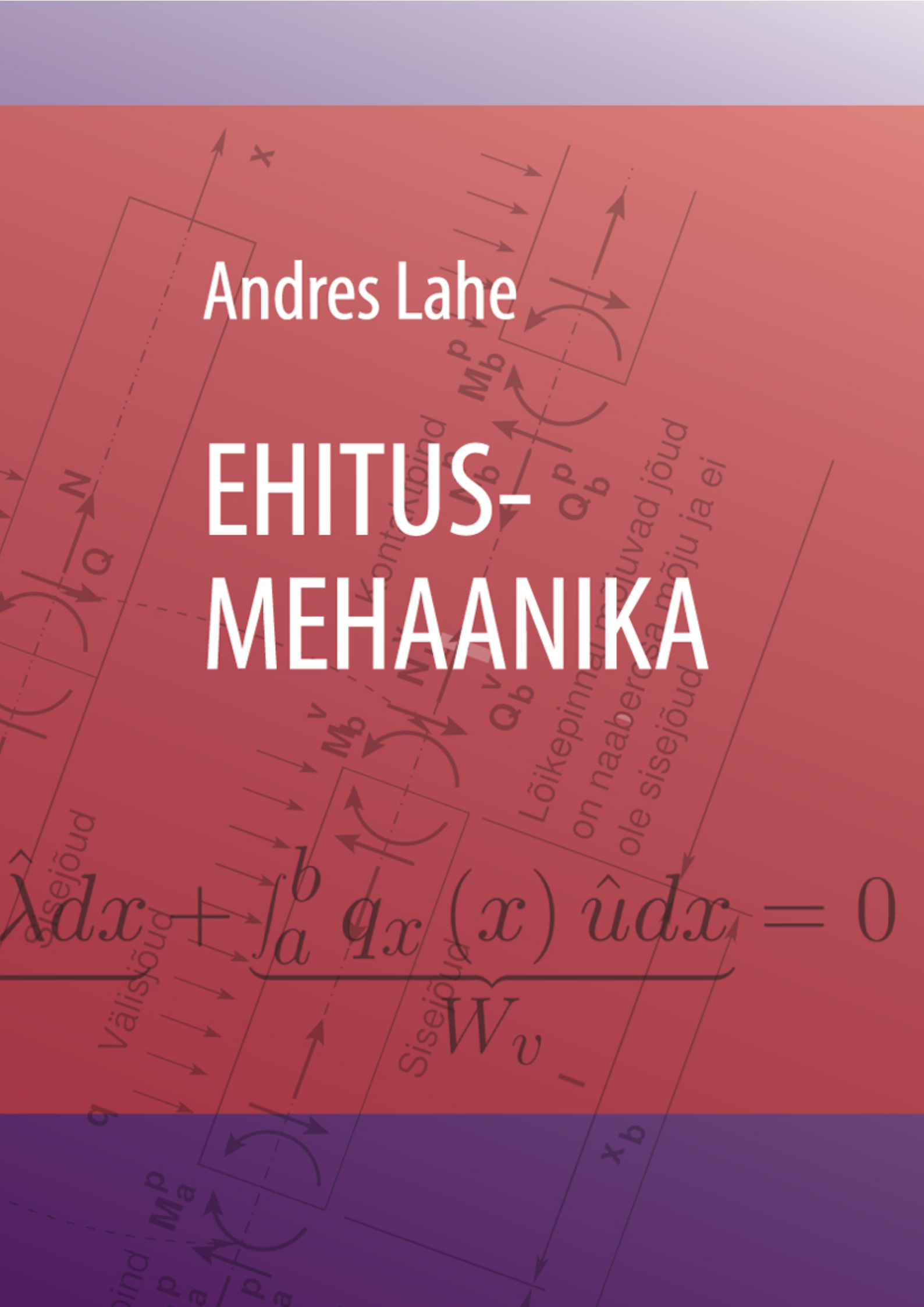


Andres Lahe

EHITUS- MEHAANIKA

$$\int_a^b q_x(x) \hat{u} dx = 0$$

W_v



Õpikus on kasutatud autori ehitusmehaanika, lõplike elementide meetodi ja varrassüsteemi mittelineaarse mehaanika loengumaterjale ja metoodilise põhitööriistana energiateoreemi. Peatükk „Rajaelementide meetod“ käsitleb autori väljatöötatud EST-arvutusmeetodit raamide piirlokorra ja teist järku teooria järgi arvutustes. Iselahendatud ülesannete enesekontrolliks on õpiku lisas viited erinevates operatsioonisüsteemides installitavas vabavaras GNU Octave kirjutatud programmidele. Ehitusmehaanika õpikul on elektrooniline variant, kus on viited slaididele ja ekraanivideodele.



Autorist

Andres Lahe on sündinud 30. märtsil 1938 Kõnnu vallas Harjumaal. Lõpetas Loksa Keskkooli 1956. Õppis Tartu Riiklikus Ülikoolis 1956–1959 ja lõpetas Tallinna Polütehnilise Instituudi tööstus- ja tsiviilehituse insenerina 1964. Täiendas oma teadmisi Leningradi Riikliku Ülikooli matemaatika ja mehaanika teaduskonna kaugõppes 1965–1970. Õppis aspirantuuris Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituudi juures, kus kaitses füü-

sika-matemaatikakandidaadi kraadi 1973. Kandidaaditöö uuris plaatide ja koorikute mittelineaarset lainelevi. 1959. aastast töötas Tallinna Tehnikaülikoolis ehitustöölise, laborandi, inseneri, dotsendi ja professorina. 2005. aastast Tallinna Tehnikaülikooli emeritprofessor.



9 789949 232710 >



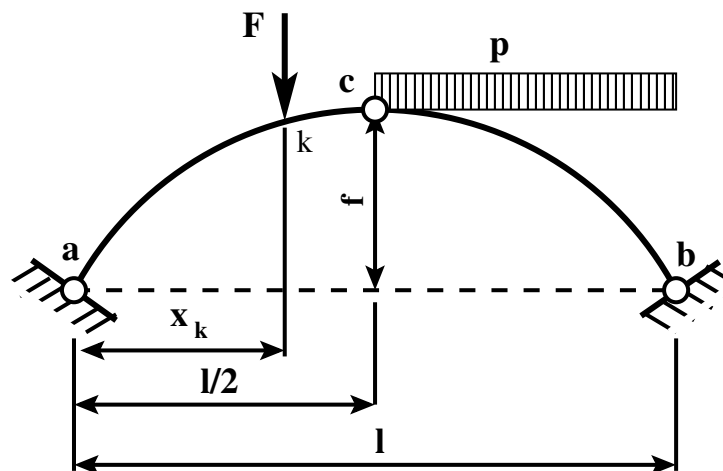
1918

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
MEHAANIKAINSTITUUT

Andres Lahe

Ehitusmehaanika

Varrassüsteemi mehaanika



Ilmunud riikliku programmi
„Eestikeelsete kõrgkooliõpikute koostamine ja väljaandmine (2008–2012)”
toetusel

Retsenseerinud
Jakub Kõo
Jaan Rohusaar
Siim Idnurm

Toimetanud
Mari-Ann Tamme

Kujundanud
Tiia Eikholm

Autoriõigus
Andres Lahe 2012

ISBN 978-9949-23-271-0

Trükkinud
Tallinna Raamatutrükikoja OÜ

Haridus- ja Teadusministeerium

ARCHIMEDES

Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus 2012



See õpik on avaldatud Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 litsentsi alusel. Litsentsi terviktekstiga tutvumiseks külastage aadressi <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/ee/> või kirjutage aadressil Creative Commons, 543 Howard Street, 5th Floor, San Francisco, California, 94105, USA.



Raamatus olevad väljavõtted programmidest alluvad GNU GPL 2.0 või uuemale litsentsile. Litsentsi terviktekstiga tutvumiseks külastage aadressi <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-2.0.html> või kirjutage aadressil Copyright (C) 1989, 1991 Free Software Foundation, Inc. 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301, USA.

Kõnesolev õpik on mõeldud kasutamiseks TTÜ ehituse, EMÜ maaehituse, EKA arhitektuuri ja TKTK ehituse erialade üliõpilastele.

Õpiku lõpus on viited *GNU Octave'is*¹ kirjutatud programmidele, mille loetelu allalaadimiseks on toodud lisas I lk 717. Need programmid on koostatud üliõpilastele *ene-sekontrolliks*, et kontrollida nende käsitsi lahendamiseks antud ülesandeid². Näiteks raami lahendamisel jõumeetodiga saab kontrollida jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi kordajaid, momente ja põikjõude raami varrastes.

Need GNU Octave'is kirjutatud programmid on kaitstud GNU üldise avaliku litsentsiga^{3 4}, et tagada teile vabadus jagada ja muuta vaba tarkvara. Rääkides vabast tarkvarast peetakse silmas vabadust, mitte hinda.

Õpiku elektroonilisel variandil DVD-l või mälupulgal⁵ on lisatud GNU Octave'is kirjutatud programmid, ekraanivideod, slaidid ja sõnastik⁶. E-õpik on internetis⁷. Õpiku elektroonilise variandi DVD ISO-tõmmise saab alla laadida aadressilt⁸.

Olenevalt kasutatavast operatsioonisüsteemist ja andmekandjast (DVD või mälupulk) tuleb valida õpiku elektroonilise variandi nimi:

faili nimi	operatsioonisüsteem	baas URL
• opik_eme_D.pdf	– Windows	- file:///D:/
• opik_eme_E.pdf	– Windows	- file:///E:/
• opik_eme_Z.pdf	– Windows	- file:///Z:/
• opik_eme_cdrom0.pdf	– Linux	- file:///media/cdrom0/
• opik_eme.pdf	– Linux	- file:///media/E_OPE/
• Ehitusmehaanika.html	– * internet	⁹

Numbrilisteks arvutusteks tuleb installeerida¹⁰ GNU Octave. Kui näidata tee nende programmideni, siis GNU Octave loeb neid programme ja funktsioone DVD-lt või mälupulgalt.

GNU Octave'i kasutamisel peab arvestama, et kümnendkoha märkimiseks kasutatakse punkti. Nii on arvutuspäevikutes kümnedkohad arvus eraldatud punktiga.

¹http://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Octave

²[./ylesanded.pdf](#)

³<http://hasso.linux.ee/doku.php/eesti:litsentsid:gpl>

⁴<http://www.gnu.org/licenses/>

⁵[./MaluPulk.html](#)

⁶[./sonastik_ehmeh.pdf](#)

⁷<http://digi.lib.ttu.ee/>

⁸http://www.e-ope.ee/repositoorium?@=6wgb#euni_repository_10890

⁹<http://www.e-uni.ee/e-kursused/ehitusmehaanika/Ehitusmehaanika.html>

¹⁰[./octaveProgrammide/EME_octaverc.txt](#)

Selles õpikus on kasutatud trükises [Rää75] avaldatud määranguid. Õpikus on GNU Octave'iga lahendatud ülesandeid võrreldud olemasolevatega. Märkused on lisatud vastavate ülesannete juurde.

Õpikus on algupärane 14. peatükk „Rajaelementide meetod” (lk 383), kus on välja töötatud arvutusmeetod – EST-meetod. EST-meetodi kasutamist teist järku teoorias on käsitletud jaotises lk 592.

EST-meetodis (vt lk 384) [Lah97a], [Lah97b],[Lah98a], [Lah98b] kasutatakse Cauchy algparameetrite meetodit sarnaselt rajaelementide meetodiga. Algparameetrite meetodit on kasutatud ülekan demaatriksmeetodina (sks *Übertragungsverfahren*) (ingl *transfer matrix method*). Ülekan demaatriksmeetodis olid ühe elemendi lõpu suurused (siirded, kontaktjõud) teise elemendi alguse suurused [LT80], [PL63]. Konstruktsiooni arvutamisel liiguti maatriksite korrutamise ga edasi, kuid peagi selgus, et korrutamisel viga kasvas ja selle meetodi kasutamisest loobuti. Seega nimetus „ülekan demaatriksmeetod” oli kasutusel. EST-meetodis koostatakse skaleeritud võrrandisüsteem *varraste ülekan demaatriksite, varraste siirete pidevustingimuste, sõlmede tasakaaluvõrrandite ja toetingimuste* alusel. Varraste siirete pidevustingimuste kirjeldamine on sarnane jõumeetodis ühikepüürides jõu- ja momendipaari valimisega. Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamine on sarnane deformatsioonimeetodis sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamisega. Selliselt koostatud võrrandisüsteem on suur. Enamik võrrandisüsteemi kordajatest on nullid (vähem kui 5% on nullist erinevaid kordajaid). See ajendab kasutama hõredaid maatrikseid. Hõredate maatriksitega tutvumiseks on koostatud lisa B lk 647. Hõredate maatriksite kasutamiseks on koostatud hulk GNU Octave'iss kirjutatud funktsioone, mis on toodud lisa I lk 717.

EST-meetodi kasutamise kohta on koostatud *staatiliselt määramatu raami* arvutamise näited: näide 14.2 lk 407, näide 14.3 lk 419, näide 14.4 lk 425. Nendes näidetes on üksikasjalik selgitus hõredate maatriksite kasutamise kohta. Võrreldakse tulemustega, mis on saadud jõumeetodiga.

Staatiliselt määramatu tala arvutamise näide EST-meetodiga: näide 14.5 lk 437.

Kolmeliigendiga raami arvutamise näide EST-meetodiga: näide 14.6 lk 445.

Mitmesildelise tala arvutamise näide EST-meetodiga: näide 14.7 lk 453.

EST-meetodi kasutamise kohta teist järku teoorias on koostatud näide 16.9 lk 592. Selles näites kasutatakse hõredaid maatrikseid.

Täna n kee le toimetajat [Mari-Ann Tamme](#).

Pühendan raamatu oma abikaasa [Lilja](#) mälestusele, kes oli õpiku kirjutamisel mulle abiks ja toeks.

Andres Lahe,

„Aasta e-kursus 2006” – loe lk 4, lk 8 „Teen seda kõike enda rõõmuks”

Sisukord

I	Staatikaga määratud süsteemid	27
1	Sissejuhatus	29
1.1	Ülesanded ja eesmärk	29
1.2	Eeldused ja printsiibid	30
1.3	Varrassüsteemide koht mehaanikas	30
1.4	Sise- ja rajajõud	32
1.5	Lõikemeetod ja virtuaalsiirete printsiip	33
1.6	Sise- ja rajasiirded	38
1.7	Koormused	38
1.8	Aproksimatsiooni tasemed. Mudelid	40
1.9	Lihtsustused varda paindeteoorias	42
1.10	Epüürid ja diferentsiaalseosed	45
1.11	Põikjõud vardas	46
1.12	Märgikokkulepped	47
1.13	Kohalik ja üldteljestik	48
1.14	Koordinaatide teisendus	49
1.15	Sõlme tasakaalu- ja kõrvaltingimused	51
1.16	Numbrilised arvutused GNU Octave'iga	52
1.16.1	GNU Octave'i kui kalkulaator [ekraanivideo]	53
1.16.2	GNU Octave'i arvutuspäevik	54
1.16.3	GNU Octave'iga arvutamise programm	55
1.17	Ülekandemaatriks paindel	56
1.17.1	Lihttala arvutamise näide 1.1 [ekraanivideo]	58
1.17.2	Lihttala siirete arvutamise näide 1.2 [ekraanivideo]	61
2	Tala mõjujooned	65
2.1	Mõjujoone mõiste [ekraanivideo]	65
2.2	Toereaktsioonide mõjujooned	66
2.3	Lihttala põikjõu mõjujooned	67
2.4	Lihttala paindemomendi mõjujooned	68
2.5	Konsooli mõjujooned	69
2.5.1	Põikjõu mõjujoon	69
2.5.2	Paindemomendi mõjujoon	70
2.5.3	Konsoolidega tala mõjujooned	70

2.6	Mõjujonte kasutamine	73
2.6.1	Sisejõudude leidmise näide 2.1 [slaidid] [.swf] [ekraanivideo] . .	73
2.7	Koormuse ebasoodsaim asetus	74
3	Varrassüsteemide liigitus	79
3.1	Varrassüsteemide liigituse alused	79
3.2	Toed ja toereaktsioonid	80
3.3	Kontaktjõud ja liigendid	81
3.4	Rajajõud ja sõlmpunktid	82
3.5	Arvutusskeem	83
3.6	Arvutusskeemi vabadusaste	83
3.7	Arvutusskeemi pooluste plaan	87
3.7.1	Pooluste plaani kasutamise näide 3.1	89
4	Staatikaga määratav mitmesildeline tala [Loeng 1] [Loeng 2]	93
4.1	Staatikaga määratav mitmesildeline tala	91
4.2	Põhi- ja lisaosad	91
4.3	Sisejõudude arvutus	94
4.4	Gerberi tala mõjujooned	95
4.5	Gerberi tala. Arvutusnäited	96
4.5.1	Tala arvutusnäide 4.1 [slaidid] [.swf] [ekraanivideo] . .	96
4.5.2	Tala mõjujonte koostamise näide 4.2 [slaidid] [.swf] . .	108
4.5.3	Tala arvutusnäide 4.3	110
4.5.4	Talal liikuvad kraanad. Näide 4.4	114
4.5.5	Talal liikuv kolonn. Näide 4.5	114
5	Kolme liigendiga kaar ja raam [Loeng 1] [Loeng 2]	121
5.1	Üldmõisted	119
5.2	Toereaktsioonide arvutus	120
5.2.1	Vertikaalne koormus	120
5.2.2	Horisontaalne koormus	121
5.3	Kaare telgjoone võrrandid	122
5.4	Kaare sisejõud	123
5.4.1	Sisejõud vertikaalsest koormusest	123
5.4.2	Sisejõud horisontaalsest koormusest	124
5.5	Seosed kaare sisejõudude vahel	125
5.6	Kolme liigendiga kaare survejoon	126
5.7	Kaare sisejõudude arvutamise näited	127
5.7.1	Paraboolse kaare arvutus. Näide 5.1	127
5.7.2	Paraboolse kaare arvutus. Näide 5.2	132
5.8	Kaare mõjujooned	133
5.9	Kaare mõjujonte koostamise näited	134
5.9.1	Paraboolse kaare mõjujooned. Näide 5.3	134
5.10	Kolme liigendiga raam	136

5.11	Kolme liigendiga raami arvutuse näited	136
5.11.1	Kolme liigendiga raam. Näide 5.4	136
5.11.2	Kolme liigendiga raam. Näide 5.5 [slaidid][.swf][ekraanivideo]	140
6	Sõrestikskeemid [Loeng 1] [Loeng 2]	149
6.1	Sõrestikskeemide liigitus	147
6.2	Staatiliselt määratud sõrestike arvutus	148
6.2.1	Sõlmede eraldamise võte	148
6.2.2	Momendipunkti võte	149
6.2.3	Projektsioonide võte	151
6.2.4	Maxwelli-Cremona diagramm	151
6.3	Talasõrestike mõjujooned	153
6.3.1	Mõjujoonte leidmine arvutiga	153
6.4	Sõrestiku arvutamise näited	154
6.4.1	Sõrestiku arvutus. Näide 6.1 [slaidid]	154
6.4.2	Sõrestiku arvutus. Näide 6.2 [slaidid]	158
6.4.3	Sõrestiku mõjujoonte koostamine. Näide 6.3 [slaidid]	165
7	Siirete arvutus	171
7.1	Sise- ja rajajõudude töö	171
7.2	Virtuaalne töö	173
7.3	Tööde vastastikkuse teoreem	174
7.3.1	Vedru vastastikune töö	175
7.3.2	Tööde vastastikkuse teoreemi avaldise	176
7.4	Siirete vastastikkuse teoreem	177
7.5	Reaktsioonide vastastikkuse teoreem	177
7.6	Siirete arvutamine	178
7.7	Siirded temperatuuri muutusest	179
7.8	Siirete arvutamise näited	181
7.8.1	Lihttala siirete arvutamise näide 7.1	181
7.8.2	Murdjoonelise teljega varda siirete arvutamise näide 7.2	183
7.8.3	Murdjoonelise teljega varda siirete arvutamise näide 7.3	186
7.8.4	Raami siirete arvutamise näide 7.4	190
II	Staatikaga määramatud süsteemid	205
8	Staatikaga määramatud konstruktsioonid	207
8.1	Staatikaga määramatu konstruktsioon	207
8.1.1	Rajatingimused ja esimene märgikokkulepe	208
8.1.2	Rajatingimused ja teine märgikokkulepe	211
8.2	Konstruktsioonide arvutamise meetodid	217
8.3	Staatikaga määramatute konstruktsioonide omadused	217

9	Jõumeetod	[Loeng 1] [Loeng 2] [Loeng 3]	221
9.1	Raamid		220
9.1.1	Staatilise määramatuse aste		220
9.1.2	Põhiskeem ja lisatundmatud		221
9.1.3	Lisatundmatute arvutamise võrrandid		222
9.1.4	Sisejõudude arvutus		223
9.1.5	Raami arvutus jõumeetodiga. Näide 9.1		223
9.1.6	Raami arvutus jõumeetodiga. Näide 9.2		229
9.1.7	Raami arvutus jõumeetodiga. Näide 9.3		238
10	Jätkuvtalad	[Loeng 1] [Loeng 2] [Loeng 3]	253
10.1	Põhiskeem ja lisatundmatud		251
10.2	Kanoonilised võrrandid		251
10.3	Kolme momendi võrrandiga jätkuvtala arvutus		254
10.3.1	Kolme momendi võrrand. Näide 10.1		254
10.4	Jätkuvtalade arvutus fookussuhtega		258
10.4.1	Fookussuhted		258
10.4.2	Koormatud silde toemomendid		260
10.4.3	Jätkuvtala arvutamine fookussuhtega. Näide 10.2	[slaidid]	262
10.5	Jätkuvtala arvutus. Näide 10.3		269
11	Deformatsioonimeetod	[Loeng 1] [Loeng 2] [Loeng 3]	283
11.1	Kinnitusmoment sõlme ja varda pöördest		283
11.1.1	Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras		284
11.1.2	Ühest otsast jäigalt kinnitatud varras		286
11.2	Varda kinnitusmomendid koormustest		287
11.2.1	Ühtlane koormus q . Jäigad sõlmed		287
11.2.2	Ühtlane koormus q . Jäik sõlm vasakul		288
11.2.3	Ühtlane koormus q . Jäik sõlm paremal		289
11.2.4	Koondatud jõud F . Jäigad sõlmed		290
11.2.5	Koondatud jõud F . Jäik sõlm vasakul		291
11.2.6	Koondatud jõud F . Jäik sõlm paremal		292
11.3	Geomeetrilise määramatuse aste		293
11.4	Geomeetriselt määratud põhiskeem		293
11.5	Deformatsioonimeetodi võrrandid		293
11.6	Sisejõudude epüüride konstrueerimine		299
11.7	Deformatsioonimeetodiga arvutamise näited		300
11.7.1	Raami arvutamine pöördenurgameetodiga. Näide 11.1		300
11.7.2	Raami arvutamine deformatsioonimeetodiga. Näide 11.2		312
12	Kaared ja võlvid	[Loeng 1]	327
12.1	Kaarkonstruksioonid		325
12.2	Kahe liigendiga kaar		326
12.3	Kahe liigendiga kaare arvutamise näited		328

12.3.1	Kahe liigendiga kaar. Näide 12.1	328
12.4	Liigendita sümmeetriline kaar	332
12.5	Liigenditeta kaare arvutamise näited	336
12.5.1	Liigenditeta kaar. Näide 12.2	336
12.6	Rõnga arvutus	342
13	Lõplike elementide meetod [Loeng 1] [Loeng 2]	349
13.1	Elastse vedru jäikusmaatriks	347
13.2	Konstruktiooni jäikusmaatriks	348
13.3	Elastse vedru virtuaaltöö	350
13.4	Võrrandisüsteemi lahendamine	352
13.4.1	Vedrusüsteemi arvutamine. Näide 13.1	352
13.5	Varda pikke jäikusmaatriks	355
13.6	Jäikusmaatriks üldkoordinaatides	355
13.7	Elementide mõjuv pikkejõud	358
13.7.1	Varrasüsteemi arvutamine. Näide 13.2	359
13.8	Sõlmede nummerdamisest	362
13.9	Sõrestiku arvutamise näited	363
13.9.1	Sõrestiku arvutamine. Näide 13.3	363
13.9.2	Sõrestiku arvutamine. Näide 13.4	367
13.10	Tala paine	368
13.10.1	Tala painde jäikusmaatriks	368
13.10.2	LEM. Tala arvutus. Näide 13.5	370
13.11	Varda paine	379
13.11.1	Varda painde jäikusmaatriks	379
14	Rajaelementide meetod [Loeng 1] [Loeng 2]	385
14.1	Rajaelementide meetodist	383
14.2	EST-meetod	384
14.2.1	Sissejuhatus EST-meetodisse	384
14.2.2	Sõrestiku arvutus EST-meetodiga. Näide 14.1	386
14.3	Varda põhivõrrandid	395
14.4	Põhivõrrandite koostamine	397
14.5	Vastastikused siirded	399
14.6	Sõlme tasakaaluvõrrandid	403
14.7	Kõrvaltingimused	406
14.8	Toetingimused	406
14.9	Siirete ja sisejõudude arvutamine	406
14.10	Raami arvutuse näited EST-meetodiga	407
14.10.1	Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 14.2	[slaidid] 407
14.10.2	Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 14.3	[slaidid] 419
14.10.3	Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 14.4	[slaidid] 425
14.11	Jätkuvtalade arvutus EST-meetodiga	434
14.11.1	Tala arvutus EST-meetodiga. Näide 14.5	[slaidid] 437

14.12	Staatikaga määratud raami arvutus EST-meetodiga	443
14.12.1	Kolme liigendiga raam. Näide 14.6 [slaidid]	445
14.13	Staatikaga määratud tala EST-meetodiga	451
14.13.1	Mitmesildeline tala EST-meetodiga. Näide 14.7 [slaidid]	453
14.13.2	Sõrestiktala arvutuskeem. Näide 14.8	459
15	Arvutus piirkoormuse järgi	465
15.1	Konstruksiooni elastoplastne töötamine	466
15.2	Piirpaindemoment ja plastne tugevusmoment	469
15.3	Piirkoormuse määramise meetodid	470
15.4	Staatikaga määratud tala	472
15.5	Jäikade tugeodega tala	473
15.6	Jäiga ja liigendtoega tala	476
15.7	Jätkuvtala piirkoormus	478
15.8	Raami piirkoormus	479
15.8.1	Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 15.3	479
III	Teist järku teooria	497
16	Arvutus teist järku teooria järgi [Loeng 1] [Loeng 2]	501
16.1	Deformeerunud elemendi tasakaaluvõrrandid	499
16.2	Töö varda pikipõikpindel	504
16.3	Homogeenne diferentsiaalvõrrand varda survele	508
16.4	Homogeenne diferentsiaalvõrrand varda tõmbel	510
16.5	Momendid varda otste pööretest ja siiretest	511
16.6	Varda otste momendid põikkoormusest	516
16.7	Täiendav moment varda pöördest	519
16.8	Ristjõud H_{ik} , pikijõud S_{ik} ja paindemoment M_{ik}	521
16.9	Paindemomendi epüüri koostamine	521
16.10	Kriitilise koormuse määramine	524
16.11	Raami kriitilise koormuse arvutamise näited	524
16.11.1	Raami I kriitiline koormus. Näide 16.1	524
16.11.2	Raami II kriitiline koormus. Näide 16.2	529
16.11.3	Raami III kriitiline koormus. Näide 16.3	533
16.11.4	Raami IV kriitiline koormus. Näide 16.4	537
16.12	Deformatsioonimeetod teist järku teoorias	545
16.12.1	Raami arvutus. Näide 16.5	545
16.12.2	Raam ja pendelvardad. Näide 16.6	563
16.13	Teist järku teooria ülekandemaatriks	567
16.14	Arvutusnäited ülekandemaatriksiga	578
16.14.1	Tala arvutus ülekandemaatriksiga. Näide 16.7	578
16.14.2	Raami arvutus ülekandemaatriksiga. Näide 16.8	583
16.14.3	Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 16.9 [slaidid]	592

16.15 Lõplik element pikipõikpindel	610
16.15.1 Jäikusmaatriks pikipõikpindel	610
16.15.2 Tala arvutus LEM-iga. Näide 16.10	614
IV Lisad	625
A Maatriksid	627
A.1 Maatriksi mõiste	627
A.2 Rea- ja veeruvektor	627
A.3 Maatriksite liitmine ja lahutamine	628
A.4 Vektorite ja maatriksite korrutamine	629
A.5 Maatriksite element-element korrutamine	631
A.6 Osamaatriksid	632
A.7 Maatriksite transponeerimine	632
A.8 Pöördmaatriksid	633
A.9 Maatriksi determinant	634
A.10 Võrrandisüsteemi lahendamine	635
A.11 Hõre maatriks	637
A.12 Maatriksi staatiline kondensatsioon	642
A.12.1 Tala element liigendiga paremal	643
A.12.2 Tala element liigendiga paremal. Näide A.4	644
A.12.3 Tala element liigendiga vasakul	644
A.12.4 Tala element liigendiga vasakul. Näide A.5	645
B Hõredad maatriksid ja GNU Octave	647
B.1 Maatriksi sisestamine	647
B.2 Maatriksi teisendamine	650
C Interpoleerimine	653
C.1 Lagrange'i interpolatsioon	653
C.2 Hermite'i interpolatsioon	657
D Numbriline integreerimine	661
D.1 Sissejuhatavad märkused ja määrangud	661
D.2 Newton-Cotes'i valemid	663
D.2.1 Simpsoni valem	665
D.2.2 Simpsoni 3/8-valem	666
D.2.3 Vereštšagini võte	666
D.3 Gaussi valemid	668
D.4 Näiteid numbrilisest integreerimisest	669

E	Ligikaudsed lahendid	675
E.1	Rajatingimused	675
E.2	Ligikaudsed lahendid	677
E.2.1	Lähendfunktsioonid	678
E.2.2	Lähendi vea mõõdu valik	678
E.2.3	Lähendamismeetod. Kaalutud hälvete meetod	679
F	Mõisteid vardateooriast	683
F.1	Varda tööd	683
F.1.1	Töö varda pikkel	683
F.1.2	Töö varda paindel	685
F.2	Ülekandemaatriks	687
G	Ülekandemaatriksid	689
G.1	Algparameetrite meetod	689
G.2	Esimest järku teooria ülekandemaatriks	692
G.2.1	Sõrestiku varda ülekandemaatriks	695
G.3	Ülekandemaatriksid teist järku teoorias	696
H	Põhivalemite tabelid	701
H.1	Deformatsioonimeetod	701
H.2	Deformatsiooni- ja jõumeetod II järku teoorias	706
I	Arvutiprogrammid	717
I.1	Tala arvutus	717
I.2	Kaare arvutus	719
I.3	Sõrestiku arvutus	720
I.4	Arvutiprogramme siirete arvutamiseks	720
I.5	Esimest järku teooria ülekandemaatriksid	721
I.6	Raami arvutus. Jõumeetod	732
I.7	Jätkuvtala arvutus	733
I.8	Deformatsioonimeetodiga arvutus	735
I.9	Staatiliselt määramatu kaare arvutus	737
I.10	Lõplike elementide meetod	737
I.11	Piirkoormuse järgi arvutus	739
I.12	Teist järku teooria järgi arvutus	740
I.13	Kriitilise koormuse leidmine	741
I.14	Teist järku teooria ülekandemaatriksid	743
	Kirjandus	749
	Täiendav kirjandus	754
	Aineregister	755

Joonised

1.1	Varrassüsteemi koht mehaanikas	31
1.2	Sisejõud varda sisepinnal	32
1.3	Varda tööseisundid	33
1.4	Lõikepinnal mõjuvad jõud ja sisejõud	34
1.5	Sisejõud ja kontaktjõud	36
1.6	Lök kõrguselt $h = 0$	38
1.7	Koondjõud	39
1.8	Deltafunktsioon	40
1.9	Aproksimatsiooni tasemed	41
1.10	Varda fenomenoloogilise mudeli struktuurskeem	41
1.11	Joone kõverus	43
1.12	Tala deformatsioon	43
1.13	Ekstsentriline surve	44
1.14	Ekstsentriline surve II järku teoorias	44
1.15	Varda element	45
1.16	Põikjõu märgi määramine	46
1.17	Põikjõud horisontaalses vardas	47
1.18	Põikjõud kaldu vardas	47
1.19	Märgikokkulepped	48
1.20	Vasaku ja parema käe teljestik	48
1.21	Koordinaatide teisendus	49
1.22	Varda suunakoosinused	50
1.23	Sõlme tasakaalutingimused	51
1.24	Kõrvaltingimused	52
1.25	GNU Octave'i versioon 3.0	53
1.26	Toereaktsiooni arvutus GNU Octave'iga	54
1.27	GNU Octave'i arvutuspäevik	55
1.28	Toereaktsiooni arvutus GNU Octave'i programmiga I	56
1.29	Toereaktsiooni arvutus GNU Octave'i programmiga II	57
1.30	Painde diferentsiaalseosed	57
1.31	Lihttala	58
1.32	Lihttala arvutusskeem	59
1.33	Lihttala epüürid	60

1.34	Lihttala pöördenurgad ja siirded	62
2.1	Liikuv koormus	65
2.2	Epüürid ja mõjujooned	66
2.3	Toereaktsioonide A ja B mõjujooned	67
2.4	Konsoolidega tala toereaktsioonide mõjujooned	67
2.5	Põikjõu mõjujoone parem pool	68
2.6	Põikjõu Q_k mõjujoon	68
2.7	Paindemomendi mõjujoon	69
2.8	Paindemomendi M_k mõjujoon	69
2.9	Konsooli mõjujooned	70
2.10	Konsoolidega tala mõjujooned	71
2.11	Konsoolidega tala paindemomendi ja põikjõu mõjujooned	72
2.12	Mõjujoone kasutamine	73
2.13	Sisejõu leidmine mõjujoonte abil	74
2.14	Kolmnurkse kujuga mõjujoon	75
2.15	Hulknurkse kujuga mõjujoon	76
2.16	Suurima sisejõu leidmine	77
3.1	Toed ja toereaktsioonid	80
3.2	Liigendid ja kontaktjõud	82
3.3	Varrassüsteemi vabadusaste	84
3.4	Gerberi tala toereaktsioonid ja kontaktjõud	85
3.5	Hetkmuutuv tala	85
3.6	Pöörde hetkkese	86
3.7	Varrasahel	86
3.8	Geomeetriselt muutumatu arvutusskeem	87
3.9	Hetkpoolus	87
3.10	Peapoolused ja kõrvalpoolused	88
3.11	Mehhanism	88
3.12	Poolusplaan ja varraste pöörded	89
4.1	Gerberi tala 1 korrusskeem	92
4.2	Gerberi tala 2 korrusskeem	93
4.3	Gerberi tala 3 korrusskeem	93
4.4	Gerberi tala 3 epüürid	94
4.5	Gerberi tala 2 mõjujooned	95
4.6	Gerberi tala 4	96
4.7	Gerberi tala 4 sisejõud	104
4.8	Gerberi tala 4 mõjujooned	108
4.9	Gerberi tala 5 sisejõudude epüürid ja mõjujooned	111
4.10	Gerberi tala suurimad sisejõud sildkraanadest	115
4.11	Gerberi tala suurimad sisejõud autokolonnist	116
5.1	Kolme liigendiga kaar	119

5.2	Kaare erinevad kannaliigendid	120
5.3	Kaare telgjoon	122
5.4	Kolme liigendiga kaare sisejõud vertikaalsest koormusest	123
5.5	Kolme liigendiga kaare sisejõud horisontaalsest koormusest	124
5.6	Kaare element temale rakendatud koormuse ja sisejõududega	125
5.7	Resultantjõu hulknurk	127
5.8	Paraboolse telgjoonega kaar	128
5.9	Lihttala epüürid	130
5.10	Kaare sisejõud N , Q ja M	131
5.11	Kaare survejoon M/H	132
5.12	Paraboolse telgjoonega kaar 2	132
5.13	Kaare 2 sisejõud N , Q ja M	133
5.14	Kaare mõjujooned	135
5.15	Kolme liigendiga raam	136
5.16	Paindemomentide liitmine	137
5.17	Raami varda \bar{dc} põikjõud	138
5.18	Kolme liigendiga raami sõlm d	138
5.19	Kolme liigendiga raami sõlm e	139
5.20	Kolme liigendiga raami sisejõud	139
5.21	Normaaljõud riivis	140
5.22	Kolme liigendiga raam 2	141
5.23	Horisontaalsete toereaktsioonide arvutus	141
5.24	Sisejõud postides	142
5.25	Sisejõud postis ja riivis	142
5.26	Raami 2 sõlm d	143
5.27	Raami 2 sõlm e	143
5.28	Raami 2 epüürid	144
6.1	Sõrestikskeemide liigitus	147
6.2	Sõlmede eraldamise võte	149
6.3	Lõige I-I	149
6.4	Momendipunkti võte	150
6.5	Maxwelli-Cremona diagramm	151
6.6	Jõuhulknurgad	152
6.7	Varraste eraldamise võte	154
6.8	Sõrestiku topoloogia	155
6.9	Võrrandisüsteemi vasak pool	155
6.10	Võrrandisüsteemi koostamine	156
6.11	Jõud sõlmedes	157
6.12	Vasaku poole pöördmaatriks G'	157
6.13	Murdjoonelise ülemise vööga sõrestik	158
6.14	Sõrestiku vasakpoolne osa	163
6.15	Sõrestiku parempoolne osa	163
6.16	Sõlme 7 tasakaal	164

6.17	Sõlme 4 tasakaal	164
6.18	Lihttala toereaktsioonide mõjujooned	165
6.19	Sõrestik. Ühikjõud paremal	165
6.20	Sõrestik. Ühikjõud vasakul	166
6.21	Sõlm 7	167
6.22	Sõlm 4	167
6.23	Sõrestiku mõjujooned	169
7.1	Passiivtöö	172
7.2	Aktiivtöö	172
7.3	Täiendustöö	172
7.4	Virtuaalne töö	173
7.5	Tala virtuaalne töö	174
7.6	Vastastikune töö	175
7.7	Reaktsioonide vastastikune töö	178
7.8	Prinkused temperatuuri muutusest	180
7.9	Lihttala siirete arvutus	181
7.10	Koormus- ja ühikepüürid	182
7.11	Siirete arvutus	183
7.12	Raami siirete arvutamine	190
7.13	Siirete arvutamine. Raami paindemoment M_p	193
7.14	Siirete arvutamine. Raami paindemoment m_1	194
7.15	Siirete arvutamine. Raami paindemoment m_2	196
7.16	Siirete arvutamine. Normaaljõu epüürid	197
8.1	Toereaktsioonid ja toesiirded	207
8.2	Jätkuvtala sisejõud ja siirded EST-meetodiga	211
8.3	Tundmatud tala arvutamiseks. II märgikokkulepe	212
9.1	Tundmatute üldarv	219
9.2	Kinnised kontuurid ja lihtliigendid	221
9.3	Geomeetriliselt muutuvad ja hetkmuutuvad skeemid	221
9.4	Raamide põhiskeeme	222
9.5	Kahekordselt staatiliselt määramatu raam 1	224
9.6	Raami 1 põhiskeem ja paindemomentide epüürid	225
9.7	Raami 1 sisejõudude epüürid	226
9.8	Raam 1. Epüüride liitmine	227
9.9	Raami 1 sõlmede tasakaal	228
9.10	Raami 1 toereaktsioonid	228
9.11	Kolmekordselt staatiliselt määramatu raam 2 ja põhiskeem	229
9.12	Põhiskeemi epüürid	230
9.13	Raami 2 paindemomendi epüür	232
9.14	Raami 2 N ja Q epüürid	232
9.15	Raami 2 sõlmed	233

9.16 Raami 2 toereaktsioonid	234
9.17 Neljakordselt staatiliselt määramatu raam 3 ja põhiskeem	239
9.18 Raam 3. Ühikmomendi m_1 epüür.	240
9.19 Interpoleerimine	240
9.20 Raam 3. Ühikmomendi m_3 epüür.	241
9.21 Raam 3. Ühikmomentide m_2 ja m_4 epüürid.	242
9.22 Raam 3. Paindemomendi M_p^0 epüür	242
9.23 Raam 3. Paindemomendi M_p , Q ja N , epüürid	243
9.24 Kanoonilise võrrandisüsteemi lahendamine	245
9.25 Raam 9.1. Raami sõlmede tasakaal	247
9.26 Raam 9.1. Raami staatiline kontroll	249
10.1 Jätkuvtala põhiskeem	251
10.2 Jätkuvtala põhiskeemi epüürid	252
10.3 Jätkuvtala tähised	254
10.4 Jätkuvtala epüürid	254
10.5 Fiktiivsete koormuste leidmine	255
10.6 Jätkuvtala põikjõu epüür ja toereaktsioonid	257
10.7 Jätkuvtala fookused	258
10.8 Jätkuvtala fookussuhted	259
10.9 Jätkuvtala toemomendid	261
10.10 Jätkuvtala. Fookussuhted	263
10.11 Fookussuhete arvutamine	263
10.12 Toemomentide arvutamine	264
10.13 Fookussuhted. Koormus kolmandal sildel	265
10.14 Fookussuhted. Koormus teisel sildel	266
10.15 Fookussuhted. Koormus konsoolil	266
10.16 Fookussuhted. Koormus esimesel sildel	267
10.17 Jätkuvtala näide 10.3	269
10.18 Jätkuvtala omakaalust põhjustatud M , Q epüürid ja toereaktsioonid	270
10.19 Jätkuvtala ajutine koormus teises avas	273
10.20 Jätkuvtala ajutine koormus kolmandas avas	275
10.21 Jätkuvtala suurimad ja vähimad paindemomendid	278
11.1 Varda deformatsioon	282
11.2 Momentide ja varraste pöördesuunad	283
11.3 Ühtlane koormus q . Jäigad sõlmed	287
11.4 Ühtlane koormus q . Jäik sõlm vasakul	288
11.5 Ühtlane koormus q . Jäik sõlm paremal	289
11.6 Koondatud jõud F . Jäigad sõlmed	290
11.7 Koondatud jõud F . Jäik sõlm vasakul	291
11.8 Koondatud jõud F . Jäik sõlm paremal	292
11.9 Kaldpostiga raami põhiskeem	295
11.10 Kaldpostiga raami varrasahel	295

11.11	Kaldpostiga raami koormusolukorrad	297
11.12	Kolmekordselt geomeetriliselt määramatu raam 2	300
11.13	Kolmekordselt geomeetriliselt määramatu raami 2 varrasahel	300
11.14	Raam 2. Geomeetriliselt määratud põhiskeem	301
11.15	Raami 2 koormusolukorrad	302
11.16	Raam 2. Momendid varraste otstes	305
11.17	Raami 2 põikjõu epüür	306
11.18	Raami 2 sõlmede tasakaal	307
11.19	Raami 2 normaaljõu epüür	307
11.20	Raami 2 toereaktsioonid	308
11.21	Raam	313
11.22	Geomeetriliselt määratud põhiskeem	313
11.23	Varrasahel	314
11.24	Raami koormusolukorrad	317
11.25	Momendid varda otstes ja paindemomendi epüür	320
11.26	Raami põikjõu märk ja epüür	321
11.27	Sõlme 1 tasakaal	322
11.28	Sõlme 2 tasakaal	322
11.29	Raami normaaljõu epüür	322
11.30	Raami toereaktsioonid	323
12.1	Kaared	325
12.2	Kahe liigendiga kaar	327
12.3	Kahe liigendiga kaare M, Q, N epüürid	329
12.4	Liigendita sümmeetriline kaar	332
12.5	Liigendita kaar. Tundmatu X_1	333
12.6	Liigendita kaar. Tundmatu X_2	334
12.7	Liigendita kaar. Tundmatu X_3	335
12.8	Liigenditeta kaar	337
12.9	Rõnga koormused	343
12.10	Rõngas. Põhiskeem	344
13.1	Vedru	347
13.2	Vedrusüsteem	348
13.3	Rajajõud ja sisejõud	350
13.4	Virtuaaltöö	350
13.5	Vedrusüsteemi arvutusskeem	353
13.6	Varda element	355
13.7	Varrassüsteemi arvutusskeem	359
13.8	Sõlmede nummerdamine	362
13.9	Võrrandisüsteemi kuju	363
13.10	Staatikaga määramatu sõrestik	363
13.11	Tala elemendi jõudude ja siirete positiivsed suunad	368
13.12	Tala arvutus LEM-iga	370

13.13 Tala sisejõude epüürid LEM-meetodiga	375
13.14 Varda jõudude ja siirete positiivsed suunad	379
14.1 Sõrestiku varras	384
14.2 Sõrestik	386
14.3 Sõrestiku arvutusskeemi nummerdus	387
14.4 Sõrestiku võrrandite $\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}$ struktuur	387
14.5 Varraste siirete ja kontaktjõudude nummerdus	389
14.6 Sõrestikskeemi elemendid	393
14.7 Sõrestikskeemi \mathbf{spA} nullist erinevate elementide asukohad	393
14.8 Varda jõudude ja siirete positiivsed suunad	395
14.9 Võrrandisüsteemi $\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}$ struktuur	398
14.10 Transitiivus	399
14.11 Sõlme A3 pidevus	400
14.12 Sõlme A2 pidevus	401
14.13 Sõlme B3 pidevus	401
14.14 Sõlme B32 pidevus	402
14.15 Sõlme B2 pidevus	403
14.16 Sõlme A3 tasakaal	403
14.17 Sõlme A2 tasakaal	404
14.18 Sõlme B3 tasakaal	404
14.19 Sõlme B2 tasakaal	405
14.20 Sõlme B32 tasakaal	405
14.21 Toesõlm	406
14.22 Kahe avaga raam	408
14.23 Raami siirete nummerdus	409
14.24 Raami kontaktjõudude nummerdus	409
14.25 Positiivne pind	412
14.26 Raami EST paindemomendi epüür	412
14.27 Raami EST Q ja N	412
14.28 Raami EST toereaktsioonid	413
14.29 Raami EST elemendid	414
14.30 Raami EST \mathbf{spA} nullist erinevate elementide asukohad	415
14.31 Kahe avaga raam EST93	419
14.32 Raami EST93 tundmatute nummerdus	421
14.33 Raami EST93 toereaktsioonid	421
14.34 Raami EST93 sisejõudude epüürid	422
14.35 Raami EST93 elemendid	423
14.36 Raami EST93 \mathbf{spA} nullist erinevate elementide asukohad	424
14.37 Raami EST77	426
14.38 Raami EST77 tundmatute nummerdus	426
14.39 Sõlme A2v tasakaal	427
14.40 Sõlme A2p tasakaal	427
14.41 Raami EST77 elemendid	428

14.42 Raami EST77 spA nullist erinevate elementide asukohad	430
14.43 Sõlme T2 pidevus	435
14.44 Sõlme T1 pidevus	435
14.45 Sõlme T2s tasakaal	436
14.46 Sõlme T1s tasakaal	436
14.47 Jätkuvtala EST	437
14.48 Jätkuvtala EST nummerdus	438
14.49 Tala EST elemendid	440
14.50 Tala EST spA nullist erinevate elementide asukohad	440
14.51 Kolme liigendiga raam	445
14.52 Kolme liigendiga raami kontaktjõudude nummerdus	446
14.53 Kolme liigendiga raami toereaktsioonid	447
14.54 Kolme liigendiga raami EST-meetodi elemendid	448
14.55 Kolme liigendiga raami nullist erinevate elementide asukohad	449
14.56 Gerberi tala arvutus EST-meetodiga	453
14.57 Gerberi tala EST nummerdus	455
14.58 EST-meetod. Gerberi tala elemendid	456
14.59 Gerberi tala. Nullist erinevate elementide asukohad	457
14.60 Sõrestiktala arvutusskeem EST-meetodiga	460
14.61 Sõrestiktala arvutusskeemi sõlmed ja elemendid	460
14.62 Sõrestiktala arvutusskeemi siirded ja kontaktjõud	461
14.63 Sõrestiktala spA nullist erinevate elementide asukohad	463
14.64 Sõrestiktala sisejõudude epüürid	464
15.1 Tõmbediagramm	465
15.2 Staatikaga määramatu süsteem	466
15.3 Varrassüsteemid	467
15.4 Koormus-siire diagramm	468
15.5 Ristlõige puhtal paindel	469
15.6 Ristkülikuline ristlõige	470
15.7 Vastupanumomendi suhteid α_{pl}	470
15.8 Piirmoment lihttala	472
15.9 Jäikade tugelega tala	473
15.10 Piirkoormuse q ja siirde w diagramm	475
15.11 Jääkmoment	476
15.12 Jäiga ja liigendtoega tala	477
15.13 Jätkuvtala piirkoormus	478
15.14 Kahe avaga raam	480
15.15 Raami siirete ja kontaktjõudude numbrid	480
15.16 Kontaktjõudude M_{pl} töö sõlmes. Teine märgikokkulepe	481
15.17 Paindemomentide epüürid staatikaga määramatus raamis ($n = 3$)	481
15.18 Paindemomentide epüürid staatikaga määramatus raamis ($n = 2$)	482
15.19 Paindemomentide epüürid staatikaga määramatus raamis ($n = 1$)	483
15.20 Paindemomentide epüürid staatikaga määratus raamis ($n = 0$)	484

15.21 Raami 3. sõlme siirde w ja jõu F diagramm	485
15.22 Raami piirkoormus	494
15.23 Raami kaheparameetriline koormamine	495
16.1 Pikijõud, ristjõud, normaaljõud ja põikjõud	499
16.2 Deformeerunud varda element	500
16.3 Jõud ja deformatsiooni mõõdud	504
16.4 Normaaljõu komponendid	506
16.5 Momendid sõlmede ja varraste pööretest	508
16.6 Momendid koormusest	509
16.7 Varda eesarvude arvutamine GNU Octave'iga.	514
16.8 Eesarvude arvutamine GNU Octave'iga.	515
16.9 Täiendav moment varda pöördest	519
16.10 Täiendavad momendid	519
16.11 Ristjõud H_{ik} , pikijõud S_{ik} ja paindemoment M_{ik}	520
16.12 Paindemomentide epüür	522
16.13 Raami stabiilsus	524
16.14 Raami geomeetriselt määratud põhiskeem	525
16.15 Raami varrasahel	525
16.16 Determinandi nullkohad I	526
16.17 Raam ja geomeetriselt määratud põhiskeem	529
16.18 Determinandi nullkohad II	531
16.19 Raami skeem kriitilise koormuse määramiseks	533
16.20 Raami varrasahel ja geomeetriselt määratud põhiskeem	534
16.21 Determinandi nullkohad III	536
16.22 Raami IV stabiilsus	538
16.23 Raami IV põhiskeem	538
16.24 Raami IV varrasahel	539
16.25 Determinandi nullkohad IV	540
16.26 Kinnitustegurid	543
16.27 Determinandi nullkoht pärast jäikuse suurendamist	544
16.28 Raam	545
16.29 Geomeetriselt määratud põhiskeem	545
16.30 Varrasahel	546
16.31 Raami varraste eesarvud. Varras 1–2	546
16.32 Raami varraste eesarvud. Varras 1–4	547
16.33 Raami varraste eesarvud. Varras 2–3	548
16.34 Kinnitusemomendid	549
16.35 Reaktsioonimomendid sõlme 1 pöördest	549
16.36 Reaktsioonimomendid sõlme 2 pöördest	551
16.37 Reaktsioonimomendid varda pöördest	552
16.38 Raami täiendav moment	553
16.39 Momendid varda otstes	556
16.40 Momendi ja põikjõu arvutus vardas 2	558

16.41	Momendi ja põikjõu arvutus vardas 1 ja 3	559
16.42	Raami paindemomentide epüür	559
16.43	Sõlme 1 tasakaal	560
16.44	Sõlme 2 tasakaal	561
16.45	Raami põikjõu epüür	561
16.46	Raami pikijõu epüür	562
16.47	Raami toereaktsioonid	563
16.48	Pendelvarrastega raam	564
16.49	Raami varrasahel	564
16.50	Survejõud ja normaaljõud	575
16.51	Tala arvutus ülekande maatriksiga	579
16.52	Tala siirded	581
16.53	Tala sisejõud	582
16.54	Raam	583
16.55	Raami siirete ja kontaktjõudude nummerdus	584
16.56	Kontaktjõud sõlmes	586
16.57	Raami toereaktsioonid	588
16.58	Raami sisejõud	591
16.59	Kahe sildega raam	592
16.60	Raami tundmatute nummerdus	593
16.61	Kahe sildega raami toereaktsioonid	603
16.62	Horisontaalsiirded kahe sildega raamis	603
16.63	Kahe sildega raami sisejõud	604
16.64	Varda lõplik element	610
16.65	Tala arvutus lõplike elementide meetodiga	614
16.66	Tala jäikusmaatriks	617
16.67	Tala sisejõud lõplike elementide meetodiga	623
A.1	Maatriksi sisestamine <i>GNU Octave</i> 'iga	628
A.2	Maatriksite ja vektorite element-element korrutamine	631
A.3	Tala element	643
C.1	Funktsiooni interpolatsioon	653
C.2	Lineaarne interpolatsioon	655
C.3	Ruutinterpolatsioon	655
C.4	Lineaarse interpolatsiooni sõlmed	656
C.5	Ruutinterpolatsiooni sõlmed	656
C.6	Kuupinterpolatsiooni sõlmed	656
C.7	Hermite'i interpolatsioon	657
C.8	Hermite'i interpolatsiooni sõlmed	658
C.9	Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid	659
D.1	Legendre'i polünoomid	663
D.2	Simpsoni valem	664

D.3	Simpsoni $\frac{3}{8}$ -valem	664
D.4	Märgid Simpsoni valemis	665
D.5	Vereštšagini võte	667
D.6	Epüüride pindalad	667
D.7	Gaussi kaks sõlme	668
D.8	Gaussi kolm sõlme	668
D.9	Tala elemendi kontaktjõudude positiivsed suunad	670
E.1	Ühtlane lähendamine	679
E.2	Lahendusmeetodite klassifikatsioon	681
G.1	Algparameetrid	689
G.2	Jõudude positiivsed suunad universaalvõrrandis	690
H.1	Pöördenurga katkevus $\Delta\varphi$	701
H.2	Elastse joone katkevus Δw	701
H.3	Eesarvud A^* , B^* , C^* , A^*+B^* survel	706
H.4	Eesarvud A^* , B^* , C^* , A^*+B^* tõmbel	708
H.5	Eesarv V^* survel	708

Tabelid

1.1	Koormused	39
6.1	Sõrestiku arvutustabel I	159
6.2	Sõrestiku arvutustabel II	159
6.3	Varraste sisejõudude võrdlus	170
10.1	Valemid vabaliikmete arvutamiseks	257
11.1	Rajatingimused sõlme ja varda pööretest	284
11.2	Kinnitusmomendid ja põikjõud. II märgikokkulepe	324
12.1	Liigendita kaare sisejõudude võrdlus	342
13.1	Vedrusüsteemi topoloogia	349
13.2	Elementide indekstabelid	349
13.3	Konstruksiooni jäikusmaatriksi aadressid	349
13.4	Süsteemi topoloogia	353
13.5	Vedrude indekstabelid	353
13.6	Vedrude jäikusmaatriksid	353
13.7	Varrassüsteemi topoloogia	360
13.8	Varraste suunakoosinused	360
13.9	Varraste indekstabelid	360
13.10	Varraste jäikusmaatriksid	360
13.11	Kinnitusjõud. II märgikokkulepe	380
14.1	Sõrestiku sisejõudude võrdlus	394
14.2	Raami EST sisejõudude võrdlus jõumeetodiga leitud	418
14.3	Raami EST77 sisejõudude võrdlus	433
14.4	Tala EST sisejõudude võrdlus	442
14.5	Kolme liigendiga raami sisejõudude võrdlus	450
14.6	EST-meetod. Gerberi tala sisejõudude võrdlus	459
16.1	Põhivõrrandid	503
16.2	Rajatingimused pööretest	511
16.3	Rajatingimused põikkoormusega	517
16.4	Varraste andmed	546

16.5	Varraste eesarvud	550
16.6	Momentide võrdlus I ja II järku teorias	555
16.7	Momendid vardas 1–2	555
16.8	Momendid vardas 1–4	556
16.9	Momendid vardas 2–3	556
16.10	Põikjõud vardas 1–2	558
16.11	Põikjõud vardas 1–4	558
16.12	Põikjõud vardas 2–3	559
16.13	Varraste lähteandmed teisel lähendil	561
16.14	Varraste eesarvude teine lähend	562
16.15	Momentide võrdlus I ja II järku teorias	566
16.16	Raami varraste topoloogia	593
16.17	Kahe sildega raami sisejõudude võrdlus	609
16.18	Tala elementide paindemomendid [kN·m]	619
16.19	Tala paindemomendid [kN·m]	619
16.20	Tala ristjõud [kN]	622
D.1	Ortogonaalsete polünoomide kaalufunktsioonid	662
G.1	Koormusvektor	694
G.2	Koormusvektor (järg 1)	695
G.3	Koormusvektor survele (pikijõud S ja ristjõud H)	699
G.4	Koormusvektor tõmbel (pikijõud S ja ristjõud H)	700
H.1	Jäikade tugelega varda toemomendid*	702
H.2	Jäikade tugelega varda toemomendid*	703
H.3	Jäiga ja liigendtoega varda toemoment*	704
H.4	Liigend ja jäiga toega varda toemoment*	705
H.5	Eesarvud	707
H.6	Jäikade tugelega varda toemomendid survele	709
H.7	Jäikade tugelega varda toemomendid survele	710
H.8	Jäiga ja liigendtoega varda toemoment survele	711
H.9	Liigend ja jäiga toega varda toemoment survele	712
H.10	Sisejõud surutud vardas	713
H.11	Sisejõud surutud vardas (järg 1)	714
H.12	Sisejõud surutud vardas (järg 2)	715

Osa I

Staatikaga määratud süsteemid

1. Sissejuhatus

Ehitis peab olema otstarbekas, tugev ja püsiv ning kaunis. Ehitusinseneri ülesandeks on tugeva ja püsiva ehituskonstruksiooni projekteerimine. Ehitusmehaanika on ehituskonstruksioonide tugevuse ja püsivuse kontrollarvutuse vahend. Ehitusmehaanika meetodite valdamine eeldab matemaatilist ja ruumilist mõtlemist. Arvutite kasutamine eeldab ka arvutusmehaanika ja programmeerimise aluste tundmist.

