x = \lambda^* x^\dagger x$$

Võrreldes viimaseid seoseid, saame

$$(\lambda - \lambda^*) x^\dagger x = 0$$

Aga $x \neq 0$ tõttu peab $x^\dagger x \neq 0$. Seega $\lambda = \lambda^*$. □

Teoreem 8.5. *Hermiitilise maatriksi erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed.*

Tõestus. Olgu x_1 ja x_2 erinevatele omaväärtustele λ_1 ja λ_2 vastavad omavektorid. Siis

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \tag{1}$$
$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 \tag{2}$$

Korrutame võrrandit (1) vasakult vektoriga $x_2^\dagger$ ja võrrandit (2) vasakult vektoriga $x_1^\dagger$

$$x_2^\dagger A x_1 = \lambda_1 x_2^\dagger x_1 \tag{3}$$
$$x_1^\dagger A x_2 = \lambda_2 x_1^\dagger x_2 \tag{4}$$

Konjugeerides võrrandit (3) arvestusega $A^\dagger = A$ ja $\lambda^* = \lambda$, saame

$$x_1^\dagger A x_2 = \lambda_1^* x_1^\dagger x_2 = \lambda_1 x_1^\dagger x_2 \tag{5}$$

Võrreldes valemeid (4) ja (5), saame

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x_1^\dagger x_2 = 0$$

Et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, siis peab skalaarkorrutis $(x_2|x_1) = x_1^\dagger x_2 = 0$. □

Teoreem 8.6. *Olgu A reaalne sümmeetriline maatriks. Siis*

1) *on maatriksi A omaväärtused reaalsed,*
2) *on maatriksi A erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid ortogonaalsed.*

Tõestus. Kuna reaalne sümmeetriline maatriks on hermiitiline, siis järelduvad need väited eelnenud teoreemidest. □

8.3. Omaväärtuste ja omavektorite leidmine

Näide 8.7. Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

omaväärtused ja omaruumide normeeritud baasivektorid.

Lahendus. Karakteristlik võrrand on

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)-4$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6) = 0$$

Seega on omaväärtused $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 6$. Mõlema omaväärtuse algebraline kordsus on 1.

Omaväärtusele $\lambda_1 = 1$ vastavad omavektorid leiame võrrandist

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ehk

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -x_2$$

mis annab omavektoriks

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |v_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Viimane vektor on omaväärtusele 1 vastava omaruumi normeeritud baasivektor. Omaväärtuse 1 geomeetriline kordsus on 1.

Omaväärtusele $\lambda_2 = 6$ vastavad omavektorid leiame võrrandist

$$\begin{pmatrix} 5-6 & 4 \\ 1 & 2-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 177 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

ehk

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 4x_2$$

mis annab omavektoriks

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |v_2| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Viimane on omaväärtusele 6 vastava omaruumi normeeritud baasivektor. Omaväärtuse 6 geomeetriline kordsus on 1.

Näide 8.8. Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

omaväärtused ja omaruumide normeeritud baasivektorid.

Lahendus. Kõigepealt leiame omaväärtused. Karakteristlik polünoom on

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} -R_3 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda - 2)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda - 2)[(4-\lambda)(6-\lambda) - 8] \\
&= -(\lambda - 2)[\lambda^2 - 10\lambda + 16] = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 8)
\end{aligned}
$$

Näeme, et juure $\lambda_1 = 2$ algebraline kordsus on 2 ja juure $\lambda_1 = 8$ algebraline kordsus on 1.

Omaväärtusele $\lambda_1 = 2$ vastava omaruumi leiame LVS-ist

$$
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Saame vaid ühe võrrandi

$$
x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3
$$

LVS-i vabade tundmatute arv on $3 - 1 = 2$. Vabadeks tundmatuteks võtame x_2 ja x_3. Lahendite fundamentaalsüsteem koosneb kahest vektorist, s.t omaväärtuse $\lambda_1 = 2$ geomeetriline kordsus on 2. Omaväärtusele $\lambda_1 = 2$ vastava omaruumi baasivektorid on

$$
u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Omaväärtusele 2 vastava omaruumi normeeritud baasivektorid on

$$\frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Omaväärtusele $\lambda_2 = 8$ vastava omaruumi leiame LVS-ist

$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Lahendame Gaussi meetodil

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot\frac{1}{2}\\ \\ \\ \end{matrix} &\sim \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +R_1\\ +R_1\end{matrix}\\
&\sim \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +R_2\end{matrix}\\
&\sim \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-1)\\ \cdot\frac{-1}{3}\\ \\ \end{matrix}\\
&\sim \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

LVS-i maatriks on nüüd treppkujul. Vastav LVS on

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \implies x_1 = x_2 = x_3$$

LVS-i vabade tundmatute arv on $3 - 2 = 1$. Lahendite fundamentaalsüsteem koosneb antud juhul ühest vektorist, s.t omaväärtuse $\lambda_2 = 8$ geomeetriline kordsus on 1. Selleks vektoriks võtame

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies |u_3| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\implies \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Viimane vektor on omaväärtusele 8 vastava omaruumi normeeritud baasivektor.

8.4. Ülesanded

Leida alljärgnevate maatriksite omaväärtused ja omaruumide normeeritud baasivektorid, samuti omaväärtuste algebralised ja geomeetrilised kordsused. Kontrollida omaväärtusvõrrandi lahendit.

8.4.1 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ **8.4.2** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **8.4.3** $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **8.4.4** $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

8.4.5 $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ **8.4.6** $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **8.4.7** $\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 6\\ 3 & 6 & 6\end{pmatrix}$

8.4.8 $\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ **8.4.9** $\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ **8.4.10** $\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

8.4.11 $\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ **8.4.12** $\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ 2 & 6 & -2\\ -2 & -2 & 10\end{pmatrix}$

8.4.13 $\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}$

8.4.14 $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

8.4.15 $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

8.4.16 $\begin{pmatrix}4 & 3 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & -3 & -2\end{pmatrix}$

8.4.17 Tõestada, et diagonaalmaatriksi omaväärtusteks on selle maatriksi peadiagonaalil asetsevad elemendid. Omavektoriteks on standardbaasi vektorid.

8.4.18 Tõestada teist ja kolmandat järku ruutmaatriksite korral, et omaväärtuste summa võrdub maatriksi jäljega.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 183 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

9. Diagonaalimine

9.1. Diagonaaluvuse tunnused

Ruutmaatriksit nimetatakse *diagonaalmaatriksiks*, kui tema väljaspool peadiagonaali asetsevad elemendid on nullid. Öeldakse, et ruutmaatriks A on *digonaaluv*, kui leidub selline pööratav maatriks P, et $P^{-1}AP$ on diagonaalmaatriks.

Teoreem 9.1. *Kui A on n-järku ruutmaatriks, siis järgmised tingimused on samaväärsed.*

1. *Maatriks A on diagonaaluv.*
2. *Maatriksil A leidub n lineaarselt sõltumatut omavektorit.*
3. *Maatriksi A omaväärtuste algebralised kordsused võrduvad nende geomeetriliste kordsustega.*

Teoreem 9.2. *Kui n-järku ruutmaatriksil A leidub n vektorist koosnev lineaarselt sõltumatu omavektorite süsteem ja P on maatriksi A omavektoritest moodustatud maatriks, siis*

$$D = P^{-1}AP$$

on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil asetsevad maatriksi A omaväärtused. Maatriksi P veergudeks on maatriksi A omavektorid.

Tõestus. Olgu $x_1, \ldots, x_n$ maatriksi A lineaarselt sõltumatud omavektorid, mis vastavad omaväärtustele $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Siis

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Maatriks P on

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Kuna maatriksi P veeruvektorid on lineaarselt sõltumatud, siis on ta regulaarne ja P^{-1} eksisteerib. Arvutame

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 & \cdots & Ax_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_n x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD \end{aligned}$$

Korrutades vasakult maatriksiga P^{-1}, saame

$$P^{-1}AP = P^{-1}PD = D \qquad \square$$

Näide 9.3. Diagonaalida maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Omaväärtused on $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 6$ ning omavektorid on

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonaaliv maatriks on

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kerge on näha, et

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Seega

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Näide 9.4. Diagonaalida maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi A karakteristlik võrrand on

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

Maatriksi A omaväärtused on seega

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \text{ja} \quad \lambda_3 = 5$$

Omaväärtuse 1 algebraline kordsus on 2 ja omaväärtuse 5 algebraline kordsus on 1. Omaväärtusele 1 vastavad omavektorid leiame LVS-ist $(A-I)u=0$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad x_1+2x_2+x_3=0$$

Viimase LVS-i vabade tundmatute arv on $3-1=2$, s.t omaväärtuse 1 geomeetriline kordsus on samuti 2. Vabadeks tundmatuteks võtame näiteks x_2 ja x_3. Omaväärtusele 1 vastava omaruumi baasivektorid on selle LVS-i lahendite fundamentaalsüsteem

$$u_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Omaväärtusele 5 vastavad omavektorid leiame LVS-ist $(A-5I)u=0$

$$\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Lahendame Gaussi meetodil. LVS-i maatriks on

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix} R_1\leftrightarrow R_2 &\sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ +3R_1\\ -R_1\end{array}\\ &\sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ +R_2\end{array}\end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LVS-i saame kujul

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3$$

Viimase LVS-i vabade tundmatute arv on 1, s.t omaväärtuse 5 geomeetriline kordsus on samuti 1. Omaväärtusele 5 vastava omaruumi baasivektoriks võtame vektori

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maatriks A diagonaalub seega maatriksiga

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ning

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 188 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

9.2. Ortogonaalne diagonaalimine

Ortogonaalmaatriks

Ruutmaatriksit P nimetatakse *ortogonaalmaatriksiks*, kui

$$P^{-1} = P^T$$

Teoreem 9.5. *Ruutmaatriks on ortogonaalmaatriks parajasti siis, kui tema reavektorid (veeruvektorid) moodustavad ortonormeeritud süsteemi.*

Tõestus. Olgu P ruutmaatriks reavektoritega $p_1, \dots, p_n$. Tema transponeeritud maatriksi P^T veeruvektorid on samuti $p_1, \dots, p_n$. Maatriksite korrutamise reegli kohaselt

$$(PP^T)_{ij} = (p_i|p_j)$$

See valem ütlebki, et

$$P^T = P^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (p_i|p_j) = \delta_{ij} \qquad \square$$

Ortogonaalne diagonaaluvus

Öeldakse, et ruutmaatriks A on *ortogonaalselt diagonaaluv*, kui leidub ortogonaalmaatriks P nii, et maatriks

$$D = P^{-1}AP = P^TAP$$

on diagonaalmaatriks.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 189 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Ortogonaalse diagonaaluvuse tunnused

Teoreem 9.6. *Olgu A n-järku ruutmaatriks. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:*

1) maatriks A on ortogonaalselt diagonaaluv,
2) maatriksil A leidub n ortonormaalset omavektorit,
3) maatriks A on sümmeetriline.

Tuletame meelde, et teoreemi 8.6 järgi on sümmeetrilise maatriksi omaväärtused reaalsed ning erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed.

Sümmeetrilise maatriksi ortogonaalne diagonaalimine

Olgu A sümmeetriline maatriks. Ortogonaalne diagonaalimine koosneb järgmistest sammudest:

1) leia maatriksi A iga omaruumi baas,
2) ortonormeeri need baasid,
3) moodusta maatriks P, mille veergudeks on eespool leitud ortonormeeritud baasivektorid,
4) moodusta diagonaalmaatriks D, mille peadiagonaalil asetsevad maatriksi A omaväärtused. Kahtluse korral kontrolli tulemust valemiga $D = P^T AP$.

Näide 9.7. Leida ortogonaalmaatriks, mis diagonaalib maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Omaväärtused ja omavektorid leidsime näites 8.8. Omaväärtuse $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ algebraline kordsus on 2 ja omaväärtuse $\lambda_3 = 8$ algebraline kordsus on 1. Vastavad geomeetrilised kordsused on samasugused, seega on maatriks A diagonaaluv.

Omaväärtusele $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ vastav omaruum on kahemõõtmeline ning selle baasivektorid on

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortogonaalime need vektorid alapunktis 7.7 näidatud viisil. Arvutame

$$|u_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Seega

$$v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on normeeritud vektor. Edasi arvutame

$$(u_2|v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2|u_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(-1)(-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Siis saame

$$u_2' = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 191 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Leiame

$$|u_2'| = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[(-1)(-1)+(-1)(-1)+2\cdot 2]} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Normeerime vektori u_2'

$$v_2 = \frac{u_2'}{|u_2'|} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Vektorid v_1, v_2 moodustavad ortonormeeritud süsteemi, omaväärtusele $\lambda_1 = 2$ vastava omaruumi ristbaasi.

Omaväärtusele $\lambda_3 = 8$ vastav omaruum on ühemõõtmeline ja selle baasivektor on

$$u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Normeerides saame

$$v_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{u_3}{\sqrt{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Vektorid v_1, v_2, v_3 moodustavad *ortonormeeritud* süsteemi. Maatriksit A diagonaaliv ortogonaalmaatriks on seega

$$P = \begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Maatriksi A diagonaalkuju on

$$D = P^T A P = \cdots = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Kontrollimine jääb lugejale iseseisvaks harjutuseks.

9.3. Ruutvormi ortogonaalne diagonaalimine

Ruutvorm ja selle maatriks

Ruutvormiks nimetatakse avaldist

$$Q(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Lahti kirjutatult

$$\begin{aligned} Q(x) \doteq \quad & a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_nx_n \end{aligned}$$

Defineerime vektori x ja *ruutvormi maatriksi* A järgmiselt:

$$x \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Siis võime kirjutada

$$Q(x) = x^T A x$$

Üldsust kitsendamata võib eeldada, et $a_{ij} = a_{ji}$, s.t maatriks A on sümmeetriline.