Ehituskonstruksioone arvutatakse piirseisundi järgi. *Piirseisund* on seisund, mille ületamisel konstruktsioon ei rahulda sellele esitatavaid nõudeid. Ehituskonstruksioone projekteeritakse põhiliselt kahe piirseisundi järgi:

- *kandepiirseisund* – seisund, mille ületamisega kaasnevad konstruktsiooni kahjustused või purunemine
- *kasutuspiirseisund* – seisund, mille ületamisel konstruktsioon või tema osa ei ole enam suuteline täitma eksploatatsiooninõudeid.

1.1 Ülesanded ja eesmärk

Konstruksiooni arvutamisel kandepiirseisundi järgi tuleb kontrollida:

- konstruktsioonielemendi painde-, tõmbe-, nõtkevõimet jne
- konstruktsiooni kui terviku või selle mis tahes osa staatilist tasakaalu
- konstruktsiooni stabiilsuse kadu
- konstruktsiooni purunemist plastsete deformatsioonide tulemusel.

Konstruksiooni arvutamisel kasutuspiirseisundi järgi tuleb kontrollida:

- deformatsioone ja siirdeid, mis halvendavad konstruktsioonide kasutust.

Ehitusmehaanika ülesandeks on:

- anda välismõjude põhjustatud sisejõudude, siirete, omavõnkesageduste arvutamise arvutusmeetodid ja eeskirjad
- anda konstruktsioonidele otstarbekohane kuju.

1.2 Eeldused ja printsiibid

Ehitusmehaanika on teadus, mis uurib konstruktsioonide kandevõimet olenevalt ehitusmaterjalide füüsilistest omadustest. Ehitusmehaanika lähtub järgmistest eeldustest:

- materjal on elastne
- materjal on homogeenne, st materjali kõikides punktides on füüsilised omadused ühesugused
- materjal on isotroopne, st kõikides sihtides ühesuguste elastsusomadustega
- kehtib *Hooke'i* seadus: deformatsioonid elastses kehas on võrdelised koormusega
- konstruktsioonielementide siirded on võrreldes elementide mõõtmetega väikesed.

Kui kehtib *Hooke'i* seadus ja elementide siirded on suhteliselt väikesed, siis võib rakendada *jõudude mõju sõltumatuse printsiipi* (superpositsiooniprintsiip¹): *konstruktsioonile mõjuvate jõudude süsteemi põhjustatud sisejõud ja deformatsioonid võrduvad iga jõu poolt eraldi põhjustatud sisejõudude ja deformatsioonide algebralise summaga.*

1.3 Varrassüsteemide koht mehaanikas

Mehaanika on teadus, mis käsitleb vedelike, tahkete kehade ja gaaside liikumist (paigalseisu) neile rakendatud jõudude mõjul. Klassikaline mehaanika uurib makrokehade paigalseisu ja liikumist valguse kiirusest tunduvalt väiksemate kiiruste juures. Valguse kiirusele lähedaste kiiruste ja mikroosakeste puhul rakendatakse relativistlikku mehaanikat ja kvantmehaanikat.

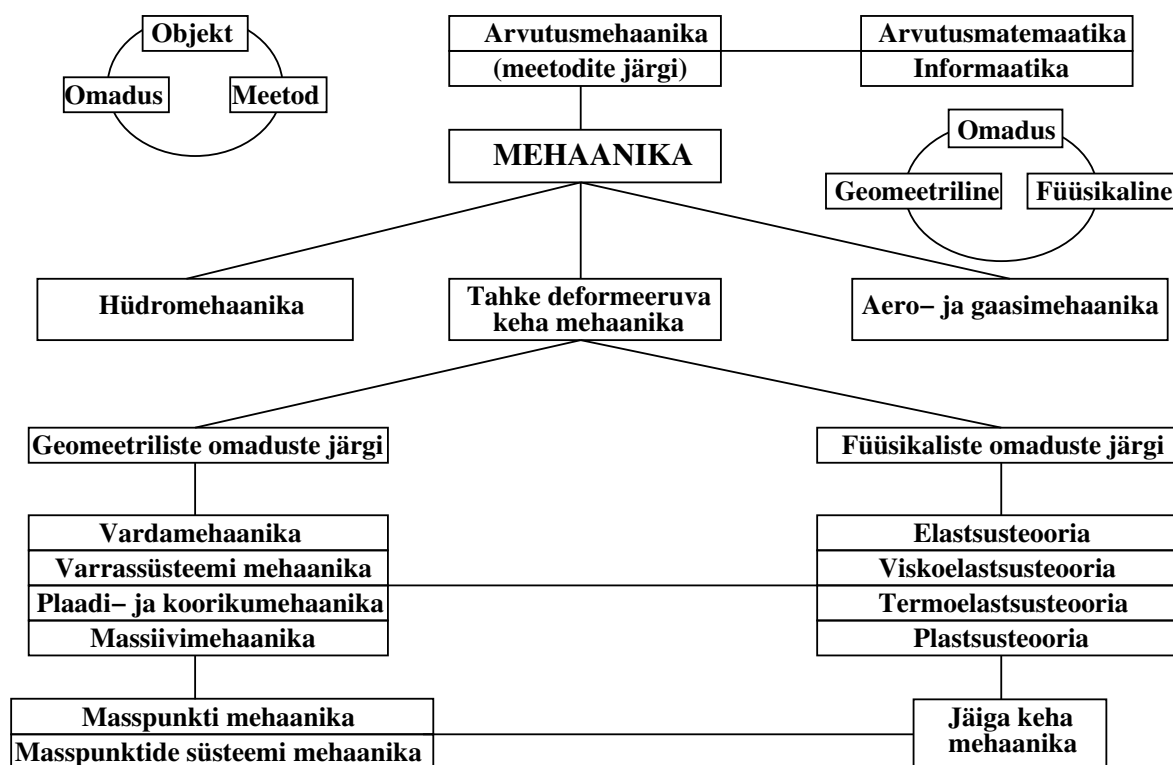
Vaatleme klassikalist mehaanikat ja nimetame seda lühiduse mõttes mehaanikaks. Varrassüsteemide mehaanika koha määramiseks võtame aluseks mõisted *objekt*, *omadus* ja *meetod* (vt joonis 1.1).

Mehaanika üheks *objektiks* on tahked kehad. Tahkeid kehi võib liigitada nende geometriliste ja füüsiliste omaduste järgi. Üheks geometriliseks omaduseks on kuju. *Geomeetrilise kuju* (omaduse) järgi on tahked kehad *vardad*, *plaadid* ja *koorikud* ning *massiivid*. *Füüsiliste omaduste* põhjal räägitakse elastsetest, plastsetest, viskoelastsetest jne kehadest.

Abstraktsioonina loetakse tahket keha mõnikord jäigaks, vahel vaadeldakse jäika keha masspunktina.

Mehaanikaobjektide liikumise kirjeldamiseks ja nende omaduste uurimiseks kasutatakse *teooriaid*, mida võib liigitada selle järgi, missuguse omaduse nad seavad esikohale (fookusesse). Füüsiliste omaduste uurimisega tegelevad elastsusteooria, plastusteooria, viskoelastsusteooria (vt joonis 1.1). Abstraktse jäiga keha liikumist uurib teoreetiline mehaanika.

¹superpositsiooniprintsiip – mitme mõju resultaat on üksikmõjude resultaatide summa.



Joonis 1.1. Varrassüsteemi koht mehaanikas

Tahke keha geomeetrilisi omadusi uurivad vardamehaanika, *varrassüsteemi mehaanika*, plaadi- ja koorikumehaanika ning massiivimehaanika (joonis 1.1).

Vardamehaanikas on kasutusel järgmised teooriad: Bernoulli² vardateooria, Navier³ vardateooria, elastsusteooria, viskoelastsusteooria jne. Edaspidi vaatleme põhiliselt Bernoulli vardateooriat, mida käsitleti tehnilises mehaanikas (tugevusõpetuses).

Iga teooria kasutab objektide (kehade) liikumise ja nende omaduste uurimiseks kindlapiirilisi uurimisviise ehk *meetodeid*. Varrassüsteemi sisejõudude ja siirete arvutamiseks kasutatavaid arvutusmeetodeid võib jagada graafilisteks ja numbrilisteks meetoditeks. Graafilistest meetoditest võib nimetada

- Maxwelli-Cremona diagrammi
- jõu- ja nõõrhulknurga diagrammi [Rää64]
- Culmanni meetodit.

Numbrilisi meetodeid varrasüsteemi sisejõudude ja siirete arvutamiseks jagatakse omakorda klassikalisteks ja maatriksmeetoditeks. Klassikalistest analüütilistest meetoditest võib nimetada

² Jacob Bernoulli, šveitsi matemaatik, 1655–1705.

³ Louis Marie Navier, prantsuse insener ja füüsik, 1785–1836.

- lõikemeetodit tasakaaluvõrrandite koostamiseks
- energiaprintsiipe
- jõumeetodit
- deformatsioonimeetodit, millest on välja arenenud lõplike elementide meetod
- piirkoormuste määramist
- Crossi meetodit (momentide jaotamise meetodit) [Rää64].

Arvutite kasutuselevõtmisega arendati klassikalised meetodid maatrikskujule. Need maatriksmeetodid on esitatud W. B. Krätzigi õpikutes [KW90], [Krä91b]. Maatriksmeetodite hulka arvatakse ka

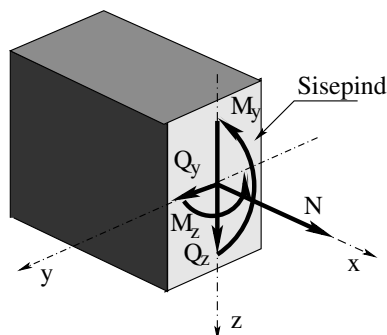
- lõplike elementide meetod, mis põhineb deformatsioonimeetodil
- rajaelementide meetod, mis rajaneb integraalvõrranditel
- võrgumeetod.

1.4 Sise- ja rajajõud

Tehnilises mehaanikas (tugevusõpetuses) kasutusel olevad sisejõudude mõisted on toodud joonisel 1.3.

Tahke keha sisejõududena mõistame jõudusid keha osade vahel, mis säilitavad keha terviklikkuse ja annavad talle iseloomuliku mahu- ja kujukindluse moodsate välisjõudude mõju all [Jür85].

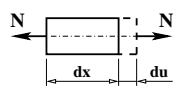
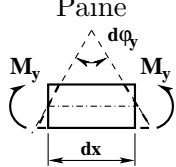
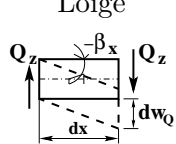
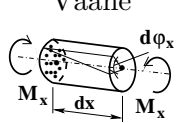
Sisepinna⁴ vastaspooltel olevad sisejõud (joonis 1.2) on alati arvuliselt võrdsed ja vastassuunalised (joonis 1.4 a)).



Joonis 1.2. Sisejõud varda sisepinnal

⁴Sisepind – pind, mille kõik punktid on sisepunktid [Tam03].

Rajapinna⁵ välimisel poolel mõjuvad rajajõud on toereaktsioonide ja naaberosade mõju kirjeldavate jõudude (joonis 1.4 b)) (kontaktjõudude) üldnimeks. Varda toereaktsioonid on näidatud joonisel 3.1 lk 80. Kontaktjõud on näidatud joonisel 3.2 „Kontaktjõud ja liigendid” (lk 82).

Tööseisund	Prinkus [MR95]	Sisejõud [MR96]	Ristlõike jäikus	Elastsus-seosed	Deformatsiooni-energia [MR96]
 <p>Pike</p>	Pikkeprinkus $\lambda = \frac{du}{dx}$ $\lambda^* = \frac{\Lambda}{L}$ siin $\Lambda = \Delta u$	Pikkejõud N	Pikke- jäikus EA	$N = EA\lambda$	$dU_N = \frac{1}{2}N\lambda dx$
 <p>Paine</p>	Paindeprinkus $\psi = \frac{d\varphi_y}{dx}$ $\psi^* = \frac{\Psi}{L}$ siin $\Psi = \Delta\varphi_y$	Painde- moment M_y	Painde- jäikus EI_y	$M_y = EI_y\psi_y$	$dU_M = \frac{1}{2}M_y\psi_y dx$
 <p>Lõige</p>	Lõikeprinkus $-\beta_z = \frac{dw_Q}{dx}$ $-\beta_z^* = \frac{B_z}{L}$ siin $B_z = \Delta w_Q$	Põikjõud Q_z	Lõike- jäikus GA_{red}	$Q_z = GA_{red}\beta_z$	$dU_Q = \frac{1}{2}Q_z\beta_z dx$
 <p>Vääne</p>	Väändeprinkus $\vartheta = \frac{d\varphi_x}{dx}$ $\vartheta^* = \frac{\Theta}{L}$ siin $\Theta = \Delta\varphi_x$	Väändemo- ment M_x	Väände- jäikus GI_x	$M_x = GI_x\vartheta$	$dU_\gamma = \frac{1}{2}M_x\vartheta dx$

Joonis 1.3. Varda tööseisundid

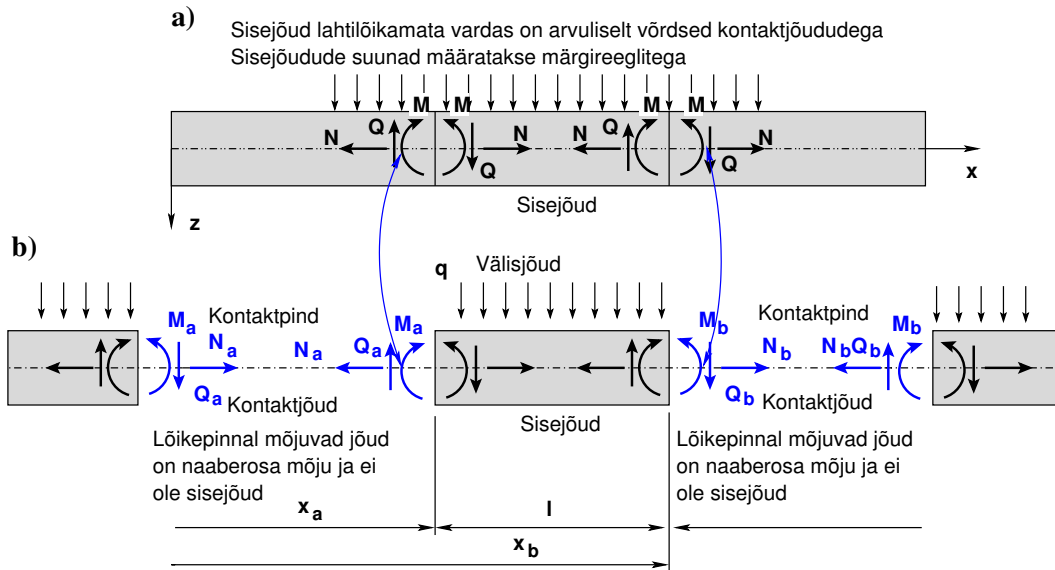
1.5 Lõikemeetod

[slaidid]

[ekraanivideo]

Sisejõudude määramiseks kasutatakse lõikemeetodit. Selle meetodi aluseks on tõekspidamine, et *tasakaalus kehas mõtteliselt väljalõigatud osa on ka tasakaalus* [Jür85] lk 12 (djvu lk 8). Lõikemeetodi eesmärk on keha (süsteemi) osadeks jaotamisega muuta sisejõud vaadeldava osa suhtes väliseks jõuks, et nende määramiseks rakendada tasakaalutingimusi.

⁵<http://staff.ttu.ee/~itammeraid/matan2.pdf#page=9>



Joonis 1.4. Lõikepinnal mõjuvad jõud ja sisejõud

Vaadeldavale, kehas väljalõigatud osale mõjub jõudude süsteem, milles tuntud välisjõudude kõrval rakendatakse lõikepinnale 'naaberosade mõju kirjeldavad jõud'⁶, lõikes a jõud N_a , Q_a , M_a ja lõikes b jõud N_b , Q_b , M_b vt joonis 1.4 b)). Lahendades need taskaaluvõrrandid võime rääkida, et leidsime *sisejõud* N , Q , M . Siinjuures peame silmas, et *lõikepindadele rakendatud jõud on võrdsed sisejõududega* (joonis 1.4 a)).

Lõikemeetodil on palju ühist sidemetest vabastamise printsiibiga. Kui lõikemeetod kujutab ette elementidest koosneva konstruktsiooni „lahtimonteerimist” (joonis 3.2 „Kontaktjõud ja liigendid” lk 82, Gerberi tala naaberosadevahelised jõud on näidatud joonisel 4.6 lk 96), siis sidemetest vabastamise printsiip kujutab tervikliku konstruktsiooni „lahtilõikamist” ja nende mõju asendamist reaktsioonijõududega (joonisel 3.1 „Toed ja toereaktsioonid” lk 80). Printsiip ja meetod taotlevad ühist eesmärki – keha (süsteemi) jaotamisega osadeks muuta sisejõud süsteemiväliseks jõuks, et nende määramiseks rakendada tasakaalutingimusi [Jür85] lk 12 (djvu lk 8).

Lõikemeetodi rakendamisel sisejõu muutmisel süsteemiväliseks jõuks tehakse vahet välisjõu ja naaberosa mõju vahel (joonis 1.4 b)).

Varda naaberosi ühendavad jõud (sks *Verbindungskräfte*⁷) teostavad välisjõudude staatilist ülekannet⁸. Terves vardas on nende ühendavate jõudude resultant null (joonis 4.6. lk 96). Sellieid staatiliselt ülekannet tegevaid jõude nimetatakse ka kontaktjõududeks^{9 10}.

⁶Samaväärsed mõisted on: 'naaberosade mõju kirjeldavad jõud', 'lõikepinnal mõjuvad jõud', 'varda otstes mõjuvad jõud', 'kontaktjõud'.

⁷<http://www.ki-smile.de/kismile/view70,8,551.html>

⁸<http://de.wikipedia.org/wiki/Kraftübertragung>

⁹kontaktjõud – mõttelise lõikega kehas eraldatud osade vaheline jõud (Rohusaar, 2005) (http://ekool.tktk.ee/failid/E/objekt/11/teh_meh_pohialused/jud.html)

¹⁰http://books.google.ee/books?id=g6PVRSgdbVoC&pg=PA178&lpg=PA178&dq=Kontaktkraft+Gerber+Kontakt&source=bl&ots=B9xYLz_-XR&sig=hjzNckjO-44Xb5buwh-EnciUTho&hl=et#v=

Virtuaalsiirete printsiip

Edaspidi rakendame tööde kirjeldamisel *deformeeruvale* varda elemendile virtuaalsiirete printsiipi, mis saadakse energiateoreemist [Arg54]

$$W_r + W_s + W_v = 0 \quad (1.1)$$

kus W_r on kontaktpinnal olevate jõudude töö, W_s – sisejõudude töö ja W_v – välisjõudude töö.

Virtuaalsiirete printsiibi rakendamise näide pikke elemendile on esitatud avaldisega (1.8) ja tala elemendile avaldisega (D.36).

Siin kirjeldatakse kehas väljalõigatud osa juures kolme liiki jõudusid (joonis 1.4 b)): lõikepinnal mõjuvad jõud (sks *Schnittgrößen*), sisejõud (sks *Innere Kraftgrößen*) ja välisjõud (sks *Äußere Kraftgrößen*) [Din11] lk 34, [KW90].

Energiateoreem on ehitusmehaanika, lõplike elementide meetodi ja rajaelementide meetodi metoodiline põhitööriist [1], [3], [4]. *Energiateoreem* [KW90]^{11 12} lk 56, aitab kirjeldada välis-, sise- ja rajamuutujaid.

Kontaktjõududele vastavad siirded on joonisel 3.2 „Kontaktjõud ja liigendid” (lk 82). Toereaktsioonidele vastavad siirded on joonisel 3.1 „Toed ja toereaktsioonid” (lk 80). Toereaktsioonide ja kontaktjõude üldnimeks on rajajõud ja nendele vastavate siirete üldnimeks rajasiirded.

Edaspidi nimetame lõikepindu kontaktpindadeks (vt kontaktpind [MR96] lk 9) ja nendele rakendatud naaberosade mõju kontaktjõududeks.

Ehitusmehaanikas tehakse vahet sisejõudude töö W_s ja deformatsioonienergia U ehk potentsiaalenergia Π . Deformatsioonienergia $U \geq 0$ on alati positiivne, kuid sisejõudude töö $\pm W_s$ võib olla nii positiivne kui ka negatiivne. Näiteks siirete arvutamisel Mohri integraalis (7.13) võib pikijõu N töö ühik koormusolukorra pikkuse muudul $d\Lambda(x)$, paindemomendi töö ühik koormusolukorra paindenurgal $d\Psi(x)$ ja põikjõu töö ühik koormusolukorra lihkkel $dB(x)$ (vt [MR95] lk 38) olla nii positiivne kui ka negatiivne. Siirde märk (siirde suund) sõltub sisejõudude töö märgist.

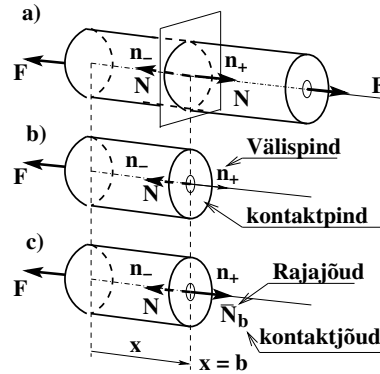
Lisaks eelnimetatutele kasutatakse lõikepinnal olevate jõudude iseloomustamiseks järgmisi eestikeelseid nimetusi:

- Vaadeldavale kehas väljalõigatud osale mõjub jõudude süsteem, milles tuntud välisjõudude kõrval *rakendatakse lõikepindadele tundmatuid jõude* asendamaks lahtilõikamata keha vastavaid sisejõudusid. Lõikepindadel mõjuvad tundmatud jõud, *mis on võrdsed sisejõududega*, määratakse vaadeldava osa tasakaalutingimustest [Jür85] lk 12 (djvu lk 8)

onepage&q=Kontaktkraft Gerber Kontakt&f=false

¹¹http://books.google.ee/books?id=gG8VusQ0YEwC&pg=PA56&lpg=PA56&dq=Greensche+Funktional+des+Fundamentaloperators&source=bl&ots=AhYHCR44Qs&sig=ZpOFfkc5x-iyifxa5S_2SmGFsrM&hl=et#v=onepage&q&f=false

¹²http://www.booklooker.de/app/result.php?token=2087199215&mediaType=0&sortOrder=default&js_state=on&autocomplete=on&message=&autor=Krätzig&titel=Tragwerke+&infotext=&verlag=&isbn=&year_from=&year_to=&sprache=&einbandCategory=&price_min=&price_max=&searchUserTyp=0&land=&datefrom=&oldBooks=on&newBooks=on&x=0&y=0



Joonis 1.5. Sisejõud ja kontaktjõud

- ... naaberosa mõju sellele eraldatud elemendile asendatakse *jõududega, mis arvuliselt on võrdsed terve varda nendes lõigetes esinevate sisejõududega*. Eraldatud elemendi suhtes mõjuvad need jõud välisjõududena (*väliste jõududena*) [Rää75] lk 317 (djvu lk 160).

Järnevalt vaatleme mehaanika energiateoreemi pikkel. Rajajõudude mõiste selgitamiseks kirjutame pikijõu diferentsiaalseose

Rajajõudude mõiste selgitamiseks kirjutame pikijõu diferentsiaalseose

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x) \quad (1.2)$$

ehk

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = -q_x(x) \quad (1.3)$$

Korrutame avaldise (1.3) võimaliku siirdega \hat{u} ja integreerime üle pikkuse

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \hat{u} dx = - \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx \quad (1.4)$$

Mehaanikas eristatakse kolme liiki siirdeid: *võimalikud siirded*, *tegelik siire* ja *virtuaalsiirded* [[K.Kenk ja J.Kirs. Siirete klassifikatsioon]¹³. Võimalikeks siireteks antud asendist nimetatakse siirdeid, mis on kooskõlas sidemetega. Võimalikke siirdeid on enamikul juhtudel lõpmata palju. Tegelik siire on üks võimalikest ja nimelt see, mis realiseerub rakendatud jõudude toimetel.

Juhul kui sidemed on statsionaarsed, siis virtuaalsiirete klass ühtib võimalike siirete klassiga ja tegelik siire on üks virtuaalsiiretest.

Varrassüsteemi virtuaalsiirdena mõistame sidemete poolt võimaldatud väikese lõpliku liikumise tulemust, mis ei muuda märgatavalt varraste vastastikust asendit ega nende asukohti aluse suhtes [Jür85].

¹³33. Jõu virtuaaltöö. Virtuaalsiirete printsiip (Insenerimehaanika alused).

Võrrandi (1.4) parempoolne liige väljendab väliskoormuse q_x tööd W_v siirdel \hat{u} . On võimalik näidata, et koondkoormuse F_{xi} töö varda telje punkti i siirdel \hat{u}_i on $F_{xi}\hat{u}_i$. Seega,

$$W_v = \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \quad (1.5)$$

Võrrandi (1.4) vasakpoolset avaldist integreerime ositi valemi

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (1.6)$$

järgi, võttes u ja dv järgmiselt:

$$\int_a^b \underbrace{\hat{u}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right)}_{dv} dx$$

saame avaldise

$$\int_a^b \hat{u} d \left(EA \frac{du}{dx} \right) = \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx} \right)}_{N_x} \hat{u} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx} \right)}_{N_x} \underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{\lambda}} dx \quad (1.7)$$

Võrrandi (1.7) parema poole esimene liige väljendab rajajõudude $\overset{\leftrightarrow}{N}_x$ tööd W_r rasiiretel \hat{u} . Võrrandi (1.7) parema poole teine liige kirjeldab sisejõudude tööd W_s . Võttes arvesse välisjõudude töö avaldise (1.5) ja rajajõudude töö avaldise (1.7), võib integraali (1.4) kirjutada kujul

$$\underbrace{\overset{\leftrightarrow}{N}_x \hat{u} \Big|_a^b}_{W_r} - \underbrace{\int_a^b N_x \hat{\lambda} dx}_{W_s} + \underbrace{\left(\int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \right)}_{W_v} = 0 \quad (1.8)$$

Avaldis (1.8) väljendab *energiateoreemi pikkel. Rajajõudude, sisejõudude ja välisjõudude tööde summa on null*. Kui rajajõudude töö on null, siis välis- ja sisejõu tööd on võrdsed ning vastasmärgilised. Avaldises (1.8) on sisejõudude töö miinusmärgiga. Vardamehaanikas vaadeldakse sisejõudude tööd W_s kui integraali pikijõu $N(x)$ ja prinkuse $\lambda(x)$ korrutisest. Sellise korrutise puhul räägivad matemaatikud funktsioonide skalaarkorrutisest Hilberti¹⁴ ruumis. Töö ja energia mõisteid ehitusmehaanikas ja lõplike elementide meetodis käsitles John Argyris¹⁵ oma energiateoreemides [Arg54].

Nagu selgub avaldisest (1.7), on rajajõudude mõiste üldisem kui toereaktsioonide (joonis 3.1) ja kontaktjõudude mõiste. Rajajõudude ja välisjõudude olemused on erinevad.

Rajajõudude mõistet vaatlevad W.B. Krätzig ja U. Wittek [KW90]. F. Hartmanni „Ehitusmehaanika matemaatilistes alustes“ [Har85] käsitletakse neid mõisteid põhjalikult.

¹⁴David Hilbert, saksa matemaatik, 1862–1943.

¹⁵John Argyris, TTÜ audoktor, 1913–2004.

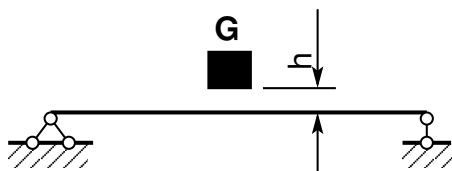
1.6 Sise- ja rajasiirded

Sisesiireteks on *pikkuse muut* Λ , *paindenurk* Ψ , *lihe* B_z , *väändenurk* Θ (joonis 1.3) (saks *Innere Weggrößen (Verzerrungen)*) [KW90]). Tehnilises mehaanikas [MR95] (tugevusõpetuses) nimetatakse neid *põhideformatsioonideks*.

Rajasiirded $\hat{u}|_a^b$ avaldised (1.7) on varda siirded punktides a ja b . Toereaktsioonidele ja kontaktjõududele vastavate siirete üldnimeks on rajasiirded. Rajasiirete ja rajajõudude arv on vastavuses. Kui üks nendest on ette antud, siis teine tuleb leida. Toesiirded on näidatud joonisel 3.1 lk 80. Kontaktjõududele vastavad siirded on näidatud joonisel 3.2 „Kontaktjõud ja liigendid” (lk 82).

1.7 Koormused

Koormusi liigitatakse ajas muutumise järgi *dünaamilisteks* ja *staatilisteks*. Kui koormus muutub ajas nii aeglaselt, et konstruktsiooni deformeerumisel võib inertsjõu hüljata, siis nimetatakse koormust *staatiliseks*. Suuruselt, sihilt, suunalt või asukohast muutuvat koormust nimetatakse *dünaamiliseks*. Edaspidi piirdume ainult staatiliste koormuste vaatlemisega. Koormused esinevad alati kas kogu konstruktsiooni või selle osa ulatuses hajutatult *lauskoormustena*, mida võib jaotada ruum-, pind- ja joonkoormusteks.



Joonisel 1.6 on tehnilise mehaanika näide, kus raskuse G kukkumine (lök) kõrguselt $h = 0$ põhjustab kaks korda suuremad sisejõud ja siirded kui staatiline koormus.

Joonis 1.6. Lök kõrguselt $h = 0$

Ruumkoormus rakendub tavaliselt massi kaudu (raskusjõud, inertsjõud jne) ja on ruumis hajutatud. Ruumkoormust mõõdetakse selle intensiivsusega $\vec{q}(x, y, z)$, mis näitab vaadeldava punkti vahetus läheduses ruumiühikule mõjuvat jõudu N/m^3 , kN/m^3 jne.

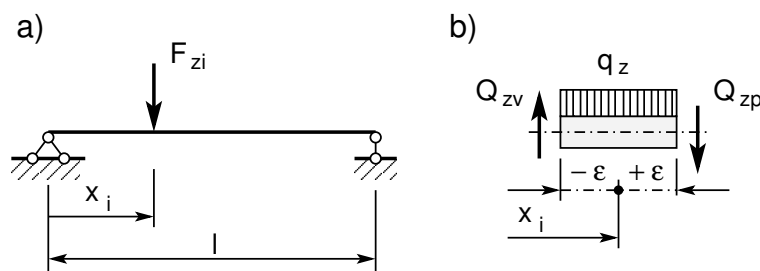
Pindkoormus rakendub konstruktsiooni kogu pinnale või selle osadele ja väljendab teiste kehade vahetut kontaktmõju. Pindkoormuse intensiivsus $\vec{q}(x, y)$ näitab pinnahikule mõjuvat jõudu vaadeldavas punktis N/m^2 , kN/m^2 .

Joonkoormus on taandatud nii ruum- kui ka pindkoormus intensiivsusega $\vec{q}(x)$, mille mõõtühikuks on N/m , kN/m , vt tabelit 1.1.

Sageli mõjub pind- ja joonkoormus konstruktsiooni üldmõõtmetega võrreldes väikesele pinnale (joonele). Sellist koormust loetakse ühte punkti koondatud *punkt-* ehk *koondkoormuseks*, mille tähiseks on \vec{F} ja mõõtühikuks N , kN . Koondkoormus esitatakse enamasti projektsioonidena F_x , F_y , F_z , (tabel 1.1).

Vahel taandub koormus jõupaariks, mille toimet hinnatakse *momendiga*. Momendi tähisena kasutatakse tähti \mathcal{M}_x , \mathcal{M}_y ja \mathcal{M}_z , mis väljendavad momendi mõju telje x , y , z suhtes.

Suhteliselt harva esineb hajutatud moment m ehk *lausmoment*. Lausmomendi projektsioonid on m_x , m_y ja m_z ning mõõtühikud N, kN (tabel 1.1).



Joonis 1.7. Koondjõud

Vaatleme joonkoormuse q_z koondamist koondkoormuseks F_z (joonis 1.7). Olgu koondkoormuse F_z rakenduspunkti koordinaat x_i . Koondjõu väärtus avaldub joonkoormuse kaudu järgmiselt:

$$F_{zi} = q_z \cdot 2\varepsilon \quad (1.9)$$

ehk

$$F_{zi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} q_z(x) dx \quad (1.10)$$

Varda ristlõiget, kus mõjub koondatud koormus, nimetame *iseäraseks ehk singulaarseks ristlõikeks*. Vaatleme varda elementi (joonis 1.7) pikkusega 2ε . Parempoolses ristlõikes mõjub põikjõud Q_{zp} ja vasakpoolses ristlõikes põikjõud Q_{zv} . Need põikjõud erinevad üksteisest $q_z \cdot \varepsilon$ võrra. Kui nüüd vähendada varda elemendi pikkust ($\lim \varepsilon \rightarrow 0$),

Tabel 1.1. Koormused

Indeksid	Koormus	Tähis	Mõõtühik	Mõõde
F_{zvj} põhjus koht siht	Koondkoormus	F_z, F_x	N, kN, MN	$[F]$
	Moment	$\mathcal{M}_y, \mathcal{M}_x$	N·m, kN·m, MN·m	$[FL]$
	Joonkoormus	q_z, q_x	N/m, kN/m, MN/m	$[F/L]$
	Lausmoment	m_x, m_y, m_z	N, kN, MN	$[FL/L]$

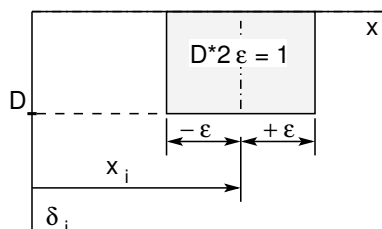
siis saab ühes ristlõikes kaks erinevat põikjõudu Q_{zp} ja Q_{zv} . Selline ristlõige on *iseärane ristlõige*.

Võtame kasutusele deltafunktsiooni¹⁶ $\delta(x - x_i)$ (joonis 1.8).

Lisaks avaldisele (1.10) võib nüüd kirjutada seose:

$$\int_0^l F_{zi} \delta(x - x_i) dx = \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} F_{zi} \delta(x - x_i) dx = F_{zi} \quad (1.11)$$

Joonisel 1.8 on deltafunktsioon $\delta_i = \delta(x - x_i)$. See funktsioon on aproksimeeritud ristkülikulise kujundiga, mille pindala $D \cdot 2\varepsilon = 1$, kui $\varepsilon \rightarrow 0$ ning $D \rightarrow \infty$



$$\begin{aligned} \int_0^l \delta(x - x_i) dx &= \\ &= \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} \delta(x - x_i) dx = 1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

kus ε on meelevaldselt väike positiivne arv.

Joonis 1.8. Deltafunktsioon

1.8 Aproksimatsiooni tasemed. Mudelid

Praktilises töös on üheks raskemaks ülesandeks tegeliku konstruktsiooni aproksimeerimine¹⁷ (joonis 1.9). Tegelikku konstruktsiooni pole alati võimalik otseselt uurida kui tervikut, sest konstruktsiooni olekuparameetrite arv on suur.

Olekuparameetrite all mõistame füüsikalisi suursusi, mis iseloomustavad süsteemi olekut. *Välisesteks olekuparameetriteks* on välisjõud ja väliste väljade tugevus. *Sisemisesteks olekuparameetriteks* on sisejõud, siseenergia, temperatuur jne. Erinevate olekuparameetrite kirjeldamiseks on olemas erinevaid teooriaid: Bernoulli¹⁸ vardateooria, Navier¹⁹ vardateooria, elastsusteooria, viskoelastsusteooria jne. Parameetrite hulga vähendamiseks peab tegema lihtsustavaid hüpoteese. Nende hüpoteeside aluseks on kas vaatlus (katsetused), teoreetilised kaalutlused või tehakse need intuiitiivselt [Krä91a].

Kaasaliikuvate Lagrange'i²⁰ koordinaatide abil on võimalik kirjeldada suuri deformatsioone ja stabiilsuse kadu.

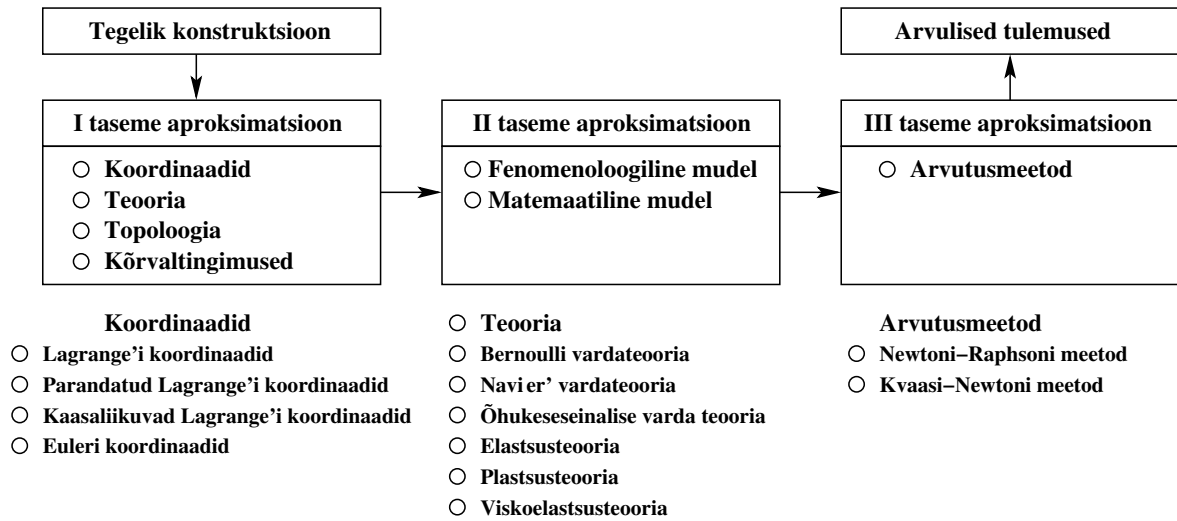
¹⁶<http://digi.physic.ut.ee/core/index.php?ID=../mypages/oppetoo/compphysII/compphysII-consult-master-060321-00-html//node48.html>

¹⁷**Aproksimeerimine, lähendamine**– objekti asendamine mingi teise, temast teatavas mõttes vähe erineva objektiga.

¹⁸Jacob Bernoulli, šveitsi matemaatik, 1655–1705.

¹⁹Louis Marie Henri Navier, prantsuse insener ja füüsik, 1785–1836.

²⁰Joseph Louis de Lagrange, prantsuse matemaatik ja mehaanikateadlane, 1736–1813.

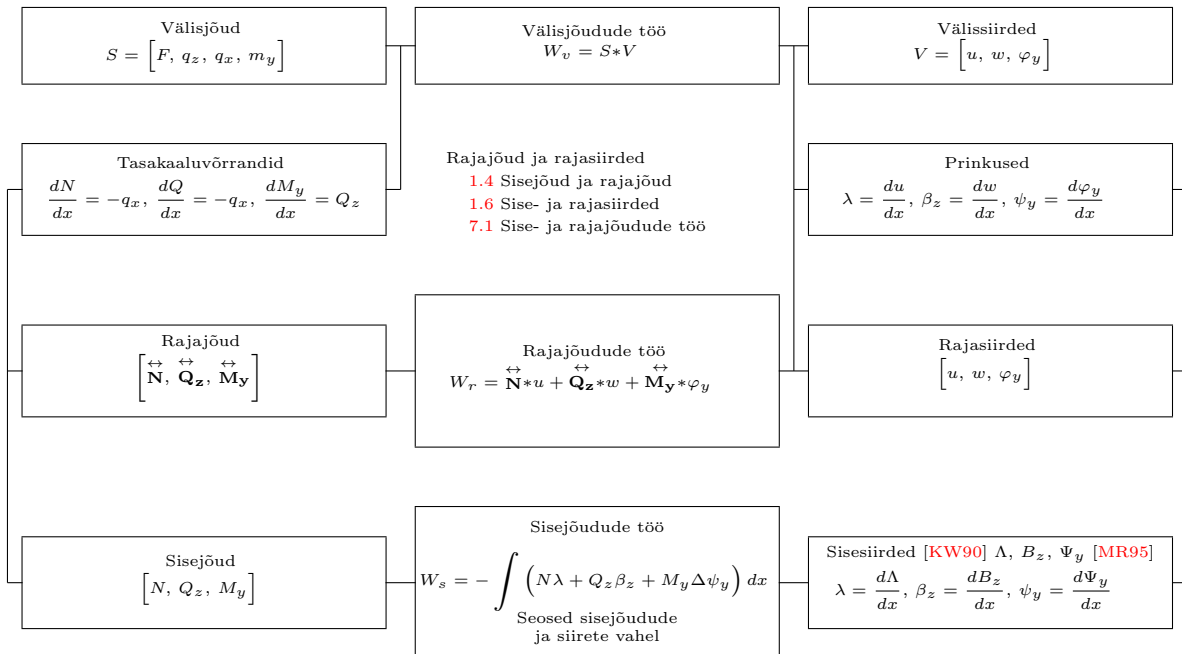


Joonis 1.9. Aproximatsiooni tasemed

Varraste asukohti kirjeldatakse topoloogiaga. Absoluutselt sirgeid vardaid tegelikkuses ei esine, seega jälle aproximatsioon. Konstruktsioonis on vardad omavahel ühendatud kas jäigalt või liigenditega.

Vaadeldav teooria koosneb fenomenoloogilisest²¹ ja matemaatilisest mudelist. Siin

²¹**Fenomen** (< *kr phainomenos 'nähtavale ilmuv'*) – juhtum, meeltega tajutav olukord või fakt.



Joonis 1.10. Varda fenomenoloogilise mudeli struktuurskeem

tehakse teise taseme aproksimatsioonid. Fenomenoloogilise mudeli ²² struktuuriskeem on joonisel 1.10. Matemaatiline mudel kirjeldab fenomenoloogilise mudeli kvalitatiivseid liikmeid. Kolmanda taseme aproksimatsioonid tehakse arvutusmeetodi valikul. Üldiselt ei ole arvutusmeetodis võimalik kõiki arvutusmudeli muutujaid arvestada. Võib osutada vajalikuks, et osa muutujaid tuleb elimineerida. Tavaliselt on selle taseme aproksimatsioonide üle hea kontroll, sest on võimalik anda vea hinnang.

Varrassüsteemide mehaanikas on fookuses geomeetriline omadus – kuju, mille füüsikaliste omaduste kirjeldamiseks valitakse sobiv teooria ja sejärel sobivad meetodid. Kõikides teooriates, mida varrassüsteemid kasutavad, esinevad järgmised mõisted (joonis 1.10): välisjõud (F), välissiirded (V), sisejõud ($N, Q, M; \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$), sise-siirded ($\Lambda, B, \Psi, \Theta; \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}$), rajajõud ($\vec{N}, \vec{Q}_z, \vec{M}_y$), rajasiirded ($\Delta u, \Delta w, \Delta \varphi_y$), tasakaaluvõrrandid, siirete pidevusvõrrandid, olekuvõrrandid, rajatingimused.

Rajajõudude mõiste üldistab toereaktsioone ja varraste vahel mõjuvaid kontaktjõude. Rajasiirded on tugevate vajumised ja varraste siirded ning pöörded ühendustes (liigendites). Joonisel 1.10 toodud mõisteid on käsitletud tehnilises mehaanikas varda teoorias.

Tasakaaluvõrrandid seostavad sisejõud välisjõududega. Siirete pidevuse võrrandid loovad seosed sisesiirete (tehnilises mehaanikas varda pikkuse muut) ja välissiirete vahel. *Geomeetriliselt mittelineaarses* teoorias on sisesiirete ja välissiirete vahelised seosed mittelineaarsed.

Rajajõud ristlõike välispinnal on võrdsed ja suunatud vastupidi vastavate sisejõududega ristlõike sisepinnal. Rajasiireteks on toe siirded ja varraste ühenduspunktides (sõlmedes) varraste vastastikused siirded ja pöörded.

Füüsikalise lineaarse vardateooria olekuvõrrandid (elastsusseosed) väljenduvad Hooke'i²³ seaduse kaudu.

1.9 Lihtsustused varda paindeteoorias

Vaatleme joone kõverust diferentsiaalgeomeetrias ja elastse joone kõverust tehnilises mehaanikas.

Tähistame joone $z = f(x)$ kõveruse ψ_j -ga ja elastse joone $w = f(x)$ kõveruse ψ_p -ga. Joone element ds (joonis 1.11)

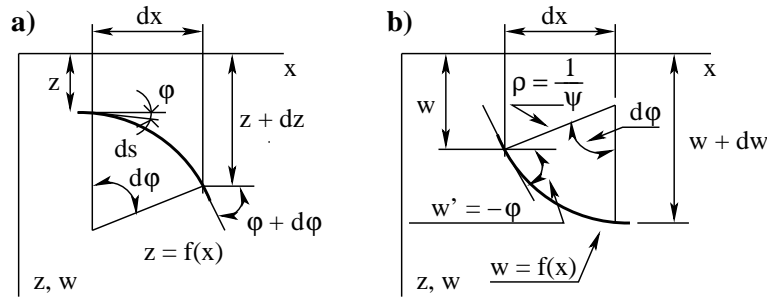
$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + (z')^2} \quad (1.13)$$

kus

$$z' = \frac{dz}{dx} = \tan \varphi, \quad \varphi = \arctan \frac{dz}{dx} \quad (1.14)$$

²²**Mudel** – süsteemi, teooria või fenomeni kirjeldus, mis arvestab nende tuntud omadusi ja mida võib kasutada nende omaduste uurimiseks.

²³Robert Hooke, inglise füüsik, 1635–1703.



Joonis 1.11. Joone kõverus

Elastse joone element ds

$$ds = \varrho d\varphi, \quad \frac{1}{\varrho} = \psi = \frac{d\varphi}{ds} \tag{1.15}$$

siin

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d(\arctan z')}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{z''}{1+(z')^2} \frac{dx}{dx\sqrt{1+(z')^2}} \tag{1.16}$$

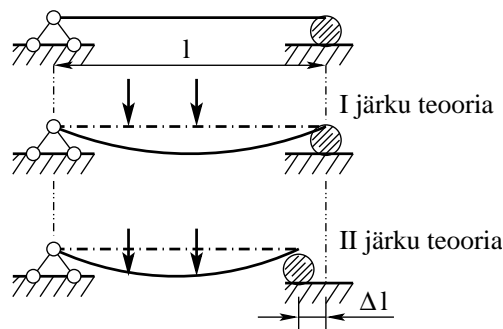
Joone kõverus ψ_j

$$\psi_j = \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{z''}{[1+(z')^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{1.17}$$

siin on ϱ joone kõverusraadius. Teeme lihtsustused:

- lihtsustus $\tan \varphi \approx \varphi$, millest järeljub

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{z''}{\sqrt{1+(z')^2}} \tag{1.18}$$



Joonis 1.12. Tala deformatsioon

- lihtsustus $\tan \varphi \approx \varphi$, $ds \approx dx$, millest järeldub

$$\psi_j = \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = z'' \quad (1.19)$$

Kuna elastse joone kõverus $\psi_p = -\psi_j$, siis

$$\psi \equiv \psi_p = -w'' \quad (1.20)$$

Avaldis (1.20) on lineaarne diferentsiaalvõrrand.

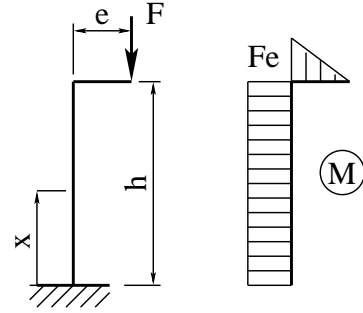
Lineaarses ehk esimest järku teoorias (I järku teoorias) kasutatakse seost (1.20)

$$\begin{aligned} \psi = -w'', \quad ds \approx dx, \quad \frac{dw}{dx} = w' = -\varphi, \\ \tan \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Diferentsiaalseoste (tasakaalutingimuste) koostamisel lähtutakse deformeerumata kujust (algmõõtmete printsiibist) (joonis 1.12).

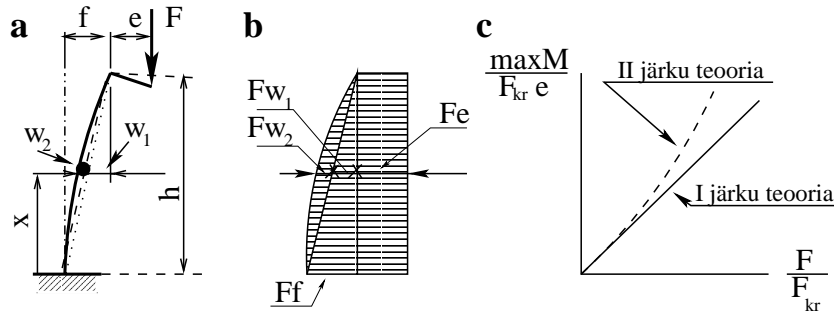
Joonisel 1.13 on ekstsentrilise surve paindemomendi epüür I järku teoorias, kus ei arvestata varda deformatsiooni. Üldistatud Hooke'i seadus I järku teoorias

$$M_y = -EI_y w'' \quad (1.22)$$



Teist järku teoorias (II järku teoorias) arvestatakse varda deformeerunud kuju diferentsiaalseoste (tasakaalutingimuste) koostamisel. Joonisel 1.14 on esitatud jõu ja momendi vaheline seos. Kui esimest järku teoorias on seos lineaarne, siis teist järku teoorias mitelineaarne

$$M(x) = \underbrace{Fe}_{I \text{ järku teooria}} + \underbrace{F[w_1(x) + w_2(, F)]}_{\text{lisaliikmed}} \quad (1.23)$$



Joonis 1.14. Ekstsentriline surve II järku teoorias

kus

$$w_1(x, F) = f\left(1 - \frac{x}{h}\right) \quad (1.24)$$

Kolmandat järku teooriat (III järku teooriat) kasutatakse eriti saledate konstruktsioonide ja ka vedrude arvutamiseks. Arvestatakse deformeerunud kuju ja kõveruse täpsed avaldised

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{z''}{\left[1 + (z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.25)$$

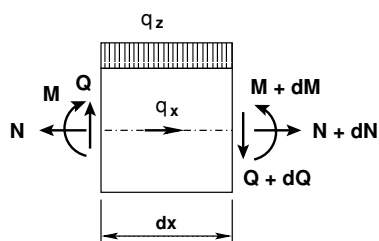
ehk

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{z''}{\sqrt{1 + (z')^2}} \quad (1.26)$$

Ehituskonstruktsioonide arvutamisel III järku teooriat peaaegu ei kasutata.

1.10 Epüürid ja diferentsiaalseosed

Varda elementaarse osa (joonis 1.15) tasakaalutingimustest saadakse varda sisejõudude ja koormuse vahel diferentsiaalseosed



$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z(x) \quad (1.27)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z(x) \quad (1.28)$$

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x) \quad (1.29)$$

Joonis 1.15. Varda element

Seosed (1.27), (1.28) ja (1.29) on tuttavad tehnilisest mehaanikast.

Varraste põikjõu märgi määramiseks vaatleme joonist 1.16. Paindemomendi tuletise geomeetriseliseks tõlgenduseks punktis on selles punktis paindemomendi epüüri puutuja t_1 (t_2) tõusumurga tangens ($\tan \alpha$). Põikjõu märk oleneb puutuja (joonis 1.16) pööramise suunast (puutujat pöörame nii, et ta ühtiks varda teljega, seejuures $\alpha < \frac{\pi}{2}$): vastupäeva pöörates on põikjõud positiivne ja päripäeva pöörates negatiivne.

Põikjõud horisontaalses vardas leiame epüüride liitmisega (joonis 1.17). Joonisel 1.17

on näidatud paindemomendid ja nendele vastavad põikjõud. Lineaarselt muutuva paindemomendi korral võime diferentsiaalse (1.30) asendada diferentsseosega (1.31)

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (1.30)$$

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta x} \quad (1.31)$$

ja arvutada põikjõu avaldisega (1.32)

$$Q = Q^{(o)} + \frac{\Delta M}{\Delta x} \quad (1.32)$$

kus $Q^{(o)}$ on vastava lihttala põikjõud.

1.11 Põikjõud vardas

Põikjõu leidmiseks kaldu olevas vardas (joonis 1.18) koostame tasakaaluvõrrandi varda lõpu b kohta

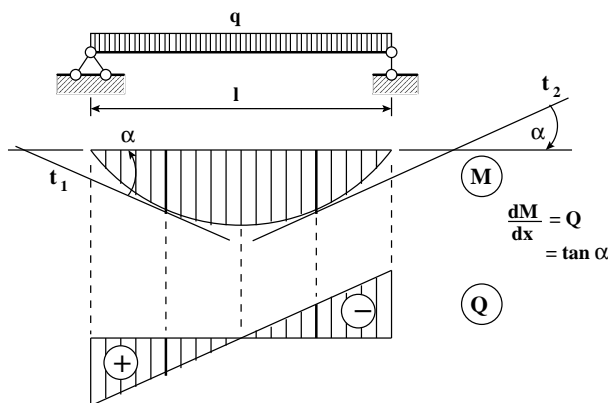
$$\begin{aligned} \Sigma M_b = 0 : \quad Q_{ab} \cdot l^* - M_{ab} + M_{ba} - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} &= 0 \\ Q_{ab} &= \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{l^*} + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l^*} \end{aligned} \quad (1.33)$$

ehk

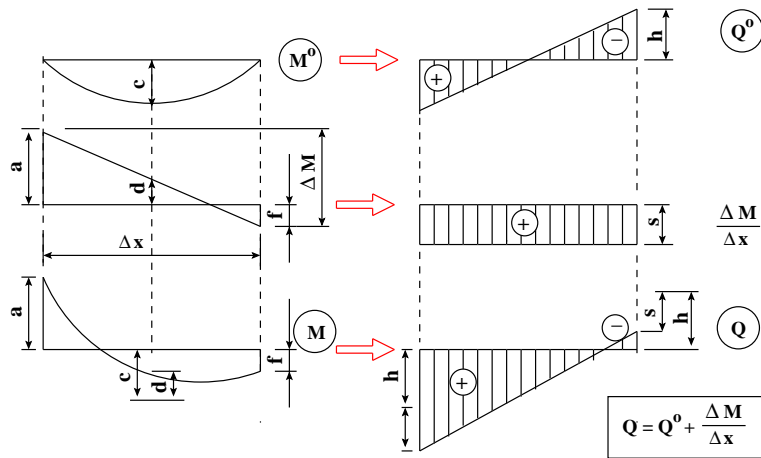
$$Q_{ab} = Q_{ab}^{(o)} \cdot \cos \alpha + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l} \cdot \cos \alpha \quad (1.34)$$

ning tasakaaluvõrrandi varda alguse a kohta

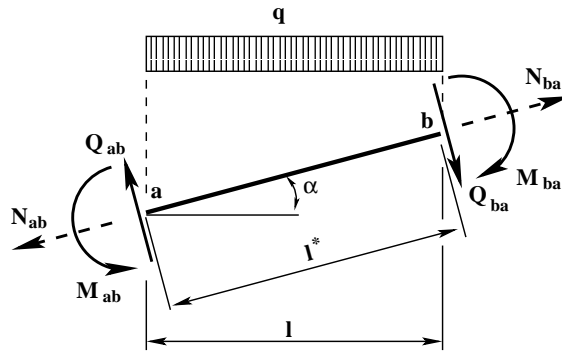
$$\Sigma M_a = 0 : \quad Q_{ba} \cdot l^* - M_{ab} + M_{ba} + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$



Joonis 1.16. Põikjõu märgi määramine



Joonis 1.17. Põikjõud horisontaalses vardas



Joonis 1.18. Põikjõud kaldu vardas

$$Q_{ba} = -\frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{l^*} + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l^*} \tag{1.35}$$

ehk

$$Q_{ba} = Q_{ba}^{(o)} \cdot \cos \alpha + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l} \cdot \cos \alpha \tag{1.36}$$

kus $l^* = \frac{l}{\cos \alpha}$.

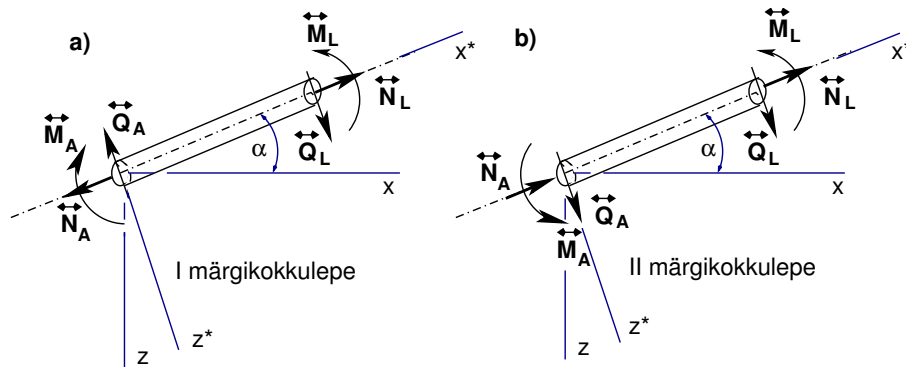
1.12 Märgikokkulepped

Rajajõudude (kontaktjõudude) positiivse suuna määramisel on kasutusel kaks märgikokkulepet (joonis 1.19). *Esimene märgikokkulepe* (joonis 1.19 a)) on tuttav tehnilisest mehaanikast. *Teine märgikokkulepe* (joonis 1.19 b)) on vajalik varrassüsteemide tasakaaluvõrrandite algoritmide koostamiseks.

Võrreldes I märgikokkulepet II märgikokkuleppega, näeme, et varda lõpus olevad rajajõudude (kontaktjõudude) suunad langevad kokku. Varda alguses on rajajõudude suunad vastasmärgilised. *Sisejõud* leitakse rajajõudude kaudu. Sisejõudude märgid ei

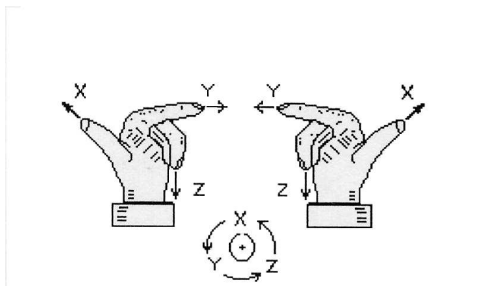
tohi sõltuda rajajõudude märgikokkuleppest.

Sisejõudude märgireeglid on raamatus [MR96] lk 35 „Tõmbejõu loeme positiivseks”, „Survejõu loeme negatiivseks”; lk 45 „Põikjõu range märgireegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis nihutab *positiivset sisepinda* koordinaattelje positiivses suunas või *negatiivset sisepinda* koordinaattelje negatiivses suunas”, „Põikjõu märgi tööreegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis nihutab *positiivset sisepinda* päripäeva”; lk 43 „Paindemomendi loeme positiivseks, kui varda positiivsed kiud on tõmmatud”.



Joonis 1.19. Märgikokkulepped

Tehnilises mehaanikas (tugevusõpetuses) langevad sisejõudude märgireeglid ja rajajõudude (kontaktjõudude) märgireeglid (I märgikokkulepe) kokku. Kasutades II märgikokkulepet, tuleb sisejõudude märgi määramisel rajajõudude (kontaktjõudude) kaudu varda alguses arvestada nende erinevaid märke. Rõhutame, et sisejõud on varda *sisepinnal* ja rajajõud (kontaktjõud) mõjuvad varda *välispinnal*.



Joonisel 1.20 on näidatud positiivse pöördenurga suund. Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pöört positiivseks z-teljest x-telje suunas, x-teljest y-telje suunas ja y-teljest z-telje suunas.

Joonis 1.20. Vasaku ja parema käe teljestik

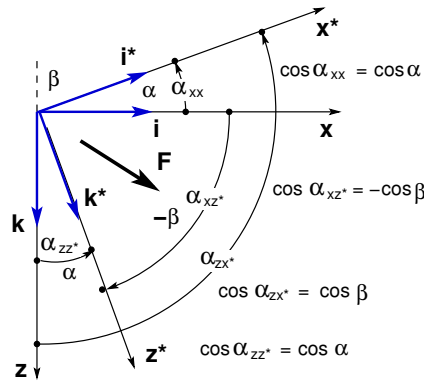
1.13 Kohalik ja üldteljestik

Varraskonstruksiooni iga vardaga seostatakse teljestik nii, et x-telg ühtib varda teljega (vt joonis 1.19, teljed x^* ja z^*). Nimetame neid kohalikeks teljestikeks. Konstruksiooni varraste asukoha ja nende suuna kirjeldamiseks kasutame üldteljestikku (teljed x ja z).

Kasutame ainult parema käe teljestikku (joonis 1.20). Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pöört positiivseks z-teljest x-telje suunas, x-teljest y-telje suunas ja y-teljest z-telje suunas. Joonisel 1.20 on nii parema käe kui ka vasaku käe teljestik. Tasapinnaliste konstruktsioonide kirjeldamisel vaatame y-telje positiivsest otsast, nii näeme x- ja z-telge. Positiivne pöördenurk on z-teljest x-telje suunas. Parema käe teljestiku puhul on positiivne pööre vastupäeva. Vasaku käe teljestiku korral on positiivne pööre päripäeva. Siirete ja jõuvektorite kirjeldamiseks kohalikes ja üldkoordinaatides on vajalikud koordinaatide teisendused.

1.14 Koordinaatide teisendus

Koordinaatide teisendusvalemite tuletamiseks vaatleme joonist 1.21. Olgu koordinaadid xyz üldkoordinaadid ja $x^*y^*z^*$ kohalikud koordinaadid. Vaatleme veel parema käe kolmikuid $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ja $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$. Need on ühikvektorite kolmikud, mis määravad koordinaatitelgede suunad. Joonisel 1.21 on ühikvektorid \mathbf{j} ja \mathbf{j}^* suunatud vaataja poole. Vektori



Joonis 1.21. Koordinaatide teisendus

\vec{F} projektsioonid telgedele xz on F_x, F_z ja telgedele x^*z^* on F_x^*, F_z^* . Seega,

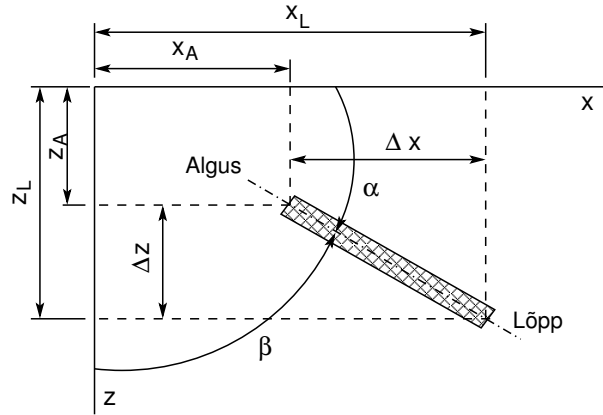
$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} + F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} = F_x^* \vec{\mathbf{i}}^* + F_z^* \vec{\mathbf{k}}^*, \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{i}}^* \\ \vec{\mathbf{k}}^* \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{cases} \quad (1.37)$$

Korrutame avaldise (1.37) vektoriga $\vec{\mathbf{i}}^*$ ja vektoriga $\vec{\mathbf{k}}^*$. Võtame arvesse, et risti olevate vektorite skalaarkorrutis (*sisekorrutis*) on null. Saame

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* &= F_x^* = F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* + F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \\ \vec{F} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* &= F_z^* = F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* + F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* \end{aligned} \quad (1.38)$$

Pöördseoste leidmiseks korrutame avaldist (1.37) vektoriga $\vec{\mathbf{i}}$ ja vektoriga $\vec{\mathbf{k}}$. Pöördseosed on

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{\mathbf{i}} &= F_x = F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{i}} + F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}}^* \cdot \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{F} \cdot \vec{\mathbf{k}} &= F_z = F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}} + F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (1.39)$$



Joonis 1.22. Varda suunakoosinused

Ühikvektorite skalaarkorrutis võrdub nende positiivsete suundade vahelise nurga koosinusega

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i}^* &= \vec{i}^* \cdot \vec{i} = \cos \alpha_{xx^*}, & \vec{i} \cdot \vec{k}^* &= \cos \alpha_{xz^*} \\ \vec{k} \cdot \vec{k}^* &= \vec{k}^* \cdot \vec{k} = \cos \alpha_{zz^*}, & \vec{i}^* \cdot \vec{k} &= \cos \alpha_{zx^*} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Telje x^* suunakoosinused tähistame järgmiselt: $\cos \alpha_{xx^*} = \cos \alpha$ ja $\cos \alpha_{zx^*} = \cos \beta$ ($\cos \beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$). Jooniselt 1.21 näeme, et

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{xx^*} &= \cos \alpha, & \cos \alpha_{zx^*} &= \cos \beta \\ \cos \alpha_{zz^*} &= \cos \alpha, & \cos \alpha_{xz^*} &= -\cos \beta \end{aligned} \quad (1.41)$$

Varda lõpu ja alguse koordinaatide (joonis 1.22) x_L, z_L, x_A, z_A järgi saab need suunakoosinused arvutada

$$\cos \alpha = \frac{x_L - x_A}{l} \quad (1.42)$$

$$\cos \beta = \frac{z_L - z_A}{l} \quad (1.43)$$

kus l on varda pikkus

$$l = \sqrt{(z_L - z_A)^2 + (x_L - x_A)^2} \quad (1.44)$$

Nüüd avaldame koordinaatteisendused järgmiselt:

$$\begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Arvestades seost $\cos \beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, võime seosed (1.45) kirjutada kujul (7.87)

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Võrreldes avaldistes (1.45) ja (1.46) koordinaatide teisendusmaatrikseid, näeme, et nendes on read ja veerud ära vahetatud, st ühe saab teisest *transponeerimisel*. Asendades võrrandis (1.45) F_x ja F_z nende avaldistega võrrandis (1.46), saame maatrikskorrutise

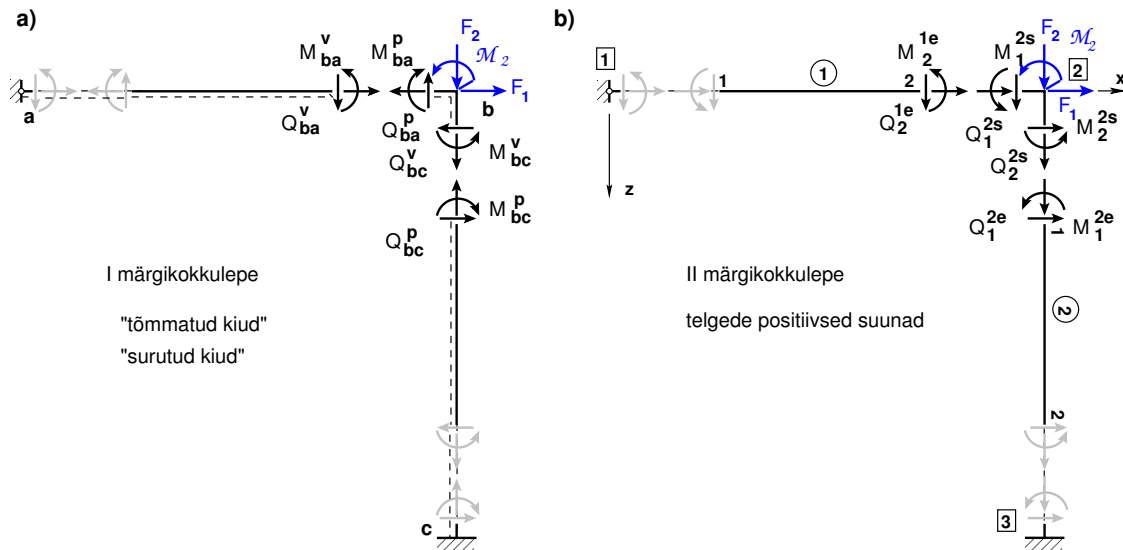
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Siin annab maatriksi korrutamine tema transponeeritud kujuga ühikmaatriksi. Selliseid maatrikseid nimetatakse *ortogonaalseteks maatriksiteks*. Nendel on hea omadus, et pöördmaatriks võrdub tema transponeeritud kujuga (mõlemal juhul on korrutiseks ühikmaatriks).

1.15 Sõlme tasakaalu- ja kõrvaltingimused

Joonisel 1.23 a) ja b) on sõlme b ning sõlme 2 eraldamisel ilmnevad kontaktjõud ja momendid nende positiivsetes suundades. Sõlme b eraldamisel on kontaktjõududeks $Q_{ba}^v, Q_{ba}^p, Q_{bc}^v, Q_{bc}^p, N_{ba}^v, N_{ba}^p, N_{bc}^v, N_{bc}^p$ (normaaljõu N tähised ei ole joonisel näidatud). Kontaktmomentideks on $M_{ba}^v, M_{ba}^p, M_{bc}^v, M_{bc}^p$.

Sõlme 2 eraldamisel on kontaktjõududeks $Q_2^{1e}, Q_1^{2s}, Q_2^{2s}, Q_1^{2e}, N_2^{1e}, N_1^{2s}, N_2^{2s}, N_1^{2e}$

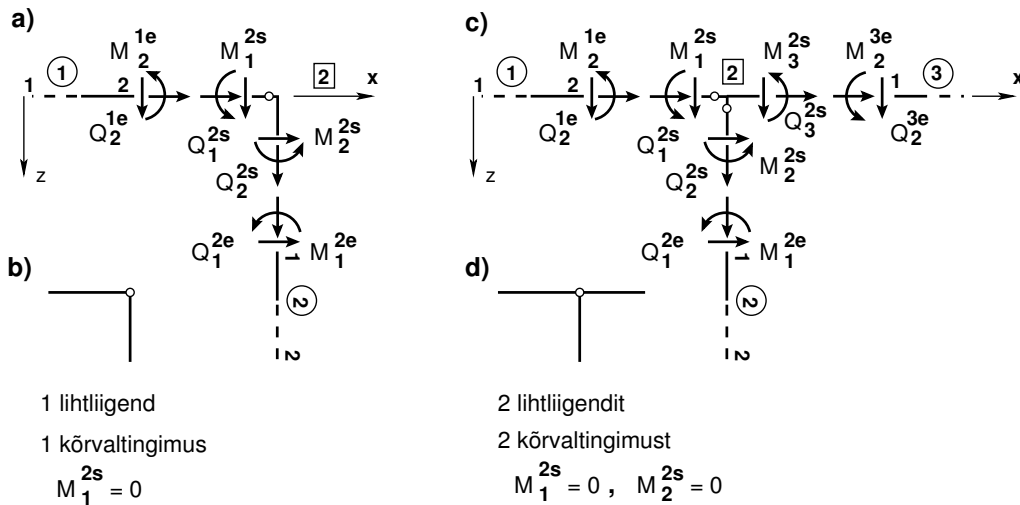


Joonis 1.23. Sõlme tasakaalutingimused

(normaaljõu N tähised ei ole joonisel näidatud). Kontaktmomentideks on $M_2^{1e}, M_1^{2s}, M_2^{2s}, M_1^{2e}$.

Sõlme tasakaalutingimused sõltuvalt märgikokkuleppest (joonis 1.19).

$$\begin{aligned} \text{I märgikokkulepe} & \quad M_{ba}^p - M_{bc}^v - \mathcal{M}_2 = 0 \\ \text{II märgikokkulepe} & \quad M_1^{2s} + M_2^{2s} + \mathcal{M}_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$



Joonis 1.24. Kõrvaltingimused

Sõlme 2 (joonis 1.23 a) ja b)) momentide tasakaaluvõrrandid on toodud avaldisega (1.48). Esimest märgikokkulepet võib kasutada kalkulaatoriga arvutamisel. Teise märgikokkuleppe puhul on lihtsam koostada tasakaaluvõrrandeid arvutil arvutamiseks. Jõudude positiivsed suunad ühtivad koordinaattelgede positiivsete suundadega. Parema käe teljestiku korral on pöörde ja momendi positiivne suund z-teljelt x-teljele. Varda sõlme tasakaaluvõrrandite koostamisel kasutatakse koordinaatide teisendust (1.46).

Lõplike elementide meetodis kasutatakse teist märgikokkulepet.

Lisaks tasakaaluvõrranditele antakse ka kõrvaltingimused (sks *Nebenbedingungen*) [KW90]). Kõrvaltingimuste arv sõltub sõlme lihtliigendite arvust (joonis 1.24). Lihtliigendite mõistet käsitletakse jõumeetodis (vt avaldis (9.9), lk 220).

Joonisel 1.24 b) ja d) on näidatud sõlm 2. Joonisel 1.24 b) näidatud sõlmel on üks lihtliigend ja antakse üks kõrvaltingimus (joonis 1.24 a))

$$\text{üks lihtliigend} \quad M_1^{2s} = 0 \quad (1.49)$$

Joonisel 1.24 d) näidatud sõlmel on kaks lihtliigendit ja antakse kaks kõrvaltingimust (joonis 1.24 c)).

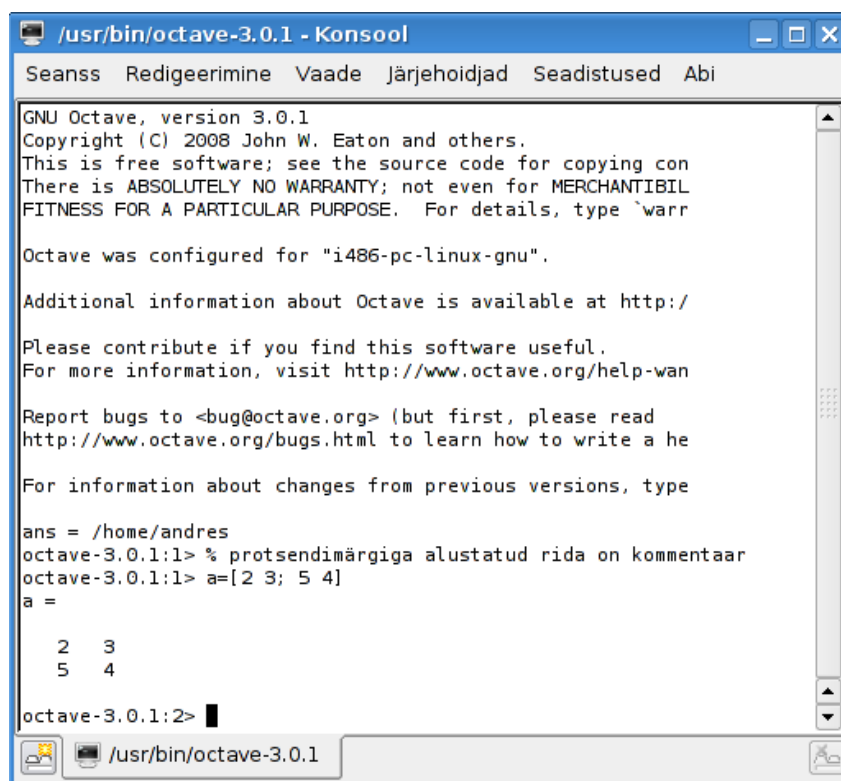
$$\text{kaks lihtliigendit} \quad M_1^{2s} = M_2^{2s} = 0 \quad (1.50)$$

1.16 Numbrilised arvutused GNU Octave'iga

Numbriliste arvutuste sooritamiseks kasutame vabavara GNU Octave'i²⁴. GNU Octave'i programm on mõeldud numbriliste arvutuste tegemiseks. Arvutusteks on kasutusel kaks režiimi (moodust) käskude täitmiseks: 1) interaktiivne režiim (ingl *interactive mode*), kus käsku täidetakse kohe pärast selle sisestamist käsurealt. Siin kasutame GNU

²⁴<http://www.gnu.org/software/octave/about.html>

²⁵http://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Octave



```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järgehoidjad Seadistused Abi
GNU Octave, version 3.0.1
Copyright (C) 2008 John W. Eaton and others.
This is free software; see the source code for copying con
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warr
Octave was configured for "i486-pc-linux-gnu".
Additional information about Octave is available at http:/
Please contribute if you find this software useful.
For more information, visit http://www.octave.org/help-wan
Report bugs to <bug@octave.org> (but first, please read
http://www.octave.org/bugs.html to learn how to write a he
For information about changes from previous versions, type
ans = /home/andres
octave-3.0.1:1> % protsendimärgiga alustatud rida on kommentaar
octave-3.0.1:1> a=[2 3; 5 4]
a =
    2    3
    5    4
octave-3.0.1:2>

```

Joonis 1.25. GNU Octave'i versioon 3.0

Octave'it kui kalkulaatorit. 2) pakkrežiim (ingl *batch mode*), kus käskude kogum (programm) on salvestatud tekstiredaktoriga faili laiendiga `.m`. See käskude kogum (programm) käivitatakse arvutis. Käskude täitmiseks sisestatakse faili nimi (ilma laiendita `.m`) käsurealt.

Alates versioonist 3.0 on GNU Octave'i (joonis 1.25) graafika käsud oluliselt erinevad varasematest versioonidest. Nüüd on käsud sarnased arvutiprogrammi Matlab käskudega ^{26 27}.

1.16.1 GNU Octave'i kui kalkulaator

[ekraanivideo]

GNU Octave'it võime kasutada kui kalkulaatorit. Vaatleme lihttala (joonis 1.32) toe-reaktsiooni V_a arvutamiseks koostatud tasakaaluvõrrandi

$$\begin{aligned}
 \Sigma M_b = 0 \quad & -V_a \cdot 6.0 - M_a + F_1 \cdot 3.6 + q \cdot 1.6 \cdot 2.8 + F_2 \cdot 2.0 = 0 \\
 V_a & = (10 \cdot 3.6 + 4 \cdot 1.6 \cdot 2.8 + 12 \cdot 2.0) / 6 + M_a / 6 \\
 Q_a = V_a = Q_a^0 + M_a / 6 & = 12.987 + 2.5 = 15.487 \text{ kN}
 \end{aligned}
 \tag{1.51}$$

arvutamist GNU Octave'iga (joonis 1.26). Eelnevalt sisestatud käsu saame käsureale,

²⁶<http://users.powernet.co.uk/kienzle/octave/matcompat/>

²⁷<http://users.powernet.co.uk/kienzle/octave/>

```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järjehoidjad Seadistused Abi
octave-3.0.1:1> % - protsendimärgile järgnev on kommentaar
octave-3.0.1:1> F1=10
F1 = 10
octave-3.0.1:2> F2=12
F2 = 12
octave-3.0.1:3> q=4
q = 4
octave-3.0.1:4> Ma=-15
Ma = -15
octave-3.0.1:5> L=6
L = 6
octave-3.0.1:6> % SumMb=0; -Va*L+(-Ma+F1*3.6+q*1.6*2.8+F2*2.0)=0
octave-3.0.1:6> Va=(-Ma+F1*3.6+q*1.6*2.8+F2*2.0)/L
Va = 15.487
octave-3.0.1:7>

```

Joonis 1.26. Toereaktsiooni arvutus GNU Octave'iga

kui vajutame klahvile nool üles. Enne sisestamist saame seda teksti käsureal redigeerida. Nii on redigeeritud käsku käsureal 'octave-3.0.1:6:' (joonis 1.26).

1.16.2 GNU Octave'i arvutuspäevik

GNU Octave'iga tehtud arvutused saame salvestada tekstina faili. Käsuga 'diary toereaktsioonVa.out' luuakse arvutuspäeviku fail 'toereaktsioonVa.out'. See fail avatakse kirjutamiseks käsuga 'diary on' (vt joonis 1.27). Sellele järgnevalt sisestatakse käsuread arvutuspäevikusse. Lõpetamisel anname käsu 'diary off'. Faili 'toereaktsioonVa.out' sisu on näha arvutuspäevikus 1.1. Kui see käsk 'diary off' jääb andmata, on teie töökataloogis fail 'toereaktsioonVa.out' tühi. Faili 'toereaktsioonVa.out' saab redigeerida tekstiredaktoriga.

Arvutuspäevik 1.1 (toereaktsioonVa.out)

```

octave-3.0.1:1> % käsuga diary loome päeviku faili
octave-3.0.1:1> diary toereaktsioonVa.out
octave-3.0.1:2> % käsuga diary on alustame päevikusse salvestamist
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> % - protsendimärgile järgnev on kommentaar
octave-3.0.1:3> %SumMb=0; -Va*L+(-Ma + F1*3.6 + q*1.6*2.8 + F2*2.0)=0
octave-3.0.1:3> F1=10
F1 = 10
octave-3.0.1:4> F2=12
F2 = 12
octave-3.0.1:5> q=4
q = 4
octave-3.0.1:6> Ma=-15
Ma = -15

```



```

octave-3.0.1:7> L=6
L = 6
octave-3.0.1:8> Va=(- Ma + F1*3.6 + q*1.6*2.8 + F2*2.0)/L
Va = 15.487
octave-3.0.1:9> % käsuga diary off sulgeme päeviku
octave-3.0.1:9> diary off

```

1.16.3 GNU Octave'iga arvutamise programm

Arvutusel (vt arvutuspäevik 1.1) antud käsud võime koondada ühte faili näiteks toereaktsioonVa.m (vt Programm 1.1). GNU Octave'is kirjutatud programmid omavad laiendit .m.

Programm 1.1 (toereaktsioonVa.m)

```

% see on toereaktsioonVa.m
F1=10
F2 =12
q=4
Ma=-15
L=6
Va=(- Ma + F1*3.6 + q*1.6*2.8 + F2*2.0)/L
%

```

Programmi käivitamisel käsurealt laiendit .m ei sisestata (vt joonis 1.28).

Programmi käivitamisel käsurealt võime käivitada arvutuspäeviku (vt joonis 1.29). Arvutustulemused programmiga arvutamisel on esitatud arvutuspäevikus 1.2.

```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järgehoidjad Seadistused Abi

octave-3.0.1:1> % arvutuste päeviku jaoks loome faili käsuga
octave-3.0.1:1> diary toereaktsioonVa.out
octave-3.0.1:2> % käsuga diary on alustame päevikusse salvestamist
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> % - protsendimärgile järgnev on kommentaar
octave-3.0.1:3> % SumMb=0; -Va*L+(-Ma+F1*3.6+q*1.6*2.8+F2*2.0)=0
octave-3.0.1:3> F1=10
F1 = 10
octave-3.0.1:4> F2=12
F2 = 12
octave-3.0.1:5> q=4
q = 4
octave-3.0.1:6> Ma=-15
Ma = -15
octave-3.0.1:7> L=6
L = 6
octave-3.0.1:8> Va=(- Ma+F1*3.6+q*1.6*2.8+F2*2.0)/L
Va = 15.487
octave-3.0.1:9> % käsuga diary off sulgeme päeviku
octave-3.0.1:9> % toereaktsioonVa.out'i vaata tekstiredaktoriga
octave-3.0.1:9>

```

Joonis 1.27. GNU Octave'i arvutuspäevik

Arvutuspäevik 1.2 (toereaktsioonVao.out)

```

octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> toereaktsioonVa
F1 = 10
F2 = 12
q = 4
Ma = -15
L = 6
Va = 15.487
octave-3.0.1:4> diary off

```

1.17 Ülekandemaatriks paindel

Diferentsiaalseosed varda paindel parema käe teljestikus x-z (joonis 1.30).

$$\frac{dw}{dx} = -\varphi_y \quad (1.52)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{d\varphi_y}{dx} = -\frac{1}{EI_y}M_y \quad (1.53)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \quad (1.54)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z(x) \quad (1.55)$$

Avaldised (1.54) ja (1.55) on tala tasakaalu diferentsiaalvõrrandid paindel. Nende seoste tuletamist vaadeldakse tehnilises mehaanikas. Paine on üks varda tööseisundeid (joonis 1.3). Algpameetrite meetodi ([Jür85], lk 248 ja [Kõo90]) puhul arvutame tala



Joonis 1.28. Toereaktsiooni arvutus GNU Octave'i programmiga I

```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järgehoidjad Seadistused Abi
octave-3.0.1:1> diary toereaktsioonVao.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> toereaktsioonVa
F1 = 10
F2 = 12
q = 4
Ma = -15
L = 6
Va = 15.487
octave-3.0.1:4> diary off
octave-3.0.1:5> █

```

Joonis 1.29. Toereaktsiooni arvutus GNU Octave'i programmiga II

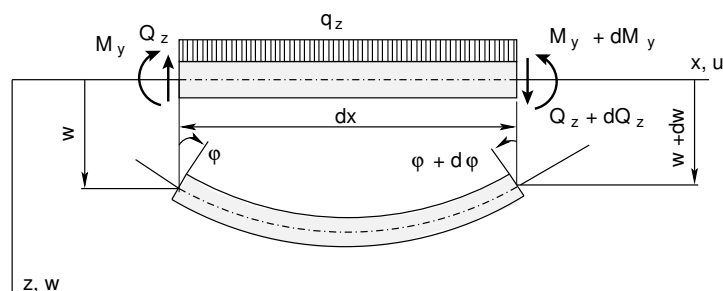
sisejõude ([MR95], lk 28), ([KW90], lk 20) M ja Q järgmiselt (vt joonis 1.31):

$$EI_y w_x = EI_y w_0 + EI_y \varphi_{y0} \cdot x + \mathcal{M} \cdot \frac{(x - a_{\mathcal{M}})^2}{2!} \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) - F \cdot \frac{(x - a_F)^3}{3!} \cdot H(x - a_F) - q \frac{(x - a_q)^4}{4!} H(x - a_q) \quad (1.56)$$

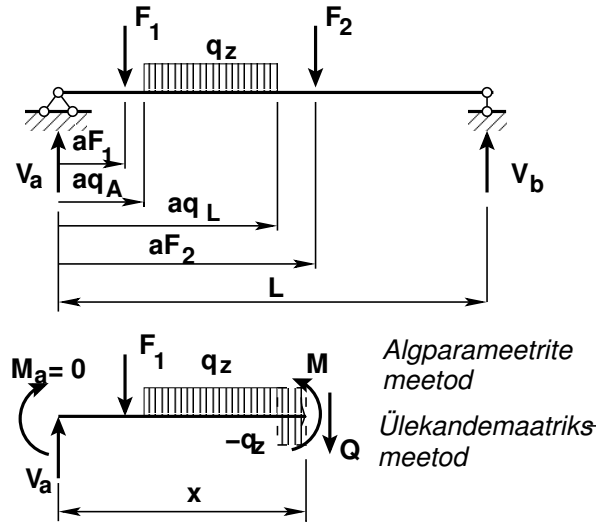
$$EI_y \varphi_{yx} = EI_y \varphi_{y0} + \mathcal{M} \cdot \frac{(x - a_{\mathcal{M}})^1}{1!} \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) + F \cdot \frac{(x - a_F)^2}{2!} \cdot H(x - a_F) - q \cdot \frac{(x - a_q)^3}{3!} \cdot H(x - a_q) \quad (1.57)$$

$$M_x = \mathcal{M} \cdot (x - a_{\mathcal{M}})^0 \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) - F \cdot \frac{(x - a_F)}{1!} \cdot H(x - a_F) - q \frac{(x - a_q)^2}{2!} H(x - a_q) \quad (1.58)$$

$$Q_x = F \cdot (x - a_F)^0 \cdot H(x - a_F) - q \cdot (x - a_q) \cdot H(x - a_q) \quad (1.59)$$



Joonis 1.30. Painde diferentsiaalseosed



Joonis 1.31. Lihttala

Momendi M_y ja pöördenurga φ_y positiivne suund on pööre teljelt z teljele x . Avaldistes (1.56), (1.57), (1.58) ja (1.59) on $H(x - a_F)$ Heaviside'i²⁸ funktsioon

$$H(x - a_F) = \begin{cases} 0, & \text{kui } (x - a_F) < 0 \\ 1, & \text{kui } (x - a_F) \geq 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

Võrrandeid (1.56), (1.57), (1.58) ja (1.59) nimetatakse ka ülekandevõrranditeks. Kirjutame võrrandid (1.58) ja (1.59) matrikskujul (1.61), kus toome eraldi välja tala alguses olevad reaktsioonid (jõud) V_a ja M_a :

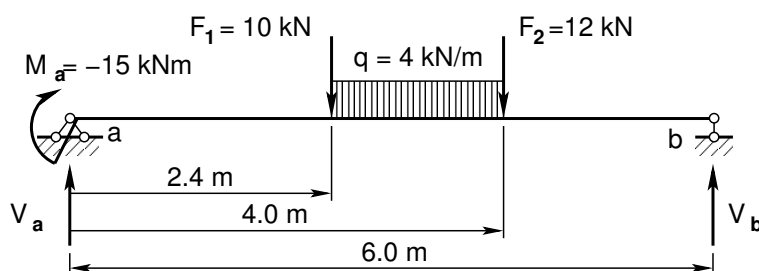
$$\begin{bmatrix} Q_x \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \cdot H(x - a_{F1}) \\ F_1 \cdot (x - a_{F1}) \cdot H(x - a_{F1}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_2 \cdot H(x - a_{F2}) \\ F_2 \cdot (x - a_{F2}) \cdot H(x - a_{F2}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_z \cdot (x - a_{qA}) \cdot H(x - a_{qA}) \\ q_z \frac{(x - a_{qA})^2}{2} H(x - a_{qA}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_z \cdot (x - a_{qL}) \cdot H(x - a_{qL}) \\ q_z \frac{(x - a_{qL})^2}{2} H(x - a_{qL}) \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

1.17.1 Lihttala arvutamise näide 1.1

[\[ekraanivideo\]](#)

Näide 1.1 Koostada joonisel 1.32 näidatud lihttala paindemomendi M ja põikjõu Q epüür.

²⁸ Oliver Heaviside, inglise füüsik ja elektriinsener, 1850–1925.



Joonis 1.32. Lihttala arvutuskeem

Tala sisejõudude leidmiseks kasutame ülekandevõrrandeid (1.61). Moment tala algul on antud $M_a = -15 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Algpärametri Q_a leidmiseks arvutame toereaktsiooni V_a

$$\begin{aligned}\Sigma M_b = 0 \quad & -V_a \cdot 6.0 - M_a + F_1 \cdot 3.6 + q \cdot 1.6 \cdot 2.8 + F_2 \cdot 2.0 = 0 \\ V_a &= (10 \cdot 3.6 + 4 \cdot 1.6 \cdot 2.8 + 12 \cdot 2.0) / 6 + M_a / 6 \\ Q_a = V_a = Q_a^0 + M_a / 6 &= 12.987 + 2.5 = 15.487 \text{ kN} \quad (1.62)\end{aligned}$$

Sisejõudude Q ja M arvutamisel ülekandevõrranditega (1.61) valime x -i muutmise sammu nii, et koondatud jõud oleksid jaotuspunktis, vastasel korral ei ole põikjõu graafikul hüpet. Kõnesolevas näites olevate koondatud jõudude F_1 ja F_2 asukohad on 2.4 m ning 4.0 m. Siin on minimaalne jaotuste arv 15. Silde 6.0 m puhul peab x -i samm olema vähemalt $6/15 = 0.4 \text{ m}$.

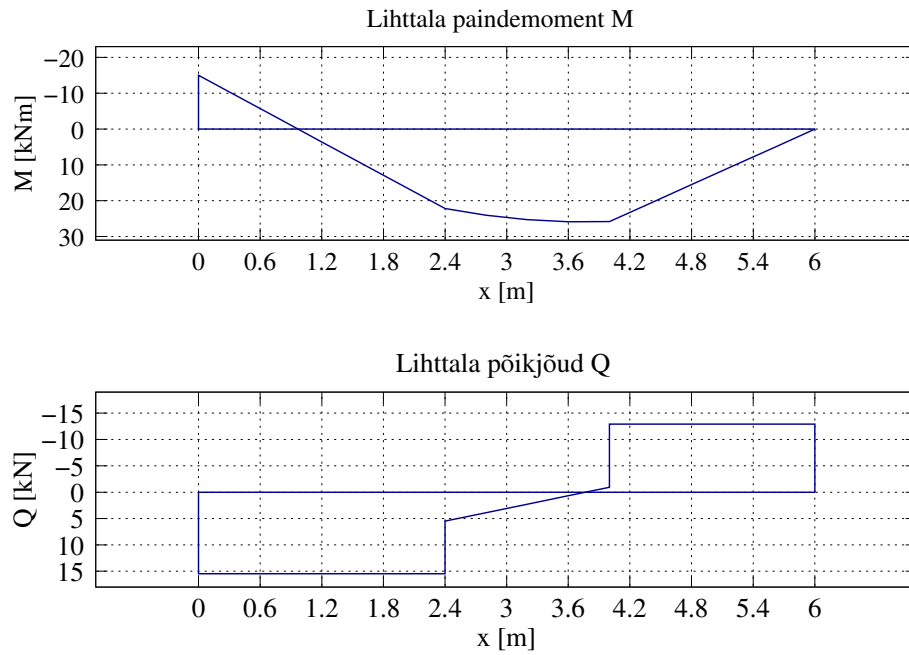
Need ülekandevõrrandid on kirjutatud faili *lihttala.m*²⁹ Käivitame selle faili GNU Octave'is käsuga 'lihttala' ning moodustame arvutuspäeviku 1.3. GNU Octave'is kirjutatud programm joonistab ka sisejõudude graafikud 1.33 ja kirjutab faili. Joonisel 1.33 näidatud graafikuid on töödeldud programmiga Xfig³⁰.

Arvutuspäevik 1.3 Lihttala arvutus

```
octave:1> diary lihttala.out
octave:2> diary on
octave:3> lihttala
L = 6
F1 = 10
aF1 = 2.4000
F2 = 12
aF2 = 4
qz = 4
MA = -15
ML = 0
NT = 15
lihttala_Va = 12.987
lihttala_Vb = 15.413
Q0 = 2.5000
Qa=Va+Q0
```

²⁹ [./octaveProgrammide/lihttala.m](#)

³⁰ <http://www.xfig.org/>



Joonis 1.33. Lihttala epüürid

=====

Sisejõudude jaotus talas

=====

I-Nr	x	Q	M
1	0.00	15.487	-15.000
2	0.40	15.487	-8.805
3	0.80	15.487	-2.611
4	1.20	15.487	3.584
5	1.60	15.487	9.779
6	2.00	15.487	15.973
7	2.40	15.487	22.168
8	2.40	5.487	22.168
9	2.80	3.887	24.043
10	3.20	2.287	25.277
11	3.60	0.687	25.872
12	4.00	-0.913	25.827
13	4.00	-12.913	25.827
14	4.40	-12.913	20.661
15	4.80	-12.913	15.496
16	5.20	-12.913	10.331
17	5.60	-12.913	5.165
18	6.00	-12.913	-0.000

=====

%

octave:4> diary off

1.17.2 Lihttala siirete arvutamise näide 1.2 [\[ekraanivideo\]](#)

Näide 1.2 Leida joonisel 1.32 näidatud lihttala siirded w , φ_y ja sisejõud Q ning M .

Siirete arvutamisel ülekandemeetodiga on vaja teada algparameetreid, s.o rajasiirdeid w_A , φ_{yA} ja rajajõude $Q_{A,g}$ M_A tala alguses. Selleks kirjutame ülekandevõrrandid (1.56), (1.57), (1.59) ja (1.58) (maatrikskuju (F.31) on toodud lk 687) ümber võrrandisüsteemina³¹ (1.63):

$$-\mathbf{I} * \mathbf{Z}_p + \mathbf{U} \mathbf{Z}_v = -\mathring{\mathbf{Z}} \quad (1.63)$$

siin \mathbf{I} on (4×4) ühikmaatriks,

tala lõpus \mathbf{Z}_p ja alguses \mathbf{Z}_v olevad siirded ja sisejõud (1.64)

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_v, \quad (1.64)$$

ülekandemaatriks \mathbf{U} (1.65)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -(x_p - x_v) & \frac{(x_p - x_v)}{GAQ} - \frac{(x_p - x_v)^3}{6EI_y} & -\frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} \\ 0 & 1 & \frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} & \frac{(x_p - x_v)}{EI_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x_p - x_v) & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.65)$$

koormusvektor $\mathring{\mathbf{Z}}$ on on toodud avaldisega (1.66)

$$\mathring{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^2}{EI_y 2!} + \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^3}{EI_y 3!} + \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^4}{EI_y 4!} \\ -\sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^1}{EI_y 1!} - \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^2}{EI_y 2!} - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^3}{EI_y 3!} \\ -\sum F_z (x_p - a_F)_+^0 - \sum q_z (x_p - a_q)_+^1 \\ -\sum \mathcal{M}_y (x_p - a_M)_+^0 - \sum F_z (x_p - a_F)_+^1 - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^2}{2!} \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

Nii saame neli võrrandit (1.63) kaheksa tundmatuga (1.64). Ülejäänud võrrandid saame rajatingimustest

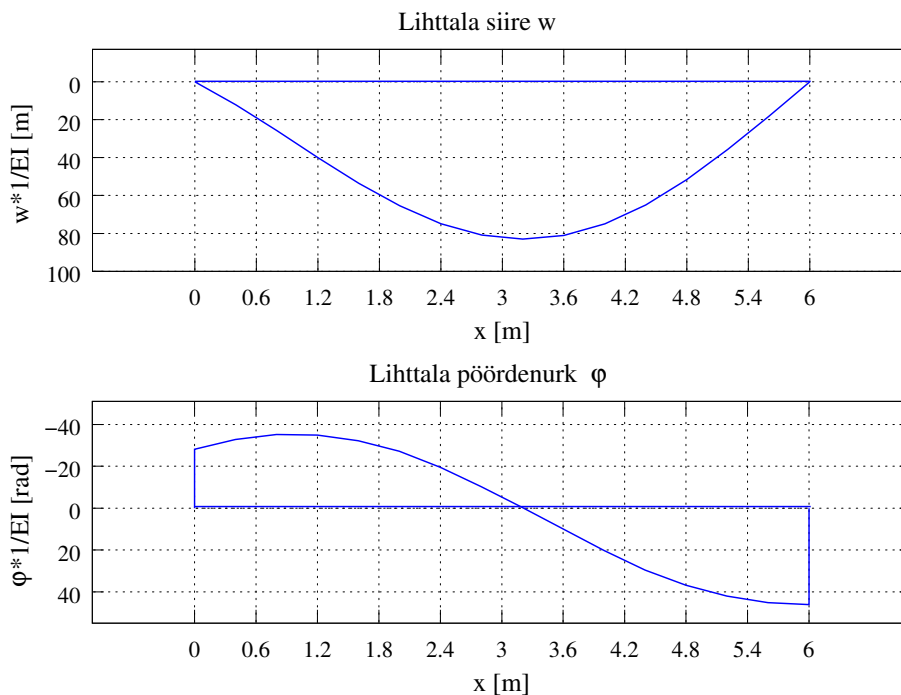
$$\begin{bmatrix} w_L \\ M_{yL} \\ w_A \\ M_{yA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15.0 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Ülesande lahendamiseks kasutame GNU Octave programmi [talaRajaSiirded.m](#)³². Programm arvutab ja joonistab siirded (joonis 1.34) w , φ_y ja sisejõud Q , M .

Arvutuse tulemused on toodud arvutuspäevikus 1.4.

³¹Ülekandevõrrandite esitamist võrrandisüsteemina on vaadeldud töodes [Lah97a], [Lah97b], [Lah98a].

³²[./octaveProgrammid/talaRajaSiirded.m](#)



Joonis 1.34. Lihttala pöördenurgad ja siirded

Arvutuspäevik 1.4 *Lihttala siirded*

```

octave:1> diary talaRajaSiirded.out
octave:2> diary on
octave:3> talaRajaSiirded
I = 1.9020e-05
E = 2.1000e+11
EI = 3994200
GAR = 4.5036e+15
F1 = 10
aF1 = 2.4000
F2 = 12
aF2 = 4
L = 6
qz = 4
%
Fjoud=[F1 aF1 ; % jõud 1
        F2 aF2]; % jõud 2
%      F3 aF3]; % jõud 3
qkoormus=[qz 2.4 4.0]; % jaotatud koormus qz
%          qz1 0.0 L]; % jaotatud koormus qz1
I märgikokkulepe
Skaleerimise tegurid EIsuhe = EIo/EI GAr suhe=EIo/GAR
EIsuhe = 1
GAr suhe = 8.8689e-10
siirded ja pöörded on nüüd EIo kordsed
U=Ulintala_ImkSc(L,EIsuhe,GAr suhe) - ülekandemaatriks

```



```

Zo=ZtalaFqSc(L,EIsuhe,Fjoud,qkoormus) - koormusvektor
A=zeros(8,8); - nullistame võrrandisüsteemi kordajad
ZZo=zeros(8,1); - nullistame võrrandisüsteemi vabaliikmed
A=InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N) - asetab B A-sse algusega IM,JN

A=InsertBtoA(A,8,8,1,5,U,4,4) - asetame ülekandemaatriksi U võrrandisüsteemi
A=InsertBtoA(A,8,8,1,1,A1,4,4) - asetame ühikmaatriksi A1 võrrandisüsteemi
ZZo=InsertBtoA(ZZo,8,1,1,1,Zo,4,1) - asetame koormusliikmed võrrandisüsteemi

```

```

=====
Ülekandevõrrandid. - I * ZL + U * ZA = - ZZo
Tundmatute kordajad A(1:4,1:8) ja vabaliikmed ZZo(1:4,1)

```

```

-----
      wL   fiL   QL   ML   wA   fiA   QA   MA   ZZo
-----
-1.0   0.0   0.0   0.0   1.0 -6.0  -36.0 -18.0  -119.087
 0.0  -1.0   0.0   0.0   0.0  1.0   18.0   6.0   114.571
 0.0   0.0  -1.0   0.0   0.0  0.0    1.0   0.0    28.400
 0.0   0.0   0.0  -1.0   0.0  0.0    6.0   1.0    77.920
-----

```

```

=====
Rajatingimused.
Tundmatute kordajad A(5:8,1:8) ja vabaliikmed ZZo(5:8,1)

```

```

-----
      wL   fiL   QL   ML   wA   fiA   QA   MA   ZZo
-----
 1.0   0.0   0.0   0.0   0.0  0.0   0.0   0.0    0.0
 0.0   0.0   0.0   1.0   0.0  0.0   0.0   0.0    0.0
 0.0   0.0   0.0   0.0   1.0  0.0   0.0   0.0    0.0
 0.0   0.0   0.0   0.0   0.0  0.0   0.0   1.0   -15.0
-----

```

```

-----
Võrrandisüsteemi lahendamine

```

```
X=A\ZZo;
```

```

=====
Toereaktsioonid ja kontaktjõud X I märgikokkulepe
=====

```

```

-0.000000e+00 - siire tala lõpus
4.611716e+01  - pööre tala lõpus
-1.291333e+01 - põikjõud tala lõpus
-0.000000e+00 - paindemoment tala lõpus
4.263256e-14  - siire tala algul
-2.807218e+01 - pööre tala algul
1.548667e+01  - põikjõud tala algul
-1.500000e+01 - paindemoment tala algul

```

```

-----
siirded ja pöörded on EIo kordsed

```

I märgikokkuleppe puhul on tala positiivne pöördnurk Z-teljelt X-teljele

KordaNT = 1

Walg =

```

4.2633e-14  -2.8072e+01  1.5487e+01  -1.5000e+01

```

```

Fjoud1=Fjoud;
qkoormus1=qkoormus;
Njaotust=jaotusteArv(L,Fjoud1,qkoormus1);
  arvude suurim ühistegur - gcd(arvudS)
yhistegur = 400
  minimaalne jaotuste arv - jaotusi = L*suurendus/yhistegur
jaotustusi = 15
  NT=jaotusi*KordaNT;   % jaotusi suurendatakse KordaNT korda
NT = 15
TSj=talaSiireFqSc(NT,L,EIsuhe,GArsuhe,Walg,Fjoud,qkoormus);
TSjT=TSj;
pealdis=' Siirded ja sisejõud lihttalas ';
tabelXWfiQM(TSjT,pealdis)

```

```

=====
Siirded ja sisejõud lihttalas
=====

```

I-Nr	x	w	fi	Q	M
1	0.00	0.000	-28.072	15.487	-15.000
2	0.40	12.264	-32.833	15.487	-8.805
3	0.80	25.936	-35.116	15.487	-2.611
4	1.20	40.026	-34.922	15.487	3.584
5	1.60	53.543	-32.249	15.487	9.779
6	2.00	65.495	-27.099	15.487	15.973
7	2.40	74.892	-19.471	15.487	22.168
8	2.40	74.892	-19.471	5.487	22.168
9	2.80	80.852	-10.207	3.887	24.043
10	3.20	82.975	-0.322	2.287	25.277
11	3.60	81.061	9.929	0.687	25.872
12	4.00	75.017	20.290	-0.913	25.827
13	4.00	75.017	20.290	-12.913	25.827
14	4.40	64.972	29.588	-12.913	20.661
15	4.80	51.622	36.820	-12.913	15.496
16	5.20	35.792	41.985	-12.913	10.331
17	5.60	18.309	45.084	-12.913	5.165
18	6.00	0.000	46.117	-12.913	-0.000

```

-----
Siin siire w ja ristlõike pööre fi on EIo kordsed
Tegelik siire w/EIo ja ristlõike pööre fi/EIo
MiMaSg=minMaxGrafSiirded(TSjT);
octave:4> diary off

```

Ristlõike pöördenuga $\varphi_y(x = 0.0)$ ja siirde $w_c(x = 4.0)$ arvulisi väärtusi on võrreldud siirete arvutamisel näites 7.1 (lk 181) saadud tulemustega. Nende väärtused langevad kokku.