Näide 9.8. Näiteks ruutvormi

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_1 + 3x_2^2$$

saab esitada kujul

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 3x_2^2$$

Mõlemad ruutvormid on võrdsed järgmisega:

$$x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$$

Ruutvormi ortogonaalne diagonaalimine

Kui ruutvormi maatriks on diagonaalmaatriks, siis öeldakse, et ruutvorm on diagonaalkujul ehk kanoonilisel kujul.

Olgu ruutvormi maatriks A sümmeetriline. Teatavasti on sümmeetriline maatriks ortogonaalselt diagonaaluv, s.t leidub ortogonaalmaatriks P nii, et

$$D = P^{-1}AP = P^{T}AP$$

on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil asetsevad maatriksi A omaväärtused. Siis

$$A = PDP^{-1} = PDP^{T}$$

ning asendades viimase seose ruutvormi $Q(x) = x^{T}Ax$ avaldisse, saame

$$Q(x) = x^{T}PDP^{T}x$$

Defineerime vektori y seosega

$$y = P^{T}x = P^{-1}x \quad \Longrightarrow \quad y^{T} = x^{T}P$$

Ruutvormi $Q(x)$ saame nüüd esitada diagonaalkujul

$$Q(x) = y^{T}Dy = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \doteq Q'(y)$$

Näide 9.9. Diagonaalida teist järku joon

$$Q(x) = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128$$

Lahendus. Olgu

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{pmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{pmatrix}$$

Siis $Q(x) = x^T Ax$. Maatriksi A omaväärtused on $\lambda_1 = 2$ ja $\lambda_2 = 32$ ning vastavad normeeritud omavektorid on (veenduda)

$$v_1 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad v_2 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maatriksit A diagonaaliv ortogonaalmaatriks on

$$P = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P^T = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ortogonaalteisenduse valem on

$$y = P^T x = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lahti kirjutatult

$$\begin{cases} y_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ y_2 = (-x_1 + x_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

Ruutvormi $Q(x)$ diagonaalkuju on

$$Q(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + 32y_2^2$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 196 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Uutes muutujates on teist järku joone võrrand kujul

$$2y_1^2 + 32y_2^2 = 128$$

Pärast lihtsustamist saame

$$\frac{y_1^2}{8^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1$$

Tulemus ütleb, et tegemist on ellipsiga, mille pikem pooltelg on 8 ja lühem pooltelg on 2.

Näide 9.10. Diagonaalida ruutvorm

$$Q(x) = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

Lahendus. Ruutvormi maatriks on ilmselt

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mille diagonaalisime näites 9.7 ortogonaalmaatriksiga

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Maatriksi A diagonaalkuju on

$$D = P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Toome sisse uue vektori $y = P^T x$, s.t

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lahti kirjutatult saame valemid

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_3 \\ y_3 = \quad \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \end{cases}$$

Ruutvormi $Q(x)$ diagonaalkuju on seega

$$Q(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 8y_3^2$$

9.4. Ülesanded

Diagonaalida ortogonaalmaatriksiga järgmised maatriksid ja ruutvormid. Kontrollida tulemust.

9.4.1 $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ **9.4.2** $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **9.4.3** $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

9.4.4 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **9.4.5** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 17 \end{pmatrix}$

9.4.6 $4x_1^2 + 8x_1x_2 - 11x_2^2$

9.4.7 $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2$

9.4.8 $Q(x) \doteq 5x_1^2 + 12x_1x_2$

9.4.9 $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$

9.4.10 $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$

9.4.11 $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

9.4.12 $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3$

9.4.13 $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$

9.4.14 $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

9.4.15 $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

10. Maatriksfunktsioonid

10.1. Maatriksi astmed

Olgu A ruutmaatriks ja k *positiivne* täisarv. Maatriksi A aste A^k defineeritakse valemiga

$$A^k \doteq \underbrace{AA\cdots A}_{\text{k korda}}$$

Kui A on regulaarne maatriks, siis leidub pöördmaatriks A^{-1}. Maatriks A^{-k} defineeritakse valemiga

$$A^{-k} \doteq (A^{-1})^k = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{k korda}}$$

Kui $k = 0$, siis $A^0 \doteq I$.

10.2. Maatrikspolünoom

Avaldist kujul

$$p(A) \doteq b_0 I + b_1 A + \cdots + b_k A^k$$

kus k on mittenegatiivne täisarv, nimetatakse *maatrikspolünoomiks*. Samuti öeldakse, et maatrikspolünoom $p(A)$ on polünoomi

$$p(x) \doteq b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k$$

väärtus kohal $x = A$.

10.3. Cayley-Hamiltoni teoreem

Definitsioon 10.1. Defineerime n-järku ruutmaatriksi A *karakteristliku polünoomi* valemiga

$$p(\lambda) \doteq |A - \lambda I| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$$

Teoreem 10.2 (Cayley-Hamiltoni [10] teoreem)**.** *Iga ruutmaatriks A on oma karakteristliku polünoomi juur, s.t*

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n = 0$$

Tõestus. Olgu $B \doteq \operatorname{adj}(A - \lambda I)$ maatriksi $A - \lambda I$ alamdeterminantide maatriksi transponeering (*adjungeeritud* maatriks). Siis maatriksi B elemendid on $(n-1)$-astme polünoomid ning

$$B = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}$$

Teoreemi 2.28 abil näeme, et

$$(A - \lambda I)B = |A - \lambda I| I$$

Seega

$$(A - \lambda I)(B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n)I$$

Parameetri λ erinevate astmete ees seisvaid kordajaid võrreldes saame seosed

$$AB_0 = a_0 I$$

[10] Artur Cayley (1821-1895), inglise matemaatik
William Rowan Hamilton (1805-1865), inglise matemaatik

$$\begin{aligned} AB_1 - B_0 &= a_1 I \\ AB_2 - B_1 &= a_2 I \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I \\ -B_{n-1} &= a_n I \end{aligned}$$

Korrutame nüüd neid seoseid vasakult vastavalt maatriksitega I, A, A^2, ..., A^n ning liidame. Tulemuseks saame

$$0 = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n \qquad \square$$

Märkus 10.3. Kui $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ on maatriksi A karakteristliku polünoomi $p(\lambda)$ juured, siis võib maatriksi A karakteristliku polünoomi teatavasti esitada kujul

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

ning Cayley-Hamiltoni valemi saab esitada kujul

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_n I) = 0$$

Näide 10.4. Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

karakteristlik polünoom ja kontrollida Cayley-Hamiltoni teoreemi.

Esimene lahendus. Maatriksi A karakteristlik polünoom on

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$$

Vastavalt Cayley-Hamiltoni teoreemile peab olema

$$A^2 + A - 6I = 0$$

Tõepoolest, arvutame

$$\begin{aligned} A^2 + A - 6I &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6+0-6 & -2+2+0 \\ -3+3+0 & 7-1-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teine lahendus. Maatriksi A karakteristliku polünoomi juured on

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -3$$

Seega

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

Vastavalt Cayley-Hamiltoni teoreemile peab olema

$$(A-2I)(A+3I)=0$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned}(A-2I)(A+3I) &= \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-6+6 & -4+4\\ 9-9 & 6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

10.4. Maatriksastmeread

Olgu antud (koonduv) astmerida

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \qquad |x|<r \quad \text{(koonduvusraadius)}$$

Sellele reale seame vastavussse *maatriksastmerea*

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k A^k$$

ning ütleme, et $f(A)$ on funktsiooni $f(x)$ väärtus kohal $x=A$.

Seega arendame (kui võimalik) funktsiooni $f(x)$ koonduvasse astmeritta, seejärel asendame muutuja x maatriksiga A.

Näide 10.5. Mõnele elementaarfunktsioonile vastavad maatriksread

$$e^A \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

$$\sin A \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos A \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(I+A) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{n+1}}{n+1}$$

$$(I-A)^{-1} \doteq \frac{1}{I-A} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Teoreem 10.6. *Maatriksrida $f(A)$ koondub parajasti siis, kui vastav astmerida $f(\lambda)$ koondub maatriksi A iga omaväärtuse λ korral.*

Teoreem 10.7. *Kui $f(A)$ koondub ning λ on A omaväärtus, siis $f(\lambda)$ on maatriksi $f(A)$ omaväärtus.*

10.5. Diagonaaluva maatriksi astmed

Olgu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diagonaaluva n-järku ruutmaatriksi A omaväärtused. Siis leidub maatriks P^{-1} nii, et

$$A = PDP^{-1}$$

kus

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil asetsevad maatriksi A omaväärtused. Arvutame

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

Samamoodi saame iga positiivse täisarvu k jaoks

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Maatriks D^k on diagonaalmaatriks elementidega

$$(D^k)_{ij} = \lambda_i^k \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Näide 10.8. Leida A^{50}, kui

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 4$$

ning omavektorid on

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seega on diagonaaliv maatriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ning

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{50} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{50}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & 4^{50} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{50} & -2^{50} \\ 4^{50} & 4^{50} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{50}+4^{50} & -2^{50}+4^{50} \\ -2^{50}+4^{50} & 2^{50}+4^{50} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

10.6. Diagonaaluva maatriksi funktsioonid

Nüüd arvutame

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P D^k P^{-1}$$

$$= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k\right) P^{-1} = Pf(D)P^{-1}$$

Diagonaalmaatriksi $f(D)$ elemendid arvutame valemiga

$$(f(D))_{ij} = f(\lambda_i)\delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Näide 10.9. Leida e^A, kui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 2$$

ning vastavad omavektorid on

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diagonaaliv maatriks on

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Seega

$$e^A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e - e^2 & 2e - 2e^2 \\ -e + e^2 & -e + 2e^2 \end{pmatrix}$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 208 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

10.7. Maatriksfunktsiooni arvutamine

Kui maatriks pole diagonaaluv, siis ei sobi eespool kirjeldatud meetod maatriksfunktsiooni arvutamiseks. Sellisel juhul võib kasutada Cayley-Hamiltoni teoreemi

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + (-1)^n A^n = 0$$

Maatriksi A^n avaldame nüüd eelnevate astmete lineaarkombinatsioonina

$$(-1)^n A^n = -a_0 I - a_1 A - a_2 A^2 - \cdots - a_{n-1} A^{n-1}$$

Funktsioonile $f(x)$ vastavas maatriksastmereas

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i A^i$$

seda valemit korduvalt kasutades, saame

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1} \doteq \phi(A)$$

kus $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ on (tundmatud) skalaarsed kordajad, n on aga maatriksi A järk. Kui maatriksi A omaväärtuse λ_i algebraline kordsus on k_i, siis kordajate α_i määramiseks on LVS

$$\begin{cases} f(\lambda_i) = \phi(\lambda_i) \\ f'(\lambda_i) = \phi'(\lambda_i) \\ f''(\lambda_i) = \phi''(\lambda_i) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(k_i-1)}(\lambda_i) = \phi^{(k_i-1)}(\lambda_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Näide 10.10. Leida e^A, kui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 2$$

Maatriksi järk on 2 ning maatriksit e^A võib otsida kujul

$$f(A) = e^A = \phi(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A \quad \Longrightarrow \quad \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

Arvutame

$$\begin{cases} e^{\lambda_1} = \phi(\lambda_1) \\ e^{\lambda_2} = \phi(\lambda_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e = \alpha_0 + \alpha_1 \\ e^2 = \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 2e - e^2 \\ \alpha_1 = e^2 - e \end{cases}$$

Seega

$$\begin{aligned} e^A &= (2e - e^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^2 - e) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e - e^2 & 2e - 2e^2 \\ -e + e^2 & -e + 2e^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vastus langeb kokku ülesande 10.9 vastusega.

Näide 10.11. Leida $\ln A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -2$$

Karakteristliku polünoomi aste on 2 ning maatriksit $\ln A$ võib otsida kujul

$$f(A) = \ln A = \phi(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A \quad \Longrightarrow \quad \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

Arvutame

$$\begin{cases} \ln \lambda_1 = \phi(\lambda_1) \\ \ln \lambda_2 = \phi(\lambda_2) \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} \ln 2 = \alpha_0 + 2\alpha_1 \\ \ln(-2) = \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = (\ln 2 + \ln(-2))/2 \\ \alpha_1 = (\ln 2 - \ln(-2))/4 \end{cases}$$

Seega

$$\begin{aligned} \ln A &= \frac{\ln 2 + \ln(-2)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\ln 2 - \ln(-2)}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \ln 2 + 3\ln(-2) & 3\ln 2 - 3\ln(-2) \\ \ln 2 - \ln(-2) & 3\ln 2 + \ln(-2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kompleksarvu $\ln(-2)$ (peaväärtuse) arvutame järgmiselt:

$$\ln(-2) = \ln(2e^{i\pi}) = \ln 2 + \ln e^{i\pi} = \ln 2 + i\pi \ln e = \ln 2 + i\pi$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 211 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 10.12. Leida $\cos A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = 4$. Arvutame

$$\begin{aligned} \cos A = \phi(A) &= \alpha_0 I + \alpha_1 A = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_0 + 2\alpha_1 & 4\alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda \end{aligned}$$

Tundmatud kordajad α_0 ja α_1 arvutame järgmiselt:

$$\begin{cases} \cos\lambda_1 = \phi(\lambda_1) \\ \cos\lambda_2 = \phi(\lambda_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos 0 = \alpha_0 + 0\alpha_1 \\ \cos 4 = \alpha_0 + 4\alpha_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \cos 0 = 1 \\ \alpha_1 = (\cos 4 - 1)/4 \end{cases}$$

Tulemuseks saame

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(\cos 4 + 1) & 4(\cos 4 - 1) \\ \cos 4 - 1 & 2(\cos 4 + 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,173178 & -1,653644 \\ -0,413411 & 0,173178 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Näide 10.13. Leida e^{At}, kui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi $B = At$ omaväärtused on

$$\lambda_1 = 2t \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -4t$$

Maatriksi B järk on 2 ning maatriksit e^B võib otsida kujul

$$e^B = \phi(B) = \alpha_0 I + \alpha_1 B \quad \Longrightarrow \quad \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

Arvutame

$$\begin{cases} e^{\lambda_1} = \phi(\lambda_1) \\ e^{\lambda_2} = \phi(\lambda_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2t \\ e^{-4t} = \alpha_0 - \alpha_1 \cdot 4t \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{3}(2e^{2t} - e^{-4t}) \\ \alpha_1 = \frac{1}{6t}(e^{2t} - e^{-4t}) \end{cases}$$

Seega

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{3}(2e^{2t} - e^{-4t}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6t}(e^{2t} - e^{-4t})t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Näide 10.14. Leida e^{-A}, kui

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on (veenduda)

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{ja} \quad \lambda_{2,3} = 2$$

Omaväärtuse 2 algebraline kordsus on 2. Maatriksit e^{-A} võime otsida kujul

$$e^{-A} = \phi(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 \quad \Longrightarrow \quad \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2$$

Kordajad $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ arvutame järgmiselt:

$$\begin{cases} e^{-\lambda_1} = \phi(\lambda_1) \\ e^{-\lambda_2} = \phi(\lambda_2) \\ (e^{-\lambda})'|_{\lambda=\lambda_2} = \phi'(\lambda_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{-1} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ e^{-2} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \\ -e^{-2} = \alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -5e^{-2} + 4e^{-1} \\ \alpha_1 = 7e^{-2} - 4e^{-1} \\ \alpha_2 = -2e^{-2} + e^{-1} \end{cases}$$

Nüüd saame arvutada

$$e^{-A} = (-5e^{-2} + 4e^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (7e^{-2} - 4e^{-1}) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ (-2e^{-2} + e^{-1}) \begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \\ 10 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} -2e^{-2}+e^{-1} & e^{-2}-e^{-1} & e^{-2} \\ -2e^{-2} & e^{-2} & e^{-2} \\ -6e^{-2}+2e^{-1} & 2e^{-2}-2e^{-1} & 3e^{-2} \end{pmatrix}
$$

10.8. Ülesanded

Leida maatriksi karakteristlik polünoom ja kontrollida Cayley-Hamiltoni teoreemi 10.2.