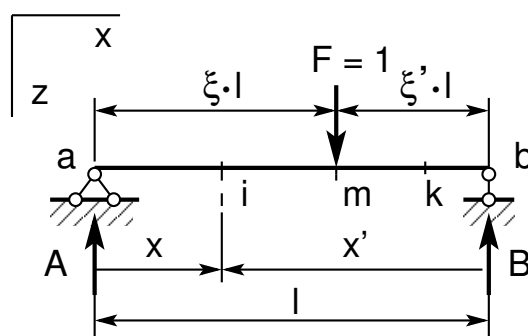
2. Tala mõjujooned

2.1 Mõjujoone mõiste

[ekraanivideo]

Liikuvat koormust tuleb arvestada sildade, kraanatalade ja teiste tehnoehitiste projekteerimisel. Paigalseisva koormuse puhul kujutati varraste sisejõude epüüridel. Koormus oli fikseeritud ja sisejõud olid varda telje (x -koordinaadi) funktsioonid. Liikuva koormuse puhul fikseeritakse ristlõige ja leitakse selles sisejõud või toereaktsioon olenevalt koormuse asukohast. Ristlõigete jaoks koostatakse graafikud (mõjujooned).

Mõjujoon on graafik, mis kujutab konstruktsioonil liikuvast ja suunda säilitavast ühikjõust tingitud toereaktsiooni, sisejõu, siirde vms suurust arvutuskeemi kindlas ristlõikes. Mõjujoone ja epüüri erinevust selgitame mõjufunktsiooni $M(x, \xi)$ abil. Mõjufunktsiooni üheks muutujaks on ristlõike asukoht x (joonis 2.1) ja teiseks muutujaks jõu asukoht ξ . Joonisel 2.1 on toodud mõõduta koordinaadid ξ ja ξ' ($\xi + \xi' = 0$).



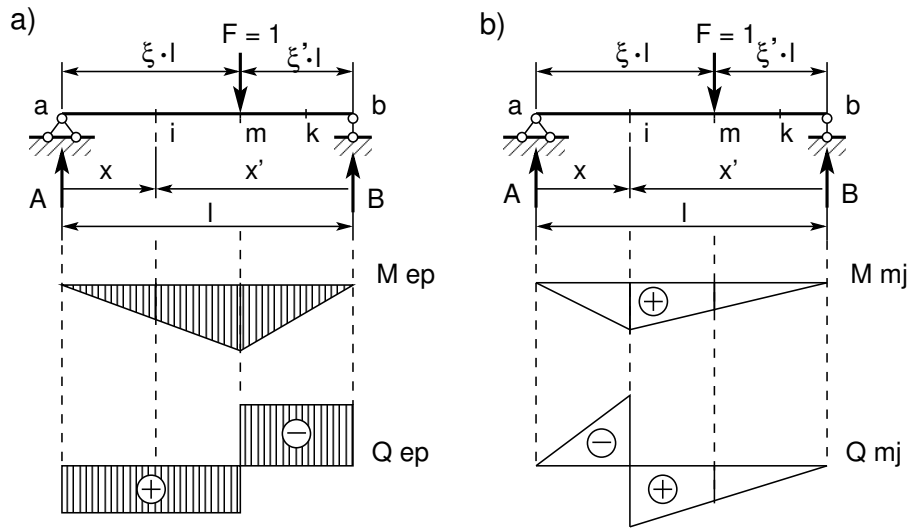
Joonis 2.1. Liikuv koormus

Tala elastse joone diferentsiaalvõrrandi $\frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$ lahendina järgmistel rajatingimustel $M(0) = 0$, $M(l) = 0$ saab leida mõjufunktsiooni (Greeni¹ funktsiooni)

$$M(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi \cdot l)}{l}, & \text{kui } x \leq \xi \cdot l \\ \frac{\xi \cdot l(l-x)}{l}, & \text{kui } x \geq \xi \cdot l \end{cases} \quad (2.1)$$

Epüüride ja mõjujoonte võrdlemiseks vaatleme mõjufunktsiooni (2.1). Epüüride saamiseks fikseerime muutuja ξ ($\xi = a_m$) ja mõjujoonte saamiseks muutuja x ($x = a_i$).

¹Georg Green, inglise füüsik ja matemaatik, 1793–1841.



Joonis 2.2. Epüürid ja mõjujooned

Epüüride puhul fikseerime muutuja ξ ($\xi \cdot l = a_m$)

$$M(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-a_m)}{l}, & \text{kui } x \leq a_m \\ \frac{a_m(l-x)}{l}, & \text{kui } x \geq a_m \end{cases} \quad (2.2)$$

Mõjujoonte puhul fikseerime muutuja x ($x = a_i$)

$$M(x, \xi) = \begin{cases} \frac{a_i(l-\xi \cdot l)}{l}, & \text{kui } a_i \leq \xi \cdot l \\ \frac{\xi \cdot l(l-a_i)}{l}, & \text{kui } a_i \geq \xi \cdot l \end{cases} \quad (2.3)$$

Avaldistega (2.2) ja (2.3) leitud graafikud on joonisel 2.2. Mõjujoonte leidmist vaatleme eraldi.

2.2 Toereaktsioonide mõjujooned

Staatiline meetod.

Talal (joonis 2.3) liigub koondatud koormus $F = 1$, mille kaugus toest a on $\xi \cdot l$ ja toest b $\xi' \cdot l = (1 - \xi)l$.

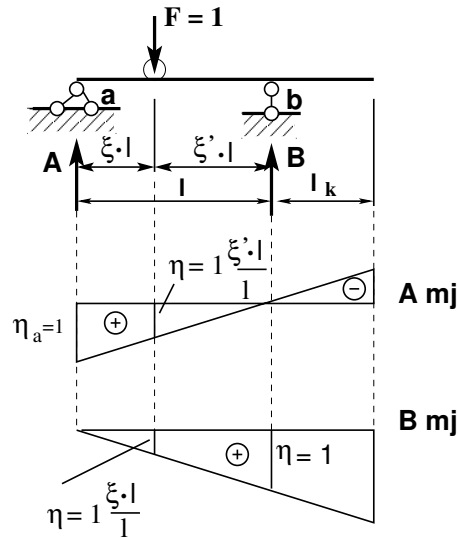
Tasakaalutingimusest $\sum M_b = 0$

$$\sum M_b = 0; \quad -Al + F \cdot l(1 - \xi) = 0 \quad (2.4)$$

saame

$$A = F \cdot \frac{l(1 - \xi)}{l} = 1 \cdot \xi' \quad (2.5)$$

Toereaktsioon A on muutuja ξ' lineaarne funktsioon (joonisel 2.3 sirgjoon). Sarnaselt leiame tasakaalutingimusest $\sum M_a = 0$



Joonis 2.3. Toereaktsioonide A ja B mõjujooned

$$\sum M_a = 0; \quad -Bl + F \cdot \xi \cdot l = 0 \tag{2.6}$$

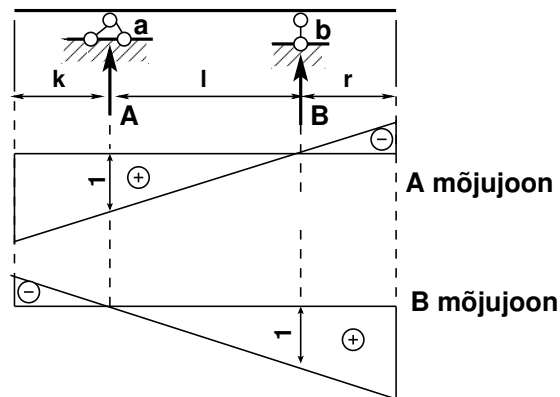
toereaktsiooni B

$$B = F \cdot \frac{\xi \cdot l}{l} = 1 \cdot \xi, \tag{2.7}$$

mis on muutuja ξ lineaarne funktsioon (joonisel 2.3 sirgjoon).
Konsoolidega tala toereaktsioonide mõjujooned on joonisel 2.4.

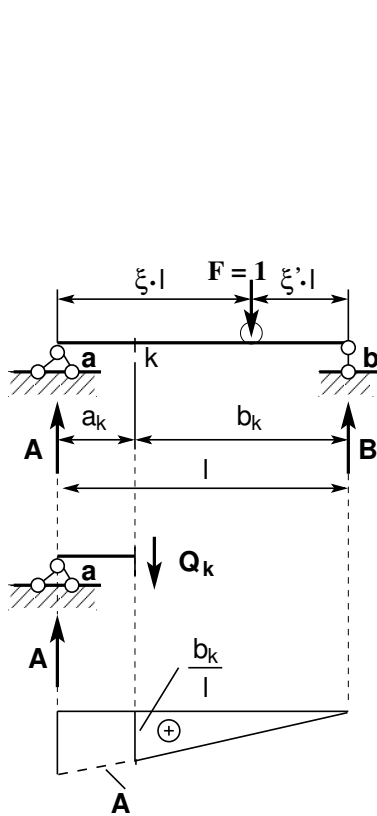
2.3 Lihttala põikjõu mõjujooned

Staatiline meetod. Vaatleme kahte juhtu:

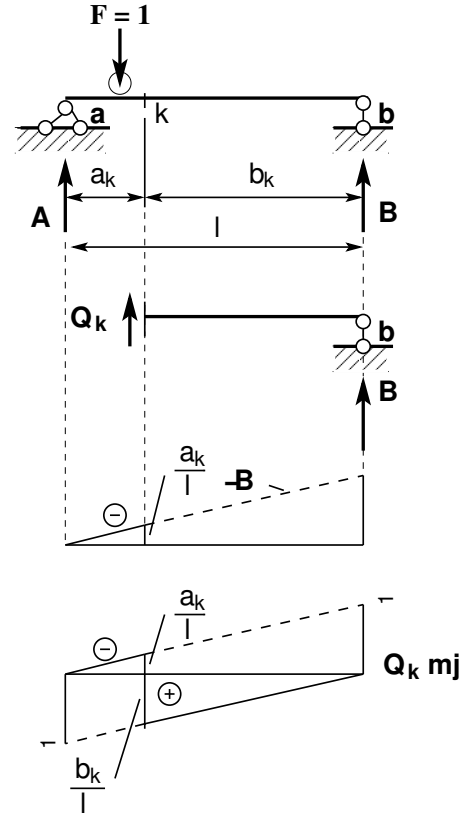


Joonis 2.4. Konsoolidega tala toereaktsioonide mõjujooned

- Liikuv koormus asub ristlõike k ja toe b vahel (joonis 2.5). Tasakaalutingimusest $\Sigma Y = 0$ saame $Q_k - A = 0$; $Q_k = A$. Vahemikus $a_k \leq \xi \cdot l \leq l$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni A mõjujoonega (avaldis 2.5).



Joonis 2.5. Põikjõu mõjujoone parem pool

Joonis 2.6. Põikjõu Q_k mõjujoon

- Liikuv koormus asub toe a ja ristlõike k vahel (joonis 2.6). Tasakaalutingimusest $\Sigma Y = 0$ saame $Q_k + B = 0$; $Q_k = -B$. Vahemikus $0 \leq \xi \cdot l \leq a_k$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni $-B$ mõjujoonega (2.6).

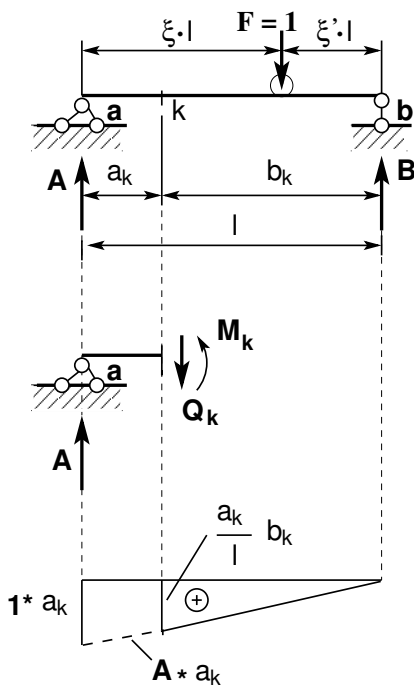
Põikjõu Q_k mõjujoon

$$Q_k = \begin{cases} A = \frac{l - \xi \cdot l}{l}, & \text{kui } a_k \leq \xi \cdot l \leq l \\ -B = -\frac{\xi \cdot l}{l}, & \text{kui } 0 \leq \xi \cdot l \leq a_k \end{cases} \quad (2.8)$$

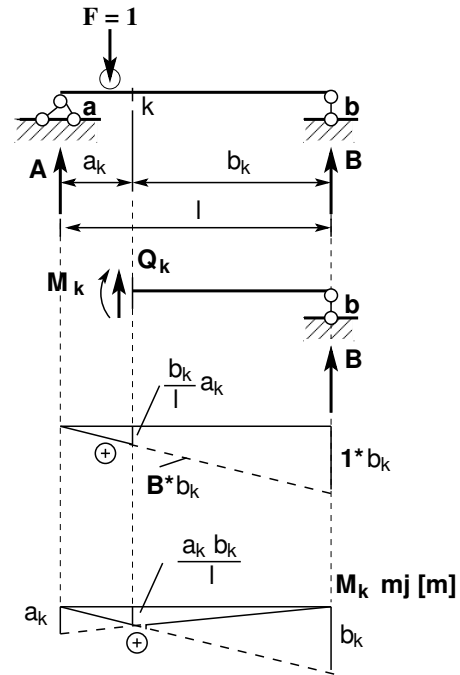
2.4 Lihttala paindemomendi mõjujooned

Staatiline meetod. Vaatleme kahte juhtu:

- Liikuv koormus asub ristlõike k ja toe b vahel (joonis 2.7). Tasakaalutingimusest $\Sigma M_k = 0$ saame $M_k - A \cdot a_k = 0$; $M_k = A \cdot a_k$. Vahemikus $a_k \leq \xi \cdot l \leq l$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni A mõjujoonega, mis on korrutatud a_k .



Joonis 2.7. Paindemomendi mõjujoon



Joonis 2.8. Paindemomendi M_k mõjujoon

- Liikuv koormus asub toe a ja ristlõike k vahel (joonis 2.8). Tasakaalutingimusest $\Sigma M_k = 0$ saame $M_k - B \cdot b_k = 0$; $M_k = B \cdot b_k$. Vahemikus $0 \leq \xi \cdot l \leq x_k$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni B mõjujoonega, mis on korrutatud b_k .

Paindemomendi M_k mõjujoon

$$M_k = \begin{cases} a_k \cdot A = a_k \cdot \frac{l(1-\xi)}{l}, & \text{kui } a_k \leq \xi \cdot l \leq l \\ (l - a_k) \cdot B = (l - a_k) \cdot \frac{\xi \cdot l}{l}, & \text{kui } 0 \leq \xi \cdot l \leq a_k \end{cases} \quad (2.9)$$

kus a_k on ristlõike k kaugus vasakust toest a .

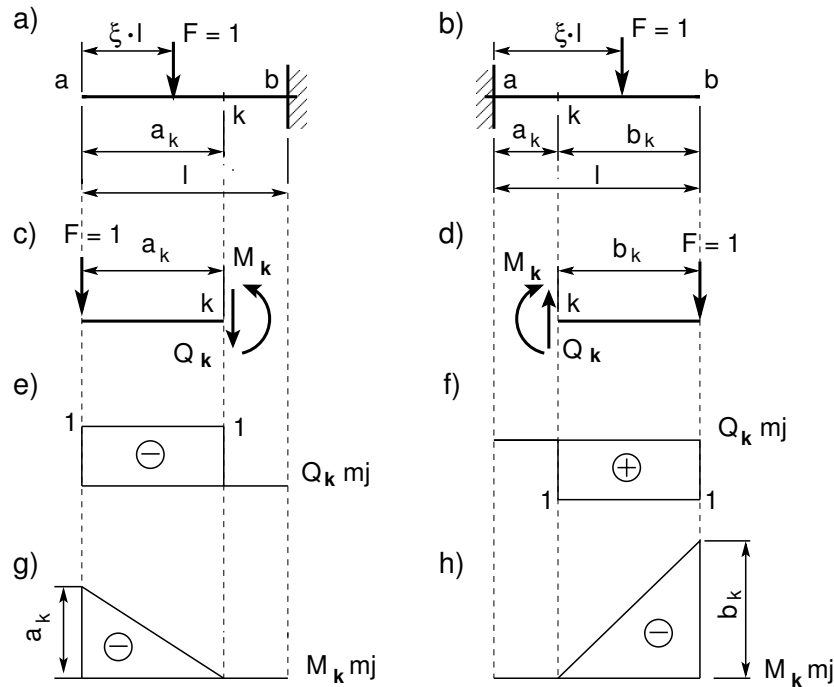
2.5 Konsooli mõjujooned

2.5.1 Põikjõu mõjujoon

Konsooli (joonis 2.9 a) b)) põikjõu Q_k mõjujoone leidmiseks vaatame joonist (2.9 c) d)) ja koostame tasakaaluvõrrandi, millest leiame Q_k avaldise (2.10).

$$\text{joonis 2.9 c)} \quad Q_k = -1, \quad (\xi l \leq a_k), \quad \text{joonis 2.9 d)} \quad Q_k = 1, \quad (\xi l \geq a_k) \quad (2.10)$$

Kui ühikjõud asetseb konsoolil (joonis 2.9 a)) lõikest k paremal, on põikjõud lõikes k null.



Joonis 2.9. Konsooli mõjujooned

Kui ühikjõud asetseb konsoolil (joonis 2.9 a)) lõikest k vasakul, on põikjõud lõikes k $Q_k = -1$. Põikjõu Q_k mõjujoon on joonisel 2.9 e).

Kui ühikjõud asetseb konsoolil (joonis 2.9 b)) lõikest k vasakul, on põikjõud lõikes k null. Kui ühikjõud asetseb konsoolil (joonis 2.9 b)) lõikest k paremal, on põikjõud lõikes k $Q_k = 1$. Põikjõu Q_k mõjujoon on joonisel 2.9 f).

Vasakpoolsel ja parempoolsel konsoolil on põikjõud erineva märgiga.

2.5.2 Paindemomendi mõjujoon

Konsooli (joonis 2.9 a) ja b)) paindemomendi M_k mõjujoone leidmiseks vaatame joonist (2.9 c) d)) ja koostame tasakaaluvõrrandi, millest leiame M_k avaldised (2.11)

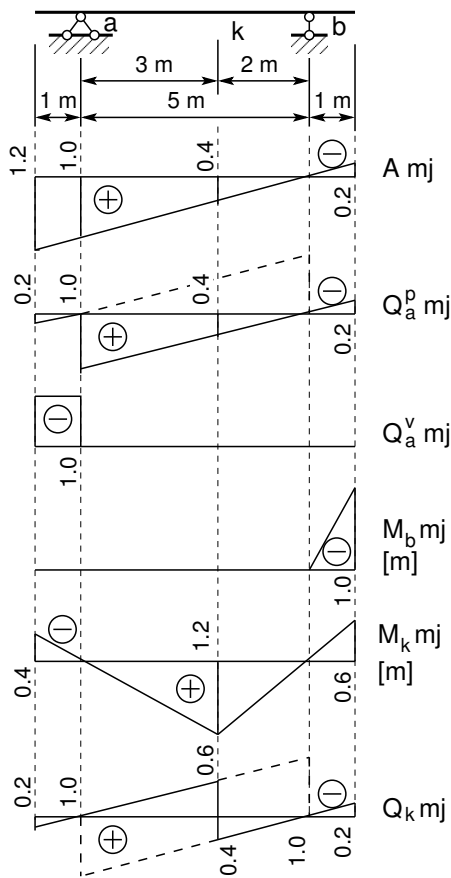
$$\text{joonis 2.9 a)} \quad M_k = -F \cdot (a_k - \xi l), \quad \text{joonis 2.9 b)} \quad M_k = -F \cdot (\xi l - a_k) \quad (2.11)$$

Kui ühikjõud on lõike k ja toe vahel, siis $M_k = 0$. Kui ühikjõud on lõike k ja konsooli vaba otsa vahel (joonis 2.9 c) ja d)), siis M_k mõjujoon on määratud avaldisega (2.11).

Konsooli lõike k paindemomendi mõjujoon M_k on joonisel 2.9 g) h).

2.5.3 Konsoolidega tala mõjujooned

Joonisel 2.10 on näidatud konsoolidega tala. Toereaktsiooni A mõjujoon on saadud avaldisega (2.5) ja näidatud joonisel 2.4.



Joonis 2.10. Konsoolidega tala mõjujooned

Toereaktsiooni mõjujoone konstrueerimiseks kanname toele a löigu pikkusega üks. Ühendame selle löigu otspunkti ja toel b oleva väärtuse (null) sirgega (joonis 2.10), mille pikendame tala otsteni. Tala otstes olevad mõjujoone ordinaadid võib arvutada sarnastest kolmnurkadest.

Põikjõud Q_a^p asub tala sildes (toest paremal). Sildes asuva ristlõike jaoks põikjõu mõjujoone konstrueerimist vaatlesime joonisel 2.6. Pikendame sirged tala lõpuni. Nüüd nihutame ühelt sirgelt teisele ülemineku punkti k toest a paremale, saame Q_a^p mõjujoone (joonis 2.10). Tala otstes olevad mõjujoone ordinaadid võib arvutada sarnastest kolmnurkadest.

Põikjõud Q_a^v asub konsoolil. Vasakpoolse konsooli mõjujoont vaatlesime joonisel 2.9. Kui ühikjõud asub tala sildes, siis konsoolil olevas ristlõikes on põikjõud Q_a^v null (joonis 2.10). Kui ristlõige, mille jaoks meie põikjõu mõjujoont konstrueerime, asub vasakul konsoolil, on mõjujoone märk miinus. Parempoolsel konsoolil on põikjõu mõjujoone märk pluss.

Kui ühikjõud liigub tala sildes, on paindemoment M_b toel b null. Parempoolsel konsoolil oleva ristlõike paindemomendi mõjujoont vaatlesime joonisel 2.10. Nii koostame M_b mõjujoone (joonis 2.10).

Paindemoment M_k asub tala sildes (ristlõige k). Sildes asuva ristlõike jaoks paindemomendi mõjujoone konstrueerimist vaatlesime joonisel 2.8. Pikendame sirged tala lõpuni. Nii saame M_k mõjujoone (joonis 2.10). Tala otstes olevad mõjujoone ordinaadid võib arvutada sarnastest kolmnurkadest.

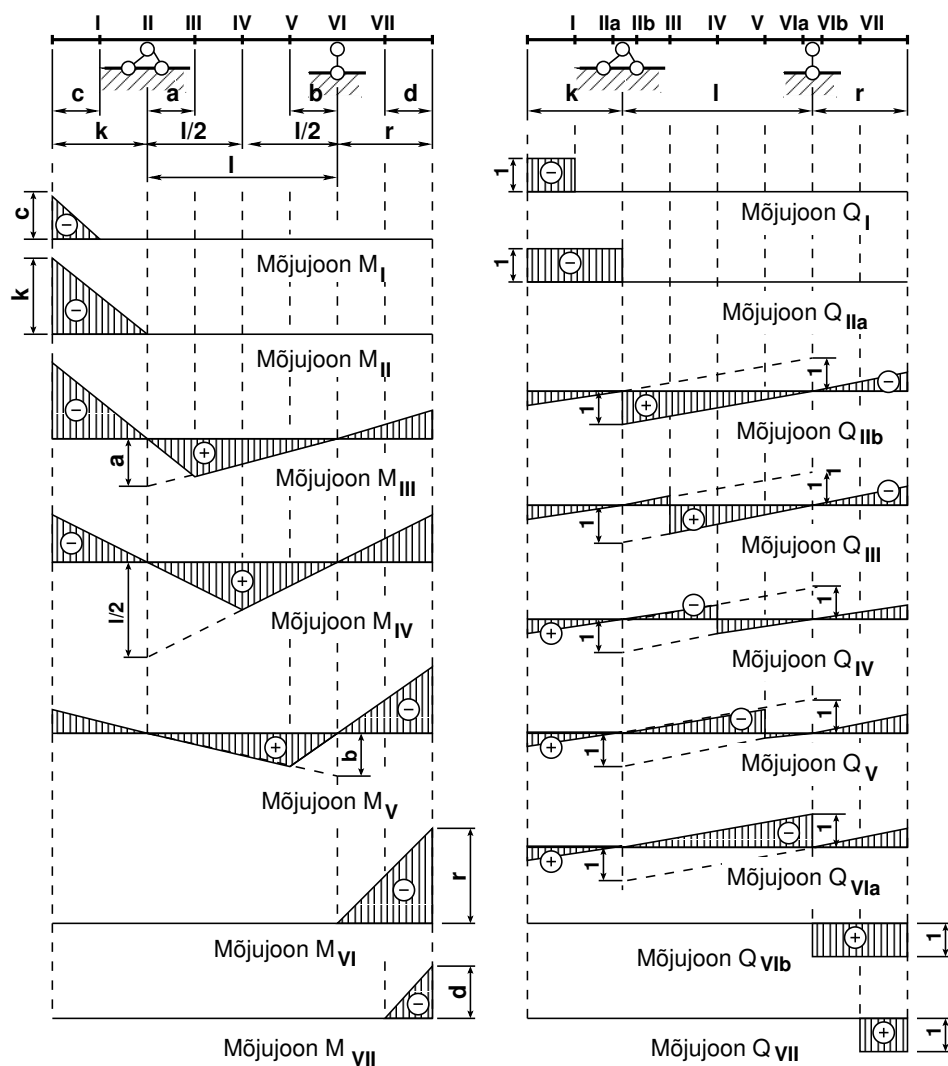
Põikjõud Q_k asub tala sildes (ristlõige k). Sildes asuva ristlõike jaoks põikjõu mõjujoone konstrueerimist vaatlesime joonisel 2.8. Pikendame sirged tala lõpuni. Nii saame Q_k mõjujoone (joonis 2.10).

Sarnaselt õpikus [DK62] toodud konsoolidega tala paindemomendi ja põikjõu mõjujoonetele on konsoolidega tala mõjujooned näidatud joonisel 2.11.

Konsoolidega tala mõjujoonte (joonis 2.11) koostamisel teeme vahet järgmistel tala piirkondadel: vasak konsool, tala sille ja parem konsool.

Kui ristlõige, mille mõjujoont meie konstrueerime, asub vasakpoolsel konsoolil, siis põikjõu Q mõjujoone koostamiseks kasutame avaldist (2.10). Sama ristlõike paindemomendi M mõjujoone koostamiseks kasutame avaldist (2.11).

Ristlõigete jaoks, mis asuvad tala sildes, kasutame põikjõu Q mõjujoone koostamiseks avaldist (2.8) ja paindemomendi M mõjujoone koostamiseks avaldist (2.9).



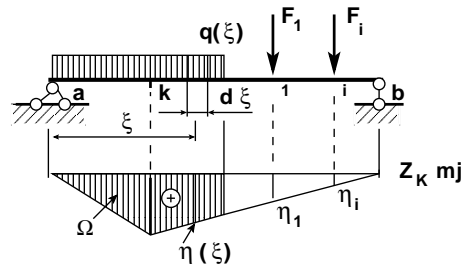
Joonis 2.11. Konsoolidega tala paindemomendi ja põikjõu mõjujooned

Kui ristlõige asub parempoolsel konsoolil, siis põikjõu Q ja paindemomendi M mõjujoone koostamiseks kasutame avaldisi (2.10) ja (2.11).

2.6 Mõjujoonte kasutamine

Tuleb teada, kuidas kasutada mõjujooni toereaktsioonide, sisejõudude ja siirete leidmiseks.

Mõjujoone iga ordinaat η_i näitab otsitavat suurust ühikulisest koormusest $F_i^* = 1$ (vt joonis 2.12).



Joonis 2.12. Mõjujoone kasutamine

Kui talale mõjub koormus F_i , siis leiame otsitava suuruse Z_k avaldisest $Z_k = F_i \cdot \eta_i$. Mitme koondatud jõu olemasolul summeerime need.

$$Z_k = F_1 \eta_1 + F_2 \eta_2 + \dots + F_i \eta_i \quad (2.12)$$

siin F_1, F_i on koondatud jõud ja η_1, η_i vastavate jõudude all olevad ordinaadid mõjujoonel (joonis 2.12). Ühtlaselt jaotatud koormusest ($q = konst$) põhjustatud sisejõu Z_k (joonis 2.12) saame avaldisest (2.13)

$$Z_k = \int_a^c q(\xi) \eta(\xi) d\xi = q\Omega \quad (2.13)$$

kus Z_k on sisejõud ning Ω mõjujoone pindala (vt joonisel 2.12 viirutatud osa). Kogu koormusest põhjustatud sisejõud (vt joonist 2.12)

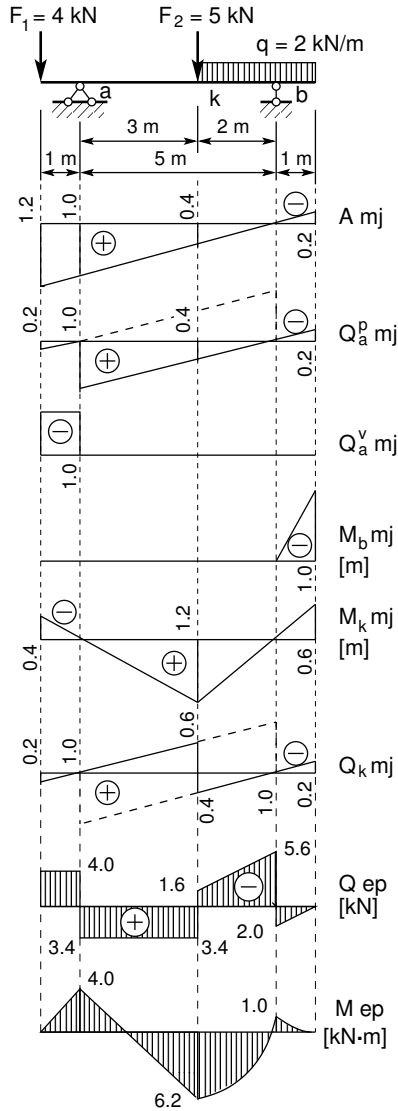
$$Z_k = F_1 \eta_1 + F_i \eta_i + q \int_a^c \eta(\xi) d\xi = F_1 \eta_1 + F_i \eta_i + q\Omega \quad (2.14)$$

siin F_1, F_i on koondatud jõud ja η_1, η_i vastavate jõudude all olevad ordinaadid mõjujoonel (joonis 2.12).

2.6.1 Sisejõudude leidmise näide 2.1 [\[slaidid\]](#) [\[.swf\]](#) [\[ekraanivideo\]](#)

Näide 2.1 Arvutada joonisel 2.13 kujutatud konsoolidega tala toereaktsioon A, põikjõud Q_a^p toest a paremal, põikjõud Q_a^v toest a vasakul, paindemoment M_k , põikjõud Q_k lõikes k. Talale mõjuv koormus ja vajalikud mõjujooned on näidatud joonisel 2.13.

Vaadeldava konsoolidega tala mõjujooned on koostatud joonisel 2.10.



Joonis 2.13. Sisejõu leidmine mõjujoonte abil

Kasutades avaldist (2.14), saame toereaktsiooni A väärtuseks

$$A = 4 \cdot 1.2 + 5 \cdot 0.4 + 2 \frac{0.4 \cdot 2}{2} - 2 \frac{0.2 \cdot 1}{2} = 7.4 \text{ kN} \quad (2.15)$$

Põikjõu Q_a^p toest a paremal leiame avaldisega

$$Q_a^p = 4 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.4 + 2 \frac{0.4 \cdot 2}{2} - 2 \frac{0.2 \cdot 1}{2} = 3.4 \text{ kN} \quad (2.16)$$

Põikjõu Q_a^v toest a vasakul arvutame avaldisega

$$Q_a^v = -4 \cdot 1.0 = -4.0 \text{ kN} \quad (2.17)$$

Paindemomendi M_b väärtuseks toel b saame

$$M_b = -2 \frac{1.0 \cdot 1}{2} = -1.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (2.18)$$

Paindemoment M_k ristlõikes k on

$$M_k = -4.0 \cdot 0.4 + 5 \cdot 1.2 + 2 \frac{1.2 \cdot 2}{2} - 2 \frac{0.6 \cdot 1}{2} = 6.2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (2.19)$$

Ristlõikes k on põikjõul kaks väärtust. Parempoolse põikjõu väärtuse Q_k^p (2.20) saab, kui kasutada mõjujoone vasakpoolset väärtust

$$Q_k^p = 4.0 \cdot 0.2 - 5 \cdot 0.6 + 2 \frac{0.4 \cdot 2}{2} - 2 \frac{0.2 \cdot 1}{2} = -1.6 \text{ kN} \quad (2.20)$$

Vasakpoolse põikjõu väärtuse Q_k^v (2.21) saab, kui kasutada mõjujoone parempoolset väärtust

$$Q_k^v = 4.0 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.4 + 2 \frac{0.4 \cdot 2}{2} - 2 \frac{0.2 \cdot 1}{2} = 3.4 \text{ kN} \quad (2.21)$$

2.7 Koormuse ebasoodsaim asetus

Ühe liikuva koondatud jõu F_1 puhul tekib maksimaalne või minimaalne sisejõud ($\max Z_k / \min Z_k$) siis, kui see jõud asetseb mõjujoone suurima positiivse või negatiivse ordinaadi ($\eta_{\max} / \eta_{\min}$) kohal.

$$\max Z_k = F_1 \eta_{\max}, \quad \min Z_k = F_1 \eta_{\min} \quad (2.22)$$

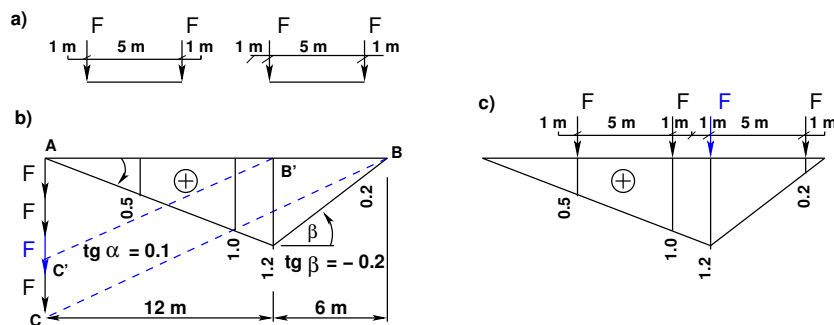
Mitme koondatud jõust koosneva *liikuva* koormussüsteemi puhul leitakse esmalt koormuse ebasoodsaim asetus ja pärast selle kindlaksmääramist arvutatakse sisejõud Z_k valemiga

$$Z_k = F_i \eta_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.23)$$

Suurimad sisejõud leitakse tavaliselt proovimise teel, st võrreldakse koormuse erinevate asendite jaoks leitud sisejõudusid. Tihti joonestatakse jõudude asetuse skeem paberiribale, et seda siis nihutada erinevatesse asukohtadesse. Koormus asetatakse nii, et suuremad jõud oleksid suuremate ordinaatide kohal. Koormuse ebasoodsaima asetuse korral seda liikuvat jõudu, mis asub hulknurkse mõjujoone kumera tipu kohal, nimetatakse *kriitiliseks jõuks*. Koormuse ebasoodsaima asetuse puhul on sisejõud suurim. Hulknurkse kujuga mõjujoonel võib olla mitu kriitilist jõudu. Suurim sisejõud leitakse nendele kriitilistele jõududele vastavate sisejõudude võrdlemise teel. Suurimate sisejõudude arvutamine nõuab suurt arvutustööd.

Kolmnurkse kujuga mõjujoon.

Koondatud jõududest koosneva koormussüsteemi puhul koormuse ebasoodsaima asetuse võib leida graafiliselt (joonis 2.14):



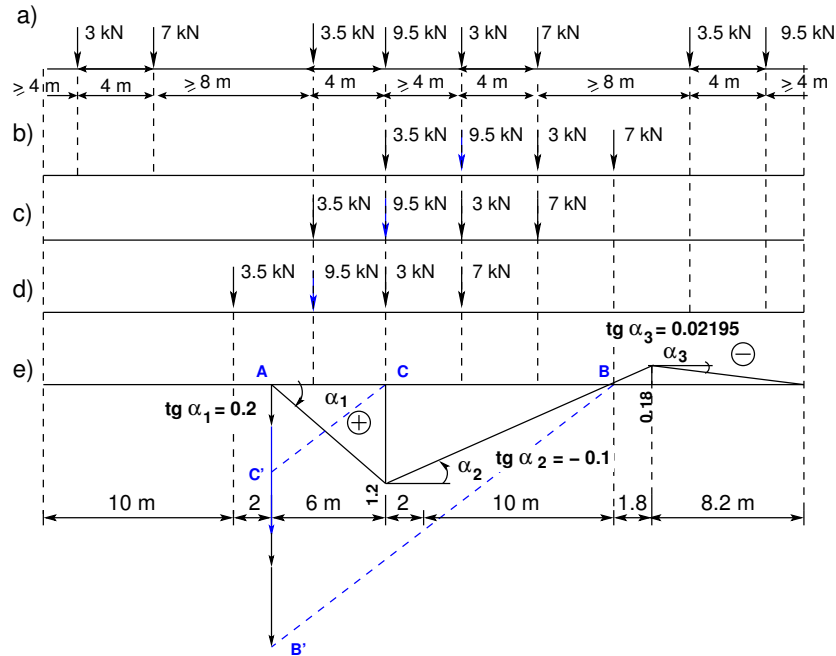
Joonis 2.14. Kolmnurkse kujuga mõjujoon

- mõjujoone alguspunktist A kanname liikuva koormuse jõud F üksteise alla
- ühendame mõjujoone lõpupunkti B jõudude lõpupunktiga C
- tõmbame sirgega BC paralleelse sirge $B'C'$, mis läbib kolmnurkse kujuga mõjujoone tipu projektsiooni B'
- sirge osutab jõule F , mis peab asuma kolmnurga tipu kohal
- asetame *kriitilise jõu* kolmnurga tipu kohale ja arvutame sisejõu valemi (2.23) järgi:

$$\max Z_k = F (0.5 + 1.0 + 1.2 + 0.2) = 2.9F \quad (2.24)$$

Hulknurkse kujuga mõjujoon.

Vaatleme hulknurkse kujuga mõjujoont (joon 2.15 e)) ja tema kohal *liikuvat* mitmest jõust koosnevat koormussüsteemi (joon 2.15 a)).



Joonis 2.15. Hulknurkse kujuga mõjujoon

Suurima sisejõu võime leida proovimise teel. Vaatleme jõudude erinevaid asetusi:

1. Jõud 3.5 kN on lõikes C *kumera* tipu kohal (joonis 2.15 b).
2. Jõud 9.5 kN on lõikes C *kumera* tipu kohal (joonis 2.15 c).
3. Jõud 3.0 kN on lõikes C *kumera* tipu kohal (joonis 2.15 d).

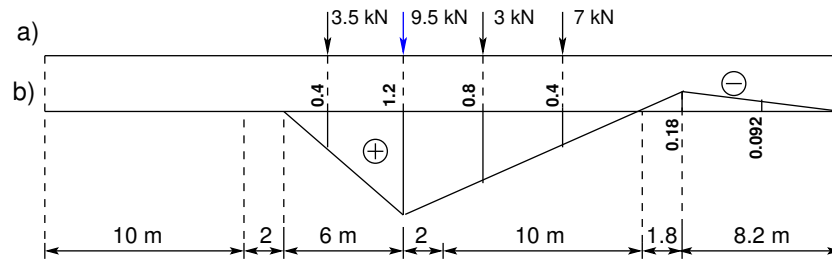
Kui leida iga jõu F_i all oleva ordinaadi väärtus η_i , saaksime nende koormuste erineva asetuse korral kasutada valemit (2.23). Nendest erinevatest juhtudest valiksime välja suurima/vähima sisejõu Z_k väärtuse.

Koormuse erineva asetuse korral ei arvutata kohe jõu F_i all oleva ordinaadi väärtusi η_i . Esmalt leitakse koormuse ebasoodsaim asetus. Vaatluse alla võetakse sisejõu muutus. Kui koormuse liigutamisel sisejõud kasvab, siis lähteasukoht ei olnud koormuse ebasoodsaim asukoht. Koormust liigutatakse järgnevasse asukohtadesse mõjujoone *kumera* tipu kohal seni, kuni sisejõud hakkab vähenema. Nii leitakse üks kriitilistest jõududest.

Jälgime sisejõu muutust jõudude liikumisel mõjujoonte sirgete osade kohal. Olgu sisejõu juurdekasv ΔZ_k , siis

$$\Delta Z_k = F_i \cdot \Delta \eta_i = F_i \cdot \tan \alpha_i \Delta x, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.25)$$

siin $\tan \alpha_i$ on mõjujoone sirge tõusnurk (joonis 2.15 e)).



Joonis 2.16. Suurima sisejõu leidmine

Koormuse liigutamisel Δx võrra suureneb või väheneb mõjujoone ordinaat $\Delta \eta_i = \tan \alpha_i \Delta x$ võrra. Kui koormuse liigutamisel Δx võrra mõjujoone positiivsete ordinaatide kohal sisejõud ei suurene, oleme leidnud koormuse ebasoodsaima asetuse. Hulknurkse kujuga mõjujoone teise kumera tipu kohal võime leida teise koormuse ebasoodsaima asetuse. Suurima sisejõu leiame nende koormuse ebasoodsamatel asetustel arvatatud sisejõu võrdlemisel.

Liigutame koondatud jõududest koosneva koormussüsteemi asendist 1 (joonis 2.15 b)) asendisse 2 (joonis 2.15 c)), mille puhul on $\Delta x = -4$ m. Sisejõu juurdekasv ΔZ_k

$$\Delta Z_{k,1-2} = 3.5 \cdot 0.2 \cdot (-4) + 9.5 \cdot (-0.1) \cdot (-4) + 3.0 \cdot (-0.1) \cdot (-4) = 8.6 \text{ kN} \quad (2.26)$$

Sisejõu juurdekasv $\Delta Z_k = 8.6$ kN on positiivne.

Liigutame koondatud jõududest koosneva koormussüsteemi asendist 2 (joonis 2.15 c) asendisse 3 (joonis 2.15 d)), mille puhul on $\Delta x = -4$ m. Sisejõu juurdekasv ΔZ_k

$$\Delta Z_{k,2-3} = 3.5 \cdot 0.0 \cdot (-4) + 9.5 \cdot (0.2) \cdot (-4) + 3.0 \cdot (-0.1) \cdot (-4) = -1.4 \text{ kN} \quad (2.27)$$

Sisejõu juurdekasv $\Delta Z_k = -1.4$ kN on negatiivne.

Järelikult on koondatud jõududest koosneva koormussüsteemi asend 2 (joonis 2.15 c) ebasoodsaim. Seda näitab ka graafiline lahendus (joonis 2.15 e).

Leiame mõjujoone ordinaadid (joonis 2.16) ja arvutame suurima sisejõu Z_k

$$\max Z_k = 3.5 \cdot 0.4 + 9.5 \cdot 1.2 + 3.0 \cdot 0.8 + 7.0 \cdot 0.4 = 18.0 \text{ kN} \quad (2.28)$$

Jõududest koosneva liikuva koormussüsteemi abil kirjeldatakse kraanade liikumist kraanataladel, autokolonni liikumist sildadel. Autokolonni liikumist vaadeldakse sõidusuunaga vasakult paremale ja paremalt vasakule, kus autokolonnis olevate jõudude järjestused on erinevad [Rää75], [DK62].

3. Varrassüsteemide liigitus

3.1 Varrassüsteemide liigituse alused

Varrassüsteemiks nimetatakse varraste kogumit, milles iga varda asend ja asendi muutus on määratud ülejäänud varraste asendi ja asendi muutusega.

Varraskonstruksiooni liigitamisel võetakse arvesse järgmisi varrassüsteemi omadusi:

- varda telgjoone kuju
- varda tööseisundit (joonis 1.3)
- varraskonstruksiooni toesidemete arvu (joonis 3.1)
- liigendite arvu.

Esmalt vaatleme, kas konstruksioon on valmistatud sirgetest või kõveratest varrastest või kasutatakse mõlemaid, st tegemist on segasüsteemiga. *Järgnevalt* uurime, milline on varraste tööseisund (joonis 1.3). Näiteks *sirgetest varrastest valmistatud varrassüsteemi*, mille vardad töötavad pikkele, nimetatakse *sõrestikskeemiks*. *Sirgetest varrastest valmistatud varrassüsteemi*, mille vardad töötavad liittööseisundis, nimetatakse *raamskeemiks*. Edaspidi vaatleme liigendite arvu ja räägime kolme liigendiga, kahe liigendiga ja liigenditeta raamskeemist.

Kõvera telgjoonega varrast, mis töötab ainult tõmbele, nimetame *vandiks* (kasutatakse ka nimetust *niit*, *niidivõrrand*) ja nendest moodustatud varrassüsteemi *vantskeemiks*. Kõvera telgjoonega varrastest valmistatud varrassüsteemi, mille vardad töötavad liittööseisundis (võimalik on valida selline varraste telgjoone kuju, et varrassüsteem töötab ainult survele), nimetatakse *kaarskeemiks*. Liigendite arvu alusel eristatakse kolme liigendiga, kahe liigendiga ja liigenditeta kaarskeemi.

Tuleb vahet teha sõrestikkonstruksiooni ja sõrestikskeemi vahel, sest sõrestikkonstruksioone on võimalik arvutada nii sõrestikskeemi kui ka raamskeemi järgi.

Sõrestikskeemi, talaskeemi, raamskeemi, kaarskeemi, vantskeemi ja segaskeemi üldnimetuseks on *arvutusskeem*. Ühel konstruksioonil võib olla mitu arvutusskeemi. See sõltub tehtud aproksimatsioonidest.

	Jäik tugi	Paigalseisev liigendtugi	Liikuv liigendtugi		Vaba ots	Liikuv pöördumatu tugi
Tugede sümbolid						
Toe-tingimused: etteantud ja tundmatud	$u = 0$ $w = 0$ $\varphi_y = 0$ $F_x = ?$ $F_z = ?$ $M_y = ?$	$u = 0$ $w = 0$ $\varphi_y = ?$ $F_x = ?$ $F_z = ?$ $M_y = 0$	$u = ?$ $w = 0$ $\varphi_y = ?$ $F_x = 0$ $F_z = ?$ $M_y = 0$	$u = 0$ $w = ?$ $\varphi_y = ?$ $F_x = ?$ $F_z = 0$ $M_y = 0$	$u = ?$ $w = ?$ $\varphi_y = ?$ $F_x = 0$ $F_z = 0$ $M_y = 0$	$u = 0$ $w = ?$ $\varphi_y = 0$ $F_x = ?$ $F_z = 0$ $M_y = ?$
Toe siirde tähis ja arv	— 0	φ_y 1	u, φ_y 2	w, φ_y 2	u, w, φ_y 3	w 1
Toereaktsioonid ja nende arv	 3	 2	 1	 1	0	 2

Joonis 3.1. Toed ja toereaktsioonid

3.2 Toed ja toereaktsioonid

Lihtsuse mõttes vaatleme tasapinnalist konstruktsiooni. Kirjeldame toereaktsioonide \overleftrightarrow{F}_x , \overleftrightarrow{F}_z ja \overleftrightarrow{M}_y tööd W_t tugede siiretel u , w ja φ_y

$$W_t = \overleftrightarrow{F}_x \cdot u + \overleftrightarrow{F}_z \cdot w + \overleftrightarrow{M}_y \cdot \varphi_y \quad (3.1)$$

Toereaktsioonid kuuluvad rajajõudude hulka, tugede siirded ja pöörded rajasiirete hulka. Rajatingimustest antakse ette kas toereaktsioon või toe siire (pöörde). Arvutuskeemil kasutatavate tugede sümbolid on joonisel 3.1. Joonisel 3.1 on järgmised toed:

- *jääk tugi* ei võimalda siirdeid ega pööret, tema vabadusastmete arv on null. Tundmatuid toereaktsioone on kolm. Tundmatute toereaktsioonide ja vabadusastmete summa on kolm
- *paigalseisev liigendtugi* võimaldab ainult pööret. Vabadusastmete arv on üks. Tundmatuteks on horisontaalne ja vertikaalne toereaktsioon ning pööre. Tundmatute toereaktsioonide ja vabadusastmete summa on kolm
- *liikuv liigendtugi* võimaldab pööret ja ühes sihis siiret. Vabadusastmete arv on kaks. Tundmatuteks on üks toereaktsioon, pööre ja siire
- *vaba ots* võimaldab siirdeid ja pöördeid. Vabadusastmete arv on kolm, need on ka tundmatuteks. Toereaktsioonid puuduvad
- *liikuv pöördumatu tugi* võimaldab siiret ühes sihis. Vabadusastmete arv on üks. Tundmatuteks on toemoment, üks toereaktsioon (joonisel 3.1 on selleks horisontaalne toereaktsioon) ja siire.

3.3 Kontaktjõud ja liigendid

Liigendite sümbolid arvutusskeemi jaoks ja kontaktjõudude tähised on joonisel 3.2. Nii, nagu tuge ja toereaktsioonide vaatlemisel, kasutame töö mõistet ka kontaktjõudude ja liigendite vaatlemisel.

Vaatleme hõrdevabu liigendeid, mille kontaktjõudude töö on null, nagu toereaktsioonidel

$$W_k = \overleftrightarrow{N}_x \cdot \Delta u + \overleftrightarrow{Q}_z \cdot \Delta w + \overleftrightarrow{M}_y \cdot \Delta \varphi_y \quad (3.2)$$

Siin vaatleme kontaktjõudude \overleftrightarrow{N}_x , \overleftrightarrow{Q}_z , \overleftrightarrow{M}_y tööd W_k kontaktpindade vastastikustel siiretel ja pööretel Δu , Δw , $\Delta \varphi_y$, kus

$$\Delta u = u_p - u_v, \quad \Delta w = w_p - w_v, \quad \Delta \varphi_y = \varphi_{yp} - \varphi_{yv} \quad (3.3)$$

Avaldises (3.3) tähistavad indeksid p ja v siirdeid ja pöördeid liigendist paremal ja vasakul. Varda otsa ristlõikepinda kirjeldame tema pinnanormaliga. Varda ristlõikepinda, mille pinnanormal on suunatud varraste ühenduse poole, nimetatakse *kontaktpinnaks*, kontaktpindadel mõjuvaid jõude kontaktjõududeks. Ühe liigendi puhul on 2 kontaktjõudu. Liigendi puudumisel on 3 kontaktjõudu. Vaba otsa puhul on kolm vastastikust siiret ja 0 kontaktjõudu. Kontaktjõudude ja vastastikuste siirete arv kontaktpinnal on 3 (vt joonis 3.2).

Varda otsa ristlõikepind, mille pinnanormal on suunatud varda sisse, on *sisepind*. Sisepinnal mõjuvad jõud on *sisejõud*. Kontaktjõud ja sisejõud varda otsa ristlõikes on võrdsed, kuid suunalt erinevad. Sisejõud leitakse kontaktjõudude kaudu.

	Jäik ühendus	Painde- momendi liigend	Normaaljõu liigend	Põikjõu liigend	Vabad otsad
Ühenduste sümbolid					
Vastastikused siirded	$\Delta u = u_p - u_v$ $\Delta w = w_p - w_v$ $\Delta \varphi_y = \varphi_p - \varphi_v$	vasakul paremal			
Kontakti- tingimused sõlmedes: etteantud ja tundmatud	$\Delta u = 0$ $\Delta w = 0$ $\Delta \varphi_y = 0$ $\uparrow N_x = ?$ $\uparrow Q_z = ?$ $\uparrow M_y = ?$	$\Delta u = 0$ $\Delta w = 0$ $\Delta \varphi_y = ?$ $\uparrow N_x = ?$ $\uparrow Q_z = ?$ $\uparrow M_y = 0$	$\Delta u = ?$ $\Delta w = 0$ $\Delta \varphi_y = 0$ $\uparrow N_x = 0$ $\uparrow Q_z = ?$ $\uparrow M_y = ?$	$\Delta u = 0$ $\Delta w = ?$ $\Delta \varphi_y = 0$ $\uparrow N_x = ?$ $\uparrow Q_z = 0$ $\uparrow M_y = ?$	$\Delta u = ?$ $\Delta w = ?$ $\Delta \varphi_y = ?$ $\uparrow N_x = 0$ $\uparrow Q_z = 0$ $\uparrow M_y = 0$
Vastastikuste siirete tähis ja vabadusastmete arv	0	$\Delta \varphi_y$ 1	Δu 1	Δw 1	$\Delta u, \Delta w, \Delta \varphi_y$ 3
Kontaktjõud ja nende arv					0

Joonis 3.2. Liigendid ja kontaktjõud

3.4 Rajajõud ja sõlmpunktid

Võtame vaatluse alla nii konstruktsioonelemendid (vardad) kui ka nende ühenduspunktid, nn sõlmpunktid.

Varrassüsteemide uurimise põhiliseks probleemiks on rajatingimuste kirjeldamine. Täpsemalt käsitletakse seda probleemi tala-, sõrestik-, raam- ja kaarskeemide juures.

3.5 Arvutusskeem

Arvutusskeem on ehituskonstruksiooni, masina vms kujutis, mille alusel tehakse arvutusi.

Valitud arvutusskeemist oleneb arvutuse täpsus ja keerukus. Alati on võimalik valida täpsem arvutusskeem ja täpsem teooria, kuid siis muutuvad arvutused keerulisemaks. Täpsemaid teooriaid on vaja selleks, et kindlaks teha lihtsamate teooriate kehtivuse piirid. Arvutusskeem sisaldab vähemalt järgmist informatsiooni [KW90]:

- kõigi sõlmpunktide asukohti
- varraste telgjooni
- tugede ja liigendite asukohti
- kõigi varraste ristlõike jäikusi
- koormusi
- kohalike telgede positiivseid suundi.

Arvutis tuleb arvutusskeemi toetada arvutustabeliga [KW90].

Arvutusskeem ja arvutustabel sõltuvad vaadeldavast konstruksioonist. Arvutusskeemi koostamisel tuleb arvestada ehitamise ja koormamise järjestusega. Näiteks erinevad tulemused korrusraami riivide koormamisel pärast kõigi korruste väljaehitamist tulemustest, mis saadakse iga korruse riivi koormamisel kohe pärast korruse väljaehitamist [Kõo92].