10.8.1 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **10.8.2** $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$ **10.8.3** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

10.8.4 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Arvutada maatriksfunktsioonid.

10.8.5 $A^{100}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ **10.8.6** $A^{50}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

10.8.7 $3A^{57} + 2A^{18}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

10.8.8 $\sin A, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

10.8.9 $\sin A, \quad A = \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$

10.8.10 $\cos A, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

10.8.11 $\sin At, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10.8.12 $\ln A, \quad \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

10.8.13 $\sqrt{A}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ **10.8.14** $\sqrt{A}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Järgnevates ülesannetes arvutada e^A.

10.8.15 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **10.8.16** $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ **10.8.17** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

10.8.18 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

Arvutada e^{At}.

10.8.19 $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ **10.8.20** $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ **10.8.21** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

10.8.22 $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ **10.8.23** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **10.8.24** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -8 \end{pmatrix}$

10.8.25 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ **10.8.26** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **10.8.27** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10.8.28 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **10.8.29** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

11. Lineaarkujutused

Olgu V ja U vektorruumid üle ühe ja sama korpuse $\mathbb{K}$.

11.1. Lineaarkujutuse mõiste

Kujutust $F\colon V \to U$ nimetatakse *lineaarkujutuseks* e *lineaarteisenduseks*, kui

1) $F(a+b) = F(a) + F(b) \quad \forall\, a, b \in V$ (aditiivsus),
2) $F(\lambda a) = \lambda F(a) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, a \in V$ (homogeensus).

Kõigi lineaarkujutuste hulka vektorruumist V vektorruumi U kordajatega korpusest $\mathbb{K}$ tähistatakse $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$. Kui $U = V$, siis nimetatakse lineaarkujutust F ka *lineaarseks operaatoriks* e *lineaaroperaatoriks*.

Võttes $\lambda = 0$ tingimuses 2), saame $F(0) = 0$. Seega kujutab lineaarkujutus nullvektori nullvektoriks.

Ülaltoodud kaks tingimust võib kokku võtta ühe tingimusena

$$F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall\, a, b \in V$$

Siit järeldub (matemaatilise induktsiooniga) üldisem omadus skalaaride $\alpha_i \in \mathbb{K}$ ja vektorite $a_i \in V$ korral

$$F(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k) = \alpha_1 F(a_1) + \cdots + \alpha_k F(a_k)$$

Teiste sõnadega, lineaarkujutus teisendab (kujutab) lineaarkombinatsiooni lineaarkombinatsiooniks.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 218 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 11.1. Defineerime kujutuse $F\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ valemiga

$$F\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-2\beta\\ 3\alpha\end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$$

Näitame, et F on lineaarkujutus.
Lahendus. Olgu

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2, \qquad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$$

Arvutame

$$\begin{aligned} F\left[\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}\right] &= F\begin{pmatrix}\alpha+\alpha_1\\ \beta+\beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\alpha+\alpha_1)+(\beta+\beta_1)\\ (\alpha+\alpha_1)-2(\beta+\beta_1)\\ 3(\alpha+\alpha_1)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-2\beta\\ 3\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_1-2\beta_1\\ 3\alpha_1\end{pmatrix}\\ &= F\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + F\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Niisamuti

$$F\left[\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right] = F\begin{pmatrix}\lambda\alpha\\ \lambda\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\alpha+\lambda\beta\\ \lambda\alpha-2\lambda\beta\\ 3\lambda\alpha\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-2\beta\\ 3\alpha\end{pmatrix} = \lambda F\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Tulemus ütleb, et F on lineaarkujutus.

Näide 11.2 (projekteerimine)**.** Defineerime projekteeriva kujutuse $F\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ valemiga

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha,\beta,0)$$

Näitame, et F on lineaarkujutus.
Lahendus. Olgu

$$a = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \quad \in \mathbb{K}^3 \qquad \text{ja} \qquad b = (\beta_1,\beta_2,\beta_3) \quad \in \mathbb{K}^3$$

Arvutame

$$\begin{aligned} F(a+b) &= F(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3) = (\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,0) \\ &= (\alpha_1,\alpha_2,0) + (\beta_1,\beta_2,0) = F(a)+F(b) \\ F(\lambda a) &= F(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\lambda\alpha_3) = (\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,0) = \lambda(\alpha_1,\alpha_2,0) \\ &= \lambda F(a) \end{aligned}$$

Seega on F lineaarne.

Näide 11.3 (diferentseerimine)**.** Olgu $C^\infty(a,b)$ vahemikus (a,b) siledate funktsioonide ruum. Defineerime kujutuse $D\colon C^\infty(a,b) \to C^\infty(a,b)$ valemiga

$$D(f) = f', \qquad f \in C^\infty(a,b)$$

Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (cf)' = cf'$$

Seega

$$D(f+g) = D(f) + D(g), \qquad D(cf) = cD(f)$$

mis ütleb, et kujutus D on lineaarne.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 220 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 11.4 (integreerimine)**.** Olgu $C(a,b)$ vahemikus (a,b) pidevate funktsioonide ruum. Defineerime kujutuse $J\colon C(a,b)\to\mathbb{R}$ valemiga

$$J(f)=\int_a^b f(x)dx,\qquad f\in C(a,b)$$

Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$$

Seega

$$J(f+g)=J(f)+J(g),\qquad J(cf)=cJ(f)$$

mis ütleb, et kujutus J on lineaarne.

Näide 11.5 (nullkujutus)**.** Defineerime kujutuse $F\colon V\to U$ valemiga $F(a)=0$ iga vektori $a\in V$ korral. Siis

$$F(a+b)=0=0+0=F(a)+F(b),\qquad F(\alpha a)=0=\alpha 0=\alpha F(a)$$

mis ütleb, et F on lineaarne. Seda kujutust nimetatakse *nullkujutuseks* ja tähistatakse 0.

Näide 11.6 (samasuskujutus)**.** Defineerime kujutuse $\mathrm{id}_V\colon V\to V$ valemiga $\mathrm{id}_V\,a=a$ iga $a\in V$ korral. Siis

$$\mathrm{id}_V(a+b)=a+b=\mathrm{id}_V(a)+\mathrm{id}_V(b),\quad \mathrm{id}_V(\alpha a)=\alpha a=\alpha\,\mathrm{id}_V(a)$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 221 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

mis ütleb, et kujutus id_V on lineaarne. Seda kujutust nimetatakse vektorruumi V *samasuskujutuseks*. Samasuskujutust tähistatakse ka 1_V.

Näide 11.7 (maatrikskujutus)**.** Olgu $A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$. Defineerime *maatrikskujutuse* $L_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ valemiga

$$L_A(v) = Av \qquad \forall\, v \in \mathbb{K}^n$$

Siis järeldub maatriksarvutuse seadustest, et

$$L_A(a+b) = A(a+b) = Aa + Ab = L_A(a) + L_A(b)$$
$$L_A(\lambda a) = A(\lambda a) = (A\lambda)a = (\lambda A)a = \lambda(Aa) = \lambda L_A(a)$$

mis ütleb, et maatrikskujutus L_A on lineaarkujutus.

Maatrikskujutust nimetatakse sageli ka *maatriksteisenduseks* ja *maatriksi toimeks*.

Kujutuste võrdsus

Kui $F(v) = G(v)$ iga $v \in V$ korral, siis ütleme, et kujutused F ja G on *võrdsed* ning kirjutame $F = G$.

Teoreem 11.8. *Olgu $F : V \to U$ ja $G\colon V \to U$ lineaarkujutused ning*

$$V = \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_n\}$$

Kui $F(v_i) = G(v_i)$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral, siis $F = G$.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 222 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Tõestus. Esitades $v \in V$ kujul

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

arvutame

$$\begin{aligned} F(v) &= F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) \\ &= \alpha_1 G(v_1) + \cdots + \alpha_n G(v_n) \\ &= G(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = G(v) \end{aligned}$$

□

Teoreem 11.9. *Olgu vektorisüsteem $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vektorruumi V baas ning olgu $u_1, \ldots, u_n \in U$ suvalised vektorid. Siis leidub parajasti üks lineaarkujutus $F\colon V \to U$ nii, et*

$$F(v_1) = u_1, \quad \ldots \quad , F(v_n) = u_n$$

Tõestus. Tõestuse jagame kolmeks sammuks.

1. Defineerime kujutuse $F\colon V \to U$ nii, et $F(v_i) = u_i$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral.
2. Näitame, et F on lineaarne.
3. Näitame, et F on üheselt määratud.

1. Olgu $v \in V$. Kuna $\{v_1, \ldots, v_n\}$ on V baas, siis leiduvad *üheselt* skalaarid $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ nii, et

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Defineerime kujutuse $F\colon V \to U$ valemiga

$$F(v) \doteq \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Kuna skalaarid α_i on üheselt määratud, on kujutus F korrektselt defineeritud. Nüüd paneme tähele, et

$$v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$$

Seega

$$F(v_i) = 0u_1 + \cdots + 1u_i + \cdots + 0u_n = u_i$$

Tõestuse esimene samm on läbitud.

2. Olgu

$$a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \text{ja} \quad b = \beta_1 v_1 + \cdots \beta_n v_n$$

Siis ilmselt

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n$$

ning iga $\lambda \in \mathbb{K}$ jaoks

$$\lambda a = \lambda\alpha_1 v_1 + \cdots + \lambda\alpha_n v_n$$

Vastavalt kujutuse F definitsioonile

$$F(a) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, \quad F(b) = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$$

Seega

$$\begin{aligned} F(a+b) &= (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)u_n \\ &= (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n) \\ &= F(a) + F(b) \\ F(\lambda a) &= \lambda(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \lambda F(a) \end{aligned}$$

Tulemus ütleb, et kujutus F on lineaarne.

3. Olgu $G\colon V \to V$ veel üks lineaarne kujutus ning $G(v_i) = u_i$, $i = 1, \dots, n$. Olgu

$$a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Siis

$$\begin{aligned} G(a) &= G(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 G(v_1) + \cdots + \alpha_n G(v_n) \\ &= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = F(a) \end{aligned}$$

Kuna $G(a) = F(a)$ iga $a \in V$ korral, peab $G = F$. Seega on kujutus F üheselt määratud. $\square$

Näide 11.10. Lineaarkujutus $F : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ on antud valemitega

$$\begin{cases} F(1,2) = (-2,1) \\ F(-1,1) = (5,-7) \end{cases}$$

Leida $F(\alpha, \beta)$.