3.6 Arvutusskeemi vabadusaste

Paljud arvutusskeemid koosnevad varrastest (konstruksioonelementidest), mis on ühendatud sõlmpunktides sidemetega (kontaktjõududega). Arvutusskeemil on k varrast (kujundit), t toesidet (joonis 3.1), l lihtliigendit (toeliigendeid ei võeta arvesse, sest toereaktsioonid on need sidemed arvesse võtnud), r kontaktjõudu (joonis 3.2). Igale vardale saab koostada m tasakaalutingimust (3.6).

Arvutusskeemi jaoks saame koostada seosed

$$t + r = m \cdot k - w \tag{3.4}$$

$$w = m \cdot k - r - t \tag{3.5}$$

kus arvutusskeemi toereaktsioonide arv t ja kontaktjõudude arv r võrduvad kõigi varraste kohta koostatud tasakaaluvõrrandite arvu $m \cdot k$ ja arvutusskeemi vabadusastmete arvu w summaga. Kui vabadusastmete arv

1. $w = 0$, see on arvutusskeemi staatikaga määratavuse vajalik tingimus, kuid mitte piisav tingimus.
2. $w > 0$, arvutusskeemi elemendid võivad paigutada ilma elementide deformatsioonideta.
3. $w < 0$, arvutusskeemis on liigsidemed ja arvutusskeem staatikaga määratu.

Ühe vabadusastmega ($w = 1$) kinemaatilist ahelat nimetatakse ka mehhanismiks. Varrassüsteemi vaatlemisel nimetame mehhanismi ka varrasahelaks.

Kujundiks nimetatakse arvutusskeemi osa, mis jääb alles, kui toesidemed eemaldatakse. Kujund vajab tasapinnal kinnitamiseks kolme sidet.

Tasapinnal on konstruktsioonelemendil 3 tasakaalutingimust

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_z = 0, \quad \Sigma M_y = 0 \quad (3.6)$$

Kontaktjõude arv r on proportsionaalne lihtliigendite arvuga l (joonis 3.2 lk 82).

Rajajõudude arvule vastab kahekordne lihtliigendite arv (vt joonis 3.3)

$$r \propto 2 \cdot l \quad (3.7)$$

Tasandilise arvutusskeemi jaoks saame avaldisest (3.4) avaldise

$$t + 2 \cdot l = 3 \cdot k - w \quad (3.8)$$

ehk

$$w = 3 \cdot k - 2 \cdot l - t \quad (3.9)$$

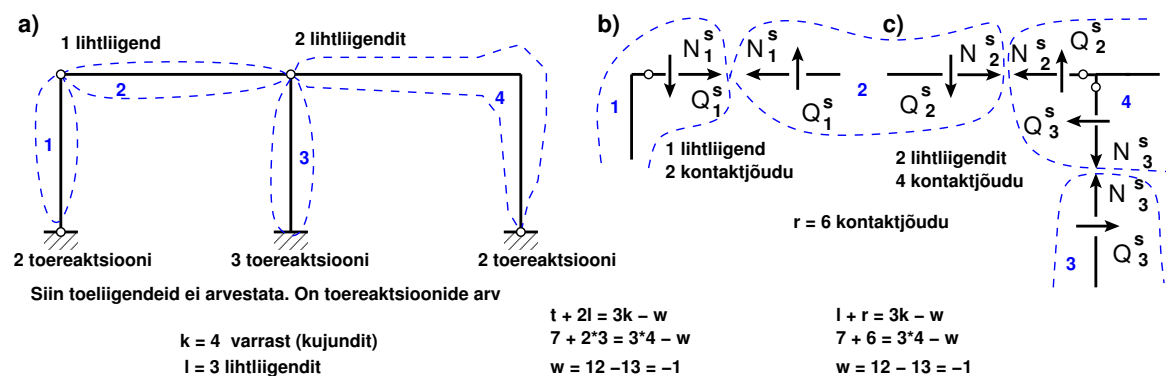
kus

t – toereaktsioonide arv (joonis 3.1),

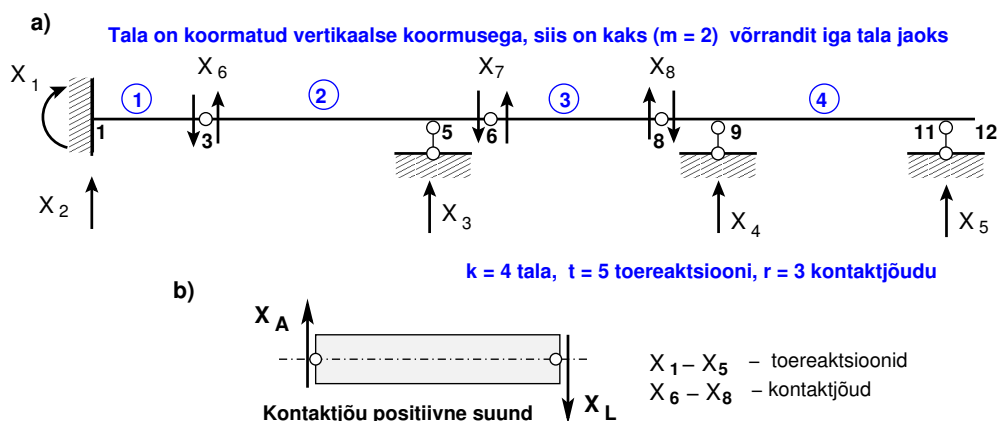
l – lihtliigendite arv (siin toeliigendeid ei võete arvesse, sest toereaktsioonid on need sidemed arvesse võtnud) (joonis 3.2),

k – varrasde arv,

w – vabadusastmete arv,



Joonis 3.3. Varrassüsteemi vabadusaste



Joonis 3.4. Gerberi tala toereaktsioonid ja kontaktjõud

Lihtliigendite mõistet käsitletakse jõumeetodis (vt avaldis (9.9), lk 220). Joonisel 3.3 a) näidatud raam koosneb neljast elemendist ($k = 4$). Raamil on seitse toereaktsiooni ($t = 7$) ja kuus kontaktjõudu ($r = 6$, joonis 3.3 b) c)). Iga elemendi jaoks saab kirjutada kolm tasakaaluvõrrandit. Asetades need andmed võrrandisse (3.9), saame

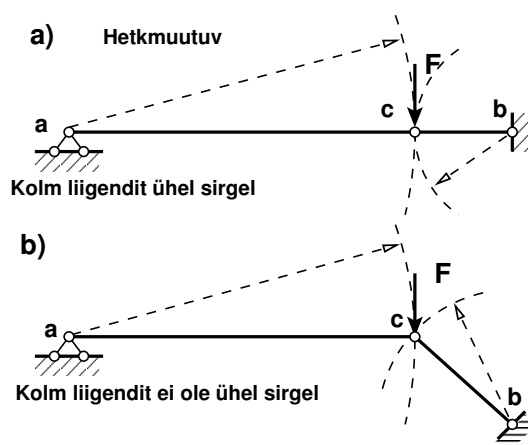
$$w = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 7 = 12 - 13 = -1 \quad (3.10)$$

Vaadeldud raam on ühekordselt staatikaga määramatu ($w = -1$).

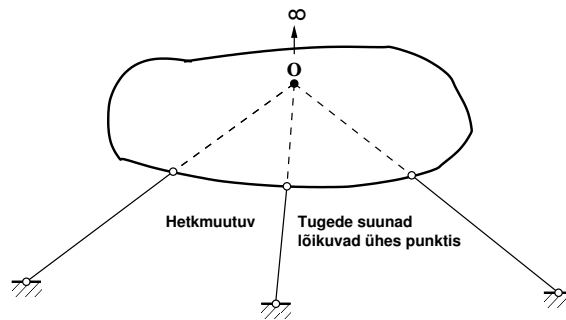
Kasutame kontaktjõudude asemel kahekordset lihtliigendite mõistet $2 \cdot l = 2 \cdot 3$. Siin ei tohi toeliigendeid lihtliigendite arvu hulka arvata, kuna toed võetakse arvesse toereaktsioonide arvuga t . Nüüd saame võrrandi (3.8) kirjutada kujul (3.11)

$$7 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 - w, \quad \Rightarrow \quad w = -13 + 12 = -1 \quad (3.11)$$

millest saame sama tulemuse kui võrrandist (3.10).



Joonis 3.5. Hetkmuutuv tala



Joonis 3.6. Pöörde hetkese

Arvutame joonisel 3.4 näidatud Gerberi tala vabadusastme w . Tala koosneb neljast osast ($k = 4$). Tala 1–3, tala 3–6, tala 6–8 ja tala 8–12. Tala on koormatud vertikaalse koormusega. Iga tala osa jaoks on siis kaks ($m = 2$) tasakaaluvõrrandit. Gerberi talal on viis toereaktsiooni ($t = 5$) ja kolm kontaktjõudu ($r = 3$). Avaldisest (3.4) leiame

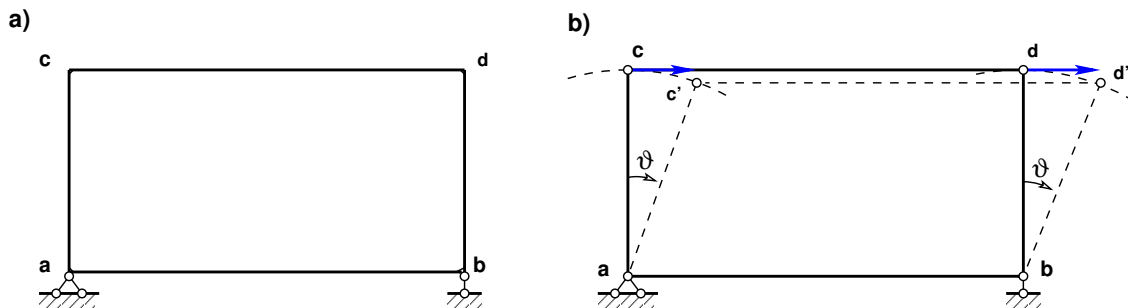
$$t + r = m \cdot k - w, \quad 5 + 3 = 2 \cdot 4 - w, \quad \Rightarrow \quad w = 8 - 8 = 0 \quad (3.12)$$

Vaadeldava tala (Gerberi tala) toereaktsioonid ja kontaktjõud on staatikaga määratavad ($w = 0$). Siin avaldis (3.7) ei kehti. Kontaktpinnal (liigendis) on ainult üks kontaktjõud ja Gerberi tala kontaktjõudude arv r ($r \propto 1 \cdot l$) on võrdne liigendite arvuga l .

Võrrandisüsteemi koostamise näide nende toereaktsioonide ja kontaktjõudude arvutamiseks on toodud arvutuspäevikus 4.2 (lk 100).

Avaldises (3.4) nullvabadusaste ($w = 0$) ei ole piisav tingimus toereaktsioonide ja kontaktjõudude arvutamiseks. Vajalikuks tingimuseks on, et nullvabadusastmega toereaktsioonide ja kontaktjõudude arvutamiseks koostatud võrrandisüsteemi determinant oleks nullist erinev. Kui nullvabadusastmega toereaktsioonide ja kontaktjõudude arvutamiseks koostatud võrrandisüsteemi *determinant on null*, siis sellist arvutuskeemi nimetatakse *hetkmuutuvaks*.

Joonisel 3.5 a) näidatud talal on nullvabadusaste ($w = 0$), kuid toereaktsioonid V_a ja V_b pole arvutatavad tasakaaluvõrranditest. Nende arvutamiseks koostatud võrrandi-



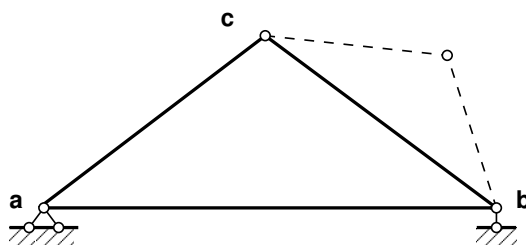
Joonis 3.7. Varrasahel

süsteemi determinant võrdub nulliga.

Kui kujund on kinnitatud kolme toesidemega nii, et nende sihid lõikuvad ühes punktis (kui see punkt on lõpmatuses, siis need sihid on paralleelsed) (vt joonis 3.6), siis selline kinnitus lubab hetkelist pööret ümber punkti O .

Kui joonisel 3.7 a) näidatud raami jäigad sõlmed asendada liigenditega (joonis 3.7 b)) siis saame geomeetriselt muutuva süsteemi – varrasahela.

Joonisel 3.8 on talaga $a-b$ ühendatud uus sõlm c kahe varda $a-c$ ja $b-c$ abil. Need vardad $a-c$ ja $b-c$ ei asetse ühel sirgel. Nii võib *geomeetriselt muutumatule arvutusskeemile lisada uue sõlme kahe vardaga, mis ei asetse ühel sirgel. Saadud uus arvutusskeem on geomeetriselt muutumatu*. Sõlme c võib ühendada ka rohkem kui kahe vardaga, kuid siis võib muutuda varrasüsteem staatikaga määramatuks.



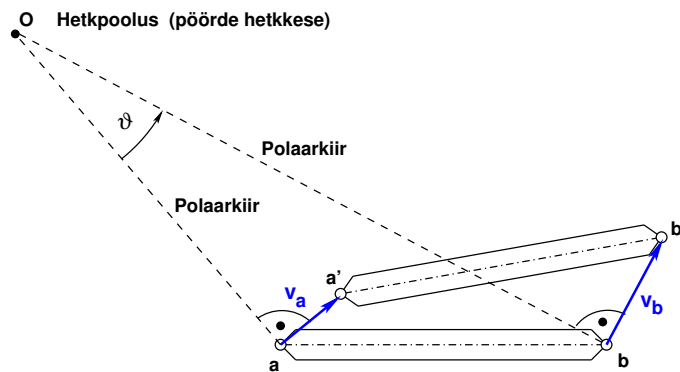
Joonis 3.8. Geomeetriselt muutumatu arvutusskeem

3.7 Arvutusskeemi pooluste plaan

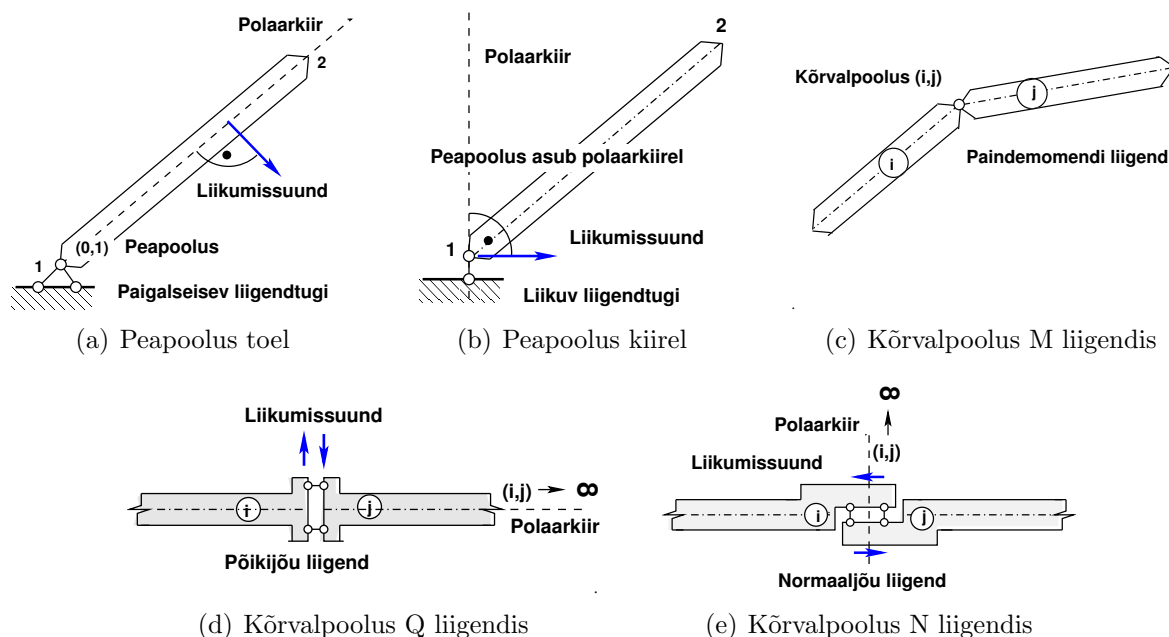
Kujundi $a-b$ (joonis 3.9) liikumist asendisse $a'-b'$ võib vaadelda kui pööret ümber punkti O . Punktide a ja b kiirustega v_a ja v_b risti tõmmatud sirged lõikuvad punktis O , mida nimetatakse pöörde hetkkeskmeks või hetkpooluseks.

Hetkpoolust, mille ümber kujund pöörleb, nimetatakse *peapooluseks*.

Kui kujund pöörleb ümber liikumatu liigendtoe (joonis 3.10 (a)), siis peapoolus langeb ühte liikumatu liigendtoe (joonis 3.1) liigendiga. Polaarkiir ja liikumise suund



Joonis 3.9. Hetkpoolus



Joonis 3.10. Peapoolused ja kõrvalpoolused

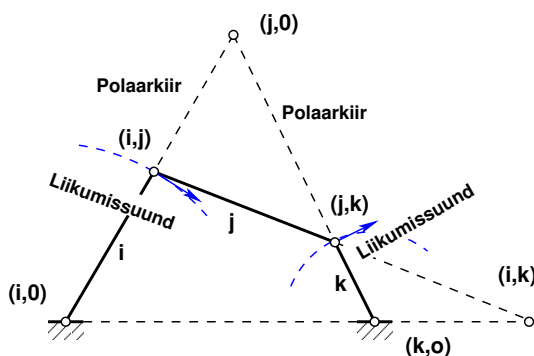
on risti (joonis 3.10 (a)). Kujundi k peapoolust tähistatakse $(0,k)$ või $(k,0)$. Joonisel 3.10 (a) on tähistus $(0,1)$.

Kui kujund on seotud liikuva liigendtoega (joonis 3.10 (b)), siis peapoolus asub polaarkiirel, mis on risti liikumise suunaga.

Järgnevalt vaatleme juhte, kus kujundid on ühendatud liigenditega (joonis 3.2). Kujundite i ja j vastastikune pööre toimub ümber momendi liigendi (joonis 3.10 (c)). See liigend on kujundite i ja j kõrvalpooluseks (i,j) . Kõrvalpoolust tähistatakse (i,j) .

Kui kujundid i ja j on ühendatud põikjõu liigendiga (joonis 3.2), siis kõrvalpoolus (i,j) on polaarkiirel lõpmatutes $\rightarrow \infty$ (joonis 3.10 (d)).

Kui kujundid i ja j on ühendatud normaaljõu liigendiga (joonis 3.2), siis kõrvalpoolus (i,j) on polaarkiirel lõpmatutes $\rightarrow \infty$ (joonis 3.10 (e)).



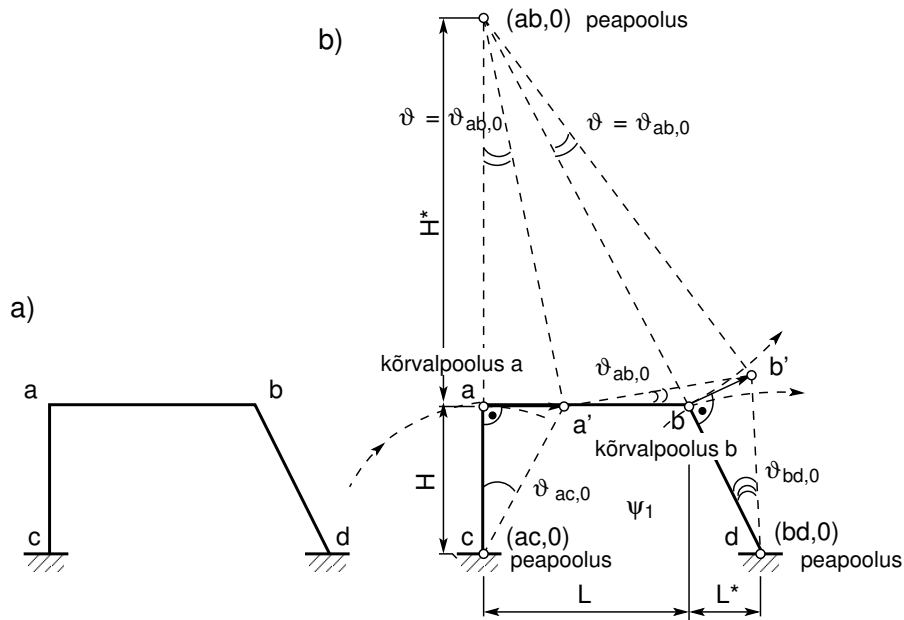
Joonis 3.11. Mehhanism

Lihtne mehhanism on kujutatud joonisel 3.11, kus omavahel on ühendatud kolm varrast i , j ja k . Nende varraste peapoolused on $(i,0)$, $(j,0)$ ja $(k,0)$. Varraste i , j ja k kõrvalpoolused on vastavalt (i,j) ja (j,k) (joonis 3.11).

3.7.1 Pooluste plaani kasutamise näide 3.1

Näide 3.1 Vaatleme ühe vabadusastmega varrasahela varraste pöördenurkade seoseid. Viltu olevate postidega raamide varrasahela pöörded leitakse poolusplaanist (joonis 3.12). Varrasahela ühele vardale antakse ühikpööre ja teiste varraste pöörded leitakse selle varda pöörde funktsioonina.

Joonisel 3.12 kujutatud varrasahela paigutusolukorras ψ_1 pöörduvad vardad \overline{ca} ja \overline{db} üm-



Joonis 3.12. Poolusplaan ja varraste pöörded

ber toesõlme c ja d . Nende varraste peapoolusteks on toesõlmed $c \equiv O_{ac,0}$ ja $d \equiv O_{bd,0}$. Liigend a ühendab vardaid \overline{ac} ja \overline{ab} ning on nende varraste liikumise hetkpoolus.

Varda \overline{ab} peapoolus asub vektoriga $\vec{aa'}$ risti oleval sirgel. Liigend b ühendab vardaid \overline{ab} ja \overline{db} ning on nende varraste liikumise hetkpoolus. Varda \overline{ab} peapoolus asub ka vektoriga $\vec{bb'}$ risti oleval sirgel. Nende risti olevate sirgete lõikepunktiks on $O_{ab,0}$. See punkt $O_{ab,0}$ on varda \overline{ab} peapoolus. Varras \overline{ab} pöörduv ümber peapooluse $O_{ab,0}$ uude asendisse $a'b'$. Paigutusolukorras ψ_1 antakse vardale \overline{ab} pöördenurk $\vartheta_{ac,0} = 1$ (vt joonist 3.12). Kolmnurkadel $\Delta aa'O_{ab,0}$ ja $\Delta aa'c$ on ühine külg aa' . Sellest tingimusest saame

$$\begin{aligned} H \cdot \vartheta_{ac,0} &= -H^* \cdot \vartheta_{ab,0} \\ \vartheta_{ab,0} &= -\frac{H}{H^*} \cdot \vartheta_{ac,0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Kolmnurkadel $\Delta bb'O_{ab,0}$ ja $\Delta bb'd$ on ühine külg bb' . Siit saame

$$\begin{aligned}\overline{bO_{ab,0}} \cdot \vartheta_{ab,0} &= -\overline{bd} \cdot \vartheta_{bd,0} \\ \vartheta_{bd,0} &= -\frac{\overline{bO_{ab,0}}}{\overline{bd}} \cdot \vartheta_{ab,0}\end{aligned}\tag{3.14}$$

Seoses (3.14) avaldame pöörde $\vartheta_{ab,0}$ pöörde $\vartheta_{ac,0}$ kaudu

$$\vartheta_{bd,0} = \frac{H}{H^*} \frac{\overline{bO_{ab,0}}}{\overline{bd}} \cdot \vartheta_{ac,0} = \vartheta_{ac,0}\tag{3.15}$$

4. Staatikaga määratav mitmesildeline tala

Loeng 1¹: Mitmesildeline tala. Näide 4.1. Näide 4.2. Loeng 2²: Mitmesildelise tala mõjujoonte kasutamine. Näide 2.1. Näide 4.4

4.1 Staatikaga määratav mitmesildeline tala

Mitmesildelise tala staatikaga määratavust kirjeldasime avaldisega (3.12) (lk 86), kus staatikaga määratavuse vajalik tingimus nõuab vabadusastmete arvuks nulli ($w = 0$). Pikijõu puudumisel saame avaldise

$$t + r = 2k - w, \quad kus \quad w = 0 \quad (4.1)$$

siin

t – toereaktsioonide arv (toereaktsiooni tala pikisuurus ei arvestata),

r – kontaktjõudude arv (arvesse võtame põikjõule vastavad kontaktjõud nii, et $r = l$),

l – lihtliigendite arv (joonis 3.2),

k – tala osade arv (nii põhi- kui ka lisaosad, vt lõiku 4.2),

w – vabadusastmete arv.

Mitmesildelise tala staatikaga määratavuse vajaliku tingimuse (4.1) võib kirjutada kujul

$$t + l = 2k - w, \quad kus \quad w = 0 \quad (4.2)$$

Liigendite asetus peab olema niisugune, mis tagab mitmesildelise tala geomeetrilise muutumatuse.

Geomeetriliselt muutumatus staatikaga määratavas mitmesildelises talas ei ole ühes sildes rohkem kui kaks ja kahes naabersildes rohkem kui kolm liigendit. Kahes naabersildes peab olema vähemalt üks liigend [Rää75].

Staatikaga määratud mitmesildelist tala nimetatakse Gerberi³⁴ talaks.

4.2 Põhi- ja lisaosad

Staatikaga määratavad mitmesildelised talad koosnevad põhi- ja lisaosadest. Põhiosa on geomeetriliselt muutumatu ka siis, kui naaberosad on eemaldatud. Lisaosad muutuvad

¹./videod/MitmesildelisedTalad1.html

²./videod/MitmesildelisedTalad2.html

³ Heinrich Gerber, saksa insener, 1832–1912.

⁴http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Gottfried_Gerber

naaberostade eemaldamisel mehhanismideks.

Joonisel 4.1 on põhiosad a– f_1 ja f_3 –g. Lisaosadeks on f_1 – f_2 ja f_2 – f_3 . Põhiosade ja lisaosade vahel mõjuvad kontaktjõud (joonis 3.2).

Kontaktjõudude F_1 , F_2 ja F_3 suunad on vastavuses põikjõudude suundadega. Staatikaga määratavust kontrollime avaldisega (4.1), kus

$t = 5$ – toereaktsioonide arv (toereaktsiooni tala pikisuunas ei arvestata),

$r = 3$ – kontaktjõudude arv,

$k = 4$ – tala osade arv (nii põhi- kui ka lisaosad),

w – vabadusastmete arv.

$$t + r = 2k - w, \quad \text{asetame valemisse } 5 + 3 = 2 \cdot 4 - w, \quad \text{saame } w = 0 \quad (4.3)$$

Joonisel 4.2 on põhiosad a– f_1 ja f_2 – f_3 . Lisaosadeks on f_1 – f_2 ja f_3 –e. Põhi- ja lisaosade vahel mõjuvad kontaktjõud (joonis 3.2).

Kontaktjõudude F_1 , F_2 ja F_3 suunad on vastavuses põikjõudude suundadega. Staatikaga määratavust kontrollime avaldisega (4.1), kus

$t = 5$ – toereaktsioonide arv (toereaktsiooni tala pikisuunas ei arvestata),

$r = 3$ – kontaktjõudude arv,

$k = 4$ – tala osade arv (nii põhi- kui ka lisaosad),

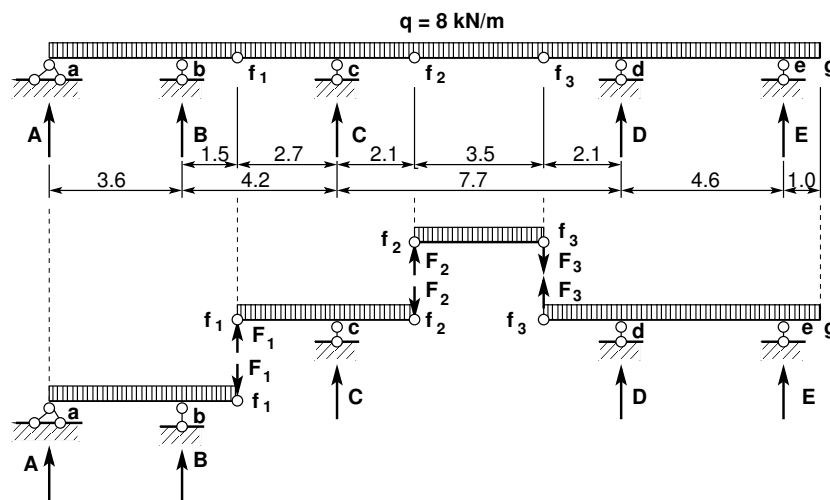
w – vabadusastmete arv.

$$t + r = 2k - w, \quad \text{asetame valemisse } 5 + 3 = 2 \cdot 4 - w, \quad \text{saame } w = 0 \quad (4.4)$$

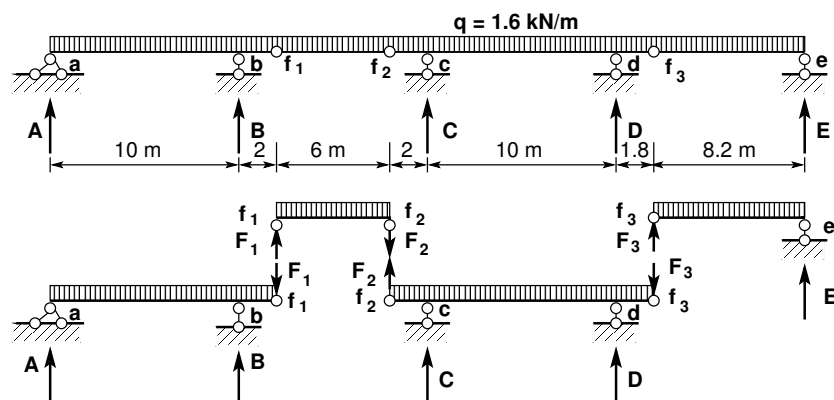
Joonisel 4.3 on põhiosad a– f_1 ja f_3 –d. Lisaosadeks on f_1 – f_2 ja f_2 – f_3 . Põhiosade ja lisaosade vahel mõjuvad kontaktjõud (joonis 3.2).

Kontaktjõudude F_1 , F_2 ja F_3 suunad on vastavuses põikjõudude suundadega. Staatikaga määratavust kontrollime avaldisega (4.1), kus

$t = 5$ – toereaktsioonide arv (toereaktsiooni tala pikisuunas ei arvestata),



Joonis 4.1. Gerberi tala 1 korrusskeem



Joonis 4.2. Gerberi tala 2 korrusskeem

$r = 3$ – kontaktjõudude arv,

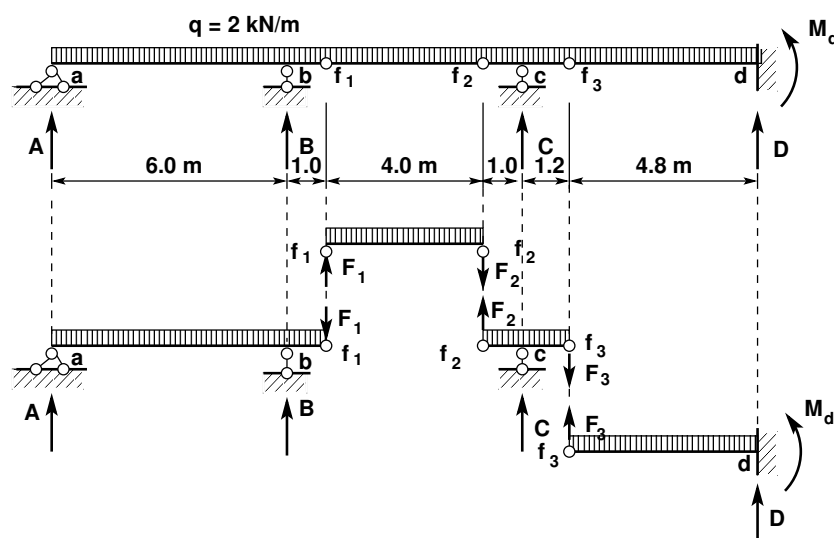
$k = 4$ – tala osade arv (nii põhi- kui ka lisaosad),

w – vabadusastmete arv.

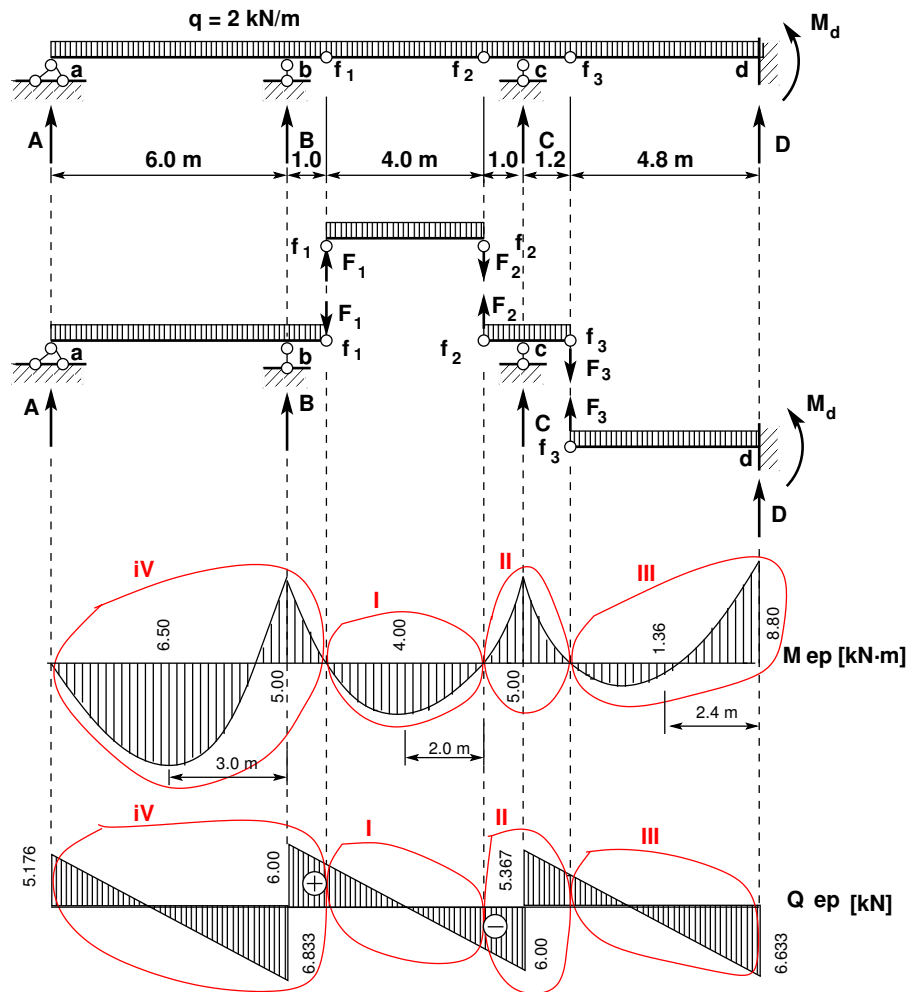
$$t + r = 2k - w, \quad \text{asetame valemisse } 5 + 3 = 2 \cdot 4 - w, \quad \text{saame } w = 0 \quad (4.5)$$

Toereaktsioonide ja kontaktjõudude leidmiseks koostatakse võrrandid ($t+r$ võrrandit). Selle võrrandisüsteemi võrrandite lahendamise järjekorra määramiseks on otstarbekas koostada korrusskeem. Korrusskeemi joonistamisel (joonised 4.1 – 4.3) võib ette kujutada, et niisugune on montaaži järjekord. Põhiosad saab monteeriä ilma naaberosadeta.

Pärast korrusskeemi koostamist alustame kõige kõrgema korruse tasakaaluvõrrandite lahendamisega. Leitud kontaktjõud rakendame vastupidises suunas alumisele korrusele (*tala osale, millele ta toetub*). Võrrandite lahendamisega ülevalpool olevalt korruselt madalamale korrusele tulles leiame kontaktjõud ja toereaktsioonid.



Joonis 4.3. Gerberi tala 3 korrusskeem



Joonis 4.4. Gerberi tala 3 epüürid

Tasakaaluvõrrandisüsteemi lahendamisel arvutiga ei ole korrusskeemi koostamine vajalik.

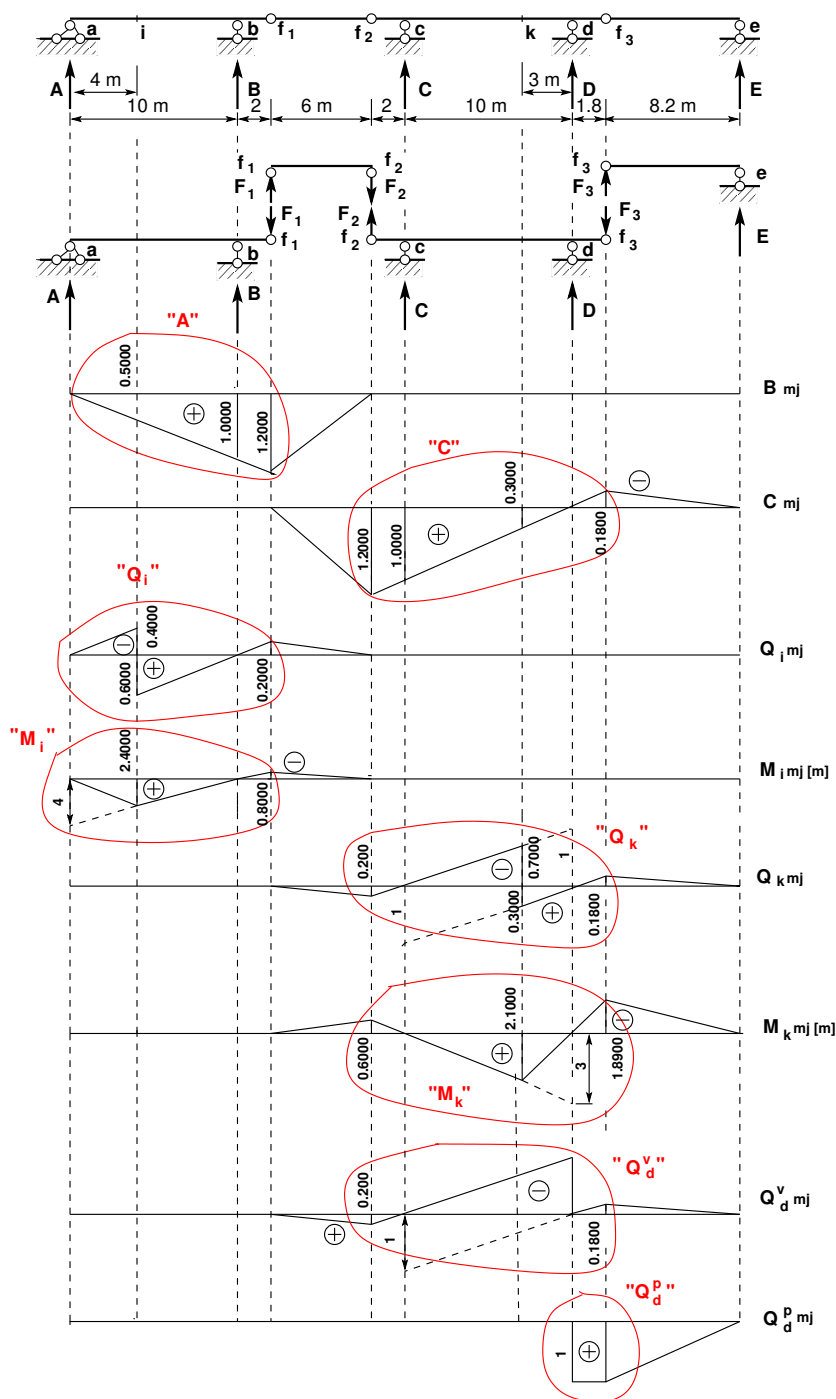
4.3 Sisejõudude arvutus

Sisejõudude arvutust alustatakse pärast toereaktsioonide ja kontaktjõudude leidmist. Toereaktsioonidele tuleb teha kontrollarvutus (*summeerida vertikaalsed jõud ja toereaktsioonid*). Pärast seda leitakse lisa- ja põhiosade sisejõud nii, nagu leitakse lihttalale või konsoolidega talale. Lihttalale või konsoolidega talale sisejõudude leidmisega tehti tutvust tehnilises mehaanikas.

Gerberi tala 3 sisejõudude epüürid on toodud joonisel 4.4.

4.4 Gerberi tala mõjujooned

Staatikaga määratud mitmesildelise tala (joonis 4.5) mõjujoonte leidmisel kasutame joonisel 2.11 toodud konsoolidega tala paindemomendi ja põikjõu mõjujooni.



Joonis 4.5. Gerberi tala 2 mõjujooned

Gerberi tala (joonis 4.5) toereaktsioonide A ja C mõjujoonte leidmisel joonistame vastava konsoolidega tala (joonis 2.4) toereaktsioonide mõjujooned joonisele 4.5.

Kui vaadeldava tala toereaktsioon sõltub naabertalal liikuvast ühikkoormusest, siis jätkame seda mõjujoont. Ühikjõu liikumisel sõlme f_2 , on jõud $F_1 = 0$ (joonis 4.5) ja sellest tulenevalt $B = 0$. Selle väärtuse kanname joonisel 4.5 ühikjõu alla.

Jätkame toereaktsiooni C mõjujoont sõlmest f_2 vasakule. Ühikjõu liikumisel sõlme f_1 on reaktsioon $F_2 = 0$ ja sellest tulenevalt $C = 0$. Selle väärtuse kanname joonisel 4.5 ühikjõu alla.

Põikjõu Q_i ja paindemomendi M_i mõjujoonte leidmisel joonestame vastavad mõjujooned jooniselt 2.11 joonisele 4.5 ringi. Ühikkoormuse liikumisel naaberosale jälgime reaktsiooni F_1 muutumist. Kui ühikjõud on sõlmes f_2 , siis $F_1 = 0$. Selle väärtuse kanname ühikjõu alla (s.t sõlme f_2 alla).

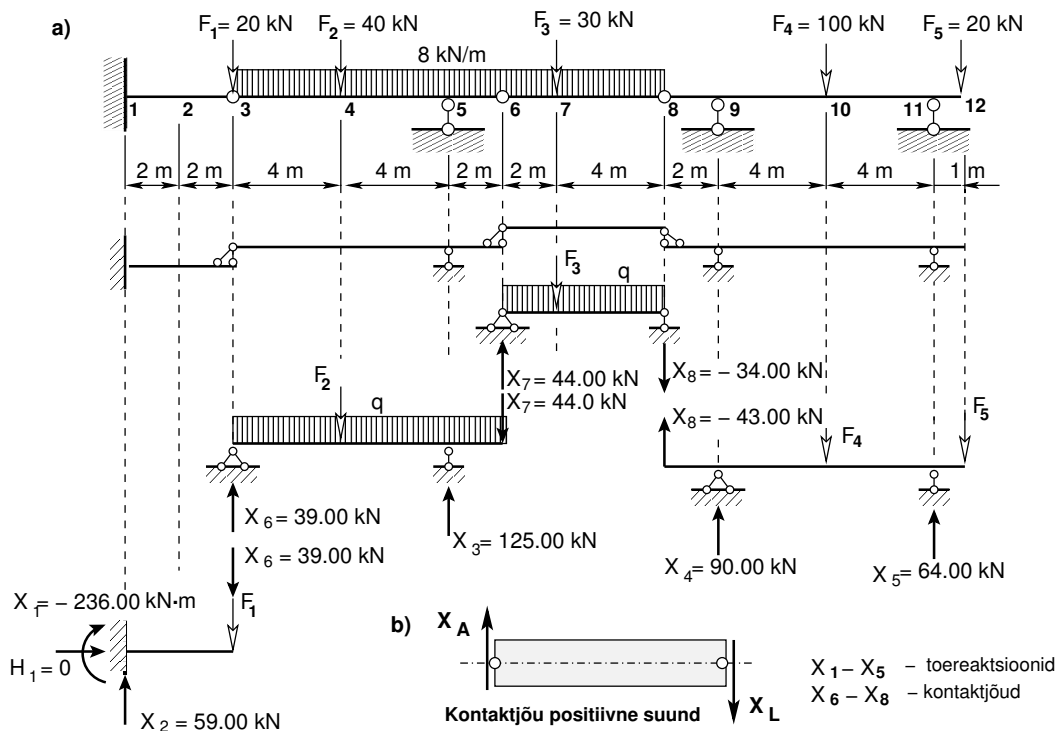
4.5 Gerberi tala. Arvutusnäited

4.5.1 Tala arvutusnäide 4.1

[slaidid] [swf] [ekraanivideo]

Näide 4.1 Koostada joonisel 4.6 näidatud staatikaga määratud tala paindemomendi M ja põikjõu Q epüür, ristlõike 4 ja 5 paindemomendi M_4 , põikjõu Q_4 ning põikjõu Q_5^v ja paindemomendi M_5 mõjujoon.

Koostame taladele tasakaalvõrrandid.



Joonis 4.6. Gerberi tala 4

Tala 6–8 tasakaaluvõrrandid

$$\Sigma M_6 = 0; \quad X_8 \cdot 6 + F_3 \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad (4.6)$$

$$\Sigma M_8 = 0; \quad -X_7 \cdot 6 + F_3 \cdot 4 + q \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad (4.7)$$

Tala 8–12 tasakaaluvõrrandid

$$\Sigma M_{11} = 0; \quad -X_8 \cdot 10 - X_4 \cdot 8 + F_4 \cdot 4 - F_5 \cdot 1 = 0 \quad (4.8)$$

$$\Sigma M_9 = 0; \quad -X_8 \cdot 2 + X_5 \cdot 8 - F_4 \cdot 4 - F_5 \cdot 9 = 0 \quad (4.9)$$

Tala 3–6 tasakaaluvõrrandid

$$\Sigma M_3 = 0; \quad -X_7 \cdot 10 + X_3 \cdot 8 - F_2 \cdot 4 - q \cdot 10 \cdot 5 = 0 \quad (4.10)$$

$$\Sigma M_5 = 0; \quad -X_7 \cdot 2 - X_6 \cdot 8 + F_2 \cdot 4 + q \cdot 10 \cdot (5 - 2) = 0 \quad (4.11)$$

Tala 1–3 tasakaaluvõrrandid

$$\Sigma Z = 0; \quad X_6 - X_2 + F_1 = 0 \quad (4.12)$$

$$\Sigma M_1 = 0; \quad X_1 + X_6 \cdot 4 + F_1 \cdot 4 = 0 \quad (4.13)$$

Tundmatute juures olevad kordajad kirjutame võrranditesse. Need võrrandid moodustavad võrrandisüsteemi (8x8)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = 0 \quad (4.14)$$

Võrrandisüsteemi (4.14) koostamine ja lahendamine GNU Octave'iga on esitatud arvutuspäevikus 4.2.

Võrrandisüsteemi lahendame Gaussi⁵⁶ meetodiga, mis GNU Octave'is kirjutatakse järgmiselt:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} \quad (4.15)$$

Võrrandisüsteemi (4.14) võib lahendada ka käsitsi, kui kasutada korrusskeemi mõistet. Alustame kõige kõrgemast korrusest (tala 6–8, võrrandid (4.6), (4.7)). Siit leiame kontaktjõu (põikjõu) X_8 ja X_7 . Edasi tuleme madalamale korrusele (tala 8–12, võrrandid (4.8), (4.9)). Nendest võrranditest leiame toereaktsiooni X_4 ja X_5 (kontaktjõud X_8 on juba teada). Järgmisena saame tala 3–6 võrranditest (4.10), (4.11) toereaktsiooni X_3 ja kontaktjõu X_6 (kontaktjõud X_7 on juba teada). Lõpuks leiame tala 1–3 võrranditest (4.12), (4.13) toereaktsiooni X_2 ja X_1 (kontaktjõud X_5 on juba teada).

Arvutuspäevikus 4.1 on toereaktsioonid, kontaktjõud ja sisejõud arvutatud GNU Octave'iga kui kalkulaatoriga. Käsud on eelnevalt salvestatud faili gerberiKasud.odt⁷ ja siis asetatud GNU Octave'i käsureale. Sama Gerberi tala on arvutatud EST-meetodiga näites 14.7 lk 453.

⁵ Carl Friedrich Gauss, saksa matemaatik, 1777–1855.