Lahendus. Tähistame

$$e_1 = (1,0), \qquad e_2 = (0,1)$$

Siis

$$\begin{aligned} (1,2) &= e_1 + 2e_2, \qquad & (-2,1) &= -2e_1 + e_2 \\ (-1,1) &= -e_1 + e_2, \qquad & (5,-7) &= 5e_1 - 7e_2 \end{aligned}$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 225 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

ning

$$\begin{cases} F(e_1+2e_2) = -2e_1+e_2 \\ F(-e_1+e_2) = 5e_1-7e_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F(e_1)+2F(e_2) = -2e_1+e_2 \\ -F(e_1)+F(e_2) = 5e_1-7e_2 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} F(e_1) = -4e_1+5e_2 \\ F(e_2) = e_1-2e_2 \end{cases}$$

Nüüd saame arvutada

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta) &= F(\alpha e_1+\beta e_2) = \alpha F(e_1)+\beta F(e_2) \\ &= \alpha(-4e_1+5e_2)+\beta(e_1-2e_2) \\ &= (-4\alpha+\beta)e_1+(5\alpha-2\beta)e_2 = (-4\alpha+\beta, 5\alpha-2\beta) \end{aligned}$$

Lause 11.11. *Olgu lineaarkujutus $F\colon V\to U$ selline, et kujutisvektorid $F(v_1),\dots,F(v_k)$ on lineaarselt sõltumatud. Siis on ka originaalid $v_1,\dots,v_k\in V$ lineaarselt sõltumatud.*

Tõestus. Oletame, et leiduvad skalaarid $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ nii, et

$$\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_k v_k = 0$$

Siis

$$0 = F(0) = F(\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_k v_k) = \lambda_1 F(v_1)+\cdots+\lambda_k F(v_k)$$

Kuna $F(v_1),\dots,F(v_k)$ on lineaarselt sõltumatud, peab $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$. Tulemus ütleb, et $v_1,\dots,v_k$ on lineaarselt sõltumatud. $\square$

11.2. Lineaarkujutuse tuum ja muutumispiirkond

Lineaarkujutuse tuum

Lineaarkujutuse $F\colon V\to U$ *tuum* $\operatorname{Ker} F \subseteq V$ koosneb vektorruumi V sellistest vektoritest, mis kujutuvad vektorruumi U nullvektoriks

$$\operatorname{Ker} F \doteq \{v\in V \,|\, F(v)=0\}$$

Lineaarkujutuse muutumispiirkond

Lineaarkujutuse $F\colon V\to U$ *muutumispiirkond* $\operatorname{Im} F\subseteq U$ koosneb vektorruumi U sellistest vektoritest, millel leiduvad originaalid vektorruumis V

$$\operatorname{Im} F \doteq F(V) \doteq \{F(v)\in U \,|\, v\in V\}$$

Lause 11.12. *Olgu $F\colon V\to U$ lineaarkujutus. Siis*

1) $\operatorname{Ker} F$ *on vektorruumi V alamruum,*
2) $\operatorname{Im} F$ *on vektorruumi U alamruum.*

Tõestus. 1) Kuna $F(0)=0$, siis $0\in\operatorname{Ker} F$. Olgu $a,b\in\operatorname{Ker} F$ ning $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$. Siis $F(a)=0$ ja $F(b)=0$ ning

$$F(\alpha a+\beta b)=\alpha F(a)+\beta F(b)=\alpha 0+\beta 0=0+0=0$$
$$\Longrightarrow\quad \alpha a+\beta b\in\operatorname{Ker} F$$

2) Kuna $F(0)=0$, siis $0\in\operatorname{Im} F$. Olgu $u,u'\in\operatorname{Im} F$ ning $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$. Siis leiduvad $v,v'\in V$ nii, et $F(v)=u$ ja $F(v')=u'$ ning

$$F(\alpha v+\beta v')=\alpha F(v)+\beta F(v')=\alpha u+\beta u' \quad \in\operatorname{Im} F$$ □

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 227 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Lause 11.13. *Olgu* $\{v_1, \dots, v_m\}$ *vektorruumi* V *moodustajate süsteem ning olgu* $F\colon V \to U$ *lineaarkujutus. Siis* $\{F(v_1), \dots, F(v_m)\}$ *on ruumi* $\operatorname{Im} F$ *moodustajate süsteem.*

Tõestus. Olgu $u \in \operatorname{Im} F$. Siis leidub $v \in V$ nii, et $F(v) = u$. Kuna $\{v_1, \dots, v_m\}$ on vektorruumi V moodustajate süsteem, siis leiduvad $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ nii, et

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

Seega

$$u = F(v) = F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_m F(v_m)$$

Tulemus ütlebki, et VS $\{F(v_1), \dots, F(v_m)\}$ on ruumi $\operatorname{Im} F$ moodustajate süsteem. □

Näide 11.14 (maatrikskujutuse tuum ja muutumispiirkond)**.** Vaatleme näiteks 3×4-järku maatriksit A ning vektorruumi $\mathbb{K}^4$ standardbaasi

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maatriksit A võib teatavasti vaadelda lineaarkujutusena $L_A : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$. Ilmselt

$$L_A e_1 = Ae_1, \quad L_A e_2 = Ae_2, \quad L_A e_3 = Ae_3, \quad L_A e_4 = Ae_4 \quad \in \operatorname{Im} L_A$$

Kuna standardbaasi vektorid on vektorruumi $\mathbb{K}^4$ moodustajate süsteem, siis on vektorisüsteem $\{Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4\}$ lineaarkujutuse L_A muutumispiirkonna $\operatorname{Im} L_A$ moodustajate süsteem. Kuid vektorid Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4 on parajasti maatriksi A veeruvektorid

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad Ae_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad Ae_4 = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Maatriksi A veeruvektorite lineaarset katet tähistasime $\operatorname{Col} A$. Maatriksi A veeruvektorid on seega vektorruumi $\operatorname{Col} A$ moodustajad. Seega ühtib $\operatorname{Im} L_A$ parajasti maatriksi A veeruvektorite lineaarse kattega, s.t $\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Col} A$.

Maatrikskujutuse L_A tuum koosneb sellistest vektoritest $v \in \mathbb{K}^4$, mis rahuldavad tingimust $Av = 0$, s.t $\operatorname{Ker} L_A$ on homogeense LVS-i $Av = 0$ lahendiruum. Seda ruumi nimetatakse maatriksi A *nullruumiks* ja sageli tähistatakse $\operatorname{Ker} A \doteq \operatorname{Ker} L_A$.

Näide 11.15. Defineerime kujutuse $F : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ valemiga $F(A) \doteq A - A^T$ iga ruutmaatriksi $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ korral. Siis F on lineaarkujutus (veenduda) ning

a) $\operatorname{Ker} F$ elementideks on parajasti kõik sümmeetrilised maatriksid,
b) $\operatorname{Im} F$ elementideks on parajasti kõik antisümmeetrilised maatriksid.

Tõestus. Lause a) tõestamiseks paneme tähele, et $A \in \operatorname{Ker} F$ parajasti siis, kui

$$F(A) = A - A^T = 0 \quad \Longrightarrow \quad A^T = A$$

Lause b) tõestamiseks paneme tähele, et vektorruum $\operatorname{Im} F$ koosneb maatriksitest $F(A)$, kus $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, kusjuures iga selline maatriks $F(A)$ on antisümmeetriline, sest

$$F(A)^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -F(A)$$

Teisest küljest, kui Q on antisümmeetriline maatriks (s.t $Q^T = -Q$), siis $Q \in \operatorname{Im} F$. Tõepoolest,

$$Q = \frac{1}{2}(Q + Q) = \left(\frac{1}{2}Q\right) - \left(\frac{1}{2}Q\right)^T = F\left(\frac{1}{2}Q\right) \qquad \square$$

11.3. Lineaarkujutuse astak

Lineaarkujutuse $F\colon V \to U$ *astakuks* nimetatakse vektorruumi $\operatorname{Im} F$ mõõdet.

Teoreem 11.16. *Olgu V lõplikumõõtmeline vektorruum ning olgu $F\colon V \to U$ lineaarkujutus. Siis*

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker} F) + \dim(\operatorname{Im} F)$$

Tõestus. Olgu $\dim(\operatorname{Ker} F) = r$ ning $\{w_1, \dots, w_r\}$ vektorruumi $\operatorname{Ker} F$ baas. Olgu $\dim(\operatorname{Im} F) = s$ ning $\{u_1, \dots, u_s\}$ vektorruumi $\operatorname{Im} F$ baas. Lausest 11.13 järeldub, et $\operatorname{Im} F$ on lõplikumõõtmeline. Kuna $u_j \in \operatorname{Im} F$, siis peavad leiduma vektorid $v_1, \dots, v_s \in V$ nii, et

$$F(v_1) = u_1, \quad \cdots \quad , F(v_s) = u_s$$

Me tõestame, et vektorisüsteem

$$B \doteq \{w_1, \dots, w_r, v_1, \cdots, v_s\}$$

on vektorruumi V baas, s.t

1) B on vektorruumi V moodustajate süsteem,
2) B on lineaarselt sõltumatu.

Kui 1) ja 2) on tõestatud, siis ilmselt

$$\dim V = r + s = \dim(\operatorname{Ker} F) + \dim(\operatorname{Im} F)$$

Tõestame 1). Olgu $v \in V$. Siis $F(v) \in \operatorname{Im} F$. Kuna vektorisüsteem $\{u_1, \dots, u_s\}$ on vektorruumi $\operatorname{Im} F$ baas, siis peavad leiduma sellised skalaarid $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ nii, et

$$F(v) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s$$

Olgu

$$\hat{v} \doteq \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s - v$$

Siis

$$\begin{aligned} F(\hat{v}) &= F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s - v) \\ &= \alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_s F(v_s) - F(v) \\ &= \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s - F(v) = 0 \end{aligned}$$

Seega $\hat{v} \in \operatorname{Ker} F$. Kuna $\{w_1, \dots, w_r\}$ on vektorruumi $\operatorname{Ker} F$ baas, siis peavad leiduma skalaarid $\beta_1, \dots, \beta_r$ nii, et

$$\hat{v} = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_r w_r = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s - v$$

Seega

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s - \beta_1 w_1 - \dots - \beta_r w_r$$

ning B on tõepoolest vektorruumi V moodustajate süsteem.

Tõestame 2). Olgu

$$x_1 w_1 + \cdots + x_r w_r + y_1 v_1 + \cdots + y_s v_s = 0 \tag{1}$$

kus $x_i, y_i \in \mathbb{K}$. Siis

$$\begin{aligned} 0 = F(0) &= F(x_1 w_1 + \cdots + x_r w_r + y_1 v_1 + \cdots + y_s v_s) \\ &= x_1 F(w_1) + \cdots + x_r F(w_r) + y_1 F(v_1) + \cdots + y_s F(v_s) \end{aligned} \tag{2}$$

Kuid $F(w_i) = 0$, sest $w_i \in \operatorname{Ker} F$, ning $F(v_j) = u_j$. Asendades valemisse (2), saame

$$y_1 u_1 + \cdots + y_s u_s = 0$$

millest vektorite u_j lineaarse sõltumatuse tõttu järelduvad $y_1 = \cdots = y_s = 0$. Need võrdused asendame nüüd omakorda valemisse (1). Siis saame

$$x_1 w_1 + \cdots + x_r w_r = 0$$

Kuna vektorid w_i on lineaarselt sõltumatud, siis $x_1 = \cdots = x_r = 0$. Seega on B lineaarselt sõltumatu. $\square$

Näide 11.17. Lineaarkujutus $F\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ on defineeritud valemiga

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, \\ &\qquad 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4) \end{aligned}$$

Leida

1) $\operatorname{Im} F$ baas ja mõõde,
2) $\operatorname{Ker} F$ baas ja mõõde

ning kontrollida teoreemi 11.16.

Lahendus. Kõigepealt leiame $\mathbb{K}^4$ standardbaasi vektorite kujutised

$$\begin{aligned} F(1,0,0,0) &= (1,2,3), \quad & F(0,1,0,0) &= -(1,2,3) \\ F(0,0,1,0) &= (1,3,4), \quad & F(0,0,0,1) &= (1,4,5) \end{aligned}$$

Nüüd kasutame lauset 11.13: ülaltoodud vektorid on ruumi $\operatorname{Im} F$ moodustajate süsteem. Moodustame koordinaatide maatriksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seega moodustavad vektorid $(1,2,3)$ ja $(0,1,1)$ vektorruumi $\operatorname{Im} F$ baasi ning $\dim \operatorname{Im} F = 2$.

Et leida $\dim \operatorname{Ker} F$, olgu $F(v) = 0$, kus $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Vabadeks tundmatuteks võtame x_2 ja x_4. Seega $\dim \operatorname{Ker} F = 2$. Leiame $\operatorname{Ker} F$ baasi. Selleks on ülaltoodud LVS-i lahendite fundamentaalsüsteem.

1. Olgu $x_2 = 1, x_4 = 0$, siis saame lahendivektoriks $(1, 1, 0, 0)$.
2. Olgu $x_2 = 0, x_4 = 1$, siis saame lahendivektoriks $(1, 0, -2, 1)$.

Vektorid $(1, 1, 0, 0)$ ja $(1, 0, -2, 1)$ moodustavadki $\operatorname{Ker} F$ baasi. Nüüd on kerge kontrollida teoreemi 11.16

$$\dim \operatorname{Im} F + \dim \operatorname{Ker} F = 2 + 2 = 4$$

11.4. Singulaarne ja regulaarne lineaarkujutus

Olgu $F : V \to U$ lineaarkujutus. Tuletame meelde, et $F(0) = 0$. Öeldakse, et F on *singulaarne*, kui leidub vektor $0 \neq v \in V$ nii, et $F(v) = 0$. Kui $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, siis nimetatakse lineaarkujutust F *regulaarseks* ehk *mittesingulaarseks*.

Teoreem 11.18. *Regulaarne lineaarkujutus kujutab lineaarselt sõltumatu vektorisüsteemi lineaarselt sõltumatuks vektorisüsteemiks.*

Tõestus. Olgu $F : V \to U$ regulaarne lineaarkujutus ning vektorid $v_1, \ldots, v_n \in V$ lineaarselt sõltumatud. Peame tõestama, et vektorid $F(v_1), \ldots, F(v_n) \in \operatorname{Im} F$ on samuti lineaarselt sõltumatud. Olgu

$$\alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = 0$$

kus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Kuna F on lineaarne, siis

$$F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in \operatorname{Ker} F$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 234 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Kuid F on regulaarne, s.t $\operatorname{Ker} F = \{0\}$. Seega

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

Kuna vektorid v_i on lineaarselt sõltumatud, peab $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Tulemus ütlebki, et vektorisüsteem $F(v_1), \ldots, F(v_n) \in \operatorname{Im} F$ on lineaarselt sõltumatu. □

11.5. Isomorfism

Pealekujutus, üksühene kujutus ja bijektiivne kujutus

Olgu $F\colon V \to U$ lineaarkujutus. Öeldakse, et

1) F on *üksühene* e *injektiivne*, kui võrdusest $F(a) = F(b)$ järeldub $a = b$,
2) F on *pealekujutus* e *sürjektiivne*, kui $\operatorname{Im} F = U$,
3) F on *bijektiivne*, kui ta on üksühene pealekujutus, s.t ta on injektiivne ja sürjektiivne.

Lause 11.19. *Lineaarkujutus on üksühene parajasti siis, kui ta on regulaarne.*

Tõestus. $\Longrightarrow$: Olgu lineaarkujutus $F\colon V \to U$ üksühene. Siis ilmselt $\operatorname{Ker} F = \{0\}$ ning seega on F regulaarne.

$\Longleftarrow$: Olgu F regulaarne ning $F(a) = F(b)$. Siis järeldub lineaarsusest, et

$$F(a-b) = F(a) - F(b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a - b = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

mis ütleb, et F on üksühene. □

Näide 11.20. Vaatleme lineaarteisendusi

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x_1, x_2, x_3) \doteq (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$
$$G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad G(x_1, x_2) \doteq (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1)$$

Näidata, et

1) F on pealekujutus, kuid ei ole üksühene,
2) G on üksühene, kuid ei ole pealekujutus.

Lahendus. 1) F ei ole üksühene, sest $(0, 0, 1) \in \operatorname{Ker} F$, kuid on pealekujutus, s.t $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^2$. Tõepoolest, olgu $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Peame näitama, et leidub $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ nii, et

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \end{cases}$$

2) G on üksühene, sest

$$\operatorname{Ker} G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \, x_1 + x_2 = x_1 - x_2 = 0\} = \{(0, 0)\}$$

s.t $\operatorname{Ker} G$ koosneb vaid nullvektorist. Kuid G ei ole pealekujutus. Näiteks puudub vektoril $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ originaal vektorruumis $\mathbb{R}^2$. Tõepoolest

$$(0, 0, 1) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1) \qquad \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Viimane süsteem on aga vasturääkiv (lahendid puuduvad). $\square$

Isomorfism

Öeldakse, et lineaarkujutus $F\colon V \to U$ on *isomorfism*, kui ta on bijektiivne. Kui leidub isomorfism $F\colon V \to U$, siis öeldakse, et vektorruumid V ja U on isomorfsed ning kirjutatakse $V \cong U$.

Näide 11.21 (samasusukujutus)**.** Samasuskujutus $1_V\colon V \to V$ on ismorfism iga vektorruumi V korral.

Näide 11.22 (transponeerimine)**.** Defineerime kujutuse

$$F\colon \ \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$$

valemiga $F(A) = A^T$. Kujutus F on lineaarsus järeldub teoreemist **??**. Näitame, et F on isomorfism ning seega

$$\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K}) \cong \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$$

Tõepoolest, F on ilmselt pealekujutus, sest iga maatriks on mingi maatriksi transponeeritud maatriks. Kujutus F on ilmselt ka üksühene, sest võrdusest $F(A) = A^T = 0$ järeldub $(A^T)^T = A = 0$. □

Näide 11.23 (koordinaatisomorfism)**.** Olgu $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ vektorruumi V baas. Vektori

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \tag{$*$}$$

koordinaatvektoriks baasis B nimetasime teatavasti üheveerulist maatriksit

$$C_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 237 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näitame, et kujutus $C_B\colon V \to \mathbb{K}^n$ on isomorfism. Seda kujutust nimetatakse *koordinaatisomorfismiks.*

Kujutuse C_B lineaarsus järeldub lausest 6.47. Kontrollime, et C_B on üksühene. Tõepoolest, olgu

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n, \qquad u = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n$$

kaks vektorit vektorruumis V. Võrdus $C_B(v) = C_B(u)$ tähendab, et

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, \cdots, n \quad \Longrightarrow \quad u = v$$

Jääb üle näidata, et C_B on pealekujutus. Olgu $x \doteq (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n$ mingi veeruvektor. Defineerime vektori $v \in V$ valemiga $(*)$. Siis ilmselt $x = C_B(v)$, st C_B on tõepoolest pealekujutus. $\square$

Teoreem 11.24 (isomorfismi kriteerium)**.** *Olgu V ja U lõplikumõõtmelised vektorruumid ning $F\colon V \to U$ lineaarkujutus. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:*

1) F on isomorfism,

2) kui $\{v_1, \ldots, v_n\}$ on vektorruumi V suvaline baas, siis vektorisüsteem $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ on vektorruumi U baas,

3) vektorruumis V leidub baas $\{v_1, \ldots, v_n\}$ nii, et vektorisüsteem $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ on vektorruumi U baas.

Tõestus. 1) $\Longrightarrow$ 2) Olgu $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorruumi V baas. Vaatleme võrdust

$$\alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$$

kus $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Kuna F on isomorfism, siis $\operatorname{Ker} F = \{0\}$. Seega

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

millest vektorite v_i lineaarse sõltumatuse tõttu järeldub, et $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Vektorisüsteem $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on seega lineaarselt sõltumatu.

Jääb üle näidata, et $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on vektorruumi U moodustajate süsteem. Olgu $u \in U$. Kuna F on pealekujutus, siis peab leiduma $v \in V$ nii, et $u = F(v)$. Kirjutades

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

saame

$$\begin{aligned} u = F(v) &= F(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n) \end{aligned}$$

mis ütleb, et $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on tõepoolest U moodustajate süsteem.

2) $\Longrightarrow$ 3) Ilmne.

3) $\Longrightarrow$ 1) Olgu $F(v) = 0$. Kirjutame

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Saame

$$0 = F(v) = F(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 239 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

$$= \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n)$$

millest tingimuse 3) tõttu järeldub $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Seega $v = 0$ ja $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, millest omakorda järeldub, et F on üksühene. Jääb üle näidata, et F on pealekujutus.

Olgu $u \in U$ suvaline vektor. Tingimusest 3) järeldub, et

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 F(v_1) + \cdots + \beta_n F(v_n) \\ &= F(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \end{aligned}$$

mis ütlebki, et F on pealekujutus. □

Tähelepanek 11.25. *Vektorruumide isomorfism kujutab baasi baasiks.*

Teoreem 11.26 (isomorfismi kriteerium)**.** *Olgu V ja U lõplikumõõtmelised vektorruumid. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:*

1) $V \cong U$
2) $\dim V = \dim U$

Tõestus. 1) $\Longrightarrow$ 2) Olgu $V \cong U$ ning $F\colon V \to U$ olgu isomorfism. Kui $\{v_1, \ldots, v_n\}$ on vektorruumi V baas, siis teoreemi 11.24 põhjal $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ on vektorruumi U baas. Seega

$$\dim V = n = \dim U$$

2) $\Longrightarrow$ 1) Olgu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vektorruumi V baas ja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ vektorruumi U baas. Teoreemi 11.9 põhjal leidub selline lineaarkujutus $F\colon V \to U$, et

$$F(v_i) = u_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Kuna $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ on baas, siis teoreemi 11.24 põhjal on F isomorfism. □

Koduleht
Tiitelleht
Lk 240 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Näide 11.27. Kuna
$$\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K}) \cong \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$$
siis on nendel ruumidel ühesugune mõõde
$$\dim \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K}) = \dim \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$$

Näide 11.28. Kuna $\dim \mathrm{Row}\, A = \dim \mathrm{Col}\, A$ (vt teoreemi 6.67), siis on need ruumid isomorfsed, s.t $\mathrm{Row}\, A \cong \mathrm{Col}\, A$.

Teoreem 11.29. *Olgu V ja U lõplikumõõtmelised ning $\dim V = \dim U$. Lineaarkujutus $F\colon V \to U$ on isomorfism parajasti siis, kui ta on regulaarne.*

Tõestus. $\Longrightarrow$: Kui F on isomorfism, siis on ta üksühene ja seega $\mathrm{Ker}\, F = \{0\}$, millest järaldub regulaarsus.

$\Longleftarrow$: Olgu F regulaarne. Siis on ta üksühene ning $\dim(\mathrm{Ker}\, F) = 0$. Teoreemist 11.16 järeldub, et
$$\dim U = \dim V = \dim(\mathrm{Im}\, F)$$
Siit järeldub eelneva teoreemi 11.26 põhjal, et $\mathrm{Im}\, F \cong U$. See tulemus ütleb, et F on ka pealekujutus. Kuna F on kokkuvõttes bijektiivne, on ta isomorfism. □

Isomorfismi omadusi

Vektorruumide isomorfism on *ekvivalentsirelatsioon*, s.t tal on järgmised omadused.

1. Refleksiivsus. $V \cong V$.
2. Sümmeetria. Kui $V \cong U$ siis $U \cong V$.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 241 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

3. Transitiivsus. Kui $V \cong U$ ja $U \cong W$, siis $V \cong W$.

Lõplikumõõtmeliste vektorruumide korral järelduvad need omadused kergesti teoreemi 11.26 abil.

11.6. Tehted lineaarkujutustega

Lineaarkujutuste kombineerimisega on võimalik saada uusi lineaarkujutusi ning hulk $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ osutub vektorruumiks üle $\mathbb{K}$.

Lineaarkujutuste liitmine ja korrutamine arvuga

Olgu $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Summa $F+G$ ja korrutis λF defineeritakse valemitega

$$(F+G)(v) \doteq F(v) + G(v), \qquad (\lambda F)(v) \doteq \lambda F(v) \qquad \forall\, v \in V$$

Lause 11.30. *Lineaarkorrutiste summa ja korrutis arvuga on samuti lineaarkujutused.*

Tõestus. Olgu $a, b \in V$. Arvutame

$$\begin{aligned}(F+G)(\alpha a + \beta b) &= F(\alpha a + \beta b) + G(\alpha a + \beta b)\\ &= \alpha F(a) + \beta F(b) + \alpha G(a) + \beta G(b)\\ &= \alpha[F(a) + G(a)] + \beta[F(b) + G(b)]\\ &= \alpha(F+G)(a) + \beta(F+G)(b)\end{aligned}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 242 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

ning

$$(\lambda F)(\alpha a+\beta b) = \lambda F(\alpha a+\beta b) = \lambda[\alpha F(a)+\beta F(b)]$$
$$= \alpha\lambda F(a)+\beta\lambda F(b) = \alpha(\lambda F)(a)+\beta(\lambda F)(b)$$

Tulemus ütleb, et $F+G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U)$ ja $\lambda F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U)$. □

Teoreem 11.31. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U)$ *on vektorruum üle* $\mathbb{K}$.

Tõestus. Vektorruumi aksioomide kontrolli jätame lugejale iseseisvaks ülesandeks. □

Teoreem 11.32. *Olgu V ja U lõplikumõõtmelised. Siis*

$$\dim[\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U)] = \dim V \cdot \dim U$$

Tõestus. Tõestuse esitame hiljem, vt teoreem 11.48 ning sellele järgnev järeldus. □

Lineaarkujutuste kompositsioon

Olgu $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U)$ ja $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U,W)$

$$V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W$$

Kompositsiooni $G\circ F\colon V \to W$ defineerime valemiga

$$(G\circ F)(v) \doteq G(F(v)) \qquad \forall\, v \in V$$

Märkus 11.33. Sageli kompositsiooni märki $\circ$ ei eksponeerita. Seega kirjutatakse $GF \doteq G\circ F$.

Lause 11.34. *Olgu* $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U)$ *ja* $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U,W)$*. Siis on* $G \circ F$ *samuti lineaarkujutus ning* $G \circ F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$

Tõestus. Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ning $a, b \in V$. Siis

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\alpha a + \beta b) &= G(F(\alpha a + \beta b)) = G(\alpha F(a) + \beta F(b)) \\ &= \alpha G(F(a)) + \beta G(F(b)) \\ &= \alpha (G \circ F)(a) + \beta (G \circ F)(b)\end{aligned}$$

Tulemus ütlebki, et $G \circ F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$. □

Teoreem 11.35 (kompositsiooni omadusi)**.** *Olgu* V, U, W *vektorruumid üle* $\mathbb{K}$ *ning olgu järgmised kujutused lineaarsed:*

$$F\colon V \to U, \quad F'\colon V \to U \quad \textit{ja} \quad G\colon U \to W, \quad G'\colon U \to W$$

Siis

1) $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$
2) $(G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F$
3) $\lambda(G \circ F) = (\lambda G) \circ F = G \circ (\lambda F), \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$

Tõestus. Nende valemite kontrolli jätame lugajale iseseisvaks ülesandeks. Kasutada kompositsiooni definitsiooni. □

Teoreem 11.36 (kompositsiooni omadusi)**.** *Olgu*

$$V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W \xrightarrow{H} Z$$

lineaarkujutused. Siis

1) $F \circ 1_V = F$ *ja* $1_U \circ F = F$
2) $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$

Tõestus. Nende valemite kontroll jääb iseseisvaks ülesandeks. Kasutada kompositsiooni definitsiooni. □

11.7. Pöördkujutus

Pöördkujutuse mõiste

Lineaarkujutuse $F\colon V \to U$ pöördkujutuseks nimetatakse kujutust $F^{-1}\colon U \to V$, mis rahuldab tingimusi $F^{-1} \circ F = 1_V$ ja $F \circ F^{-1} = 1_U$. Kujutust nimetatakse *pööratavaks*, kui tal leidub pöördkujutus.

Teoreem 11.37. *Bijektiivse lineaarkujutuse (isomorfismi) pöördkujutus on samuti lineaarne.*

Tõestus. Olgu $F\colon V \to U$ bijektiivne lineaarkujutus (isomorfism) ning $u, u' \in U$. Siis leiduvad üheselt määratud vektorid $v, v' \in V$ nii, et $F(v) = u$ ja $F(v') = u'$. Kuna F on lineaarne, siis

$$F(v + v') = F(v) + F(v') = u + u' \quad \text{ja} \quad F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda u$$

Kuna F^{-1} on pöördkujutus, siis

$$F^{-1}(u) = v, \quad F^{-1}(u') = v'$$
$$F^{-1}(u + u') = v + v', \quad F^{-1}(\lambda u) = \lambda v$$

Siis aga

$$F^{-1}(u+u') = v+v' = F^{-1}(u) + F^{-1}(u')$$
$$F^{-1}(\lambda u) = \lambda v = \lambda F^{-1}(u)$$

mis ütlebki, et F^{-1} on lineaarne. □

Teoreem 11.38. *Olgu V ja U vektorruumid ja $F\colon V \to U$ lineaarkujutus. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:*

1) F on isomorfism,
2) F on pööratav.