⁶ http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

⁷ ./octaveProgrammid/gerberiKasud.odt

Arvutuspäevik 4.1 Gerberi tala võrrandid (lahendatud kalkulaatoriga)

```

octave-3.0.1:1> diary GerberiTala.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> GerberiTala
-----
L = 31
KordaNT = 1
  Jõud ja koormused
F1 = 20
F2 = 40
F3 = 30
F4 = 100
F5 = 20
q = 8
-----
Toereaktsioonid
x1-toemoment lõikes 1
x2-vertikaalne tugi lõikes 1
x3-vertikaalne tugi lõikes 5
x4-vertikaalne tugi lõikes 9
x5-vertikaalne tugi lõikes 11
Tundmatud kontaktjõud
x6-põikjõud lõikes 3
x7-põikjõud lõikes 6
x8-põikjõud lõikes 8
-----
  arvutan tala 6-7 toereaktsioonid X7 ja X8
  võrrandist sumM6=0; -X8*6-(F3*2+q*6*3)=0
  saan          X8=-(F3*2+q*6*3)/6
X8 = -34
  võrrandist sumM8=0; -X7*6+(F3*4+q*6*3)=0
  saan          X7=(F3*4+q*6*3)/6
X7 = 44
  kontrollin sumY=X7+F4+q*6-X8
sumY = 0
  arvutan tala 8--12 toereaktsioonid X4 ja X5
  võrrandist sumM9=0; -X5*8+(F4*4+F5*9+X8*2)=0
  saan          X5=(F4*4+F5*9+X8*2)/8
X5 = 64
  võrrandist sumM11=0; -X4*8+(F4*4-X8*10-F5*1)=0
  saan          X4=(F4*4-X8*10-F5*1)/8
X4 = 90
  kontrollin sumY=-X8+F4+F5-X4-X5
sumY = 0
  arvutan tala 3--6 toereaktsioonid X6 ja X3
  võrrandist sumM3=0; -X3*8+(X7*10+F2*4+q*10*5)=0
  saan          X3=(X7*10+F2*4+q*10*5)/8
X3 = 125
  võrrandist sumM5=0; -X6*8+(F2*4-X7*2+q*10*3)=0
  saan          X6=(F2*4-X7*2+q*10*3)/8
X6 = 39
  kontrollin sumY=F2+q*10+X7-X6-X3

```

```

sumY = 0
  arvutan tala 1--3 toereaktsioonid X1 ja X2
  võrrandist  $-X2+(F1+X6)=0$ 
  saan  $X2=(F1+X6)$ 
X2 = 59
  võrrandist  $X1+((F1+X6)*4)=0$ 
  saan  $X1=-((F1+X6)*4)$ 
X1 = -236
  Kontrollin tala 1-12 toereaktsioone SumY
  SumY=  $X2+X3+X4+X5-F1-F2-F3-F4-F5-q*(10+6)$ 
SumY = 0

```

```

=====

Arvutan Gerberi tala paindemomente
  arvutan tala 6--8 momendi  $M7=X7*2-q*2*1$ 
M7 = 72
  kontrolliks  $M7=-X8*4-q*4^2/2$ 
M7 = 72
  arvutan tala 8--12 momendid  $M9=X8*2$ 
M9 = -68
  arvutan momendi  $M10=-F5*5+X5*4$ 
M10 = 156
  arvutan momendi  $M11=-F5*1$ 
M11 = -20
  arvutan tala 3--6 momendid  $M4=X6*4-q*4^2/2$ 
M4 = 92
  arvutan momendi  $M5=-X7*2-q*2^2/2$ 
M5 = -104
  arvutan tala 1--3 momendi  $X1=-(X6+F1)*2$ 
X1 = -236
M1 = -236
  Nende andmete põhjal saab joonistada M epüüri
  Epüüri kuju jaotatud koormuse q all

```

```

=====

Põikjõud talas 1-12
  arvutan põikjõu  $Q1_3=X2$ 
Q1_3 = 59
Q3_1 = 59
  arvutan põikjõu  $Q3_4=X2-F1$ 
Q3_4 = 39
  arvutan põikjõu  $Q4_3=X2-F1-q*4$ 
Q4_3 = 7
  arvutan põikjõu  $Q4_5=Q4_3-F2$ 
Q4_5 = -33
  arvutan põikjõu  $Q5_4=Q4_5-q*4$ 
Q5_4 = -65
  arvutan põikjõu  $Q5_6=Q5_4+X3$ 
Q5_6 = 60
  arvutan põikjõu  $Q6_5=Q5_4+X3-q*2$ 
Q6_5 = 44

```

```

    arvutan põikjõu Q6_7= Q6_5
Q6_7 = 44
    arvutan põikjõu Q7_6= Q6_7-q*2
Q7_6 = 28
    arvutan põikjõu Q7_8=Q7_6-F3
Q7_8 = -2
    arvutan põikjõu Q8_7=Q7_8-q*4
Q8_7 = -34
    arvutan põikjõu Q8_9=Q8_7
Q8_9 = -34
    arvutan põikjõu Q9_10=Q8_9+X4
Q9_10 = 56
    arvutan põikjõu Q10_11=Q9_10-F4
Q10_11 = -44
    arvutan põikjõu Q11_12=Q10_11+X5
Q11_12 = 20

```

```

=====
    Toereaktsioonid R=[X1 X2 X3 X4 X5]
R =

```

```

    -236    59    125    90    64

```

```

    Kontaktjõud CF=[X6 X7 X8]
CF =

```

```

    39    44   -34

```

```

    Põikjõud QC=[Q3_4 Q6_7 Q8_9]
QC =

```

```

    39    44   -34

```

Nende andmete põhjal saab joonistada Q epüüri

```

=====
octave-3.0.1:4> diary off

```

Arvutuspäevikus [4.2](#) on toereaktsioonid, kontaktjõud ja sisejõud arvutatud GNU Octave'i koostatud programmiga [GerberiTala.m](#)⁸

Arvutuspäevik 4.2 Gerberi tala võrrandid (lahendatud arvutiga)

```

octave-3.0.1:1> diary GerberiTala.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> GerberiTala

```

```

-----
L = 31
KordaNT = 1

```

⁸./octaveProgrammide/GerberiTala.m

Jõud ja koormused

F1 = 20
 F2 = 40
 F3 = 30
 F4 = 100
 F5 = 20
 q = 8

 Toereaktsioonid

x1-toemoment lõikes 1
 x2-vertikaalne tugi lõikes 1
 x3-vertikaalne tugi lõikes 5
 x4-vertikaalne tugi lõikes 9
 x5-vertikaalne tugi lõikes 11
 Tundmatud kontaktjõud
 x6-põikjõud lõikes 3
 x7-põikjõud lõikes 6
 x8-põikjõud lõikes 8

=====

Koostame võrrandisüsteemi $A(8,8)*x+B(8,1)=0$

siin ei ole korrusskeem vajalik

Võrrandid 1 ja 2; tala 6--8
 % sumM6=0; $x8*6+F3*2+q*6*3=0$
 A(1,8)=6; B(1,1)=F3*2+q*6*3;
 % sumM8=0; $-x7*6+F3*4+q*6*3=0$
 A(2,7)=-6; B(2,1)=F3*4+q*6*3;
 Võrrandid 3 ja 4; tala 8--12
 % sumM11=0; $-x8*10-x4*8+F4*4-F5*1=0$
 A(3,8)=-10; A(3,4)=-8; B(3,1)=F4*4-F5*1;
 % sumM9=0; $-x8*2+x5*8-F4*4-F5*9=0$
 A(4,8)=-2; A(4,5)=8; B(4,1)=-F4*4-F5*9;
 Võrrandid 5 ja 6; tala 3--6
 % sumM3=0; $-x7*10+x3*8-F2*4-q*10*5=0$
 A(5,7)=-10; A(5,3)=8; B(5,1)=-F2*4-q*10*5;
 % sumM5=0; $-x7*2-x6*8+F2*4+q*10*(5-2)=0$
 A(6,7)=-2; A(6,6)=-8; B(6,1)=F2*4+q*10*(5-2);
 Võrrandid 7 ja 8; tala 1--3
 % sumZ=0; $x6-x2+F5=0$;
 A(7,6)=1; A(7,2)=-1; B(7,1)=F5;
 % sumM1=0; $x1+x6*4+F1*4=0$;
 A(8,1)=1; A(8,6)=4; B(8,1)=F1*4;

=====

Võrrandisüsteem

A

B

=====

1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.00	204.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-6.00	0.00	264.00
3	0.00	0.00	0.00	-8.00	0.00	0.00	0.00	-10.00	380.00
4	0.00	0.00	0.00	0.00	8.00	0.00	0.00	-2.00	-580.00
5	0.00	0.00	8.00	0.00	0.00	0.00	-10.00	0.00	-560.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-8.00	-2.00	0.00	400.00

7	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	20.00
8	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.00	0.00	0.00	80.00

Võrrandisüsteemi lahendamine

$X = -A \setminus B;$

=====

Toereaktsioonid ja kontaktjõud X

=====

1	-236.00	-	toemoment lõikes 1
2	59.00	-	vertikaalne tugi lõikes 1
3	125.00	-	vertikaalne tugi lõikes 5
4	90.00	-	vertikaalne tugi lõikes 9
5	64.00	-	vertikaalne tugi lõikes 11
6	39.00	-	kontaktjõud lõikes 3
7	44.00	-	kontaktjõud lõikes 6
8	-34.00	-	kontaktjõud lõikes 8

Toereaktsioonide kontroll

$SumZ = -X(2,1) - X(3,1) - X(4,1) - X(5,1) + F1 + F2 + F3 + F4 + F5 + q \cdot 16$

SumZ = 0

Toereaktsioonid $R = [X1 \ X2 \ X3 \ X4 \ X5]$

R =

-236 59 125 90 64

Kontaktjõud $CF = [X6 \ X7 \ X8]$

CF =

39 44 -34

Sisejõudude arvutamine ülekandevõrranditega

$Qa = 59$

$Ma = -236$

Algparameetrid $FA = [Qa \ Ma]$

FA =

59 -236 % X2 X1

Fjoud1 =

20	4	%	F1
40	8	%	F2
-125	12	%	-X3
30	16	%	F3
-90	22	%	-X4
100	26	%	F4
-64	30	%	-X5
20	31	%	F5

qkoormus1 =

8 4 20 % qz 4.0 20.0

```

=====
Njaotust=jaotusteArv(L,Fjoud1,qkoormus1);
arvude suurim ühistegur - gcd(arvudS)
tegur = 1
minimaalne jaotuste arv - jaotus = L/tegur
NT=Njaotust*KordaNT % jaotusi suurendatakse KordaNT korda
NT = 31
TSj=talaFqQaMa(NT,L,QA,MA,Fjoud1,qkoormus1);
TSjT=TSj;
pealdis=' Sisejõudude jaotus talas ';
tabelXQM(TSjT,pealdis)
%
```

Sisejõudude jaotus talas

```

=====
```

I-Nr	x	Q	M
1	0.00	59.000	-236.000
2	1.00	59.000	-177.000
3	2.00	59.000	-118.000
4	3.00	59.000	-59.000
5	4.00	59.000	0.000
6	4.00	39.000	0.000
7	5.00	31.000	35.000
8	6.00	23.000	62.000
9	7.00	15.000	81.000
10	8.00	7.000	92.000
11	8.00	-33.000	92.000
12	9.00	-41.000	55.000
13	10.00	-49.000	10.000
14	11.00	-57.000	-43.000
15	12.00	-65.000	-104.000
16	12.00	60.000	-104.000
17	13.00	52.000	-48.000
18	14.00	44.000	0.000
19	15.00	36.000	40.000
20	16.00	28.000	72.000
21	16.00	-2.000	72.000
22	17.00	-10.000	66.000
23	18.00	-18.000	52.000
24	19.00	-26.000	30.000
25	20.00	-34.000	0.000
26	21.00	-34.000	-34.000
27	22.00	-34.000	-68.000
28	22.00	56.000	-68.000
29	23.00	56.000	-12.000
30	24.00	56.000	44.000
31	25.00	56.000	100.000

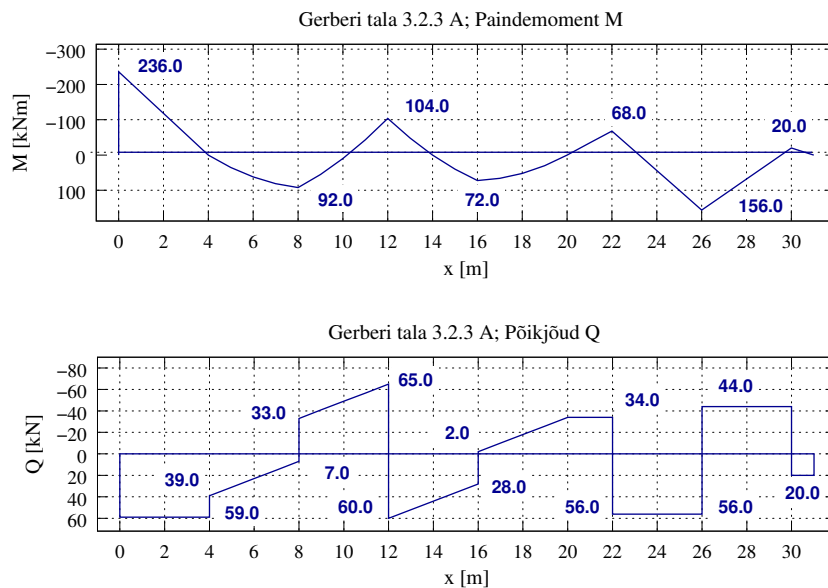
32	26.00	56.000	156.000
33	26.00	-44.000	156.000
34	27.00	-44.000	112.000
35	28.00	-44.000	68.000
36	29.00	-44.000	24.000
37	30.00	-44.000	-20.000
38	30.00	20.000	-20.000
39	31.00	20.000	0.000
40	31.00	20.000	0.000

```

=====
%
MiMaSg=minMaxGrafSisejoud(TSjT);
maxQ=MiMaSg(1);
minQ=MiMaSg(2);
maxM=MiMaSg(3);
minM=MiMaSg(4);
octave-3.0.1:4> diary off

```

Gerberi tala (joonis 4.6) sisejõud on arvutuspäeviku 4.2 tabelis „Sisejõudude jaotus talas” (lk 103) ja epüürid on näidatud joonisel 4.7. Need joonised on tehtud GNU Octave’i käsuga plot.



Joonis 4.7. Gerberi tala 4 sisejõud

Arvutuspäevikus 4.3 on toereaktsioonid, kontaktjõud ja sisejõud arvutatud GNU Octave’i koostatud programmiga *spGerberiTala.m*⁹ Võrrandisüsteemi kordajatest on moodustatud hõre maatriks (ingl sparse matrix). Suurte võrrandisüsteemide puhul hoitakse kokku mahtu ja aega. Hõredate võrrandisüsteemide lahendamisel ei tehta tehteid võrrandisüsteemi kordajatega, mis on nullid.

⁹ ./octaveProgrammide/spGerberiTala.m

Arvutuspäevik 4.3 Gerberi tala võrrandid (koostatud hõreda maatriksina)

```
octave-3.0.1:1> diary spGerberiTala.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spGerberiTala
```

```
=====
```

```
L = 31
KordaNT = 1
  Jõud ja koormused
F1 = 20
F2 = 40
F3 = 30
F4 = 100
F5 = 20
q = 8
```

```
-----
```

```
Toereaktsioonid
x1-toemoment lõikes 1
x2-vertikaalne tugi lõikes 1
x3-vertikaalne tugi lõikes 5
x4-vertikaalne tugi lõikes 9
x5-vertikaalne tugi lõikes 11
Tundmatud kontaktjõud
x6-põikjõud lõikes 3
x7-põikjõud lõikes 6
x8-põikjõud lõikes 8
```

```
=====
```

```
Koostame võrrandisüsteemi  $A(8,8)*x+B(8,1)=0$ 
siin ei ole korrusskeem vajalik
```

```
=====
```

```
  Võrrandid 1 ja 2;   tala 1--3
% 1. sumM1=0; x1+x6*4+F1*4=0;
  spSisse=spIN(1,1,1.0);
  spSisse=spIN(1,6,4.0);   B(1,1)=F1*4;
% 2. sumZ=0; x6-x2+F5=0;
  spSisse=spIN(2,6,1.0);
  spSisse=spIN(2,2,-1.0); B(2,1)=F5;
  Võrrandid 3 ja 4;   tala 3--6
% 3. sumM3=0; -x7*10+x3*8-F2*4-q*10*5=0
  spSisse=spIN(3,7,-10.0);
  spSisse=spIN(3,3,8.0);   B(3,1)=-F2*4-q*10*5;
% 4. sumM5=0; -x7*2-x6*8+F2*4+q*10*(5-2)=0
  spSisse=spIN(4,7,-2.0);
  spSisse=spIN(4,6,-8.0); B(4,1)=F2*4+q*10*(5-2);
  Võrrandid 5 ja 6;   tala 6--8
% 5. sumM6=0; x8*6+F3*2+q*6*3=0
  spSisse=spIN(5,8,6.0);   B(5,1)=F3*2+q*6*3;
% 6. sumM8=0; -x7*6+F3*4+q*6*3=0
  spSisse=spIN(6,7,-6.0); B(6,1)=F3*4+q*6*3;
  Võrrandid 7 ja 8;   tala 8--12
% 7. sumM11=0; -x8*10-x4*8+F4*4-F5*1=0
  spSisse=spIN(7,8,-10.0);
```

```

    spSisse=spIN(7,4,-8.0); B(7,1)=F4*4-F5*1;
% 8. sumM9=0; -x8*2+x5*8-F4*4-F5*9=0
    spSisse=spIN(8,8,-2.0);
    spSisse=spIN(8,5,8.0); B(8,1)=-F4*4-F5*9;

% nullist erinevaid võrrandisüsteemi (8x8) kordajaid on 14
% in - rea indekseid (i) sisaldav vektor
    in=spSisse(1,:)
in =

    1    1    2    2    3    3    4    4    5    6    7    7    8    8
% jm - veeru indekseid (j) sisaldav vektor
    jm=spSisse(2,:)
jm =

    1    6    6    2    7    3    7    6    8    7    8    4    8    5
% sv - vektor võrrandisüsteemi kordajatest A(i,j) (14 nullist erinevat arvu)
    sv=spSisse(3,:)
sv =

    1    4    1   -1  -10    8   -2   -8    6   -6  -10   -8   -2    8

% Hõre maatriks esitatakse vektorina (järjekord erineb sisseloetutest sv-s),
% kus nullist erinevad elemendid on näidatud veergude järjekorras

-----
    Hõre (sparse) maatriks spA=sparse(in,jm,sv)
-----
spA =

Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 14)

    (1, 1) ->  1
    (2, 2) -> -1
    (3, 3) ->  8
    (7, 4) -> -8
    (8, 5) ->  8
    (1, 6) ->  4
    (2, 6) ->  1
    (4, 6) -> -8
    (3, 7) -> -10
    (4, 7) -> -2
    (6, 7) -> -6
    (5, 8) ->  6
    (7, 8) -> -10
    (8, 8) -> -2

% Kontrolliks võib hõreda maatriksi spA
% teisendada täismaatriksiks A
% A=full(spA)

```

```
-----
% Võrrandisüsteemi vabaliikmete vektor
```

```
B =
      80
      20
     -560
      400
      204
      264
      380
     -580
```

```
-----
Hõreda võrrandisüsteemi lahendamine
```

```
X=-spA\B;
```

```
=====
Toereaktsioonid ja kontaktjõud   X
=====
```

```
 1  -236.00 - toemoment lõikes 1
 2   59.00  - vertikaalne tugi lõikes 1
 3  125.00  - vertikaalne tugi lõikes 5
 4   90.00  - vertikaalne tugi lõikes 9
 5   64.00  - vertikaalne tugi lõikes 11
 6   39.00  - kontaktjõud lõikes 3
 7   44.00  - kontaktjõud lõikes 6
 8  -34.00  - kontaktjõud lõikes 8
=====
```

```
Toereaktsioonide kontroll
```

```
SumZ=-X(2,1)-X(3,1)-X(4,1)-X(5,1)+F1+F2+F3+F4+F5+q*16
```

```
SumZ = 0
```

```
=====
Qa = 59
```

```
Ma = -236
```

```
Algpameetrid FA=[Qa ja Ma]
```

```
FA =
```

```
59  -236
```

```
Toemoment X1 ja toereaktsioon X2 võetakse arvesse algpameetritega
```

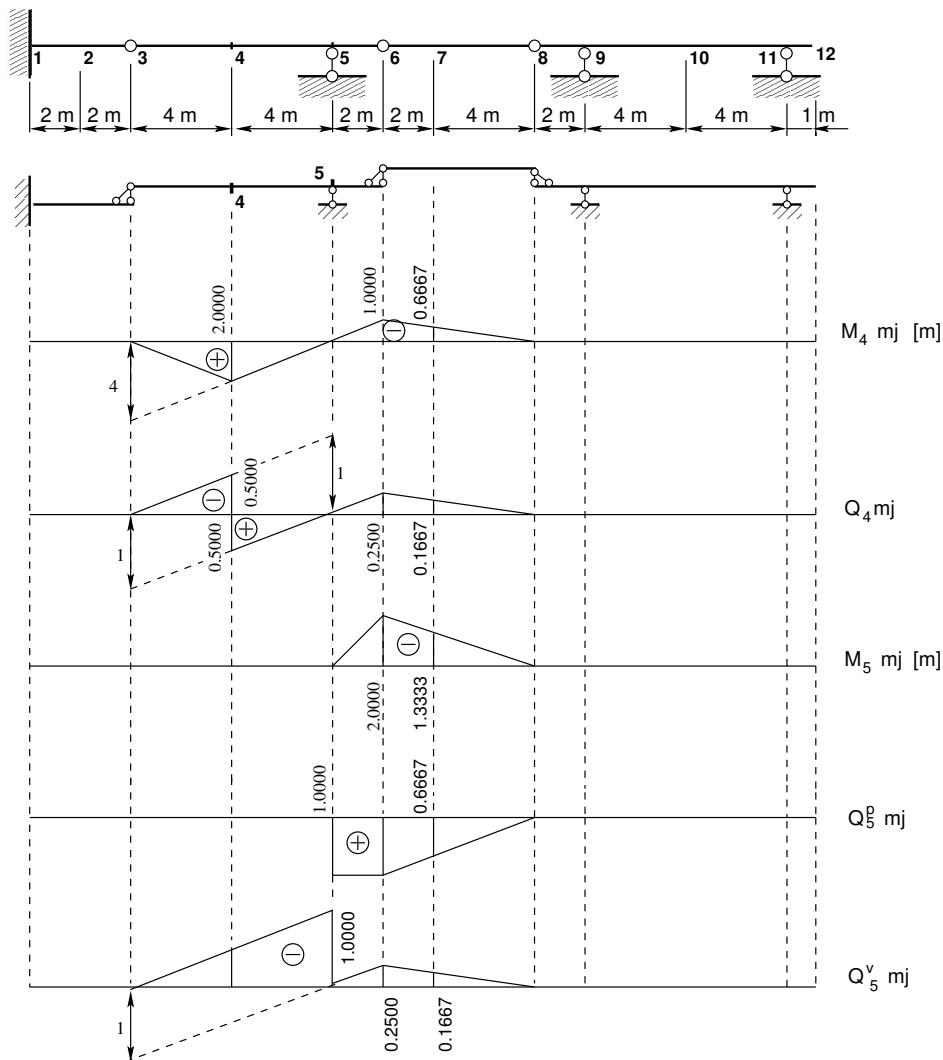
```
ja järgnevasse loetelusse neid ei sisestata
```

```
%
```

Gerberi tala (joonis 4.6) sisejõud on toodud arvutuspäeviku „Gerberi tala võrrandid (lahendatud arvutiga)” tabelis „Sisejõudude jaotus talas” (lk 103) ja epüürid on näidatud joonisel 4.7. Need joonised on tehtud GNU Octave’i käsuga plot.

4.5.2 Tala mõjujoonte koostamise näide 4.2 [slaidid] [swf]

Näide 4.2 Mõjujoonte konstrueerimiseks vaatleme korrusskeemi joonisel 4.8. Alustame staatiliselt määratud mitmesildelise tala (Gerberi tala) ristlõikes 4 paindemomendi M_4 mõjujoone konstrueerimist. Ristlõige 4 asub talas 3–6, mis on konsooliga tala. Konsooliga tala mõjujooned on joonisel 2.10 ja 2.11. Koostame paindemomendi M_4 mõjujoone talale 3–6. Edasi vaatleme ühikjõu liikumist tala naaberosadel. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „alumisel korrusel” (tala 1–3), siis see koormus talas 3–6 sisejõude ei tekita ja M_4 mõjujoone väärtused on tala 1–3 (ühikjõu all) ulatuses null. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „ülemisel korrusel” (tala 6–8), siis see koormus põhjustab talas 3–6 sisejõude. Talas 6–8 M_4 mõjujoon on sirgjoon. Leiame mõjujoone väärtused liigendis 6 ja 8. Kui ühikjõud asub liigendis 8, siis jõudu ei kanta üle talale 3–6 ja mõjujoone M_4 väärtus on null. Kui ühikjõud asub liigendis 6, on mõjujoone M_4 väärtus ühine nii talal 6–8 kui ka talal 3–6 (-1.0000). Ühendame mõjujoone



Joonis 4.8. Gerberi tala 4 mõjujooned

M_4 väärtused liigendis 6 ja 8 sirgega. Liigendis on sirge murdepunkt. Kui ühikjõud liigub talale 8–12, siis jõu ülekannet talale 3–6 ei toimu ja ühikjõu all on paindemomendi M_4 mõjujoone väärtus null.

Põikjõu Q_4 konstrueerimisel võtame arvesse, et ristlõige 4 asub konsooliga tala sildes. Konsooliga tala põikjõu mõjujooned on esitatud joonisel 2.10 ja 2.11. Sildes asuva ristlõike jaoks põikjõu mõjujoone konstrueerimist vaatlesime joonisel 2.8. Pikendame sirged tala lõpuni. Nii saame Q_4 mõjujoone (joonis 4.8) tala 3–6 ulatuses. Edasi vaatleme ühikjõu liikumist tala naaberosadel. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „alumisel korrusel” (tala 1–3), siis see koormus talas 3–6 sisejõude ei tekita ja Q_4 mõjujoone väärtused on tala 1–3 (ühikjõu all) ulatuses null. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „ülemisel korrusel” (tala 6–8), siis see koormus põhjustab talas 3–6 sisejõude. Talas 6–8 Q_4 mõjujoon on sirgjoon. Leiame mõjujoone väärtused liigendis 6 ja 8. Kui ühikjõud asub liigendis 8, siis jõudu ei kanta üle talale 3–6 ja mõjujoone Q_4 väärtus on null. Kui ühikjõud asub liigendis 6, on mõjujoone Q_4 väärtus ühine nii talal 6–8 kui ka talal 3–6 (-0.2500). Ühendame mõjujoone Q_4 väärtused liigendis 6 ja 8 sirgega. Liigendis on sirge murdepunkt. Kui ühikjõud liigub talale 8–12, siis jõu ülekannet talale 3–6 ei toimu ja ühikjõu all on paindemomendi Q_4 mõjujoone väärtus null.

Paindemoment M_5 asub tala 3–6 toel 5. Kui ühikkoormus liigub tala 3–6 sildes, siis toel on paindemoment M_5 null. Kui ühikjõud asub tala 3–6 otsas liigendis 6, siis toel on paindemomendi väärtus -2.0000. Selle väärtuse kanname ühikjõu alla (joonis 4.8). Parempoolse konsooliga tala parempoolsel toel paindemomendi koostamist vaatlesime joonistel 2.10 ja 2.11. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „alumisel korrusel” (tala 1–3), siis see koormus talas 3–6 sisejõude ei tekita ja M_5 mõjujoone väärtused on tala 1–3 (ühikjõu all) ulatuses null. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „ülemisel korrusel” (tala 6–8), siis see koormus põhjustab talas 3–6 sisejõude. Talas 6–8 M_5 mõjujoon on sirgjoon. Leiame mõjujoone väärtused liigendis 6 ja 8. Kui ühikjõud asub liigendis 8, siis jõudu ei kanta üle talale 3–6 ja mõjujoone M_5 väärtus on null. Kui ühikjõud asub liigendis 6, on mõjujoone M_5 väärtus ühine nii talal 6–8 kui ka talal 3–6 (-2.0000). Ühendame mõjujoone M_5 väärtused liigendis 6 ja 8 sirgega. Liigendis on sirge murdepunkt. Kui ühikjõud liigub talale 8–12, siis jõu ülekannet talale 3–6 ei toimu ja ühikjõu all on paindemomendi M_5 mõjujoone väärtus null.

Põikjõud Q_5^p asub tala 3–6 toest 5 paremal. See ristlõige asub tala 3–6 parempoolsel konsoolil. Põikjõu Q_5^p mõjujoone väärtus konsoolil on 1.0000. Kui ühikkoormus liigub tala 3–6 sildes, siis toel on põikjõud Q_5^p null. Parempoolse konsooliga tala põikjõu koostamist vaatlesime joonistel 2.10 ja 2.11. Edasi vaatleme ühikjõu liikumist tala naaberosadel. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „alumisel korrusel” (tala 1–3), siis see koormus talas 3–6 sisejõude ei tekita ja Q_5^p mõjujoone väärtused on tala 1–3 (ühikjõu all) ulatuses null. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „ülemisel korrusel” (tala 6–8), siis see koormus põhjustab talas 3–6 sisejõude. Talas 6–8 Q_5^p mõjujoon on sirgjoon. Leiame mõjujoone väärtused liigendis 6 ja 8. Kui ühikjõud asub liigendis 8, siis jõudu ei kanta üle talale 3–6 ja mõjujoone Q_5^p väärtus on null. Kui ühikjõud asub liigendis 6, on mõjujoone Q_5^p väärtus ühine nii talal 6–8 kui ka talal 3–6 (1.0000). Ühendame mõjujoone Q_5^p väärtused liigendis 6 ja 8 sirgega. Liigendis on sirge murdepunkt. Kui ühikjõud liigub talale 8–12, siis jõu ülekannet talale 3–6 ei toimu ja ühikjõu all on paindemomendi Q_5^p mõjujoone väärtus null.

Põikjõud Q_5^v asub tala 3–6 toest 5 vasakul. See ristlõige asub tala 3–6 sildes. Tala põikjõu mõjujooned on esitatud joonisel 2.10 ja 2.11. Sildes asuva ristlõike jaoks põikjõu mõjujoone konstrueerimist vaatlesime joonisel 2.8. Pikendame sirged tala lõpuni. Üleminek ühelt sirgelt teisele sirgele toimub vahetult toest 5 vasakul. Tala parempoolses otsas oleva mõjujoone Q_5^v

väärtuse arvutame sarnastest kolmnurkadest (-0.2500). Nii saame Q_5^v mõjujoone (joonis 4.8) tala 3–6 ulatuses. Edasi vaatleme ühikjõu liikumist tala naaberosadel. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „alumisel korrusel” (tala 1–3), siis see koormus talas 3–6 sisejõude ei tekita ja Q_5^v mõjujoone väärtused on tala 1–3 (ühikjõu all) ulatuses null. Kui ühikjõud liigub tala naaberosal „ülemisel korrusel” (tala 6–8), siis see koormus põhjustab talas 3–6 sisejõude. Talas 6–8 Q_5^v mõjujoon on sirgjoon. Leiame mõjujoone väärtused liigendis 6 ja 8. Kui ühikjõud asub liigendis 8, siis jõudu ei kanta üle talale 3–6 ja mõjujoone Q_5^v väärtus on null. Kui ühikjõud asub liigendis 6, on mõjujoone Q_5^v väärtus ühine nii talal 6–8 kui ka talal 3–6 (-0.2500). Ühendame mõjujoone Q_5^v väärtused liigendis 6 ja 8 sirgega. Liigendis on sirge murdepunkt. Kui ühikjõud liigub talale 8–12, siis jõu ülekannet talale 3–6 ei toimu ja ühikjõu all on paindemomendi Q_5^v mõjujoone väärtus null.

4.5.3 Tala arvutusnäide 4.3

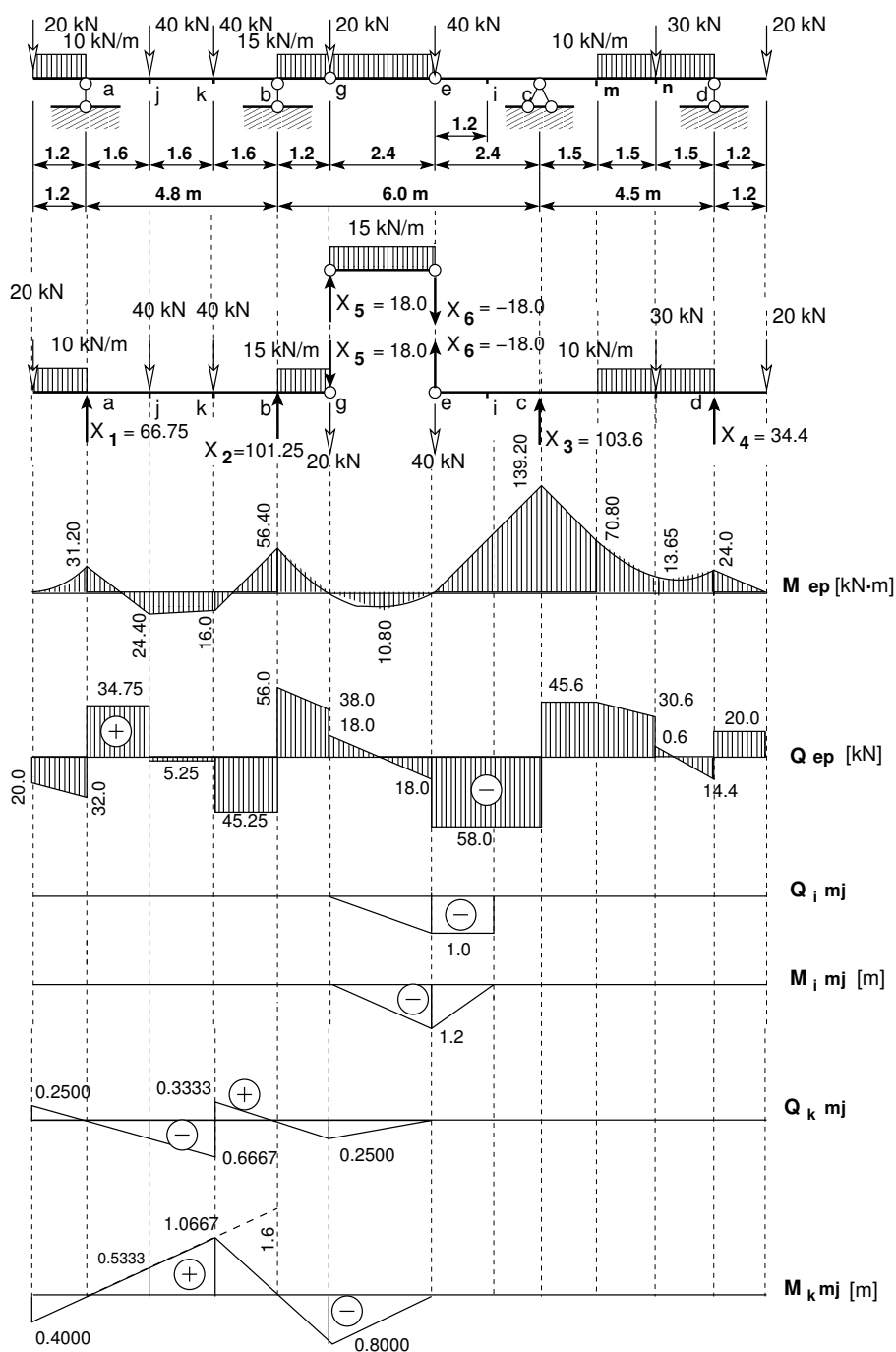
Näide 4.3 Koostada joonisel 4.9 näidatud staatikaga määratud tala paindemomendi M ja põikjõu Q epüür, ristlõike i ja k paindemomendi M_i , põikjõu Q_i ning põikjõu Q_k ja paindemomendi M_k mõjujoon.

Arvutuspäevik 4.4 Toereaktsioonide arvutus

```
octave:1> diary toereaktsioonid1.out
octave:2> diary on
octave:3> X5=2.4*15/2
X5 = 18
octave:4> X6= -X5
X6 = -18

=====

octave:5> % momentide summa toe a suhtes
octave:5> % -X2*4.8+(40*1.6+40*3.2+15*1.2*5.4+ ...
(X5+20)*6.0-20*1.2-10*1.2*0.6)=0
octave:5> X2=(40*1.6+40*3.2+15*1.2*5.4+(X5+20) ...
6.0-20*1.2-10*1.2*0.6)/4.8
X2 = 101.25
octave:6> % momentide summa toe b suhtes
octave:6> % -X1*4.8+(20*6.0+10*1.2*5.4+40*3.2+ ...
40*1.6-15*1.2*0.6-(18.0+X5.0)*1.2)=0
octave:6> X1=(20*6.0+10*1.2*5.4+40*3.2+40*1.6- ...
15*1.2*0.6-(X5.0+20.0)*1.2)/4.8
X1 = 66.750
octave:7> % momentide summa toe d suhtes
octave:7> % -X3*4.5+((40-X6)*6.9+10*3*1.5+ ...
30*1.5-20*1.2)=0
octave:7> X3=((40-X6)*6.9+10*3*1.5+30*1.5- ...
20*1.2)/4.5
X3 = 103.60
octave:8> % momentide summa toe c suhtes
octave:8> % -X4*4.5+((-X6+40.0)*2.4+ ...
10*3.0*3.0+30*3.0+20*5.7)=0
```

Joonis 4.9. Gerberi tala 5 sisejõudude epüürid ja mõjujooned

```

octave:8> X4=(-(-X6+40.0)*2.4+10*3.0*3.0+ ...
30*3.0+20*5.7)/4.5
X4 = 34.400
octave:9> % toereaktsioonide kontroll
octave:9> SumY=X1+X2+X3+X4-20-10*1.2-40- ...
40-15*3.6-20-40-10*3-30-20
    
```

```
SumY = 0
octave:10> diary off
```

```
=====
```

Arvutuspäevik 4.5 *Momentide arvutus*

```
diary momentideArvutus1.out
octave:2> diary on
octave:3> Lisaosakeskel=15*2.4^2/8
Lisaosakeskel = 10.800
octave:4> MtoelB=-(20+18.0)*1.2-15*1.2^2/2
MtoelB = -56.400
octave:5> MtoelA=-20*1.2-10*1.2^2/2
MtoelA = -31.200
octave:6> Mj=-20*2.8+66.75*1.6-10*1.2*2.2
Mj = 24.400
octave:7> Mk=-20*(2.8+1.6)+66.75*(1.6+1.6)- ...
10*1.2*(2.2+1.6)-40*1.6
Mk = 16.000
octave:8> Mc=-(18.0+40.0)*2.4
Mc = -139.20
octave:9> Mm=-(18.0+40.0)*(2.4+1.5)+103.6*1.5
Mm = -70.800
octave:10> Mn=-20*(1.2+1.5)+34.4*1.5-10*1.5^2/2
Mn = -13.650
octave:11> Md=-20*1.2
Md = -24
octave:12> diary off
```

```
=====
```

Arvutuspäevik 4.6 *Põikjõu arvutus*

```
diary poikjouArvutus1.out
octave:2> diary on
octave:3> % põikjõud vasakul, konsooli otsas
octave:3> Qal=-20.0
Qal = -20
octave:4> Qav=
octave:5> Qav=-20.0-10*1.2
Qav = -32
octave:6> Qap=-20.0-10*1.2+66.75
Qap = 34.750
octave:7> Qjv=-20.0-10*1.2+66.75
Qjv = 34.750
octave:8> Qjp=-20.0-10*1.2+66.75-40.0
Qjp = -5.2500
octave:9> Qkv=-20.0-10*1.2+66.75-40.0
Qkv = -5.2500
octave:10> Qkp=-20.0-10*1.2+66.75-40.0-40.0
Qkp = -45.250
```

```

octave:11> Qbv=-20.0-10*1.2+66.75-40.0- ...
40.0+101.25
Qbv = 56
octave:12> Qbp=-20.0-10*1.2+66.75-40.0- ...
40.0+101.25
Qbp = 56
octave:13> Qgv=-20.0-10*1.2+66.75-40.0-40.0+ ...
101.25-15.0*1.2
Qgv = 38
octave:14> Qgp=-20.0-10*1.2+66.75-40.0-40.0+ ...
101.25-15.0*1.2-20
Qgp = 18
octave:15> Qev=-18.0
Qev = -18
octave:16> Qep=-18.0-40.0
Qep = -58
octave:17> Qcv=-18.0-40.0
Qcv = -58
octave:18> Qcp=-18.0-40.0+103.6
Qcp = 45.600
octave:19> Qm=-18.0-40.0+103.6
Qm = 45.600
octave:20> Qnv=-18.0-40.0+103.6-10.0*1.5
Qnv = 30.600
octave:21> Qnp=-18.0-40.0+103.6-10.0*1.5-30.0
Qnp = 0.60000
octave:22> Qdv=-18.0-40.0+103.6-10.0*1.5- ...
30.0-10.0*1.5
Qdv = -14.400
octave:23> Qdp=-18.0-40.0+103.6-10.0*1.5- ...
30.0-10.0*1.5+34.4
Qdp = 20.000
octave:24> Qloppus=+20.0
Qloppus = 20
octave:25> diary off

```

=====

Arvutuspäevik 4.7 Sisejõudude arvutus mõjujoonte abil

```

octave:2> diary on
octave:3> Koormus_Qk=10*1.2*0.25/2-15*3.6*0.25/2+0.25*20-0.3333*40-0.6667*40-0.25*20
Koormus_Qk = -45.250
octave:4> Koormus_Mk=-10*1.2*0.40/2-15*3.6*0.80/2-0.40*20+1.0667*40+0.5333*40-0.8*20
Koormus_Mk = 16
octave:5> % OK!
octave:5> diary off

```

4.5.4 Talal liikuvad kraanad. Näide 4.4

Näide 4.4 Vaatleme liikuva koormuse ülesannet [ER83], kus mõjujoonte (joonis 4.10) abil on vaja leida ekstremaalsed toereaktsioonid ja sisejõud joonisel 4.10 b) esitatud liikuvast koormusest. Liikuv koormus koosneb kahest sildkraanast, mille minimaalne vahekaugus on ≥ 2 . Kraanalt tulev koormus $F = 24$ kN. Kraana rataste vahe 5 m. Mõjujoonte juures on näidatud kraanade asetus, mille puhul tekivad suurimad toereaktsioonid ja sisejõud.

Ekstremaalsete toereaktsioonide ja sisejõudude leidmisel on kraana üks koormus vaadeldava mõjujoone murdepunkti kohal.

Suurimad toereaktsioonid

$$\max B = 24(0.5000 + 1.0000 + 1.2000 + 0.2000) = 69.6 \text{ kN} \quad (4.16)$$

$$\min B = 0 \quad (4.17)$$

$$\max C = 24(0.2000 + 1.2000 + 1.0000 + 0.5000) = 69.6 \text{ kN} \quad (4.18)$$

$$\min C = 24(0.0 + 0.0 - 0.1800 - 0.0700) = -6.00 \text{ kN} \quad (4.19)$$

Suurimad põikjõud

$$\max Q_i = 24(0.6000 + 0.1000 + 0.0000 + 0.0000) = 16.80 \text{ kN} \quad (4.20)$$

$$\min Q_i = 24(-0.4000 + 0.1000 - 0.2000 - 0.0333) = -12.80 \text{ kN} \quad (4.21)$$

$$\max Q_k = 24(0.0333 + 0.2000 + 0.3000 - 0.1760) = 8.57 \text{ kN} \quad (4.22)$$

$$\min Q_k = 24(-0.2000 - 0.7000 - 0.1800 - 0.0700) = -27.60 \text{ kN} \quad (4.23)$$

Suurimad paindemomendid

$$\max M_k = 24(0.6000 + 2.1000 + 0.0 + 0.0) = 64.8 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (4.24)$$

$$\min M_k = 24(-0.1000 - 0.6000 - 1.8900 - 0.7380) = -79.9 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (4.25)$$

4.5.5 Talal liikuv kolonn. Näide 4.5

Näide 4.5 (Talal liikuv kolonn) Vaatleme liikuva kolonni ülesannet [ER83], kus mõjujoonte (joonis 4.11) abil on vaja leida ekstremaalsed toereaktsioonid ja sisejõud joonisel 4.11 b) esitatud liikuvast koormusest. Liikuvaks koormuseks on autokolonn, mis võib liikuda paremalt vasakule või vasakult paremale. Kolonnilt tulev koormus on näidatud joonisel 4.11. Mõjujoonte juures on näidatud kolonni asetus, mille puhul tekivad suurimad toereaktsioonid ja sisejõud.

Ekstremaalsete toereaktsioonide ja sisejõudude leidmisel on kolonni üks koormus vaadeldava mõjujoone murdepunkti kohal.

Suurimad toereaktsioonid

$$\max B = 7.0 \cdot 0.4000 + 3.0 \cdot 0.8000 + 9.5 \cdot 1.2000 + 3.5 \cdot 0.4000 = 18.0 \text{ kN} \quad (4.26)$$

$$\min B = 0 \quad (4.27)$$

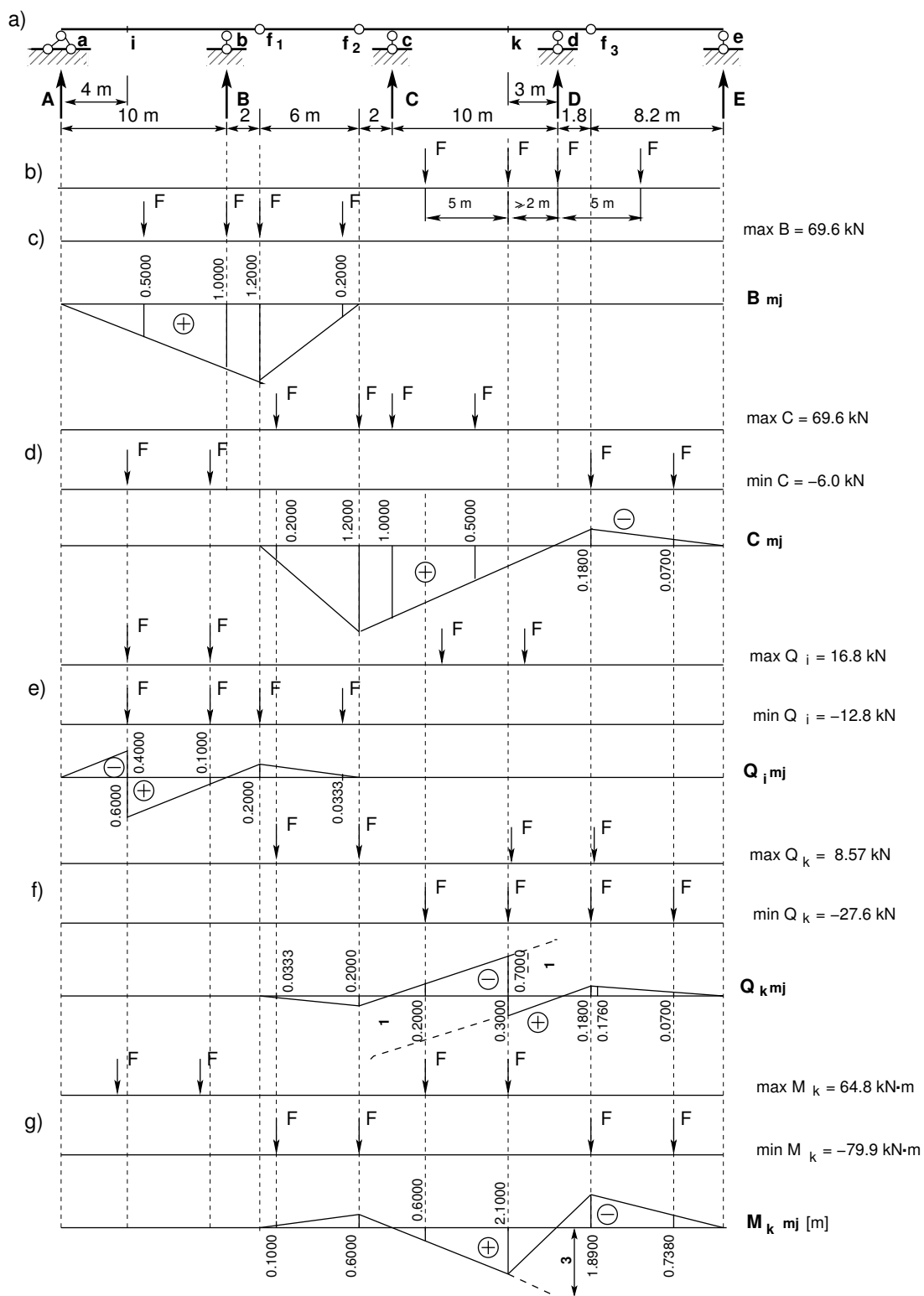
$$\max C = 3.5 \cdot 0.4000 + 9.5 \cdot 1.2000 + 3.0 \cdot 0.8000 + 7.0 \cdot 0.4000 = 18.0 \text{ kN} \quad (4.28)$$

$$\min C = -9.5 \cdot 0.1800 - 3.5 \cdot 0.0920 = -2.03 \text{ kN} \quad (4.29)$$

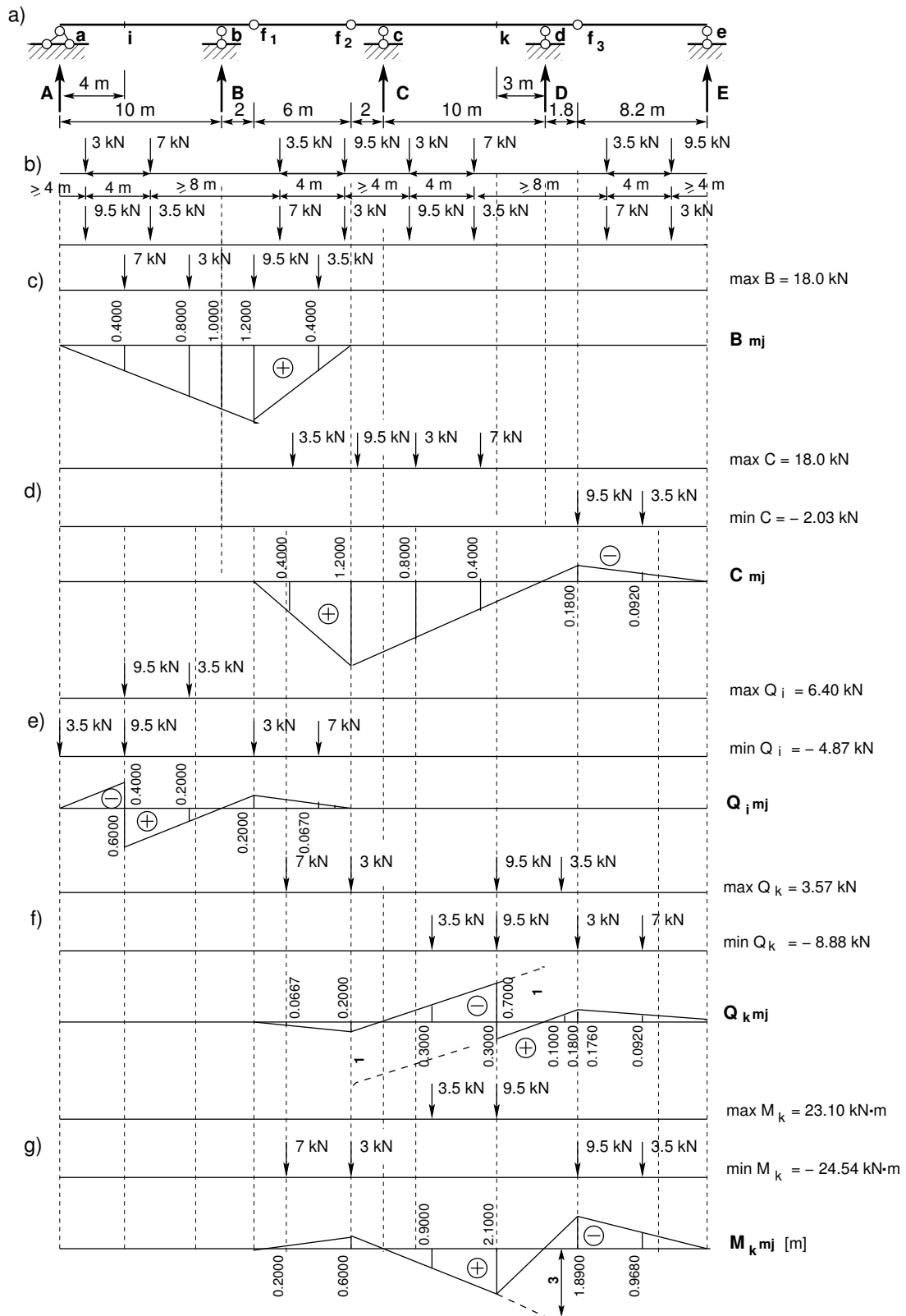
Suurimad põikjõud

$$\max Q_i = 9.5 \cdot 0.6000 + 3.5 \cdot 0.2000 = 6.40 \text{ kN} \quad (4.30)$$

$$\min Q_i = 3.5 \cdot 0.0000 - 9.5 \cdot 0.4000 - 3.0 \cdot 0.2000 - 7.0 \cdot 0.0670 = -4.87 \text{ kN} \quad (4.31)$$



Joonis 4.10. Gerberi tala suurimad sisejõud sildkraanadest



Joonis 4.11. Gerberi tala suurimad sisejõud autokolonnist

$$\max Q_k = 7.0 \cdot 0.0667 + 3.0 \cdot 0.2000 + 9.5 \cdot 0.3000 - 3.5 \cdot 0.1000 = 3.57 \text{ kN} \quad (4.32)$$

$$\min Q_k = -3.5 \cdot 0.3000 - 9.5 \cdot 0.7000 - 3.0 \cdot 0.1800 - 7.0 \cdot 0.0920 = -8.88 \text{ kN} \quad (4.33)$$

Suurimad paindemomendid

$$\max M_k = 3.5 \cdot 0.9000 + 9.5 \cdot 2.1000 = 23.10 \text{ kN} \quad (4.34)$$

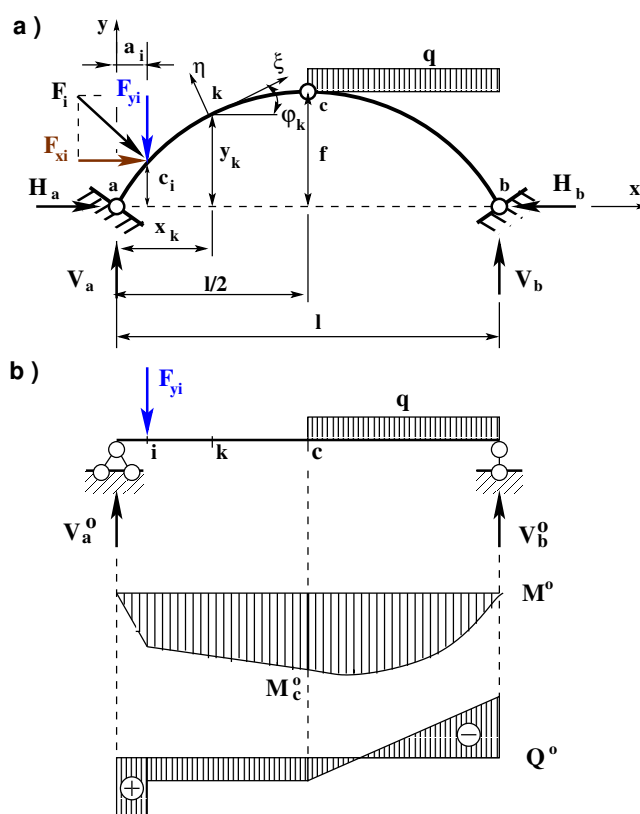
$$\min M_k = -7.0 \cdot 0.2000 - 3.0 \cdot 0.6000 - 9.5 \cdot 1.8900 - 3.5 \cdot 0.9680 = -24.54 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (4.35)$$

5. Kolme liigendiga kaar ja raam

Loeng 1¹: Kolme liigendiga kaar. Näide 5.1. Näide 5.2. Näide 5.3. Loeng 2²: Kolme liigendiga raam. Näide 5.4. Näide 5.5.

5.1 Üldmõisted

Kahele toele toetuvast ühest või mitmest surutud kõverast vardast moodustatud konstruktsiooni, milles vertikaalne koormus põhjustab nii vertikaalseid kui ka horisontaalseid



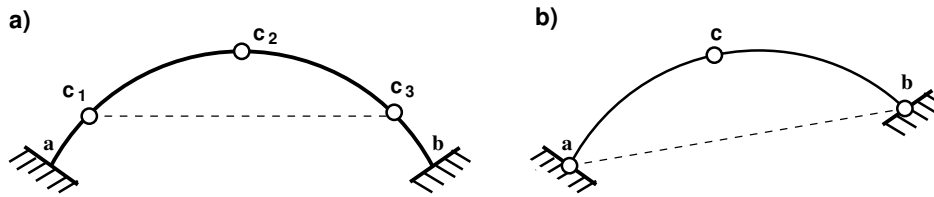
Joonis 5.1. Kolme liigendiga kaar

toereaktsioone, nimetatakse *kaareks*. `%beginfigure[t!]`

Kolme liigendiga kaare toeliigendeid *a* ja *b* (joonis 5.1 a)) nimetatakse *kannaliigenditeks* ja keskmist liigendit *c* *lukuliigendiks*. Lukuliigendi vertikaalset kaugust toe-

¹./videod/Kaared1.html

²./videod/Raamid1.html



Joonis 5.2. Kaare erinevad kannaliigendid

liigendeid ühendavast sirgest nimetatakse *kaare kõrguseks* ja tähistatakse tähega f (vt joonis 5.1 a)). Kaare kõrguse ja *silde* l suhet $\frac{f}{l}$ nimetatakse kaare *tõusuks*. Tõusu järgi liigitatakse kaari:

- lamedad kaared $\frac{f}{l} = \frac{1}{10} \dots \frac{1}{5}$
- normaalsed kaared $\frac{f}{l} = \frac{1}{5} \dots \frac{1}{3}$
- kõrged kaared $\frac{f}{l} > \frac{1}{3}$

Mõnel juhul on kannaliigendid nihutatud silde keskkoha poole (joonis 5.2 a)). Kaart, mille toed on erinevatel kõrgustel, nimetatakse *roomavaks kaareks* (joonis 5.2 b)).

5.2 Toereaktsioonide arvutus

Kolme liigendiga kaare arvutamisel lahutatakse koormus vertikaalseks ja horisontaalseks koormuseks (joonis 5.1 a)). Kolme liigendiga kaare toed on liikumatud liigendtoed (joonis 3.1 lk 80). Kolme liigendiga kaarel on neli toereaktsiooni komponenti, kummagi toe juures kaks. Need neli toereaktsiooni komponenti leitakse kolmest tasakaaluvõrrandist ja *lukuliigendi* kohta koostatud tasakaalutingimusest.

Roomava kaare puhul lahutatakse toereaktsioonid vertikaalseteks ja toeliigendeid a ja b ühendava sirge sihilisteks komponentideks.

5.2.1 Vertikaalne koormus

Toereaktsioonide vertikaalsed komponendid tähistame V_a ja V_b (joonis 5.1 a)) ja leiame tuge a ja b kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest

$$\Sigma M_b = 0; \quad -V_a \cdot l + F_{yi} \cdot (l - a_i) + q \cdot \frac{l^2}{2} = 0 \quad (5.1)$$

$$\Sigma M_a = 0; \quad -V_b \cdot l + F_{yi} \cdot a_i + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4} \right) = 0 \quad (5.2)$$

Horisontaalsed toereaktsioonid H_a ja H_b leiame *lukuliigendi* c kohta kirjutatud tasakaaluvõrrandist

$$\Sigma M_c^v = 0; \quad -H_a \cdot f + V_a \cdot \frac{l}{2} + F_{yi} \cdot \left(\frac{l}{2} - a_i \right) = 0 \quad (5.3)$$

ehk

$$\Sigma M_p^v = 0; \quad -H_b \cdot f + V_b \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0 \quad (5.4)$$

$$H_a = \frac{V_a l/2 + F_{yi}(l/2 - a_i)}{f} = \frac{M_c^0}{f} \quad (5.5)$$

siin M_c^0 on kaarele vastava lihttala paindemoment lõikes c (joonis 5.1 b)). Parempoolne horisontaalne toereaktsioon H_b vertikaalse koormuse puhul

$$H_b = H_a = \frac{M_c^0}{f} \quad (5.6)$$

5.2.2 Horisontaalne koormus

Horisontaalsest koormusest põhjustatud vertikaalsed toereaktsioonide komponendid V_a ja V_b (joonis 5.1 a)) leiame tugede a ja b kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest

$$\Sigma M_b = 0; \quad -V_a \cdot l - F_{xi} \cdot c_i = 0 \quad (5.7)$$

$$\Sigma M_a = 0; \quad -V_b \cdot l + F_{xi} \cdot c_i = 0 \quad (5.8)$$

Horisontaalsed toereaktsioonid H_a ja H_b leiame *lukuliigendi* c kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest

$$\Sigma M_c^v = 0; \quad -H_a \cdot f + V_a \cdot \frac{l}{2} - F_{xi}(f - c_i) = 0 \quad (5.9)$$

$$\Sigma M_c^p = 0; \quad -H_b \cdot f + V_b \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad (5.10)$$

Võrranditest (5.9) ja (5.10) saame

$$H_a = \left(V_a \cdot \frac{l}{2} - F_{xi}(f - c_i) \right) / f \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.11)$$

$$H_b = \left(V_b \cdot \frac{l}{2} \right) / f \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.12)$$

Kontrolliks arvutame

$$\Sigma X = 0; \quad H_a + H_b + \sum_1^n F_{xi} = 0 \quad (5.13)$$

5.3 Kaare telgjoone võrrandid

Kaare telgjooneks võib olla *ruutparabool*, mille võrrand on

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2} \quad (5.14)$$

Kaare sille l , tõus f ja kaare telje puutuja kaldenurk φ on näidatud joonisel 5.3. Kaare telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse leiame valemitega

$$\sin \varphi = \frac{1 - 2\frac{x}{l}}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}} \quad (5.15)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2 \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}} \quad (5.16)$$

Tähistades

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \xi' = \frac{l-x}{l} \quad (5.17)$$

saame

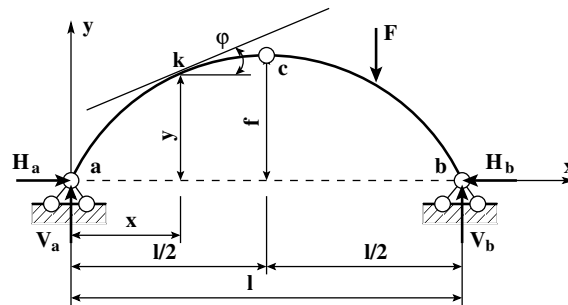
$$y = 4f\xi\xi' \quad (5.18)$$

$$\sin \varphi = \frac{1 - 2\xi}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2 + (1 - 2\xi)^2}} \quad (5.19)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2 (1 - 2\xi)^2}} \quad (5.20)$$

Kaare telgjooneks võib olla *ringi kaar*, mille võrrand on

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - (R - f) \quad (5.21)$$



Joonis 5.3. Kaare telgjoon

Avaldises (5.21) on R kaare telje kõverusraadius, mille arvutame järgmise valemiga:

$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} \quad (5.22)$$

Kaare telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse leiame valemitega

$$\sin \varphi = \frac{l}{R} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \quad (5.23)$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right)^2} \quad (5.24)$$

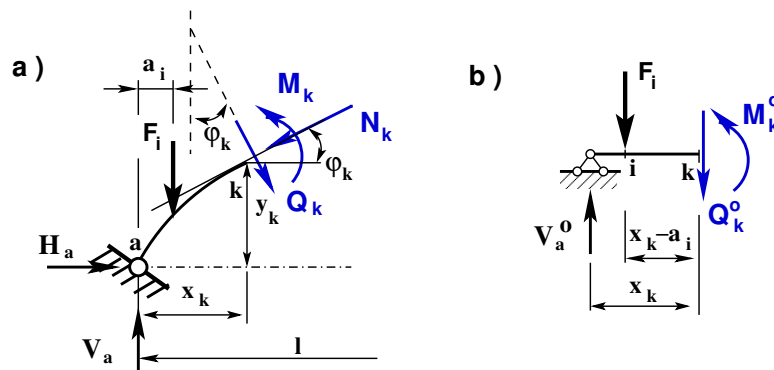
5.4 Kaare sisejõud

Kolme liigendiga kaare arvutamisel lahutatakse koormus vertikaalseks ja horisontaalseks koormuseks (joonis 5.1 a)). Teeme mõttelises ristlõikes k mõttelise lõike ja vaatleme vasakule poole jäävat osa (joonis 5.4 a) ja joonis 5.5).

Kaare normaaljõud survel võetakse positiivne.

5.4.1 Sisejõud vertikaalsest koormusest

Kaare sisejõudude arvutamise valemite kirjutamiseks vaatame joonist 5.1 a). Teeme mõttelises ristlõikes k mõttelise lõike ja vaatleme vasakule poole jäävat osa (joonis 5.4 a)). Ristlõikele k koostatud momentide tasakaaluvõrrandist leiame paindemomendi



Joonis 5.4. Kolme liigendiga kaare sisejõud vertikaalsest koormusest

$$M_k = V_a \cdot x_k - F_{yi} \cdot (x_k - a_i) - H \cdot y_k \quad (5.25)$$

ehk

$$M_k = M_k^o - H \cdot y_k \quad (5.26)$$

Jõudude projektsioonide tasakaaluvõrrand põikjõu Q_k sihile annab põikjõu

$$Q_k = (V_a - F_{yi}) \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k \quad (5.27)$$

ehk

$$Q_k = Q_k^o \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k \quad (5.28)$$

Jõudude projektsioonide tasakaaluvõrrand normaaljõu N_k sihile annab normaaljõu

$$N_k = (V_a - F_{yi}) \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k \quad (5.29)$$

ehk

$$N_k = Q_k^o \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k \quad (5.30)$$

Niisiis sisejõud kaare lõikes x arvutame valemitega:

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - H \cdot y \\ Q_x &= Q_x^o \cos \varphi - H \sin \varphi \\ N_x &= Q_x^o \sin \varphi + H \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.4.2 Sisejõud horisontaalsest koormusest

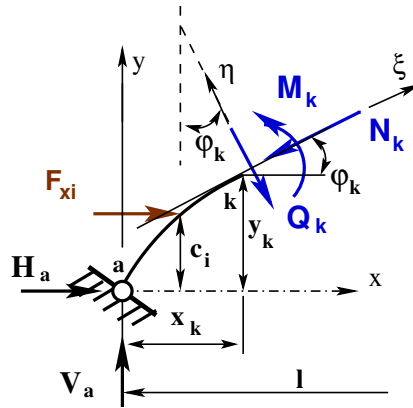
Horisontaalsest koormusest kaare sisejõudude arvutamise valemite kirjutamiseks vaatame joonist 5.1 a). Teeme mõttelises ristlõikes k mõttelise lõike ja vaatleme vasakule poole jäävat osa (joonis 5.5). Ristlõikele k koostatud momentide tasakaaluvõrrandist saame

$$M_k = V_a \cdot x_k - F_{xi} \cdot (y_k - c_i) - H_a \cdot y_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.32)$$

Koostame ristlõikest k vasakule poole jääva osa kohta tasakaaluvõrrandid telgedele ξ ja η (joonis 5.5), milledest saame

$$N_k = V_a \sin \varphi_k + (F_{xi} + H_a) \cdot \cos \varphi_k \quad (5.33)$$

$$Q_k = V_a \cos \varphi_k - (F_{xi} + H_a) \cdot \sin \varphi_k \quad (5.34)$$



Joonis 5.5. Kolme liigendiga kaare sisejõud horisontaalsest koormusest

Kuna võrrandi (5.38) parema poole teine liige on võrreldes esimese liikmega oluliselt väiksem ($\frac{1}{2}dQ \ll Q$), siis

$$\frac{dM}{ds} = Q \quad (5.39)$$

ehk

$$Q = \frac{dM}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{dM}{dx} \cos \varphi \quad (5.40)$$

Koostame projektsioonide tasakaalu tingimused telgedele ξ ja η :

$$\Sigma \xi = 0, \quad N - (N + dN) \cos d\varphi - (Q + dQ) \sin d\varphi - qds \sin \varphi = 0 \quad (5.41)$$

$$\Sigma \eta = 0, \quad Q - (Q + dQ) \cos d\varphi + (N + dN) \sin d\varphi - qds \cos \varphi = 0 \quad (5.42)$$

Võtame arvesse, et väikeste nurkade puhul on $\sin d\varphi \approx d\varphi$ ja $\cos d\varphi \approx 1$. Avaldisest (5.35) saame $d\varphi = \frac{ds}{\rho}$. Jagame võrrandid (5.41) ja (5.42) elemendi pikkusega ds . Jättes ära teise järgu väikesed suurused, saame võrrandid:

$$-\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{\rho} - q \sin \varphi = 0 \quad (5.43)$$

$$-\frac{dQ}{ds} + \frac{N}{\rho} - q \cos \varphi = 0 \quad (5.44)$$

millest saame

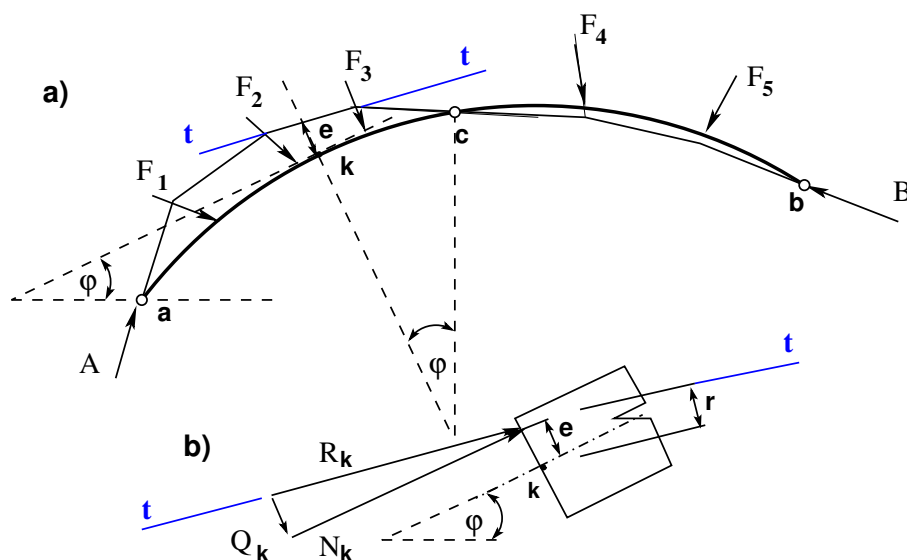
$$\frac{Q}{\rho} = - \left(\frac{dN}{ds} + q \sin \varphi \right) \quad (5.45)$$

$$\frac{N}{\rho} = \left(\frac{dQ}{ds} + q \cos \varphi \right) \quad (5.46)$$

5.6 Kolme liigendiga kaare survejoon

Resultantjõu hulknurk (joonis 5.7 a)) läbib kaare kolme liigendit. Joonisel 5.7 b) on näidatud ühel pool ristlõiget k mõjuvat resultantjõudu R_k ja tema sihti $t-t$ ning kaugust kaare telgjoonest e , mis on näidatud ka joonisel 5.7 a). Ristlõikes k mõjuvat resultantjõudu R_k saab lahutada komponentideks N_k ja Q_k (joonis.5.7 b)). Paindemoment M_k kaare ristlõikes k

$$M_k = R_k r \quad (5.47)$$



Joonis 5.7. Resultantjõu hulknurk

siin r on ristlõikes mõjuva resultantjõu sihi kaugus telgjoone punktist k (joonis.5.7 b)). Analüütiliselt leitud paindemomendi M_k ja normaaljõu N_k abil saame leida ekstsentrilisuse e , mis on resultantjõu R_k rakenduspunkti vahekaugus ristlõikes k (joonis.5.7):

$$e = \frac{M_k}{N_k} \quad (5.48)$$

Resultantjõu hulknurka nimetatakse kolme liigendiga kaare *survejooneks*. Jaotatud koormuse all muutuburvejoon kõverjooneks. Punktis, kusurvejoon ühtib kaare telgjoonega, on paindemoment null. Kaart, mille telgjoon ühtiburvejoonega, nimetatakse *ratsionaalse telgjoonega kaareks*.

Kaareurvejoont saame arvutada avaldiste (5.31), (5.32) abil. Vertikaalse koormuse puhul, kui $M_k = 0$, saame avaldisest (5.31)

$$0 = M_x^0 - H \cdot y^*, \quad \text{ehk} \quad y^* = \frac{M_x^0}{H} \quad (5.49)$$

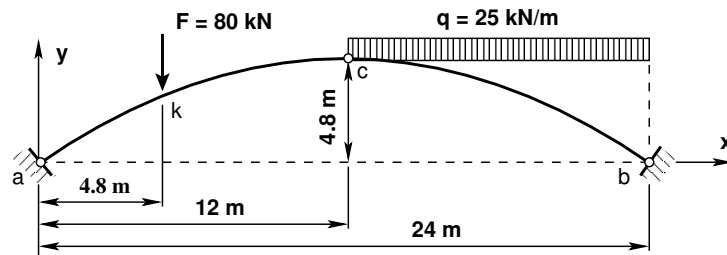
mis on kolme liigendiga kaareurvejoone võrrand.

Joonisel 5.11 (lk 132) on kolme liigendiga kaareurvejoon, millest osa on hulknurk ja osa kõverjoon.

5.7 Kaare sisejõudude arvutamise näited

5.7.1 Paraboolse kaare arvutus. Näide 5.1

Näide 5.1 Määrata joonisel 5.8 esitatud kolme liigendiga kaare sisejõud. Kaare telgjooneks on parabool. Kaare ava on 24 m. Lukuliigendi c kõrgus 4.8 m. Kannaliigendist a kaugusel 4.8 m



Joonis 5.8. Paraboolse telgjoonega kaar

on rakendatud jõud 80 kN. Lukuliigendi c ja kannaliigendi b vahelisele osale on rakendatud ühtlaselt jaotatud koormus $q = 25 \text{ kN/m}$.

Kaare sisejõudude leidmiseks kasutame avaldisi (5.31). Kaare telgjoone ja siinuste ning koosinuste arvutamiseks kasutame avaldisi (5.18), (5.19) ja (5.20).

Järgnevas arvutuspäeviku 5.1 tabelis on kaarele vastava lihttala sisejõud Q^o ja M^0 . Arvutusteks kasutame GNU Octave'is koostatud programmi [kaarSjPr30.m](#)^{3 4}

Arvutuspäevik 5.1 Lihttala põikjõud ja paindemoment

```
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> kaarSjPr30
    Kaare telgjoone kuju on parabool
KordaNT = 2
l = 24
f = 4.8000
F1 = 80
aF1 = 4.8000
qz = 25
aqA = 12
aqL = 24
Fjoud1 =

    80.0000    4.8000

qkoormus1 =

    25    12    24

    arvude suurim ühistegur - gcd(arvudS)
tegur = 2.4000
    minimaalne jaotuste arv
Njaotust = 10
KordaNT = 2
    NT=jaotusi*KordaNT; % jaotuste arvu suurendatakse
NT = 20
lihttala_Va = 139
```

³./octaveProgrammide/kaarSjPr30.m

⁴./octaveProgrammide/kaarSjPr30.Kommentaariid.pdf

lihttala_Vb = 241

Ülekandevõrrandi algparameetrid Qa ja Ma

Qa = 139

Ma = 0

=====

Sisejõud kaarele vastavas talas

=====

I-Nr	x	Q	M
1	0.00	139.000	0.000
2	1.20	139.000	166.800
3	2.40	139.000	333.600
4	3.60	139.000	500.400
5	4.80	139.000	667.200
6	4.80	59.000	667.200
7	6.00	59.000	738.000
8	7.20	59.000	808.800
9	8.40	59.000	879.600
10	9.60	59.000	950.400
11	10.80	59.000	1021.200
12	12.00	59.000	1092.000
13	13.20	29.000	1144.800
14	14.40	-1.000	1161.600
15	15.60	-31.000	1142.400
16	16.80	-61.000	1087.200
17	18.00	-91.000	996.000
18	19.20	-121.000	868.800
19	20.40	-151.000	705.600
20	21.60	-181.000	506.400
21	22.80	-211.000	271.200
22	24.00	-241.000	0.000

Kaare horisontaalne reaktsioon H

H = 227.50

Järgnevas arvutuspäeviku 5.1 tabelis on kaare sisejõud N, Q ja M. Arvutatud on kaare horisontaalne toereaktsioon, mille arvuline väärtus on $H = 227.50$ kN.

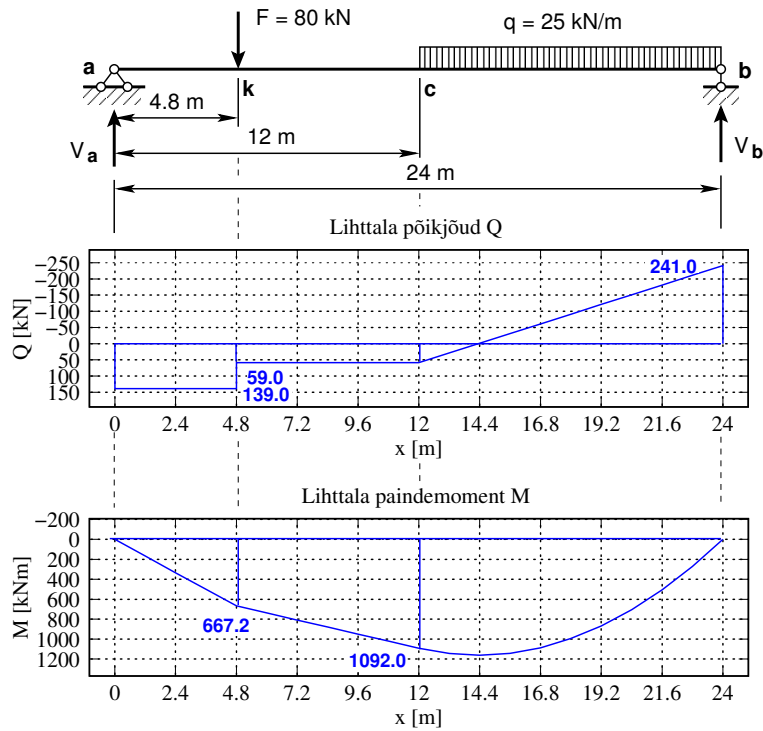
Kaare horisontaalne reaktsioon H

H = 227.50

Kaare sisejõud

=====

I-Nr	x	N	Q	M
1	0.00	264.48	-33.58	0.00
2	1.20	265.84	-20.13	-40.68
3	2.40	266.55	-5.56	-59.52
4	3.60	266.41	10.12	-56.52
5	4.80	265.25	26.87	-31.68
6	4.80	230.63	-45.26	-31.68
7	6.00	233.14	-29.71	-81.00
8	7.20	234.66	-13.14	-108.48

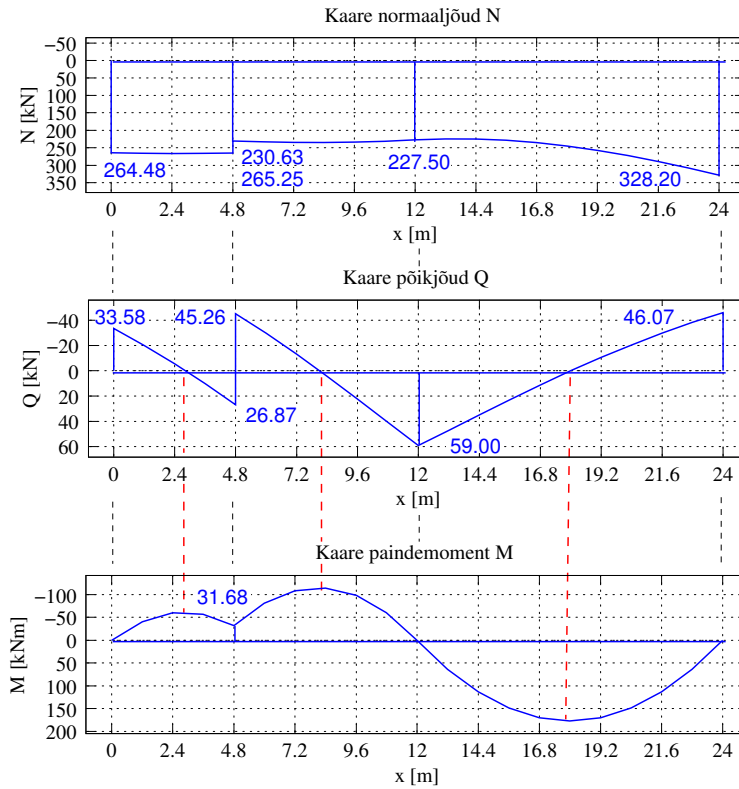


Joonis 5.9. Lihttala epiüürid

9	8.40	234.99	4.28	-114.12
10	9.60	233.96	22.32	-97.92
11	10.80	231.48	40.67	-59.88
12	12.00	227.50	59.00	0.00
13	13.20	224.46	47.05	63.72
14	14.40	224.80	34.96	113.28
15	15.60	228.45	22.95	148.68
16	16.80	235.27	11.24	169.92
17	18.00	245.02	0.00	177.00
18	19.20	257.46	-10.64	169.92
19	20.40	272.27	-20.59	148.68
20	21.60	289.19	-29.82	113.28
21	22.80	307.91	-38.30	63.72
22	24.00	328.20	-46.07	0.00

Kaare survejoon $Y^* = M/H$

I-Nr	x	y	Y^*	$\sin F_i$	$\sin F_i$
1	0.00	0.00	0.00	0.62470	0.78087
2	1.20	0.91	0.73	0.58430	0.81153
3	2.40	1.73	1.47	0.53905	0.84227
4	3.60	2.45	2.20	0.48860	0.87251



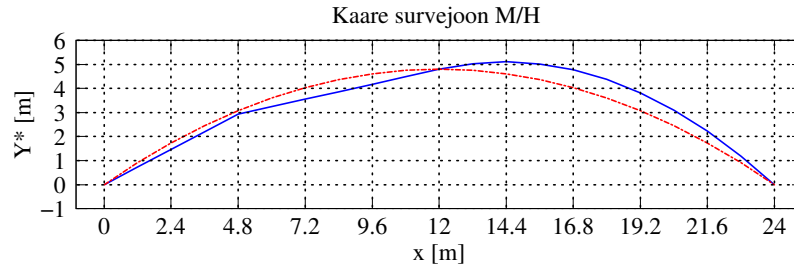
Joonis 5.10. Kaare sisejõud N, Q ja M

5	4.80	3.07	2.93	0.43273	0.90152
6	4.80	3.07	2.93	0.43273	0.90152
7	6.00	3.60	3.24	0.37139	0.92848
8	7.20	4.03	3.56	0.30478	0.95242
9	8.40	4.37	3.87	0.23337	0.97239
10	9.60	4.61	4.18	0.15799	0.98744
11	10.80	4.75	4.49	0.07975	0.99682
12	12.00	4.80	4.80	0.00000	1.00000
13	13.20	4.75	5.03	-0.07975	0.99682
14	14.40	4.61	5.11	-0.15799	0.98744
15	15.60	4.37	5.02	-0.23337	0.97239
16	16.80	4.03	4.78	-0.30478	0.95242
17	18.00	3.60	4.38	-0.37139	0.92848
18	19.20	3.07	3.82	-0.43273	0.90152
19	20.40	2.45	3.10	-0.48860	0.87251
20	21.60	1.73	2.23	-0.53905	0.84227
21	22.80	0.91	1.19	-0.58430	0.81153
22	24.00	0.00	0.00	-0.62470	0.78087

octave-3.0.1:4> diary off

Joonisel 5.10 on näidatud kaare sisejõud N, Q ja M. Siin tuleb tähelepanu pöörata kaare põikjõu Q epüüri ja paindemomendi vahelisele seosele (5.39). Paindemomendi tuletis mööda kaare telgjoont on võrdne põikjõuga $\frac{dM}{ds} = Q$ ehk paindemomendi tuletis mööda x-telge on

võrdne põikjõud jagatud koosinusega $\frac{dM}{dx} = \frac{Q}{\cos\varphi}$. Siit johtub – kui paindemomendi epüüri puutuja on paralleelne x-teljega, on põikjõud võrdne nulliga.

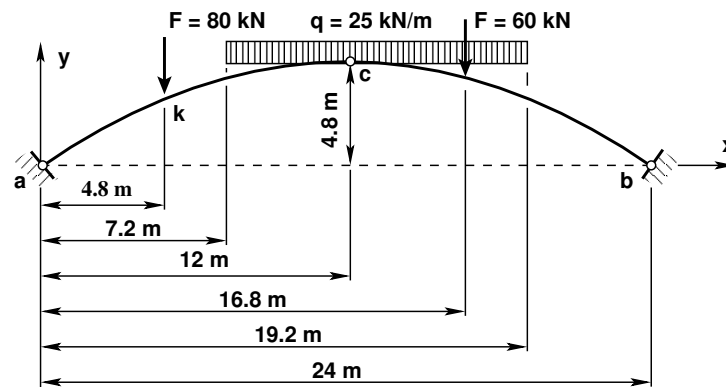


Joonis 5.11. Kaare survejoon M/H

Joonisel 5.11 on kolme liigendiga kaare survejoon, millel lukuliigendist vasakule jääv osa on hulknurk ja lukuliigendist paremale jääv osa (jaotatud koormuse alla jääv osa) on kõverjoon. Lukuliigendist vasakule jääval osal on surutud alumised kiud (tõmmatud on ülemised kiud). Normaaljõu rakenduspunkt (joonis 5.7) on kaare telgjoonest allpool (võrdle M epüüriiga joonisel 5.10). Lukuliigendist paremale jääval osal on surutud ülemised kiud (tõmmatud on alumised kiud).

5.7.2 Paraboolse kaare arvutus. Näide 5.2

Näide 5.2 Koostada joonisel 5.12 esitatud kolme liigendiga kaare sisejõudude epüürid. Kaare telgjooneks on parabool. Kaare ava on 24 m. Lukuliigendi c kõrgus 4.8 m. Kannaliigendist a kaugusel 4.8 m ja 16.8 m on rakendatud jõud $F_1 = 80$ kN ning $F_2 = 60$ kN. Kaarele on rakendatud ühtlaselt jaotatud koormus $q = 25$ kN/m, mis algab kannaliigendist kaugusel 7.2 m ja lõpeb kaugusel 19.2 m.



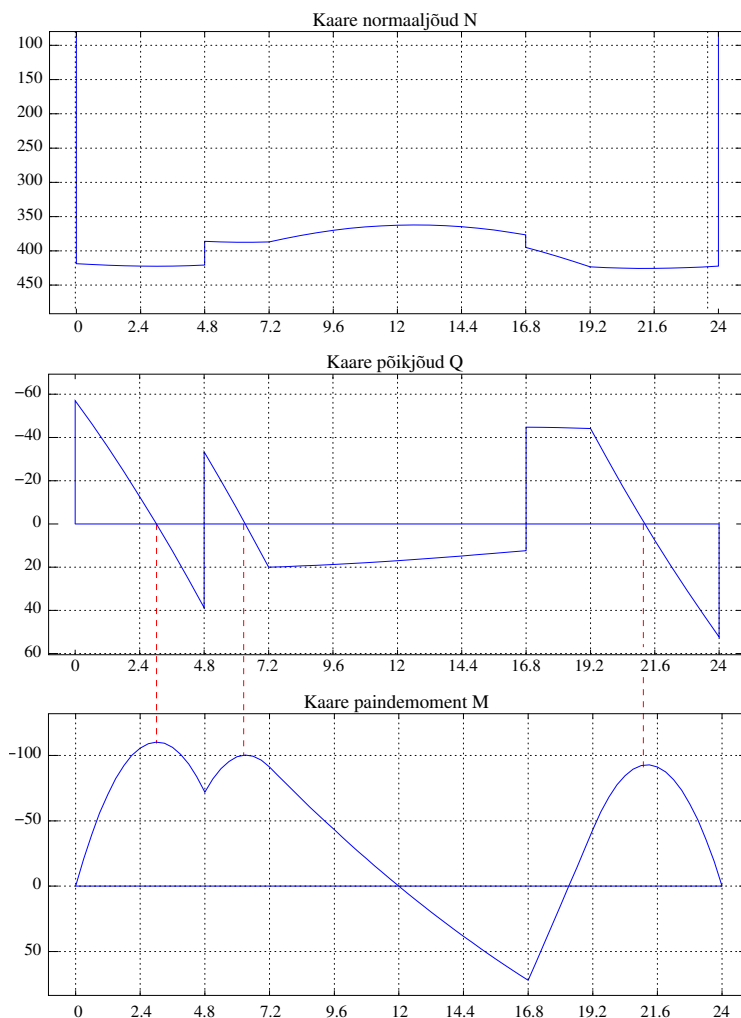
Joonis 5.12. Paraboolse telgjoonega kaar 2

Kaare sisejõudude leidmiseks kasutame GNU Octave'is koostatud programmi [kaarSjPrBA.m](#)^{5 6}

Arvutiprogramm koostab sisejõudude epüürid, mis on toodud joonisel 5.13

⁵ [./octaveProgrammide/kaarSjPrBA.m](#)

⁶ [./octaveProgrammide/kaarSjPrBA.Kommentaariid.pdf](#)



Joonis 5.13. Kaare 2 sisejõud N, Q ja M

5.8 Kaare mõjujooned

Kolme liigendiga kaare (joonis 5.14 lk 135) toereaktsioonide V_a ja V_b mõjujooned on samasugused kui lihttala toereaktsioonide mõjujooned.

Kaare horisontaalreaktsiooni H mõjujoone ordinaadid saame, kui kaarele vastava lihttala paindemomendi M_c^0 mõjujoone ordinaadid jagame läbi lukuliigendi kõrgusega f (joonis 5.14 H mj):

$$H = \frac{M_c^0}{f} \quad (5.50)$$

Kolme liigendiga kaare mõjujoonte ordinaatide arvutamiseks kasutame kaare sisejõudude arvutamise valemeid (5.31 lk 124).

Paindemomendi M_d (joonis 5.14 M_d mj) mõjujoone ordinaadi leiame avaldisega

$$M_d = M_d^0 - H \cdot y_d \quad (5.51)$$

kus

M_d^0 on lihttala ristlõike d paindemomendi mõjujoone (joonis 5.14 b) M_d^0 mj) ordinaat, H – kaare horisontaalreaktsiooni H mõjujoone ordinaat,

y_d – kaare telgjoone kõrgus punktis d .

Põikjõu Q_d (joonis 5.14 Q_d mj) mõjujoone ordinaadi leiame avaldisega

$$Q_d = Q_d^o \cos \varphi_d - H \sin \varphi_d \quad (5.52)$$

kus

Q_d^o on lihttala ristlõike d põikjõu mõjujoone (joonis 5.14 b) Q_d^o mj) ordinaat, φ_d – kaare puutuja tõusnurk punktis d (joonis 5.4).

H – kaare horisontaalreaktsiooni H mõjujoone ordinaat.

Normaaljõu N_d (joonis 5.14 N_d mj) mõjujoone ordinaadi leiame avaldisega

$$N_d = Q_d^o \sin \varphi_d + H \cos \varphi_d \quad (5.53)$$

kus

Q_d^o on lihttala ristlõike d põikjõu mõjujoone (joonis 5.14 b) Q_d^o mj) ordinaat,

φ_d – kaare puutuja tõusnurk punktis d (joonis 5.4).

H – kaare horisontaalreaktsiooni H mõjujoone ordinaat.

5.9 Kaare mõjujoonte koostamise näited

5.9.1 Paraboolse kaare mõjujooned. Näide 5.3

Näide 5.3 Koostada joonisel 5.14 a) esitatud kolme liigendiga kaare lõike d mõjujooned. Kaare telgjooneks on parabool. Kaare ava on 16 m. Lukuliigendi kõrgus 4 m. Ristlõike d kaugus vasakust toest 11,2 m.

Mõjujoonte ordinaatide arvutamiseks kasutame kaare sisejõudude arvutamise valemeid (5.51), (5.52) ja (5.53)

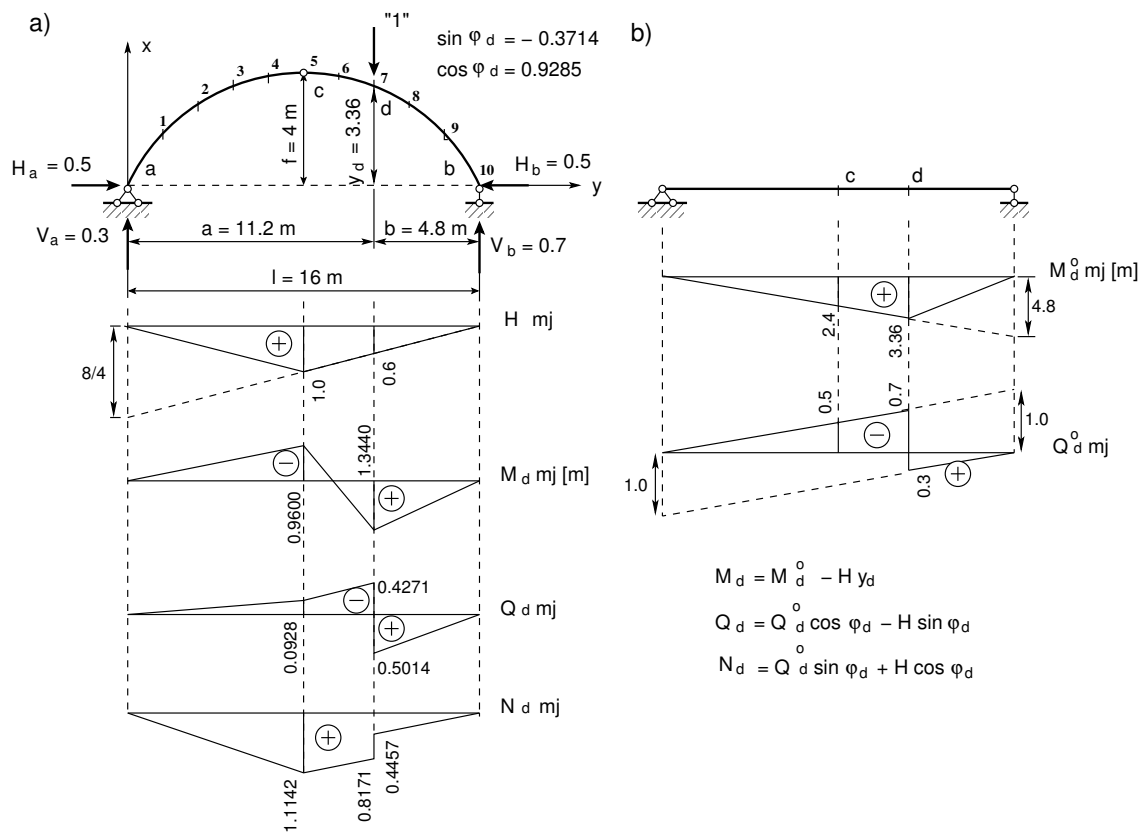
$$\begin{aligned} M_d &= M_d^0 - H \cdot y_d \\ Q_d &= Q_d^o \cos \varphi_d - H \sin \varphi_d \\ N_d &= Q_d^o \sin \varphi_d + H \cos \varphi_d \end{aligned} \quad (5.54)$$

Kaare ristlõike d kõrguse y arvutame valemiga (5.14) ja ristlõike $\cos \varphi_d$ ja $\sin \varphi_d$ valemitega (5.15) ja (5.16). Saame

$$y_d = 3.36 \text{ m}, \quad \sin \varphi_d = -0.3714, \quad \cos \varphi_d = 0.9285 \quad (5.55)$$

Kaare mõjujoonte ordinaatide arvutamiseks koostame kaarele vastava lihttala paindemomendi M_d^0 ja põikjõu Q_d^o mõjujooned (vt joonis 5.14 b)). Koostame veel kaare horisontaalse toereaktsiooni H mõjujoone. Selleks kasutame horisontaalse toereaktsiooni arvutamise valemit (5.5)

$$H_a = H_b = \frac{M_c^0}{f} \quad (5.56)$$



Joonis 5.14. Kaare mõjujooned

Horisontaalse toereaktsiooni H mõjujoone koostamisel tuleb lihttala ristlõike c mõjujoone ordinaadid jagada lukuliigendi kõrgusega $f = 4$ m (joonis 5.14 a)).

Kui ühikjõud asub ristlõike c kohal, siis jooniselt 5.14 a) ja b) saame

$$M_d^0 = 2.4 \text{ m}, \quad H = 1.0, \quad Q_d^0 = -0.5 \quad (5.57)$$

ja

$$\begin{aligned} M_d &= M_d^0 - H \cdot y_d = 2.4 - 1.0 \cdot 3.36 = -0.9600 \text{ m} \\ Q_d &= Q_d^0 \cos \varphi_d - H \sin \varphi_d = -0.5 \cdot 0.9285 - 1.0 \cdot (-0.3714) = -0.0928 \quad (5.58) \\ N_d &= Q_d^0 \sin \varphi_d + H \cos \varphi_d = -0.5 \cdot (-0.3714) + 1.0 \cdot 0.9285 = 1.1142 \end{aligned}$$

Leitud ordinaadid kanname joonisele 5.14 a). Kui ühikjõud asub ristlõike d kohal (põikjõu puhul ristlõikest d vasakul/paremal, siis jooniselt 5.14 a) ja b) saame

$$M_d^0 = 3.36 \text{ m}, \quad H = 0.6, \quad Q_d^{o,v} = -0.7, \quad Q_d^{o,p} = 0,3 \quad (5.59)$$

ja

$$\begin{aligned} M_d &= M_d^0 - H \cdot y_d = 3.36 - 0.6 \cdot 3.36 = 1.3440 \\ Q_d^v &= Q_d^{o,v} \cos \varphi_d - H \sin \varphi_d = -0.7 \cdot 0.9285 - 0.6 \cdot (-0.3714) = -0.4271 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_d^p &= Q_d^{o,p} \cos \varphi_d - H \sin \varphi_d = 0.3 \cdot 0.9285 - 0.6 \cdot (-0.3714) = 0.5014 & (5.60) \\
 N_d^v &= Q_d^{o,v} \sin \varphi_d + H \cos \varphi_d = -0.7 \cdot (-0.3714) + 0.6 \cdot 0.9285 = 0.8171 \\
 N_d^p &= Q_d^{o,p} \sin \varphi_d + H \cos \varphi_d = 0.3 \cdot (-0.3714) + 0.6 \cdot 0.9285 = 0.4457
 \end{aligned}$$

Leitud ordinaadid kanname joonisele 5.14 a).

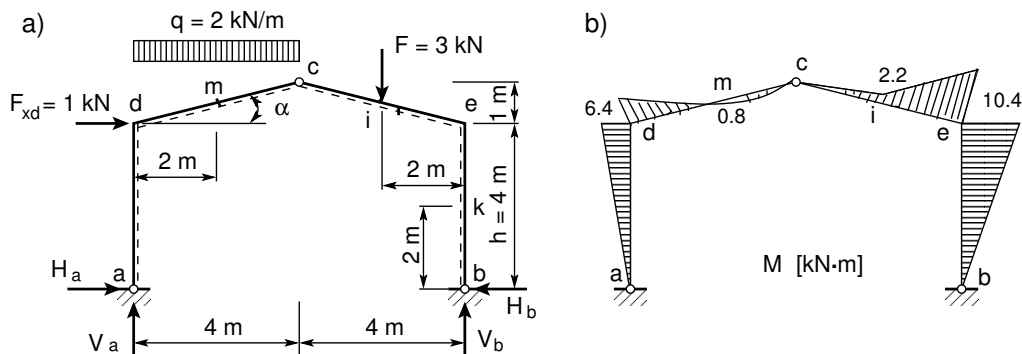
5.10 Kolme liigendiga raam

Kolme liigendiga raami arvutamisel kehtivad kolme liigendiga kaare jaoks tuletatud valemid. Erinevalt kaarest võetakse raamil normaaljõud tõmbel positiivsena ja survele negatiivsena.

5.11 Kolme liigendiga raami arvutuse näited

5.11.1 Kolme liigendiga raam. Näide 5.4

Näide 5.4 Koostada joonisel 5.15 kujutatud kolme liigendiga raami sisejõudude epüürid (näide on võetud õppevahendist [ER83] lk 47)



Joonis 5.15. Kolme liigendiga raam

Vertikaalsete toereaktsioonide arvutus:

$$\begin{aligned}
 \sum M_b = 0; & \quad V_a \cdot 8 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 0 \\
 & \quad V_a = 6.25 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
 \sum M_a = 0; & \quad -V_b \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 0 \\
 & \quad V_b = 4.75 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Vertikaalsete toereaktsioonide arvutuse kontroll:

$$\begin{aligned}
 \sum Y = 0; & \quad 6.25 + 4.75 - 2 \cdot 4 - 3 = 0 \\
 & \quad 0 = 0
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

Horisontaalsete toereaktsioonide arvutus:

$$\sum M_c^v = 0; \quad -H_a \cdot 5 + 6.25 \cdot 4 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$H_a = 1.6 \text{ kN} \quad (5.64)$$

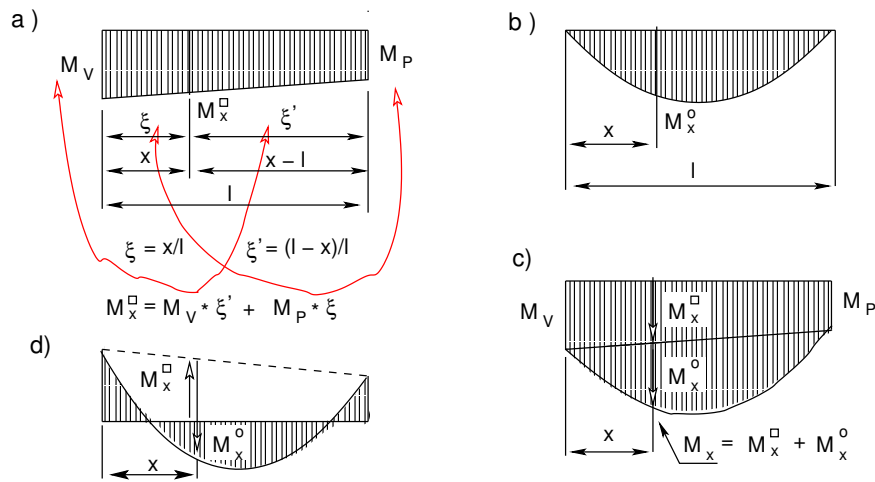
$$\sum M_c^p = 0; \quad -H_b \cdot 5 + 4.75 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$H_b = 2.6 \text{ kN} \quad (5.65)$$

Horisontaalsete toereaktsioonide arvutuse kontroll

$$\sum X = 0; \quad 1.6 + 1 - 2.6 = 0$$

$$0 = 0 \quad (5.66)$$



Joonis 5.16. Paindemomentide liitmine

Paindemomendi epüüri (vt joonis 5.15 b) ordinaatide arvutus. Avaldise (5.69) ja (5.71) koostamisel on kasutatud epüüride liitmist (joonis 5.16).

$$M_d = -1.6 \cdot 4 = -6.4 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (5.67)$$

$$M_m = 6.25 \cdot 2 - 1.6 \cdot 4.5 - 1 \cdot 0.5 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0.8 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (5.68)$$

$$M_m = 2 \cdot \frac{4^2}{8} - \frac{6.4}{2} = 0.8 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (5.69)$$

$$M_i = 4.75 \cdot 2 - 2.6 \cdot 4.5 = -2.2 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (5.70)$$

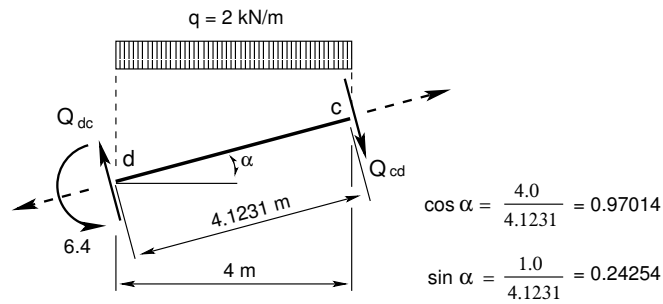
$$M_i = 3 \cdot \frac{4}{4} - \frac{10.4}{2} = -2.2 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (5.71)$$

$$M_e = -2.6 \cdot 4 = -10.4 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (5.72)$$

Põikjõu leidmiseks kaldu olevas vardas \overline{dc} kasutame peatükis 1.11 kasutatud valemeid (1.34) ja (1.36). Koostame kaldu oleva varda (joonis 5.17) tasakaalvõrrandi punkti c kohta

$$\sum M_c = 0: \quad Q_{dc} \cdot 4.1231 - 6.4 - \frac{2.0 \cdot 4.0^2}{2} = 0 \quad (5.73)$$

$$Q_{dc} = \frac{2.0 \cdot 4.0^2}{2 \cdot 4.1231} + \frac{6.4}{4.1231} = 5.433 \text{ kN} \quad (5.74)$$

Joonis 5.17. Raami varda \overline{dc} põikjõud

ning tasakaalvõrrandi varda alguse d kohta

$$\Sigma M_d = 0 : Q_{cd} \cdot 4.1231 - 6.4 + \frac{2.0 \cdot 4.0^2}{2} = 0 \quad (5.75)$$

$$Q_{cd} = -\frac{2.0 \cdot 4.0^2}{2 \cdot 4.1231} + \frac{6.4}{4.1231} = -2.328 \text{ kN} \quad (5.76)$$

Tulemused kanname põikjõu epüürile (joonis 5.20). Vardas/varda osas (joonis 5.15 b)), kus paindemoment muutub lineaarselt, kasutame valemit (1.31). Põikjõu märgi määrame vastavalt joonisele 1.16. Saame

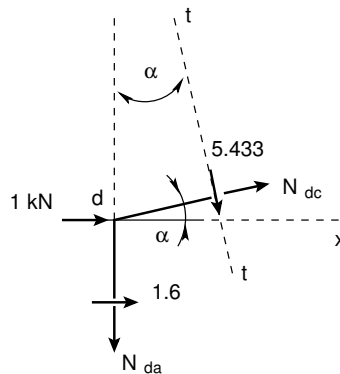
$$Q_{ad} = - \left| \frac{\Delta M}{\Delta x} \right| = - \left| \frac{6.4}{4.0} \right| = -1.6 \text{ kN} \quad (5.77)$$

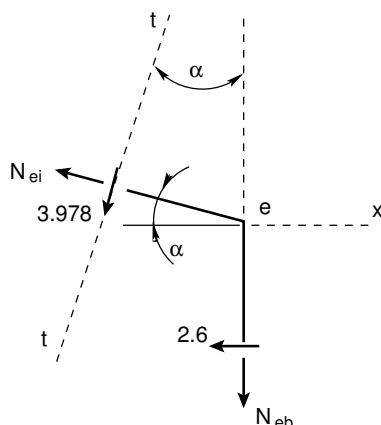
$$Q_{be} = + \left| \frac{\Delta M}{\Delta x} \right| = + \left| \frac{10.4}{4.0} \right| = +2.6 \text{ kN} \quad (5.78)$$

$$Q_{ie} = - \left| \frac{\Delta M}{\Delta x} \right| = - \left| \frac{10.4 - 2.2}{4.1231/2} \right| = -3.978 \text{ kN} \quad (5.79)$$

$$Q_{ci} = - \left| \frac{\Delta M}{\Delta x} \right| = - \left| \frac{2.2 - 0}{4.1231/2} \right| = -1.067 \text{ kN} \quad (5.80)$$

Pikijõu epüüri (vt joonis 5.20 b)) ordinaatide arvutamiseks lõikame välja raami sõlmed d (joonis 5.18) ja e (joonis 5.19). Joonistel on põikjõu suund vastavalt põikjõu märgile. Pikijõu suuna (pikijõud on tundmatu) valime positiivsena, st 'ristlõikest välja'. Koostame sõlmele d tasakaalvõrrandid telgedele t ja x

Joonis 5.18. Kolme liigendiga raami sõlm d



Joonis 5.19. Kolme liigendiga raami sõlm e

$$\Sigma t = 0; \quad N_{da} \cdot \cos \alpha + 5.433 + 1 \cdot \sin \alpha + 1.6 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (5.81)$$

$$\Sigma x = 0; \quad N_{dc} \cdot \cos \alpha + 1 + 1.6 + 5.433 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (5.82)$$

Siit saame

$$N_{da} = \frac{-5.433 - (1 + 1.6) \cdot 0.24254}{0.97014} = -6.250 \text{ kN} \quad (5.83)$$

$$N_{dc} = \frac{-(1 + 1.6) - 5.433 \cdot 0.24254}{0.97014} = -4.038 \text{ kN} \quad (5.84)$$

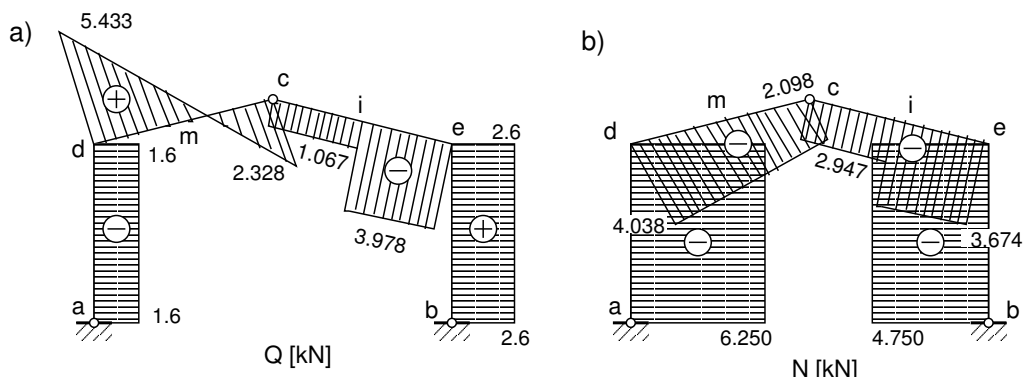
Koostame sõlmele e tasakaaluvõrrandid telgedele t ja x

$$\Sigma t = 0; \quad N_{eb} \cdot \cos \alpha + 3.978 + 2.6 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (5.85)$$

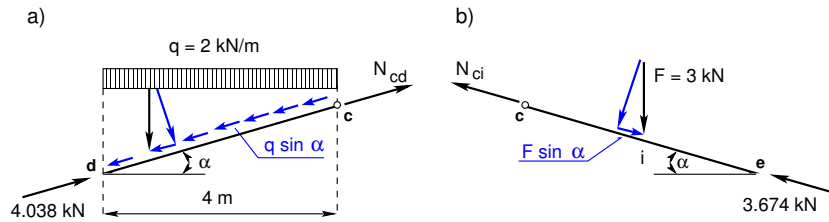
$$\Sigma x = 0; \quad -N_{ei} \cdot \cos \alpha - 2.6 - 3.978 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (5.86)$$

Siit saame

$$N_{eb} = \frac{-3.978 - 2.6 \cdot 0.24254}{0.97014} = -4.750 \text{ kN} \quad (5.87)$$



Joonis 5.20. Kolme liigendiga raami sisejõud



Joonis 5.21. Normaaljõud riivis

$$N_{ei} = \frac{-2.6 - 3.978 \cdot 0.24254}{0.97014} = -3.674 \text{ kN} \quad (5.88)$$

Normaaljõu N_{cd} arvutamiseks vaatleme joonist 5.21 a). Tundmatu sisejõu suuna valime alati positiivse. Raami riivis dc normaaljõud $N_{dc} = 4.038 \text{ kN}$ on tuntud ja selle näitame mõju-mise suunas. Nüüd koostame suunale \overline{dc} tasakaaluvõrrandi normaaljõu N_{cd} leidmiseks

$$\Sigma \overline{dc} = 0; \quad N_{cd} + 4.038 - q \cdot 4 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (5.89)$$

$$N_{cd} = -4.038 + 2 \cdot 4 \cdot 0.24254 = -2.098 \text{ kN} \quad (5.90)$$

Suunale \overline{ce} (joonis 5.21 b)) koostatud tasakaaluvõrrandist leiame normaaljõu N_{ci}

$$\Sigma \overline{ce} = 0; \quad N_{ci} + 3.674 - F \sin \alpha = 0 \quad (5.91)$$

$$N_{ci} = -3.674 + 3 \cdot 0.24254 = -2.947 \text{ kN} \quad (5.92)$$

Sama kolmeliigendiga raami on arvatatud EST-meetodiga näites 14.6 lk 445.

5.11.2 Kolme liigendiga raam. Näide 5.5[slaidid][.swf][ekraanivideo]

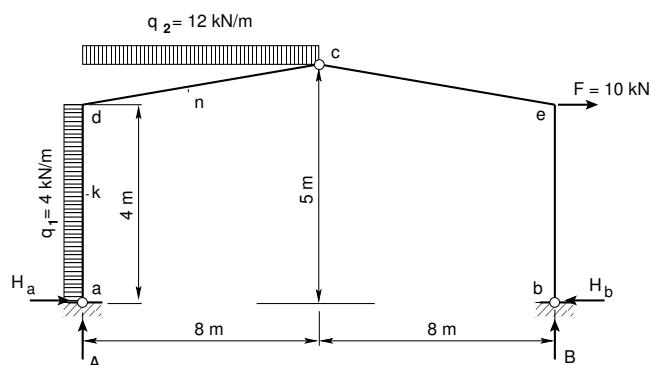
Näide 5.5 Koostada joonisel 5.22 näidatud kolme liigendiga raami paindemomendi, põikjõu ja pikijõu epüürid.

Arvutamisel kasutame GNU Octave'it kui kalkulaatorit. Käsud on eelnevalt salvestatud faili Raam11_Kasud.odt⁷ ja siis asetatud GNU Octave'i käsureale. Arvutuse tulemused on toodud arvutuspäevikutes 5.2, 5.3, 5.4 ja 5.5.