Kujutuse F pöördkujutus G on isomorfism ning üheselt määratud kujutusega F: kui $U \ni b = F(a)$, siis $G(b) = a$.

Tõestus. Esitame tõestuse vaid sellise olukorra jaoks, kus V ja U on lõplikumõõtmelised.

1) $\Longrightarrow$ 2): Kui $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ on V baas, siis on teoreemi 11.24 järgi $D = \{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ vektorruumi U baas. Defineerime kujutuse $G\colon U \to V$ valemiga

$$G[F(v_i)] = (G \circ F)(v_i) = v_i, \qquad i = 1, \dots, n \tag{$*$}$$

Teoreemi 11.8 kasutades saame seose $G \circ F = 1_V$. Rakendades kujutust F valemile $(*)$, saame

$$F[G[F(v_i)]] = (F \circ G)(F(v_i)) = F[v_i], \qquad i = 1, \dots, n$$

mis annab teoreemi 11.8 tõttu $F \circ G = 1_U$.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 246 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

2) $\implies$ 1): Kui $F(a) = F(b)$, siis $G[F(a)] = G[F(b)]$. Kuna $G \circ F = 1_V$, saame $a = b$. Siit järeldub, et F on üksühene. Kui $b \in U$, siis seos $F \circ G = 1_U$ tähendab, et $b = F[G(b)]$. Seega on F pealekujutus.

Kujutus G on üheselt määratud seosega $G \circ F = 1_V$, sest sellest seosest järeldub $(*)$. G on isomorfism, sest ta teisendab baasi D baasiks B. Lõpuks saame etteantud $b \in U$ esitada kujul

$$b = \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = F(a)$$

kus

$$a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Siis ilmselt $G(b) = a$. □

Teoreem 11.39. *Olgu V, U ja W vektorruumid.*

1. $1_V^{-1} = 1_V$.
2. *Kui lineaarkujutus $F\colon V \to U$ on pööratav, siis ka $F^{-1}\colon U \to V$ on pööratav ning kehtib $(F^{-1})^{-1} = F$.*
3. *Kui $V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W$ on pööratavad lineaarkujutused, siis on kujutus $G \circ F\colon V \to W$ samuti pööratav ning $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.*

Teoreem 11.40. *Isomorfismi pöördkujutus on samuti isomorfism. Isomorfismide kompositsioon on samuti isomorfism.*

Tõestus. See järeldub eelnenud teoreemidest. □

11.8. Maatrikskujutuse omadusi

Eespool näitasime, et iga maatriks defineerib ühe (sellele maatriksile vastava) lineaarkujutuse. Olgu $A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$. Kujutuse $L_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ defineerisime valemiga $L_A(v) = Av$ iga $v \in \mathbb{K}^n$ korral. Järgmine teoreem näitab selle konstruktsiooni pööratavust.

Teoreem 11.41. *Olgu $F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineaarkujutus. Esitame vektorruumide $\mathbb{K}^n$ ja $\mathbb{K}^k$ vektorid veeruvektoritena.*

1. *Leidub $k\times n$-järku maatriks A nii, et $F(v) = Av$ iga vektori $v \in \mathbb{K}^n$ korral.*
2. *Maatriksi A veergudeks on vastavalt vektorid $F(e_1), \dots, F(e_n)$, kus $\{e_1, \dots, e_n\}$ on vektorruumi $\mathbb{K}^n$ standardbaas*

$$A = \begin{pmatrix} F(e_1) & \cdots & F(e_n) \end{pmatrix}$$

Tõestus. Olgu $\{e_1, \dots, e_n\}$ on vektorruumi $\mathbb{K}^n$ standardbaas ning kirjutame

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad F(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad F(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

Siis on $A = (a_{ij})$ $k\times n$-järku maatriks, mille j-is veerg on $F(e_j)$. Olgu $v \in \mathbb{K}^n$. Siis

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Arvutame

$$F(v) = \alpha_1 F(e_1) + \alpha_2 F(e_2) + \cdots + \alpha_n F(e_n)$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \cdots + +\alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{an}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \dotfill \\ a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \cdots + a_{kn}\alpha_n \end{pmatrix} = Av \qquad \square$$

Märkus 11.42. Maatriksit A nimetatakse lineaarkujutuse F *standardmaatriksiks.*

Näide 11.43. Leida lineaarkujutuse

$$F\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2, \qquad F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

standardmaatriks.

Lahendus. Esitame lineaarteisenduse F maatrikskujul

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Seega

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Standardmaatriksi võib arvutada ka standardvektorite e_1, e_2, e_3 abil. Maatriksi A veergudeks on vektorid $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$.

Teoreem 11.44 (maatrikskujutuse omadusi)**.** *Olgu A ja B maaatriksid ning allpool olevad tehted määratud. Siis*

1) *Kui* $L_A = L_B$*, siis* $A = B$
2) $L_I = 1_{\mathbb{K}^n}$
3) $L_A \circ L_B = L_{AB}$
4) $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$
5) $\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Col} A$ *ning* $\operatorname{rank} L_A = \operatorname{rank} A$.

11.9. Lineaarkujutuse maatriksesitus

Olgu $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ vektorruumi V baas ning $D = \{u_1, \ldots, u_k\}$ vektorruumi U baas. Vektorid

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V \quad \text{ja} \quad u = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k \in U$$

võime teatavasti esitada veeruvektorina

$$C_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad C_D(u) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

Kujutused $C_B \colon V \to \mathbb{K}^n$ ja $C_D \colon U \to \mathbb{K}^k$ on teatavasti isomorfismid, seega on nad pööratavad. Paneme tähele, et veeruvektor $C_B(v_j)$ on ühikmaatriksi j-is veerg.

Olgu $F\colon V \to U$ lineaarkujutus. Lineaarkujutusele F vastav maatriks A on üheselt defineeritud kommutatiivse diagrammiga

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & U \\ {\scriptstyle C_B}\downarrow & & {\scriptstyle C_D}\downarrow \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{K}^k \end{array}$$

Maatriksi A ühesus järeldub implikatsioonist

$$L_A = L_{A'} \quad \Longrightarrow \quad A = A'$$

Selle diagrammi kohaselt

$$C_D \circ F = L_A \circ C_B$$

Lineaarkujutus $L_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ toimib veeruvektoritele järgmiselt:

$$L_A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Seega

$$C_D[F(v)] = L_A[C_B(v)] = AC_B(v) \quad \forall\, v \in V$$

See tingimus määrabki maatriksi $A \doteq M_{DB}(F)$, s.t

$$\boxed{C_D[F(v)] = M_{DB}(F)C_B(v), \qquad \forall\, v \in V}$$

Maatriksi A arvutamiseks esitame A veeruvektorite $a_1, \ldots, a_n$ kaudu

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

Kuna veeruvektor $C_B(v_j)$ on ühikmaatriksi j-is veerg, siis saame

$$C_D[F(v_j)] = AC_B(v_j) = a_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Tulemuseks saame

$$\boxed{A \doteq M_{DB}(F) = \begin{pmatrix} C_D[F(v_1)] & C_D[F(v_2)] & \ldots & C_D[F(v_n)] \end{pmatrix}}$$

Seda maatriksit nimetatakse *lineaarkujutuse* $F\colon V \to U$ *maatriksiks* baasides B ja D. Valem defineerib kujutuse

$$M_{DB} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \to \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$$

mille omadusi vaatleme järgmises alapunktis.

Näide 11.45. Defineerime $F\colon P_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^2$ valemiga

$$F(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) = (\alpha_0 + 2\alpha_2, \alpha_0 + 3\alpha_1 + 4\alpha_2)$$

Baasid valime järgmiselt:

$$B \doteq \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2\}, \qquad D \doteq \{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\}$$

Koduleht
Tiitelleht
Lk 252 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Leiame $M_{DB}(F)$.
Lahendus. Kõigepealt arvutame

$$\begin{aligned} F(v_1) &= (1,1) = u_1 + u_2 \\ F(v_2) &= (0,3) = 3u_2 \\ F(v_3) &= (2,4) = 2u_1 + 4u_2 \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} M_{DB}(F) &\doteq \begin{pmatrix} C_D[F(v_1)] & C_D[F(v_2)] & \dots & C_D[F(v_n)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sama tulemuseni jõuame ka teisel viisil. Kuna

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = \alpha_0 v_1 + \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3$$

siis

$$\begin{aligned} F(v) &= \alpha_0 F(v_1) + \alpha_1 F(v_2) + \alpha_2 F(v_3) \\ &= \alpha_0(u_1 + u_2) + \alpha_1(3u_2) + \alpha_2(2u_1 + 4u_2) \\ &= (\alpha_0 + 2\alpha_2)u_1 + (\alpha_0 + 3\alpha_1 + 4\alpha_2)u_2 \end{aligned}$$

Seega

$$C_D[F(v)] = \begin{pmatrix} \alpha_0 + 2\alpha_2 \\ \alpha_0 + 3\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$= M_{DB}(F)C_B(v) \quad\Longrightarrow\quad M_{DB}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Näide 11.46 (maatrikskujutuse esitus)**.** Olgu $A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$ ning $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ maatrikskujutus, mis on defineeritud valemiga $L_A(v) = Av$ iga $v \in \mathbb{K}^n$ korral. Olgu B ja D vektorruumide $\mathbb{K}^n$ ja $\mathbb{K}^k$ vastavad standardbaasid. Siis $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ning $C_D(u) = u$ iga $u \in \mathbb{K}^k$ korral. Seega

$$\begin{aligned} M_{DB}(L_A) &= \begin{pmatrix} C_D[L_A(e_1)] & C_D[L_A(e_2)] & \cdots & C_D[L_A(e_n)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_A(e_1) & L_A(e_2) & \cdots & L_A(e_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \cdots & Ae_n \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Teiste sõnadega, lineaarkujutuse L_A maatriksiks on parajasti maatriks A.

Näide 11.47. $M_{BB}(1_V) = I$, $M_{DB}(0) = 0$

11.10. Lineaarkujutuse maatriksesituse omadusi

Teoreem 11.48. *Olgu V ja U vektorruumid ning* $\dim V = n$ *ja* $\dim U = k$. *Olgu B ja D vektorruumide V ja U vastavad baasid. Siis kujutus*

$$M_{DB} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \to \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$$

on vektorruumide isomorfism.

Tõestus. Kõigepealt tõestame kujutuse M_{DB} lineaarsuse. Olgu $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ vektorruumi V baas. Etteantud $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ korral on maatriksi $M_{DB}(F + G)$ j-is veerg

$$C_D[(F + G)(v_j)] = C_D[F(v_j) + G(v_j)] = C_D[F(v_j] + C_D[G(v_j)]$$

sest C_D on lineaarne. Viimase valemi parem pool on maatriksite $M_{DB}(F)$ ja $M_{DB}(G)$ j-indate veergude summa, seega

$$M_{DB}(F+G) = M_{DB}(F) + M_{DB}(G)$$

Nüüd arvutame maatriksi $M_{DB}(\lambda F)$ j-inda veeru

$$C_D[(\lambda F)(v_j)] = C_D[\lambda F(v_j)] = \lambda C_D[F(v_j)]$$

sest C_D on lineaarne. Viimase valemi parem pool on aga maatriksi $\lambda M_{DB}(F)$ j-is veerg. Seega

$$M_{DB}(\lambda F) = \lambda M_{DB}(F)$$

Näitame, et kujutus M_{DB} on üksühene. Piisab, kui näitame, et tuum $\operatorname{Ker} M_{DB} = \{0\}$. Kui $M_{DB}(F) = 0$, siis $C_D[F(v_j)] = 0$ iga $j = 1, \ldots, n$ korral. Kuid C_D on üksühene, seega $F(v_j) = 0$ iga j korral. Kuna vektorid v_j moodustavad baasi, siis peab $F = 0$.

Näitame, et kujutus M_{DB} on pealekujutus. Olgu $A \in \operatorname{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$. Konstrueerime lineaarkujutuse $F\colon V \to U$ nii, et $M_{DB}(F) = A$. See tähendab, et $C_D[F(v_j)]$ oleks maatriksi A j-is veerg. Kui $D = \{u_1, \ldots, u_k\}$, siis peab olema

$$F(v_j) = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{kj}u_k \quad \text{iga } j \text{ korral}$$

Kuid teoreemi 11.9 põhjal selline lineaarkujutus leidub. □

Järeldus 11.49. $\dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U) = \dim V \cdot \dim U$

11.11. Kompositsiooni maatriksesitus

Teoreem 11.50. *Olgu* $V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W$ *lineaarkujutused ning olgu* B, D *ja* E *vektorruumide* V, U *ja* W *vastavad baasid. Siis*

$$\boxed{M_{EB}(G \circ F) = M_{ED}(G) M_{DB}(F)}$$

Tõestus. Tähistame

$$X = M_{DB}(F), \qquad Y = M_{ED}(G), \qquad Z = M_{EB}(G \circ F)$$

Peame näitama, et $Z = YX$. Olgu n, k ja l vektorruumide V, U ja W vastavad mõõtmed. Maatriksid X, Y ja Z on üheselt määratud järgmiste kommutatiivsete diagrammidega:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{F} & U & \xrightarrow{G} & W \\ {\scriptstyle C_B}\downarrow & & {\scriptstyle C_D}\downarrow & & {\scriptstyle C_E}\downarrow \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_X} & \mathbb{K}^k & \xrightarrow{L_Y} & \mathbb{K}^l \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{GF} & W \\ {\scriptstyle C_B}\downarrow & & {\scriptstyle C_E}\downarrow \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_Z} & \mathbb{K}^l \end{array}$$

Nende diagrammide kohaselt (kompositsiooni märki $\circ$ ei eksponeeri)

$$C_D F = L_X C_B, \qquad C_E G = L_Y C_D, \qquad C_E GF = L_Z C_B$$

Nüüd arvutame nende valemite abil

$$C_E GF = (C_E G)F = (L_Y C_D)F = L_Y(C_D F) = L_Y(L_X C_B)$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 256 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

$$= (L_Y L_X)C_B = L_{YX}C_B$$

Võrreldes seda tulemust valemiga $C_E GF = L_Z C_B$, saamegi maatriksi Z ühesusest tulenevalt $Z = YX$. □

Teoreem 11.51. *Olgu $F\colon V \to U$ lineaarkujutus ning $\dim V = \dim U$. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:*

1) kujutus F on isomorfism,
2) maatriks $M_{DB}(F)$ on pööratav vastavalt iga V ja U baasi B ja D korral,
3) maatriks $M_{DB}(F)$ on pööratav vastavalt mingi V ja U baasi B ja D korral.

Kehtib valem $M_{DB}(F)^{-1} = M_{BD}(F^{-1})$.

Tõestus. 1) $\Longrightarrow$ 2) Olgu $\dim V = \dim U = n$. Vaatleme kujutuste kompositsiooni

$$V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{F^{-1}} V$$

Seega saame eelmise teoreemi põhjal

$$M_{BD}(F^{-1})M_{DB}(F) = M_{BB}(F^{-1}F) = M_{BB}(1_V) = I_n$$

Samamoodi $M_{DB}(F)M_{BD}(F^{-1}) = I_n$, millega tingimus 2) ja viimane väide on tõestatud.

2) $\Longrightarrow$ 3) Ilmne.

3) $\Longrightarrow$ 1) Olgu $M_{DB}(F)$ pööratav mingite baaside B ja D korral. Kirjutame mugavuse huvides $A = M_{DB}(F)$. Siis $C_D F = L_A C_B$. Kuna C_D on isomorfism, siis saame $F = C_D^{-1} L_A C_B$. Kuna F on isomorfismide C_D^{-1}, L_A ja C_B kompositsioon, siis peab ta samuti olema isomorfism. □

Teoreem 11.52. *Olgu V ja U lõplikumõõtmelised vektorruumid vastavate baasidega B ja D. Olgu $F : V \to U$ lineaarne kujutus. Siis* $\operatorname{rank} F = \operatorname{rank} M_{DB}(F)$.

Tõestus. Tähistame mugavuse huvides $A \doteq M_{DB}(F)$ ning $n \doteq \dim V$. Näitest 11.14 teame, et $\operatorname{Col} A = \operatorname{Im} L_A = \{Ax|\ x \in \mathbb{K}^n\} \doteq W$, s.t maatriksi A veeruruum ühtib lineaarkujutuse L_A muutumispiirkonnaga. Astakuteoreemi põhjal $\operatorname{rank} A = \dim W$. Kuna $\operatorname{rank} F = \dim \operatorname{Im} F$, siis piisab mingi isomorfismi $S : \operatorname{Im} F \to W$ konstrueerimisest.

Paneme tähele, et iga vektor $u \in \operatorname{Im} F$ esitub kujul $u = F(v)$ ning vektor $C_D[F(v)] = AC_B(v) \in W$. Defineerime kujutuse $S : \operatorname{Im} F \to W$ valemiga

$$S[F(v)] \doteq C_D[F(v)] \qquad \forall\ F(v) \in \operatorname{Im} F$$

Kuna C_D on lineaarne üksühene kujutus, peab seda olema ka S. Jääb üle vaid näidata, et S pealekujutus. Olgu $Ax \in W$ mingi vektor, kus $x \in \mathbb{K}^n$. Kuna C_B on pealekujutus, siis $x = C_B(v)$ mingi vektori $v \in V$ korral. Seda arvestades saame

$$Ax = AC_B(v) = C_D[F(v)] = S[F(v)]$$

seega F on pealekujutus. Kokkuvõttes saame, et S on isomorfism. □

11.12. Operaatoralgebra

Vaatleme hulka $A(V) \doteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$. Hulga $A(V)$ elemente nimetatakse *lineaaroperaatoriteks*, aga ka *lineaarteisendusteks*. Kui $\dim V = n$, siis $\dim A(V) = n^2$. Hulk $A(V)$ on vektorruum üle $\mathbb{K}$ ning on *kinnine* kompositsiooni suhtes

$$F, G \in A(V) \qquad \Longrightarrow \qquad FG \doteq F \circ G \in A(V)$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 258 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Kompositsiooni $\circ\colon A(V)\times A(V) \to A(V)$ võib vaadelda operaatorite korrutamisena. Hulka $A(V)$ nimetatakse seepärast *operaatoralgebraks*. Peale vektorruumi omaduse kehtivad operaatoralgebras veel järgmised arvutusseadused iga $F, G, H \in A(V)$ ja iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral:

1) $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$ (assotsiatiivsus),
2) $H \circ (F + G) = H \circ F + H \circ G$ (distributiivsus),
3) $(F + G) \circ H = F \circ H + G \circ H$ (distributiivsus),
4) $(\lambda G) \circ F = \lambda(G \circ F) = G \circ (\lambda F)$ (arvuga korrutamise assotsiatiivsus),
5) $1_V \circ F = F = F \circ 1_V$ (unitaalus).

Üldiselt on kompositsioon aga mittekommutatiivne, s.t $F \circ G \neq G \circ F$.

11.13. Baasiteisendused

Uurime nüüd lineaarsete operaatorite käitumist baasiteisendusel.

Olgu $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ ja $B' = \{b'_1, \cdots, b'_n\}$ vektorruumi V baasid ning olgu $F\colon V \to V$ lineaarkujutus. Tähistame $M_B(F) \doteq M_{BB}(F)$. Üleminekumaatriks baasilt B baasile B' on

$$P \doteq P_{B'\leftarrow B} = \begin{pmatrix} C_{B'}(b_1) & C_{B'}(b_2) & \cdots & C_{B'}(b_n) \end{pmatrix}$$

Vektori $v \in V$ koordinaadid baasides B ja B' on seotud valemiga

$$C_{B'}(v) = P_{B'\leftarrow B} C_B(v) \quad \forall\, v \in V \quad \iff \quad C_{B'} = P_{B'\leftarrow B} C_B$$

Me teame, et

$$C_B F = M_B(F) C_B, \quad C_{B'} F = M_{B'}(F) C_{B'}$$

Korrutades vasakpoolset valemit vasakult üleminekumaatriksiga P, saame

$$
\begin{aligned}
PM_B(F)C_B = PC_BF = C_{B'}F &= M_{B'}(F)C_{B'} \\
&= M_{B'}(F)PC_B
\end{aligned}
$$

Nüüd korrutame saadud valemit paremalt lineaarkujutusega C_B^{-1}. Saame

$$
PM_B(F) = M_{B'}(F)P
$$

millest

$$
\boxed{M_B(F) = P^{-1}_{B'\leftarrow B}M_{B'}(F)P_{B'\leftarrow B}}
$$

Saadud valem seobki lineaaroperaatori F maatriksid baasides B' ja B.

Näide 11.53. Lineaaroperaator $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$
F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, \quad x_2 + x_3, \quad -3x_1 + x_3)
$$

Leida maatriksesitused baasides

$$
\begin{aligned}
B' &= \{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{standardbaas} \\
B &= \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,0)\}
\end{aligned}
$$

Lahendus. Kõigepealt arvutame

$$
\begin{cases}
F(e_1) = F(1,0,0) = (2,0,-3) \\
F(e_2) = F(0,1,0) = (-1,1,0) \\
F(e_3) = F(0,0,1) = (0,1,1)
\end{cases}
$$

Siis

$$
\begin{aligned}
M_{B'}(F) &= \big(C_{B'}[F(e_1)] \quad C_{B'}[F(e_2)] \quad C_{B'}[F(e_3)]\big) \\
&= \big(C_{B'}(2,0,-3) \quad C_{B'}(-1,1,0) \quad C_{B'}(0,1,1)\big) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nüüd leiame üleminekumaatriksi $P_{B'\leftarrow B}$. Paneme tähele, et

$$
\begin{cases}
(1,1,0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\
(1,0,1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\
(0,1,0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3
\end{cases}
\implies \quad P_{B'\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Jääb üle vaid arvutada

$$
\begin{aligned}
M_B(F) &= P^{-1}_{B'\leftarrow B} M_{B'}(F) P_{B'\leftarrow B} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

11.14. Ülesanded

Lineaarkujutuse mõiste

11.14.1 Defineerime kujutuse $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ valemiga

$$F(x, y) = (x + y, x)$$

Näidata, et F on lineaarne.

11.14.2 Defineerime kujutuse $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ valemiga

$$F(x, y, z) = (x + y + z, \quad 2x - 3y + 4z)$$

Näidata, et F on lineaarne.

11.14.3 Olgu V fikseeritud järguga ruutmaatriksite vektorruum. Olgu M mingi maatriks vektorruumist V. Defineerime kujutuse $F\colon V \to V$ valemiga $F(A) = AM + MA$. Näidata, et F on lineaarne.

11.14.4 Olgu V fikseeritud järguga ruutmaatriksite vektorruum. Olgu M mingi maatriks vektorruumist V. Defineerime kujutuse $F\colon V \to V$ valemiga $F(A) = AM - MA$. Näidata, et F on lineaarne.

11.14.5 Defineerime lineaarkujutuse $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ valemitega

$$F(1, 2) = (2, 3), \qquad F(0, 1) = (1, 4)$$

Leida $F(x, y)$.

Koduleht
Tiitelleht
Lk 262 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Lineaarkujutuse tuum ja muutumispiirkond

11.14.6 Lineaarkujutus $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$F(x,y,z,t) = (x - y + z + t, \quad x + 2z - t, \quad x + y + 3z - 3t)$$

Leida $\operatorname{Im} F$ ja $\operatorname{Ker} F$ baasid ja dimensioonid.

11.14.7 Lineaarkujutus $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$F(x,y,z) = (x + 2y - z, \quad y + z, \quad x + y - 2z)$$

Leida $\operatorname{Im} F$ ja $\operatorname{Ker} F$ baasid ja dimensioonid.

11.14.8 Olgu $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ maatrikskujutus, kus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Leida $\operatorname{Im} A$ ja $\operatorname{Ker} A$ baasid ja dimensioonid.

Regulaarne ja singulaarne lineaarkujutus

11.14.9 Uurida kas alljärgnevad lineaarkujutused on singulaarsed. Singulaarsuse korral leida vektor $v \neq o$, mille kujutis on o.

(1) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga $F(x,y) = (x - y, x - 2y)$
(2) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga

$$F(x,y) = (2x - 4y, 3x - 6y)$$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 263 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Tehted lineaarkujutustega

11.14.10 Lineaarkujutused $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ja $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ on defineeritud valemitega

$$F(x,y,z)=(2x,y+z)\quad \text{ja}\quad G(x,y,z)=(x-z,y)$$

Leida **(1)** $F+G$, **(2)** $3F$, **(3)** $2F-5G$.

11.14.11 Lineaarkujutused $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ja $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ on defineeritud valemitega

$$F(x,y,z)=(y,x+z)\quad \text{ja}\quad G(x,y,z)=(2z,x+y)$$

Leida **(1)** $F+G$ **(2)** $3F-2G$.

11.14.12 Defineerime lineaarkujutuse $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ valemiga $H(x,y)=(y,2x)$ ning defineerime F,G nagu ülesandes **11.14.11**. Leida

(1) $H\circ F$ ja $G\circ H$
(2) $F\circ H$ ja $G\circ H$
(3) $H\circ(F+G)$ ja $H\circ F+H\circ G$

11.14.13 Lineaaroperaatorid F ja G on defineeritud valemitega

$$F(x,y)=(y,x)\quad \text{ja}\quad G(x,y)=(0,x)$$

Leida **(1)** $F+G$ **(2)** $2F-3G$ **(3)** FG **(4)** GF **(5)** F^2 **(6)** G^2

11.14.14 Lineaarkujutus $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga

$$F(x,y)=(2x+y,3x+2y)$$

Leida pöördkujutus F^{-1}.

11.14.15 Lineaarkujutus $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$F(x,y,z) = (x-3y-2z, y-4z, z)$$

Leida pöördkujutus F^{-1}.

11.14.16 Lineaaroperaator $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$F(x,y,z) = (x+z, x-y, y)$$

Leida F^{-1}. **11.14.17** Tõestada teoreemis 11.35 esitatud kompositsiooni omadused.

Lineaarkujutuse maatriksesitus

11.14.18 Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

esitus baasis

$$B = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,0,1),\ (2,1,2),\ (1,2,2)\}$$

11.14.19 Lineaarkujutus $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga

$$F(x,y) = (2x+3y, 4x-5y)$$

Leida kujutuse F maatriksesitus baasis

$$B = \{u_1, u_2\} = \{(1, -2), (2, -5\}$$

11.14.20 Lineaaroperaator $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga

$$F(x, y) = (5x - y,\ 2x + y)$$

Olgu antud kaks baasi

$$E = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0),\ (0, 1)\}, \quad B = \{u_1, u_2\} = \{(1, 4),\ (2, 7)\}$$

Leida **(1)** üleminekumaatriks $P_{B \leftarrow E}$, **(2)** kujutuse F maatriksesitus baasis E, **(3)** kujutuse F maatriksesitus baasis B.

A. Eksamitöö tüüpülesanded

1) Arvutada determinant.
   Näide 1.8.
2) Tehted maatriksitega $(+, -,$ korrutamine arvuga, korrutamine$)$.
   Näited 2.1, 2.2, 2.10, 2.11, 2.12.
3) Tehted aritmeetiliste vektoritega (liitmine, lahutamine, skalaariga korrutamine).
4) Leida pöördmaatriks ja kontrollida tulemust.
   Näide 2.30.
5) Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.
   Näide 2.35.
6) Leida maatriksi astak.
   Näide 3.4.
7) Lahendada LVS ja kontrollida lahendit.
   Näide 4.10.
8) Leida homogeense LVSi üldlahend ja kontrollida lahendit.
   Näide 6.46.
9) Leida homogeense LVSi lahendite fundamentaalsüsteem. Kontrollida lahendit.
   Näide 6.46.
10) Tehted kompleksarvudega algebralisel, trigonomeetrilisel ja eksponentkujul. Astendamine ja juurimine. Ühejuurte arvutamine.
    Näited 5.5, 5.9, 5.20, 5.21, 5.27, 5.28, 5.29, 5.33, 5.34, 5.36.
11) Lahendada ruutvõrrand üle kompleksarvude ja kontrollida lahendit.
    Näide 5.25.

12) Leida vektori koordinaadid etteantud baasis ja kontrollida arendust.
    Tene sõnastus: leida vektori arendus etteantud baasis.
13) Uurida vektorisüsteemi lineaarset sõltuvust: leida vektorisüsteemi astak, juhtvektorid arendada vabade kaudu. Kontrollida arendusi.
    Vihje: kasuta astakuteoreemi 6.66 ja uuri alapunkti 6.12.
14) Leida vektori koordinaadid baasis B' kui on teada vektori koordinaadid baasis B. Kontrollida arendust.
    Näide 6.51.
15) Ortonormeerida vektorisüsteem ja kontrollida tulemuse ortonormeeritust.
    Näide 7.24.
16) Leida maatriksi omaväärtused ja omaruumide baasivektorid. Kontrollida tulemust omaväärtusvõrrandiga.
    Näide 8.7, 8.8.
17) Leida ruutmaatriksi karakteristlik polünoom ja kontrollida Cayley-Hamiltoni teoreemi.
    Näide 10.4.
18) Diagonaalida maatriks ja kontrollida tulemust.
    Näited 9.3, 9.3.
19) Diagonaalida ruutvorm/sümmeetriline maatriks ortogonaalteisendusega ja kontrollida tulemust.
    Näited 9.9, 9.10.
20) Arvutada maatriksfunktsioon.
    Näited 10.8, 10.9, 10.10, 10.11, 10.12, 10.13, 10.14.
21) Kontrollida kujutuse lineaarsust.
    Näide 11.1.

22) Lineaarkujutuse konstrueerimine.
    Näide 11.10.
23) Leida $\operatorname{Im} F$ ja $\operatorname{Ker} F$.
    Näited 11.14, 11.15.
24) Leida $\operatorname{Im} F$ baas ja mõõde. Leida $\operatorname{Ker} F$ baas ja mõõde.
    Näide 11.17.
25) Leida lineaarkujutuse maatriks etteantud baasis.
    Näited 11.43, 11.45.
26) Leida lineaarkujutuse maatriks baasis B' kui on teada tema maatriks baasis B.
    Näide 11.53

B. Vastused

B.1. Determinandid

1.4.1 -2 **1.4.2** -1 **1.4.3** -1 **1.4.4** $4ab$ **1.4.5** 1
1.4.6 $\sin(\alpha-\beta)$ **1.4.7** $\cos(\alpha+\beta)$ **1.4.8** 0 **1.4.9** 1
1.4.10 1 **1.4.12** 40 **1.4.13** -3 **1.4.14** 100 **1.4.15** -5
1.4.16 0 **1.4.17** 1 **1.4.18** 1 **1.4.19** 2 **1.4.20** 4
1.4.21 -8 **1.4.22** 0 **1.4.23** $3abc-a^3-b^3-c^3$
1.4.24 $2x^3-(a+b+c)x^2+abc$ **1.4.25** $(ab+bc+ca)x+abc$
1.4.26 $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$ **1.4.28** -8
1.4.29 -3 **1.4.30** -9 **1.4.31** 18 **1.4.32** -10 **1.4.33** 150 **1.4.34** 5 **1.4.35** 52 **1.4.36** 1932 **1.4.37** 100 **1.4.38** -336 **1.4.39** 10 **1.4.40** $\prod_{k>i}(x_k-x_i)$

B.2. Maatriksarvutus

2.7.5 $AB=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -7 & 5\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 3 & 4\\ -3 & 1 & -4\end{pmatrix}$

2.7.6 $AB=0$, $BA=\begin{pmatrix}0 & -3 & 6\\ 0 & 30 & -36\\ 0 & 25 & 30\end{pmatrix}$ **2.7.8** $\begin{pmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}$

2.7.9 $\begin{pmatrix}304 & -61\\ 305 & -62\end{pmatrix}$ **2.7.10** $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **2.7.11** $\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$

2.7.12 $D(\alpha)D(\beta)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$,

$$D^n(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

B.3. Maatriksi astak

3.6.1 2 **3.6.2** 3 **3.6.3** 3 **3.6.4** 3 **3.6.5** 3 **3.6.6** 2
3.6.7 $\lambda = 0$ korral on astak 2, $\lambda \neq 0$ korral 3.
3.6.8 $\lambda = 3$ korral on astak 2, $\lambda \neq 3$ korral 3.
3.6.9 $\lambda = 2$ korral on astak 1, $\lambda = 8$ korral 2, $\lambda \neq 2, 8$ korral 3.
3.6.10 $\lambda = 1$ korral on astak 1, $\lambda = 5$ korral 2, $\lambda \neq 1, 5$ korral 3.
3.6.11 $\lambda = 2$ korral on astak 1, $\lambda = -1$ korral 2, $\lambda \neq -1, 2$ korral 3.
3.6.12 $\lambda = 0, -2, -4$ korral on astak 3, $\lambda \neq 0, -2, -4$ korral 4.

B.5. Kompleksarvud

5.13.1 **(1)** $1 + 18i$ **(2)** $4i$ **(3)** $7 + 17i$ **(4)** $10 - 11i$
(5) $14 - 5i$ **(6)** $5 + i$ **(7)** $\frac{13}{2} - \frac{1}{2}i$ **(8)** $\frac{11}{5} - \frac{27}{5}i$ **(9)** 4
(10) $52i$ **(11)** 2 **(12)** 1

5.13.2 **(1)** i **(2)** 1 **(3)** -1 **(4)** $-i$ **(5)** i **(6)** -1
(7) i **(8)** i

5.13.3 **(1)** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ **(2)** -2 **(3)** 0
5.13.8 **(1)** $3 + 4i$ **(2)** $5 - 12i$

5.13.14 **(1)** 2^{50} **(2)** 2^{150} **(3)** -2^{30} **(4)** -2^6 **(5)** $2^{15}i$

5.13.16 **(1)** $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$ **(2)** $\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$

(3) $4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x$
(4) $\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$
(5) $5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2\sin^3 x + \sin^5 x$
(6) $\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 5\cos x\sin^4 x$

5.13.17 **(1)** $\frac{1}{4}(-\sin 3x + 3\sin x)$ **(2)** $\frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$
(3) $\frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$
(4) $\frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$ **(5)** $\frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$
(6) $\frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$

B.7. Skalaarkorrutis

7.8.1 $(a|b) = 16$, $(a|c) = -4$, $(b|c) = -13$, $(a+b|c) = -17$, $|a| = \sqrt{21}$, $|b| = \sqrt{38}$, $|c| = \sqrt{29}$ **7.8.2** $(f|g) = -1$, $(f|h) = -\frac{37}{4}$, $|f| = \frac{\sqrt{57}}{3}$, $|g| = 1$, $\frac{f}{|f|} = \frac{3(t+2)}{\sqrt{57}}$, $\frac{g}{|g|} = 3t-2$
7.8.8 $(a|b) = 30$ **7.8.9** $|a-b| = 30$ **7.8.10** $|a+b| = 24$

B.10. Maatriksfunktsioonid

10.8.5 $\begin{pmatrix} 3\cdot 2^{100} - 2\cdot 3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}$ **10.8.6** $2^{50}\begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$

10.8.7 $\begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$

10.8.8 $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4\sin 5 + 2\sin(-1) & 2\sin 5 - 2\sin(-1) \\ 4\sin 5 - 4\sin(-1) & 2\sin 5 + 4\sin(-1) \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} -0,919773 & -0,039151 \\ -0,078302 & -0,880622 \end{pmatrix}$

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 272 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

10.8.9 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

10.8.10 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4\cos 1 - 2\cos(-1) & -2\cos 1 + 2\cos(-1) \\ 4\cos 1 - 4\cos(-1) & -2\cos 1 + 4\cos(-1) \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 0,540302 & 0 \\ 0 & 0,540302 \end{pmatrix}$

10.8.11 $\begin{pmatrix} \sin 2t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 2t & t\cos 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 3t \end{pmatrix}$

10.8.12 $\begin{pmatrix} 3+2\pi in & -15 & 6 \\ 1 & -5+2\pi in & 2 \\ 1 & -5 & 2+2\pi in \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$

10.8.13 $\pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ **10.8.14** $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

10.8.15 $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4e^5 + 2e^{-1} & 2e^5 - 2e^{-1} \\ 4e^5 - 4e^{-1} & 2e^5 + 4e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99,0647 & 49,3484 \\ 98,6969 & 49,7263 \end{pmatrix}$

10.8.16 $\begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix}$ **10.8.17** $\begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$

10.8.18 $\begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix} = (e-2)A^2 + A + I$

10.8.19 $\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$ **10.8.20** $\begin{pmatrix} 3e^{t}-2e^{-t} & 3e^{t}-3e^{-t} \\ -2e^{t}+2e^{-t} & -2e^{t}+3e^{-t} \end{pmatrix}$

10.8.21 $\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

10.8.22 $\begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t & \frac{5}{2}\sin 2t \\ -2\sin 2t & \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}$

10.8.23 $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

10.8.24 $\frac{e^{-4t}}{3}\begin{pmatrix} 3\cos 3t + 4\sin 3t & \sin 3t \\ -25\sin 3t & 3\cos 3t - 4\sin 3t \end{pmatrix}$

10.8.25 $\frac{e^{3t}}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} \sqrt{15}\cos\sqrt{15}t + \sin\sqrt{15}t & -2\sin\sqrt{15}t \\ 8\sin\sqrt{15}t & \sqrt{15}\cos\sqrt{15}t - \sin\sqrt{15}t \end{pmatrix}$

10.8.26 $e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **10.8.27** $e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.8.28 $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9e^{-t} & -3e^{-t}+3e^{2t} & e^{-t}-e^{2t}+3te^{2t} \\ 0 & 9e^{2t} & 9te^{2t} \\ 0 & 0 & 9e^{2t} \end{pmatrix}$

10.8.29 $\begin{pmatrix} 1 & -2+2\cos t+\sin t & -5+5\cos t \\ 0 & \cos t - 2\sin t & -5\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$

B.11. Lineaarkujutused

11.14.5 $F(x,y) = (y, -5x+4y)$
11.14.6 $\dim \operatorname{Im} F = 2$, $\dim \operatorname{Ker} F = 2$
11.14.7 $\dim \operatorname{Im} F = 2$, $\dim \operatorname{Ker} F = 1$
11.14.8 $\dim \operatorname{Im} F = 2$, $\dim \operatorname{Ker} F = 2$
11.14.9 **(1)** Ei ole singulaarne **(2)** Singulaarne
11.14.10 **(1)** $(F+G)(x,y,z) = (x-z, y)$
(2) $(3F)(x,y,z) = (6x, 3y+3z)$
(3) $(2F-5G)(x,y,z) = (-x+5z, -3y+2z)$
11.14.11 **(1)** $(F+G)(x,y,z) = (y+2z, 2x-y+z)$
(2) $(2F-5G)(x,y,z) = (3y-4z, x+2y+3z)$
11.14.12 **(1)** $(H\circ F)(x,y,z) = (x+y, 2y)$,
$(H\circ G)(x,y,z) = (x-y, 4z)$
(2) ei ole määratud
(3) $(H\circ(F+G))(x,y,z) = (H\circ F + H\circ G)(x,y,z) =$
$= (2x-y+z, 2y+4z)$
11.14.13 **(1)** $(F+G)(x,y) = (y, 2x)$
(2) $(2F-3G)(x,y) = (2y, -x)$
(3) $(FG)(x,y) = (x,0)$ **(4)** $(GF)(x,y) = (0,y)$ **(5)** $F^2 = I$
(6) $G^2 = 0$
11.14.14 $F^{-1}(x,y) = (2x-y, -3x+2y)$
11.14.15 $F^{-1}(x,y,z) = (x+3y+14z, y-4z, z)$
11.14.16 $F^{-1}(x,y,z) = (y+z, y, x-y-z)$

11.14.18 $\begin{pmatrix} 11 & 21 & 17 \\ -5 & -14 & -8 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

11.14.19 $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$

11.14.20 **(1)** $P_{B\leftarrow E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Kirjandus

[1] H. Anton and C. Rorres. Elementary Linear Algebra: Applications Versions. 8th Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000

[2] C. W. Curtis. Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984.

[3] W. Greub. Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.

[4] G. Kangro. Kõrgem algebra. Eesti Riiklik Kirjastus. Tallinn, 1962.

[5] M. Kilp. Algebra I, II. Tartu, 1998.

[6] S. Lang. Introduction to Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1994.

[7] S. Lang. Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1993.

[8] C. D. Lay. Linear Algebra and Its Applications. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1993.

[9] S. Lipschutz and M. Lipson. Schaum's Outline of Linear Algebra. McGraw-Hill, New York-London-Tokyo, 2001.

[10] A. Lõhmus, I. Petersen, H. Roos. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu. Valgus. Tallinn, 1982.

[11] W. K. Nicholson. Elementary Linear Algebra with Applications. PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1990.

[12] P. Puusemp. Lineaaralgebra. Avita, Tallinn, 2000.

[13] R. J. Valenza. Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London, 1993.

Koduleht
Tiitelleht
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Lk 278 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist

Aineregister

Koduleht
Tiitelleht
Lk 285 ⊛ 286
Tagasi
Täisekraan
Lahku failist