Arvutuspäevik 5.2 Toereaktsioonide arvutus

```
diary raami11toeR.out
octave:2> diary on
octave:3> % Sisestame koormuse väärtused
octave:4> F=10
F = 10
octave:5> q1=4
q1 = 4
octave:5> q2=12
q2 = 12
octave:6> % Koostame momentide summa toe a suhtes
octave:6> % sumMa=0; -B*16+(q1*4*2+q2*8*4+F*4)=0
```

⁷ ./octaveProgrammide/Raam11_Kasud.odt

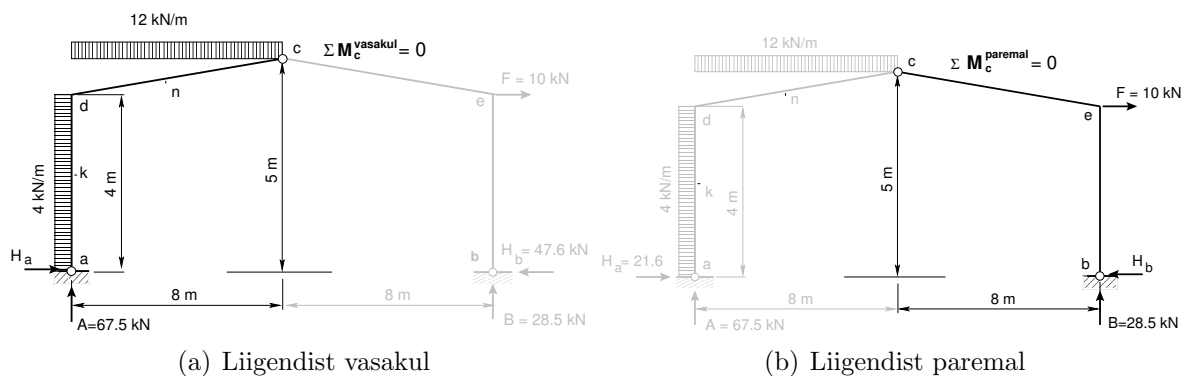


Joonis 5.22. Kolme liigendiga raam 2

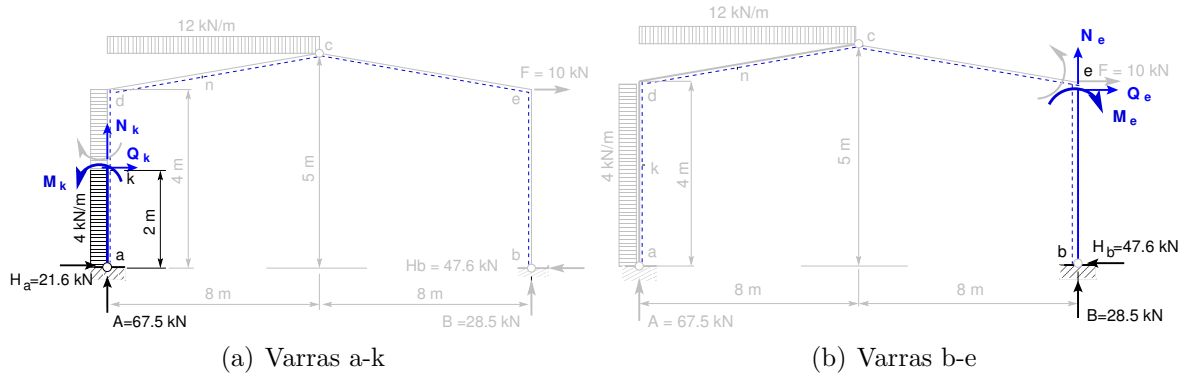
```

octave:6> B=(q1*4*2+q2*8*4+F*4)/16
B = 28.500
octave:7> % Koostame momentide summa toe b suhtes
octave:7> % sumMb=0; -A*16+(-4*4*2+12*8*12-10*4)=0
octave:7> A=(-4*4*2+12*8*12-10*4)/16
A = 67.500
octave:8> % Kontrollime jõudude tasakaalu vertikaalsele teljele: sumY
octave:8> sumY=q2*8-A-B
sumY = 0
octave:9> % Momentide summa lukuliigend c suhtes:
octave:9> % sumMcv=0 (vasakul); -Ha*5+(A*8-q1*4*3-q2*8*4)=0
octave:9> Ha=(A*8-q1*4*3-q2*8*4)/5
Ha = 21.600
octave:10> % sumMcp=0 (paremal); -Hb*5+(28.5*8+10*1)=0
octave:10> Hb=(28.5*8+10*1)/5
Hb = 47.600
octave:11> % Kontrollime jõudude tasakaalu horisontaalsele teljele: sumX
octave:11> sumX=Ha+q1*4+F-Hb
sumX = 0
octave:12> diary off

```



Joonis 5.23. Horisontaalsete toereaktsioonide arvutus

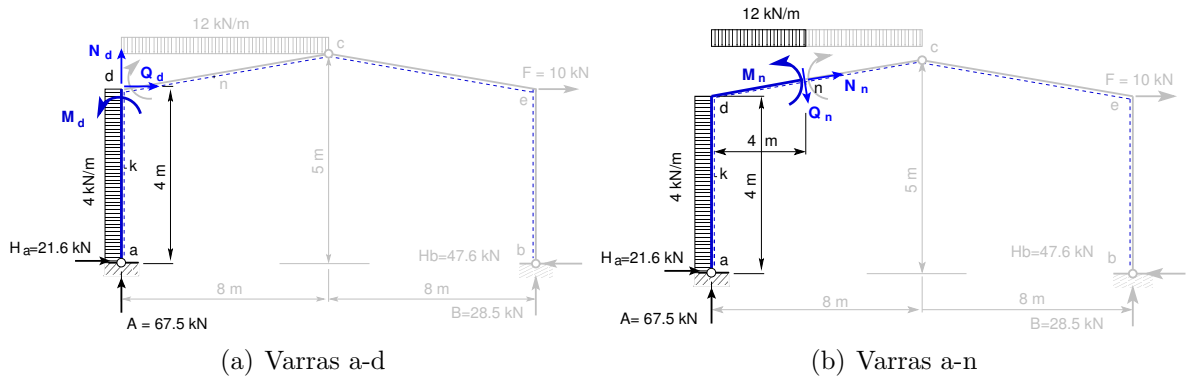


Joonis 5.24. Sisejõud postides

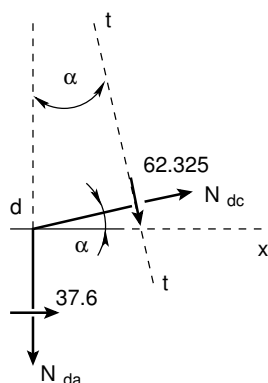
Arvutuspäevik 5.3 Paindemomentide arvutus

```
diary raamiM11.out
octave:14> diary on
octave:15> % vardas b-e: -Me-Hb*4=0
octave:15> Me=-Hb*4
Me = -190.40
octave:16> % vardas a-k: -Mk-Ha*2-q1*2*1=0
octave:16> Mk=-Ha*2-q1*2*1
Mk = -51.200
octave:17> % vardas a-d: -Md-Ha*4-q1*4*2=0
octave:17> Md=-Ha*4-q1*4*2
Md = -118.40
octave:18> % vardas a-d-n:
      -Mn-Ha*4.5-q1*4*2.5+A*4-q2*4*2=0
octave:18> Mn=-Ha*4.5-q1*4*2.5+A*4-q2*4*2
Mn = 36.800
octave:19> diary off
```

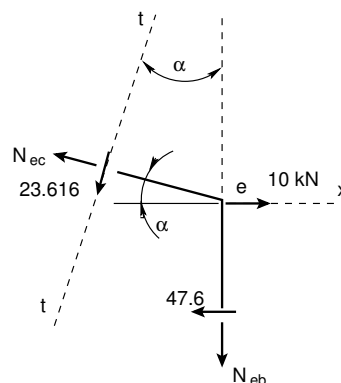
Arvutuspäevik 5.4 Põikjõu arvutus



Joonis 5.25. Sisejõud postis ja riivis



Joonis 5.26. Raami 2 sõlm d



Joonis 5.27. Raami 2 sõlm e

```

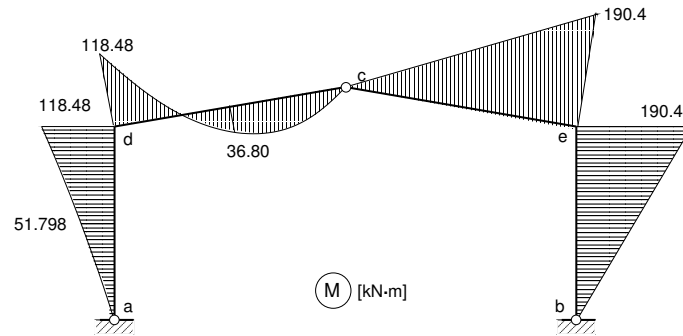
diary raamiQ11.out
octave:21> diary on
octave:22> % riivi pikkus L
octave:22> L=sqrt(8^2+1^2)
L = 8.0623
octave:23> cosA=8/L
cosA = 0.99228
octave:24> sinA=1/L
sinA = 0.12403
octave:25> % pöikjõud Qad
octave:25> % vardas a-d: -Qad-Ha=0
octave:25> Qad=-Ha
Qad = -21.600
octave:26> % vardas d-a: -Qda-Ha-q1*4=0
octave:26> Qda=-Ha-q1*4
Qda = -37.600
octave:27> % kaldvardas dc:
      -Qdc-Md/L+cosA*q2*8/2=0
octave:27> Qdc=-Md/L+cosA*q2*8/2
Qdc = 62.325
octave:28> % kaldvardas cd:
      -Qdc-Md/L-cosA*q2*8/2=0
octave:28> Qcd=-Md/L-cosA*q2*8/2
Qcd = -32.934
octave:29> Qce=Me/L
Qce = -23.616
octave:30> % vardas b-e: -Qbe+Hb=0
octave:30> Qbe=Hb
Qbe = 47.600
octave:31> diary off

```

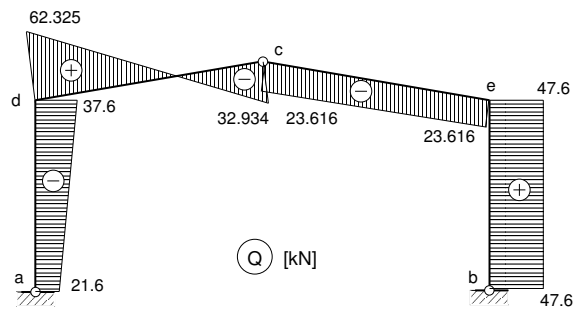
Raami vardas $d-c$ pikijõu N_{dc} arvutamiseks lõikame sõlme d külja (joonis 5.26). Tasakaalu- võrrandist x -teljele saame avaldise

$$\sum X = 0 : \quad -N_{dc} \cos \alpha - 37.6 - 62.325 \sin \alpha = 0 \quad (5.93)$$

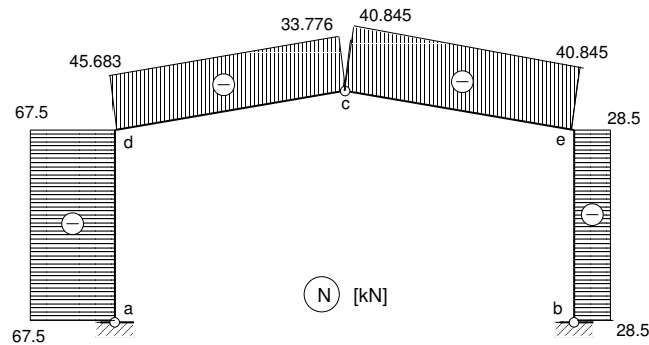
millest saame arvutuspäevikus 5.5 reas octave:36> avaldise.



(a) Paindemomendi M epüür



(b) Põikjõu Q epüür



(c) Normaaljõu N epüür

Joonis 5.28. Raami 2 epüürid

Raami vardas $e-c$ pikijõu N_{ec} arvutamiseks lõikame sõlme e välja (joonis 5.27). Tasakaaluvõrrandist x -teljele saame avaldise

$$\Sigma X = 0 : \quad -N_{ec} \cos \alpha - 47.6 + 10.0 - 23.616 \sin \alpha = 0 \quad (5.94)$$

millest saame arvutuspäevikus 5.5 reas octave:38> avaldise.

Arvutuse tulemuse põhjal koostame raami 11 sisejõudude epüürid (joonis 5.28).

Arvutuspäevik 5.5 *Pikijõu arvutus*

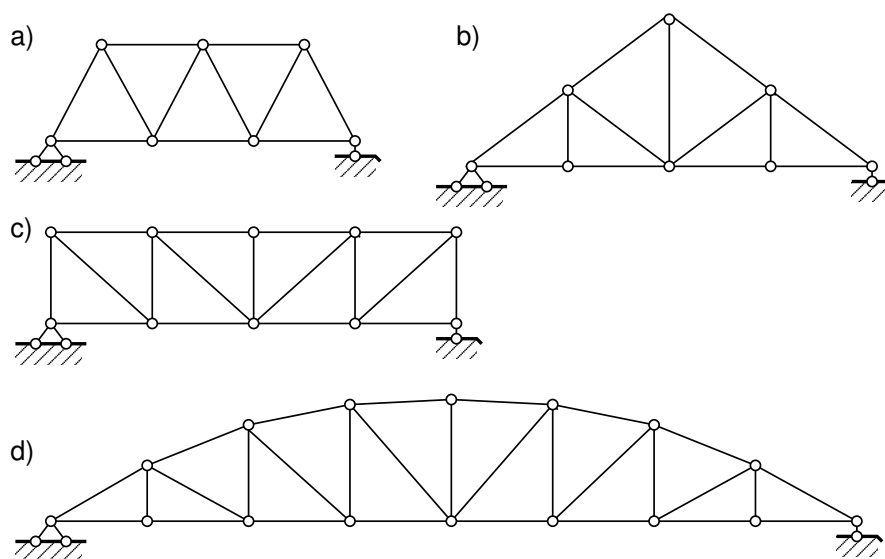
```
diary raamiN11.out
octave:33> diary on
octave:34> % L, cosA,sinA on mälus
octave:34> % varras a-d
octave:34> % -Nad-A=0
octave:34> Nad=-A
Nad = -67.500
octave:35> Nbe=-B
Nbe = -28.500
octave:36> % varras d-c
octave:36> % -Ndc*cosA+(-37.6-62.325*sinA)=0
octave:36> Ndc=(-37.6-62.325*sinA)/cosA
Ndc = -45.683
octave:37> % varras c-d
octave:37> % -Ncd+Ndc+12*8*sinA=0
octave:37> Ncd=Ndc+12*8*sinA
Ncd = -33.776
octave:38> % varras e-c
octave:38> % -Nec*cosA+(-47.6+10-23.616*sinA)=0
octave:38> Nec=(-47.6+10-23.616*sinA)/cosA
Nec = -40.845
octave:39> % varras c-e
octave:39> Nce=Nec
Nce = -40.845
octave:40> diary off
```


6. Sõrestikskeemid

Loeng 1¹: Sõrestikskeemid. Näide 6.1. Näide 6.2. Loeng 2²: Sõrestikskeemide mõjujooned. Näide 6.3.

6.1 Sõrestikskeemide liigitus

Varrassüsteemide mehaanikas võetakse arvutuskeemide liigitamise aluseks varda telgjoone kuju, varda töö seisund (joonis 1.3), toesidemete arv, liigendite arv. Otstes hõõrdevabade liigenditega ühendatud sirgetest varrastest geometriselt muutu- matut konstruktsiooni, mis on koormatud vaid hõõrdevabades liigendites, nimetatakse *sõrestikskeemiks*.



Joonis 6.1. Sõrestikskeemide liigitus

Sõrestikskeemi vardad töötavad ainult pikkele. Sõrestiku ülemised vardad (joonis 6.1) moodustavad *ülemise vöö*, alumised vardad *alumise vöö*. Vöödevahelised vardad moodustavad *sõrestikuvõrgu*. Võrgu vertikaalseid vardaid nimetatakse *postideks* ja kald- vardaid *diagonaalideks*. Horisontaalse vöö kahe naabersõlme vahekaugust nimetatakse *paneeli pikkuseks*. Sõrestikke liigitatakse

¹./videod/SõrestikudLoeng1.html

²./videod/SõrestikudLoeng2.html

- ülesande järgi – katusesõrestikud, sillasõrestikud, kraanasõrestikud jne
- toereaktsioonide järgi – talasõrestikud; kaar-, raam- ja rippõrestikud; kombineeritud sõrestikud
- kuju järgi – paralleelvöödega sõrestikud (joonis 6.1 c)); kolmnurksõrestikud (joonis 6.1 b)); kõvera vööga sõrestikud (joonis 6.1 d))
- võrgu järgi – diagonaalvõrguga sõrestikud (joonis 6.1 a)); post-diagonaalvõrguga sõrestikud (joonis 6.1 c)).

6.2 Staatiliselt määratud sõrestike arvutus

Staatiliselt määratud sõrestike sisejõudude leidmiseks koostatakse tasakaaluvõrrandid. Tasakaaluvõrrandite koostamiseks kasutatakse *lõikemeetodit*. Sõrestiku arvutusskeemist eraldatakse üks sõlm või osa sõrestikust ja teiste osade mõju asendatakse läbilõigatud varraste kontaktjõududega (rajaajõududega). Eraldatud sõlme või sõrestiku osa tasakaalutingimustest leitakse läbilõigatud varraste kontaktjõud. Kontaktjõud on läbilõigatud varda ristlõike välispinnal. Läbilõigatud varda ristlõike sisepinnal on kontaktjõuga võrdne sisejõud.

Arvutuse tulemusena saadud miinusmärk näitab, et oletus oli vale ja kontaktjõud on vastupidise suunaga.

Staatiliselt määratud tasandsõrestikus ei ole liigseid sidemeid. Liigsidemete n arv on null. Staatiliselt määramatuse astet n arvutame avaldisega

$$n = n_v + n_t - 2n_s \quad (6.1)$$

kus n_v on sõrestikuvarraste arv, n_t – toesidemetete arv, n_s – sõrestikusõlmede arv. Sõrestikuvarraste kontaktjõudude (sisejõudude) arvutamisel kasutatakse

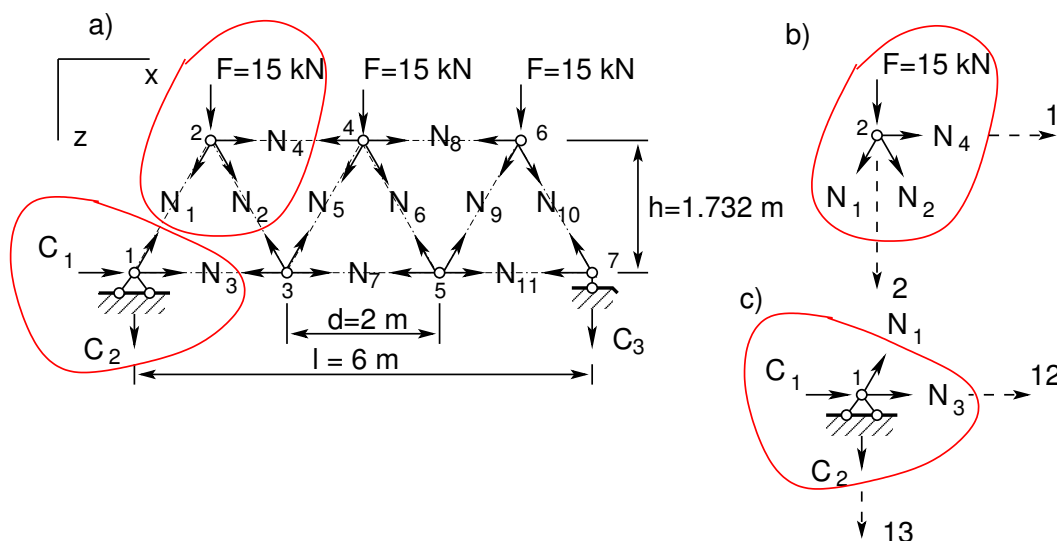
- sõlmede eraldamise võtet
- momendipunkti võtet
- projektsioonide võtet.

Nende võtete abil koostatakse tasakaaluvõrrandid. Kui tasakaaluvõrrandid koostatakse ja lahendatakse käsitsi, siis on otstarbekas koostada võrrandid nii, et seal oleks ainult üks tundmatu.

6.2.1 Sõlmede eraldamise võte

Eraldame lõikega sõrestikskeemist sõlmed (joonis 6.2) ja koostame nende jaoks tasakaalutingimused. Tasandil võib iga sõlme jaoks koostada kaks teineteisest sõltumatut tasakaaluvõrrandit $2n_s$.

Toereaktsioonide määramiseks kasutatakse n_t (staatiliselt määratud tasandraami puhul



Joonis 6.2. Sõlmede eraldamise võte

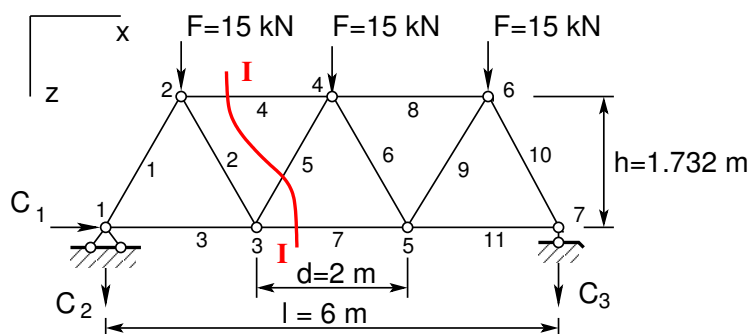
$n_t = 3$) võrrandit. Sõltumatute tasakaaluvõrrandite üldarv on $2n_s - n_t$.

Käsitsi sõrestiku arvutamisel kasutatakse sõlmede eraldamise võtet üksikute sõlmede tasakaalu kontrollimisel. Kõikide sõlmede kohta koostatud tasakaaluvõrrandite süsteemi saab koostada lihtsamalt, kui lisame sinna süsteemi kõigi varraste otste suunakoosinused veergude kaupa. Sellist tasakaaluvõrrandite koostamist vaatleme näites 6.1. Nimetame seda *varraste eraldamise võtteks*.

6.2.2 Momendipunkti võte

Momendipunkti võtte eeliseks on, et see võimaldab leida sisejõu ühes sõrestikuvardas sõltumata teiste sõrestikuvarraste sisejõududest.

Momendipunkti võtet nimetatakse ka Ritteri³ lõikemeetodiks.



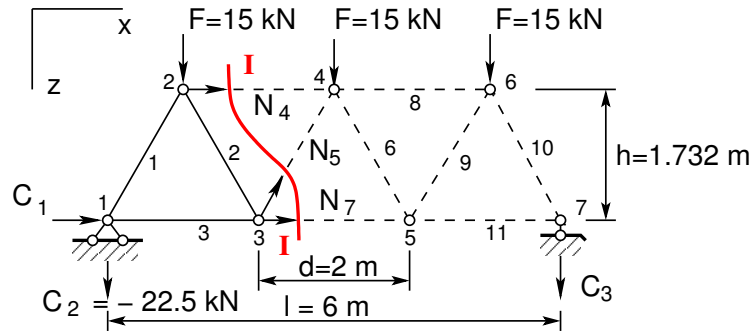
Joonis 6.3. Lõige I-I

Momendipunkti võtte puhul jagatakse sõrestiku arvutusskeem lõikega kaheks osaks

³August Ritter, insener ja mehaanikaprofessor Hannoveris ja Aachenis 1826–1908.

(joonis 6.3). Lõigatakse läbi varras, mille sisejõudu otsitakse (näiteks varras 7), ja veel kaks varrast (vardad 4 ja 5, vt lõiget I-I). Nende kahe läbilõigatud varda sihtide lõikepunkti nimetatakse *momendipunktiks* ehk *Ritteri punktiks*. Varda 4 ja 5 sihtide lõikepunktiks on 4, mis on varda 7 sisejõu N_7 leidmise momendipunkt. Varda 4 ja 5 sisejõu (N_4 , N_5) moment momendipunkti (sõlmpunkt 4) suhtes on null.

Vaatleme lõikest I-I vasakule (paremale) jäävat sõrestiku osa (joonis 6.4).



Joonis 6.4. Momendipunkti võte

Koostame selle sõrestikuosa kohta momentide tasakaalu tingimuse momendipunkti 4 suhtes

$$\Sigma M_4 = 0; \quad N_7 h + F d + C_2 1.5d = 0 \quad (6.2)$$

Toereaktsioon $C_1 = 0$ ja sisejõu N_4 ning N_5 õlg momendipunkti 4 suhtes on null. Toereaktsiooni C_2 väärtuseks on '-22.5', sest toereaktsiooni suund on vastupidi joonisel oletatuga. Tingimusest (6.2) avaldame sisejõu N_7 :

$$N_7 = -\frac{F d + C_2 1.5d}{h} = \frac{M_4^0}{h} \quad (6.3)$$

kus M_4^0 on sõrestikule vastava lihttala moment punkti 4 suhtes.

Sõrestikuvarda sisejõu N_4 leidmiseks on momendipunktiks sõlmpunkt 3. Selle punkti suhtes on momentide tasakaalu tingimus

$$\Sigma M_3 = 0; \quad -N_4 h + F 0.5d + C_2 d = 0 \quad (6.4)$$

Tingimusest (6.4) avaldame sisejõu N_4 :

$$N_4 = -\frac{F 0.5d + C_2 d}{h} = -\frac{M_3^0}{h} \quad (6.5)$$

kus M_3^0 on sõrestikule vastava lihttala moment punkti 3 suhtes.

Sõrestikuvarda sisejõu N_5 leidmiseks momendipunkti võtte ei kõlba, sest kahe ülejäänud varda (varras 4 ja 7) sihid ei löiku (lõikuvad ∞).

6.2.3 Projektsioonide võte

Paralleelvöödega sõrestiku diagonaali sisejõudu (N_5) (joonis 6.3) ei saa leida momentide tasakaalu tingimusest, kuna momendipunkt on lõpmatuses.

Kahe läbilõigatud paralleelse vöö risttelje kohta kirjutatud jõudude projektsioonide tasakaalu tingimus (joonis 6.4)

$$\Sigma Z = 0; \quad -N_5 \cos(n, z) + F + C_{22} = 0 \quad (6.6)$$

kus $\cos(n, z)$ väärtuse saab joonise 6.9 tabelist „Varraste suunakoosinused”.

Kantud varraste (joonis 6.7) suunakoosinuste väärtused on toodud joonisel 6.9 tabelis „Varraste suunakoosinused” ridades „Algus cosA” ja „Algus cosB”. Sisejõu N_5 suund ühtib varda 5 suunaga 3 – 4. Nii saab $\cos(n, z) = -0.866$. Võrrandist (6.6) saame avaldada sisejõu N_5

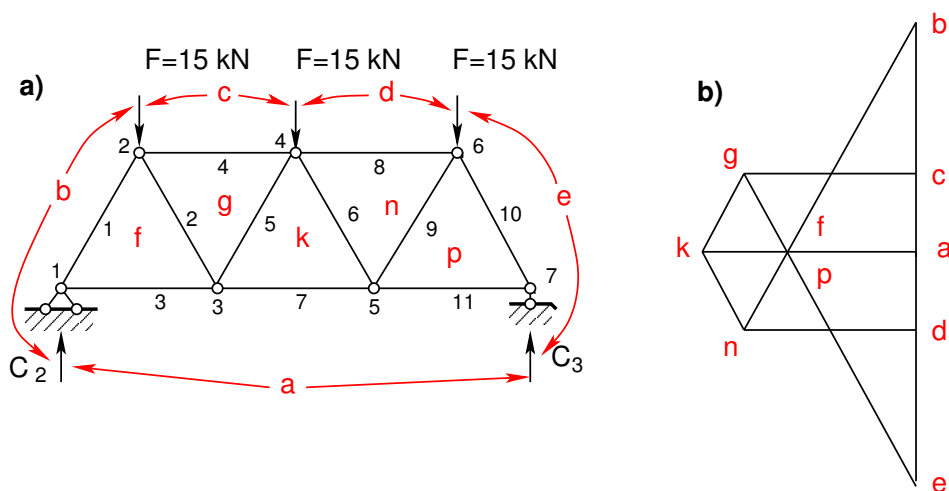
$$N_5 = \frac{F + C_2}{\cos(n, z)} = \frac{Q_{3-4}^o}{\cos(n, z)} \quad (6.7)$$

kus Q_{3-4}^o on sõrestikule vastava lihttala põikjõud sõlmede 3 ja 4 vahel.

6.2.4 Maxwelli-Cremona diagramm

Sõrestikuvarraste sisejõudude graafilisel leidmisel konstrueeritakse Maxwelli-Cremona diagramm (sisejõudude diagramm). Sisejõudude diagrammi võib koostada käsitsi või arvutiprogrammiga *Design View*.

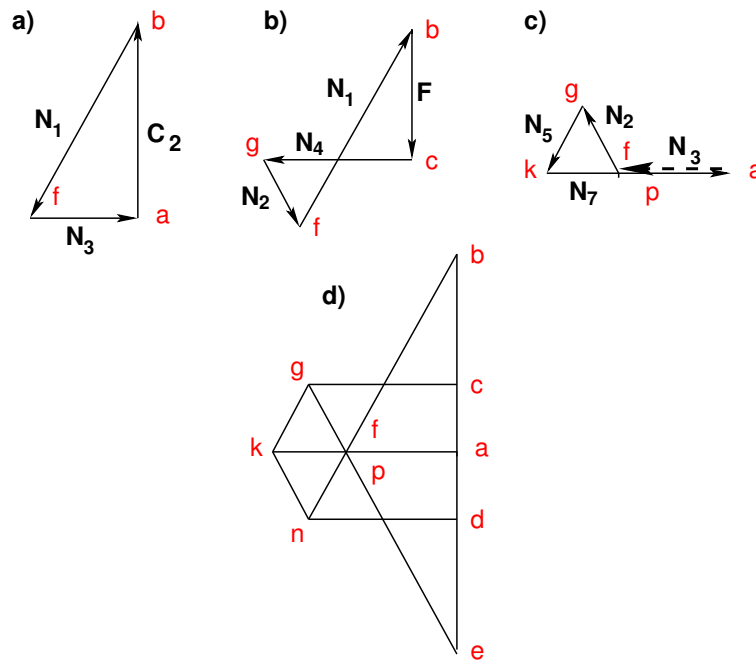
Sisejõudude diagrammi koostamist selgitame joonise 6.5 abil. Sõrestiku väliskontuuril kahe naabervälisjõuga ja vööga piiratud pinda tähistatakse tähega (või numbriga). Need pinnad ja varrastega ümbritsetud pinnad on *väljad*. Joonisel 6.5 a on sõrestikku ümbritsevad väljad a, b, c, d, e ning sõrestikuvarrastega ümbritsetud väljad f, g, k, n, p.



Joonis 6.5. Maxwelli-Cremona diagramm

Välis- ja sisejõud märgitakse kahe tähega, mis näitavad, milliste väljade vahel jõud asub. Toereaktsiooni C_2 tähistatakse a-b ja sõlmes 2 rakendatud jõudu F b-c.

Välisjõudude hulknurk koostatakse järjekorras, nagu neid kohatakse päripäeva liikumisel ümber sõrestiku. Joonisel 6.5 b on välisjõud b-c, c-d, d-e, e-a ja a-b. Sisejõudude määramine põhineb vaadeldava jõu tasakaalustamisel jõududega, mille si-



Joonis 6.6. Jõuhulknurgad

hid ühtivad sõrestikuvarraste telgjoonte sihtidega (joonis 6.6). Sisejõudude diagrammi koostamist alustatakse sõlmest, mis on moodustatud kahest vardast (sõlm 1, joonis 6.5 a). Toereaktsiooni C_2 tasakaalustame varraste 1 ja 3 sisejõududega (joonis 6.6). Nende varraste sihid lõikuvad punktis f (joonis 6.5 b).

Leitud sisejõudude märgi määramiseks liigume ümber sõlme 1 päripäeva (joonis 6.5 a)). Liikudes väljalt b väljale f , näeme diagrammilt (joonis 6.5 b)), et jõud mõjub sõlme 1 suunas, st varras $b-f$ on surutud. Liikudes väljalt f väljale a , näeme diagrammilt, et varras $f-a$ on tõmmatud. Joonisel 6.6 b) ja c) on näidatud sõlmi 2 ja 3 tasakaalustavate jõudude hulknurgad. Varda sisejõud esineb diagrammi kahe naabersõlme jõuhulknurgas vastupidiste suundadega (sisejõud N_1 , joonis 6.6 a) ja b)). Sisejõudude diagrammis (joonis 6.5 b)) jõudude suundi ei märgita.

6.3 Talasõrestike mõjujooned

6.3.1 Mõjujoonte leidmine arvutiga

Sõrestiku sõlmede eraldamisel saadud tasakaaluvõrrandid (vt näide 6.1 joonis 6.9) esitame võrrandiga

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{S} \quad (6.8)$$

kus \mathbf{G} on *tasakaalumaatriks* ja \mathbf{s} sisejõudude ja toereaktsioonide vektor, \mathbf{S} – sõlmkoormuste vektor (tähistused on võetud õpikust [KW90]).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(N, N) & \mathbf{G}(N, C) \\ \mathbf{G}(C, N) & \mathbf{G}(C, C) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_i \\ \vdots \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z3} \\ \vdots \\ F_{xi} \\ F_{zi} \\ \vdots \\ F_{C1} \\ F_{C2} \\ F_{C3} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

kus $\mathbf{G}(C, C)$ on negatiivne ühikmaatriks

$$\mathbf{G}(C, C) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Lahendades võrrandisüsteemi (6.8), saame

$$\mathbf{s} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{S} \quad (6.11)$$

kus \mathbf{b} on *pööratud tasakaalumaatriks*, mille struktuur on (vt näide 6.1 joonis 6.12)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}(N, F) & \mathbf{b}(N, C) \\ \mathbf{b}(C, F) & \mathbf{b}(C, C) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Maatriksit \mathbf{b} võiksime nimetada ka mõjumaatriksiks, sest selle elemendid määravad kõikide mõjujoonte ordinaadid.

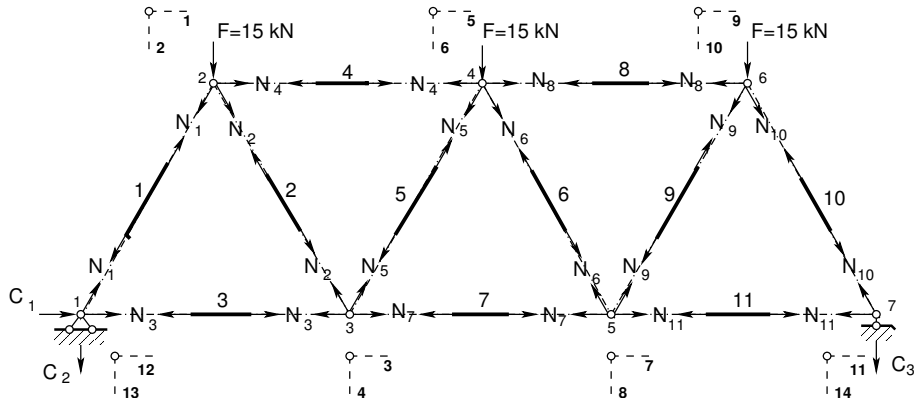
Maatriksiga $\mathbf{b}(N, F)$ saame määrata sisejõu N_i sõltuvalt väliskoormusest F_j . Valides väliskoormuse $F_j = 1$, saame mõjujoone ordinaadid.

6.4 Sõrestiku arvutamise näited

6.4.1 Sõrestiku arvutus. Näide 6.1

[slaidid]

Näide 6.1 Leida joonisel 6.2 toodud sõrestiku varraste sisejõud, toereaktsioonid ja varraste sisejõudude mõjujoonte ordinaadid.



Joonis 6.7. Varraste eraldamise võte

Vaatleme joonisel 6.7 toodud sõrestikskeemi. Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamiseks kasutame varraste eraldamise võtet. Tasakaaluvõrrandid moodustame varda ots-pindade suunakoosinuste lisamisega veergude kaupa. Tundmatuteks võtame ka toereaktsioonid. Nii saame $2n_s$ võrrandit. Eraldame lõikega sõlmed. Arvutame sõrestikuvarraste suunakoosinused (vt joonis 1.22).

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{l} \quad (6.13)$$

$$\cos \beta = \frac{\Delta z}{l} \quad (6.14)$$

kus l on varda pikkus

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} \quad (6.15)$$

siin

$$\Delta x = x_L - x_A \quad (6.16)$$

$$\Delta z = z_L - z_A \quad (6.17)$$

a x_A, z_A, x_L, z_L on varda alguse ning lõpu koordinaadid. Sõrestiku (joonis 6.2) sõlmede koordinaadid on toodud joonisel 6.8 tabelina „Sõlmed”. Valime varraste algused ja lõpud nii, nagu on näidatud joonisel 6.8 tabelis „Topoloogia”. Arvutusprogrammiga srstkN1.m⁴ leiame varraste koosinused. Varraste koosinuste väärtused on joonisel 6.9 tabelis „Varraste suunakoosinused” ridades „Algus cosA” ja „Algus cosB”.

⁴./octaveProgrammid/srstkN1.m

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
1	Sõlmed			Vabadusastmete numbrid sõlmedes*						Toesõlmed : kinni -1, lahti -0				
2	Koordinaadid	x	z		Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas		Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas			
3	sõlm 1	0.000	1.732		sõlm 1	12	13		sõlm 1	1	1			
4	sõlm 2	1.000	0.000		sõlm 2	1	2		sõlm 2	0	0			
5	sõlm 3	2.000	1.732		sõlm 3	3	4		sõlm 3	0	0			
6	sõlm 4	3.000	0.000		sõlm 4	5	6		sõlm 4	0	0			
7	sõlm 5	4.000	1.732		sõlm 5	7	8		sõlm 5	0	0			
8	sõlm 6	5.000	0.000		sõlm 6	9	10		sõlm 6	0	0			
9	sõlm 7	6.000	1.732		sõlm 7	11	14		sõlm 7	0	1			
10	*Toesõlmed on nummerdatud viimastena													
11	Topoloogia													
12	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
13	Algus	1	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5		
14	Lõpp	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7		
15	Varraste vabadusastmed													
16	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
17	Algus x-suund	12	1	12	1	3	5	3	5	7	9	7		
18	Algus z-suund	13	2	13	2	4	6	4	6	8	10	8		
19	Lõpp x-suund	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11		
20	Lõpp z-suund	2	4	4	6	6	8	8	10	10	14	14		
21														
22														

Joonis 6.8. Sõrestiku topoloogia

Joonisel 6.9 on tabelisse „Varraste suunakoosinused” kantud varraste (joonis 6.7) suunakoosinused joonisel 6.2 näidatud sisejõudude suundade alusel.

Sõlmede vabadusastmete suunad nummerdame nii, nagu on näidatud joonisel 6.8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
8	Varraste suunakoosinused															
9	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11				
10	Algus oosA	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000				
11	Algus oosB	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000				
12	Lõpp oosA	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000				
13	Lõpp oosB	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000				
14	Võrrandisüsteemi vasak pool															
15	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11				
16	Vabadusaste 1	0.500	-0.500		-1.000											
17	Vabadusaste 2	-0.866	-0.866		0.000											
18	Vabadusaste 3		0.500	1.000		-0.500		-1.000								
19	Vabadusaste 4		0.866	0.000		0.866		0.000								
20	Vabadusaste 5				1.000	0.500	-0.500		-1.000							
21	Vabadusaste 6				0.000	-0.866	-0.866		0.000							
22	Vabadusaste 7						0.500	1.000		-0.500		-1.000				
23	Vabadusaste 8						0.866	0.000		0.866		0.000				
24	Vabadusaste 9								1.000	0.500	-0.500					
25	Vabadusaste 10								0.000	-0.866	-0.866					
26	Vabadusaste 11										0.500	1.000				
27	Vabadusaste 12	-0.500		-1.000									-1.000			
28	Vabadusaste 13	0.866		0.000										-1.000		
29	Vabadusaste 14										0.866	0.000			-1.000	
30																
31																

Joonis 6.9. Võrrandisüsteemi vasak pool

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Varraste vabadusastmed														
2	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
3	Algus x-suund	12	1	12	1	3	5	3	5	7	9	7			
4	Algus z-suund	13	2	13	2	4	6	4	6	8	10	8			
5	Lõpp x-suund	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11			
6	Lõpp z-suund	2	4	4	6	6	8	8	10	10	14	14			
7															
8	Varraste suunakoosinused														
9	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
10	Algus cosA	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000			
11	Algus cosB	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000			
12	Lõpp cosA	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000			
13	Lõpp cosB	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000			
14															
15	Võrrandisüsteemi vasak pool														
16	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
17	Vabadusaste 1	0.500	-0.500		-1.000										
18	Vabadusaste 2	-0.866	-0.866		0.000										
19	Vabadusaste 3		0.500	1.000		-0.500		-1.000							
20	Vabadusaste 4		0.866	0.000		0.866		0.000							
21	Vabadusaste 5				1.000	0.500	-0.500		-1.000						
22	Vabadusaste 6				0.000	-0.866	-0.866		0.000						
23	Vabadusaste 7						0.500	1.000		-0.500		-1.000			
24	Vabadusaste 8						0.866	0.000		0.866		0.000			

Joonis 6.10. Võrrandisüsteemi koostamine

tabelis „Vabadusastmete numbrid sõlmedes”. Nii koostame sõlme 2 tasakaalvõrrandid suundadele 1 ja 2:

$$\sum Suunas_1 = 0; \quad N_1 \cos \alpha_{2-1} + N_2 \cos \alpha_{2-3} + N_4 \cos \alpha_{2-4} = 0 \quad (6.18)$$

$$\sum Suunas_2 = 0; \quad N_1 \cos \beta_{2-1} + N_2 \cos \beta_{2-3} + N_4 \cos \beta_{2-4} = 0 \quad (6.19)$$

Sõlmes 1 on tasakaalvõrrandid suundadele 12 ja 13:

$$\sum Suunas_{12} = 0; \quad N_1 \cos \alpha_{1-2} + N_3 \cos \alpha_{1-3} + C_1 = 0 \quad (6.20)$$

$$\sum Suunas_{13} = 0; \quad N_1 \cos \beta_{1-2} + N_3 \cos \beta_{1-3} + C_2 = 0 \quad (6.21)$$

Nii nagu võrrandid (6.18), (6.19), (6.20) ja (6.21), koostatakse võrrandid igas sõlmes. Saame võrrandisüsteemi (6.22)

$$\mathbf{GX} = \mathbf{S} \quad (6.22)$$

kus \mathbf{X} koosneb sõrestikuvarraste sisejõudude vektorist \mathbf{N} ja toereaktsioonide vektorist \mathbf{C} , \mathbf{S} on koormusvektor. Tasakaalvõrrandite süsteemi vasak pool on joonisel 6.9.

Koormusvektor \mathbf{S} ehk võrrandisüsteemi parem pool on joonisel 6.11. Koormusvektori saame jõu väärtuste, vt tabel „Jõud sõlmedes”, kandmisel tabelisse „Võrrandisüsteemi parem pool” tabeli „Vabadusastmete numbrid sõlmedes” järgi.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Jõud sõlmedes			Vabadusastmete numbrid sõlmedes*				Ühikjõud läbib sõlmi				
2	Jõud	x-suunas	z-suunas		Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas		Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas	
3	sõlm 1				sõlm 1	12	13		sõlm 1		1	
4	sõlm 2		15.0		sõlm 2	1	2		sõlm 2			
5	sõlm 3				sõlm 3	3	4		sõlm 3		1	
6	sõlm 4		15.0		sõlm 4	5	6		sõlm 4			
7	sõlm 5				sõlm 5	7	8		sõlm 5		1	
8	sõlm 6		15.0		sõlm 6	9	10		sõlm 6			
9	sõlm 7				sõlm 7	11	14		sõlm 7		1	
10	*Teesõlmed on nummerdatud viimastena											
12	Sõlmede vabadusastmed mida läbib ühikjõud											
13	Vabadusaste	13	4	8	14							
14	Jõud "1"	1	1	1	1							

Joonis 6.11. Jõud sõlmedes

Võrrandisüsteemi saame koostada ka kõigi varraste (joonis 6.7) vabadusastmete ja nende suunakoosinuste abil (vt joonis 6.10). Arvutusprogramm *srstkN1.m* kasutab moodust, kus sõlmede tasakaalvõrrandid saadakse kõigi varraste suunakoosinuste võrrandisüsteemi kandmisega. Toereaktsioonide leidmiseks lisatakse võrrandisüsteemi (joonis 6.9) negatiivne ühikmaatriks.

Mõjujoonte ordinaatide leidmiseks kasutame võrrandisüsteemi (6.22) vasaku poole **G** pöördmaatriksit **G'** (joonis 6.12). Mõjujoonte vajalike ordinaatide väljatoomiseks pöördmaatriksist **G'**

$$X = G' \cdot S \tag{6.23}$$

vaatleme joonist 6.2 ja teeme kindlaks, missugusei sõlmi läbib ühikjõud. Nii näiteks

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
2	Vabadusaste	13	4	8	14		Vab_aste	13	4	8	14					
3	Jõud "1"	1	1	1	1		x koord	0,0	2,0	4,0	6,0					
6	Vabadusaste	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
7	N1	0.33333	-0.96226	0.00000	-0.76981	0.33333	-0.57735	0.00000	-0.38490	0.33333	-0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
8	N2	-0.33333	-0.19245	0.00000	0.76981	-0.33333	0.57735	0.00000	0.38490	-0.33333	0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
9	N3	0.33333	0.48114	1.00000	0.38491	0.83333	0.28868	1.00000	0.19246	0.83333	0.09623	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
10	N4	-0.66667	-0.38491	0.00000	-0.76982	0.33333	-0.57737	0.00000	-0.38491	0.33333	-0.19246	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
11	N5	0.33333	0.19245	0.00000	0.38490	0.33333	-0.57735	0.00000	-0.38490	0.33333	-0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
12	N6	-0.33333	-0.19245	0.00000	-0.38490	-0.33333	0.57735	0.00000	0.38490	-0.33333	0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
13	N7	0.50000	0.28868	0.00000	0.57737	0.50000	0.86605	1.00000	0.57737	0.50000	0.28868	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
14	N8	-0.33333	-0.19246	0.00000	-0.38491	-0.33333	-0.57737	0.00000	-0.76982	0.66667	-0.38491	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
15	N9	0.33333	0.19245	0.00000	0.38490	0.33333	0.57735	0.00000	0.76981	0.33333	-0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
16	N10	-0.33333	-0.19245	0.00000	-0.38490	-0.33333	-0.57735	0.00000	-0.76981	-0.33333	-0.96226	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
17	N11	0.16667	0.09623	0.00000	0.19246	0.16667	0.28868	0.00000	0.38491	0.16667	0.48114	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
18	C1 (12)	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	
19	C2 (13)	0.28867	-0.83333	0.00000	-0.66667	0.28867	-0.50000	0.00000	-0.33333	0.28867	-0.16667	0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	
20	C3 (14)	-0.28867	-0.16667	0.00000	-0.33333	-0.28867	-0.50000	0.00000	-0.66667	-0.28867	-0.83333	0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	
22	Võrrandisüsteemi lahend															
23	Sisejõud	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	C1	C2	C3	
24	kN	-25.98095	8.66032	12.99076	-17.32102	-8.66032	-8.66032	21.65127	-17.32102	8.66032	-25.98095	12.99076	0.00000	-22.50000	-22.50000	

Joonis 6.12. Vasaku poole pöördmaatriks **G'**

„sõidutee all” puhul läbib ühikjõud sõlmi 1, 3, 5 ja 7. Need sõlmed ja nendele vastavad vabadusastmed on joonisel 6.11. Vabadusastmete järgi valitakse pöördmaatriksist \mathbf{G}' veerud (vt joonis 6.12).

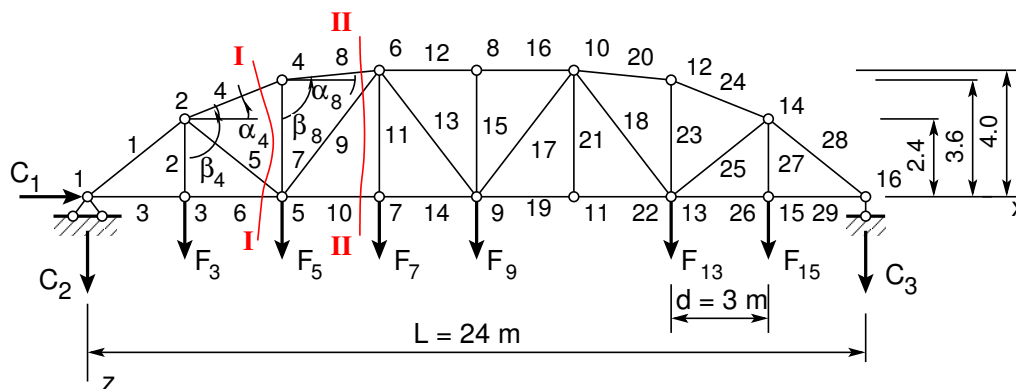
Mõjujoonte ordinaatide arvutamist pöördmaatriksi \mathbf{G}' abil on vaadelnud prof. W. B. Krätzig oma õpikus [Krä91b] lk 106.

Viiteid varraste eraldamise võtte kohta võrrandisüsteemi koostamisel pole õnnestunud leida.

6.4.2 Sõrestiku arvutus. Näide 6.2

[slaidid]

Näide 6.2 Leida joonisel 6.13 esitatud sõrestikuvarraste sisejõud arvutiprogrammiga *srstkNBA.m*^{5,6} ja kontrollida sõrestiku kolmanda paneeli varraste sisejõude. Sõrestikule mõjub koormus $F_3 = 5 \text{ kN}$, $F_5 = 10 \text{ kN}$, $F_7 = 4 \text{ kN}$, $F_9 = 8 \text{ kN}$, $F_{13} = 4 \text{ kN}$, $F_{15} = 8 \text{ kN}$. Sõrestiku mõõtmed on arvutusskeemil (joonis 6.13).



Joonis 6.13. Murdjoonelise ülemise vööga sõrestik

Sõrestikuvarraste sisejõudude leidmiseks arvutiga lisame arvutustabelid (tabel 6.1 ja 6.2). Sõrestikusõlmede kirjeldamiseks valime x -telje sõrestiku alumisse vöösse ja z -telje vertikaalselt sõlmest 1 alla (joonis 6.13). Sõlmpunktide koordinaadid ja sõlmedes mõjuvad koormused on esitatud tabelina 6.1. Sõrestikuvardaid kirjeldame sõlmede abil, andes varda alguse ja lõpu sõlme numbrid. Varraste kirjeldus (topoloogia) on tabelis 6.2.

Sõrestiku sisejõud arvutame programmiga *srstkNBA.m*. Arvutiprogrammis langevad toe-reaktsioonide ja koormuste positiivsed suunad kokku koordinaattelgede positiivsete suundadega. Tulemused kirjutame päevikusse 6.1.

```
Arvutuspäevik 6.1 octave:2> diary srstkN2.out
octave:3> diary on
octave:4> srstkNBA
SolmedeArv = 16
ElementideArv = 29
%
```

⁵ [./octaveProgrammide/srstkNBA.m](#)

⁶ [./octaveProgrammide/srstkNBA.Kommentaariid.pdf](#)

Tabel 6.1. Sõrestiku arvutustabel I

Sõlm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0.0	3.0	3.0	6.0	6.0	9.0	9.0	12.0	12.0	15.0
z	0.0	-2.4	0.0	-3.0	0.0	-4.0	0.0	-4.0	0.0	-4.0
F_z	0.0	0.0	5.0	0.0	10.0	0.0	4.0	0.0	8.0	0.0

Sõlm	11	12	13	14	15	16
x	15.0	18.0	18.0	21.0	21.0	24.0
z	0.0	-3.6	0.0	-2.4	0.0	0.0
F_z	0.0	0.0	4.0	0.0	8.0	0.0

Tabel 6.2. Sõrestiku arvutustabel II

Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Algus	1	2	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	8
Lõpp	2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	8	9	9	9

Varras	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Algus	8	9	10	9	10	10	11	12	12	13	13	14	14	15
Lõpp	10	10	13	11	12	11	13	13	14	14	15	15	16	16

ans = Sõlmpunktide ja Elementide arv on 16 ja 29

Kui SolmedeArv ja ElementideArv on õiged, vajuta klahvile Enter

=====			Toesõlmed		
Sõlmede koordinaadid			Jrk	X-suunas	Z-suunas
Jrk	X	Z	-----		
			1	1	1
1	0.0000	0.0000	2	0	0
2	3.0000	-2.4000	3	0	0
3	3.0000	0.0000	4	0	0
4	6.0000	-3.6000	5	0	0
5	6.0000	0.0000	6	0	0
6	9.0000	-4.0000	7	0	0
7	9.0000	0.0000	8	0	0
8	12.0000	-4.0000	9	0	0
9	12.0000	0.0000	10	0	0
10	15.0000	-4.0000	11	0	0
11	15.0000	0.0000	12	0	0
12	18.0000	-3.6000	13	0	0
13	18.0000	0.0000	14	0	0
14	21.0000	-2.4000	15	0	0
15	21.0000	0.0000	16	0	1
16	24.0000	0.0000			

=====

Sõlmede vabadusastmete numbrid

Jrk	X-suunas	Z-suunas
1	30	31
2	1	2
3	3	4
4	5	6
5	7	8
6	9	10
7	11	12
8	13	14
9	15	16
10	17	18
11	19	20
12	21	22
13	23	24
14	25	26
15	27	28
16	29	32

Jõud sõlmedes

Jrk	X-suunas	Z-suunas
1	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000
3	0.0000	5.0000
4	0.0000	0.0000
5	0.0000	10.0000
6	0.0000	0.0000
7	0.0000	4.0000
8	0.0000	0.0000
9	0.0000	8.0000
10	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000
13	0.0000	4.0000
14	0.0000	0.0000
15	0.0000	8.0000
16	0.0000	0.0000

Elementide topoloogia

Jrk	Algus	Lõpp
1	1	2
2	2	3
3	1	3
4	2	4
5	2	5
6	3	5
7	4	5
8	4	6
9	5	6
10	5	7

11	6	7
12	6	8
13	6	9
14	7	9
15	8	9
16	8	10
17	9	10
18	10	13
19	9	11
20	10	12
21	10	11
22	11	13
23	12	13
24	12	14
25	13	14
26	13	15
27	14	15
28	14	16
29	15	16

Elementide suunakoosinused

Jrk	cosAlpha	cosBeta
1	0.7809	-0.6247
2	0.0000	1.0000
3	1.0000	0.0000
4	0.9285	-0.3714
5	0.7809	0.6247
6	1.0000	0.0000
7	0.0000	1.0000
8	0.9912	-0.1322
9	0.6000	-0.8000
10	1.0000	0.0000
11	0.0000	1.0000
12	1.0000	0.0000
13	0.6000	0.8000
14	1.0000	0.0000
15	0.0000	1.0000
16	1.0000	0.0000
17	0.6000	-0.8000
18	0.6000	0.8000
19	1.0000	0.0000
20	0.9912	0.1322
21	0.0000	1.0000
22	1.0000	0.0000
23	0.0000	1.0000
24	0.9285	0.3714
25	0.7809	-0.6247
26	1.0000	0.0000
27	0.0000	1.0000
28	0.7809	0.6247
29	1.0000	0.0000

=====		27	8.0000
Varraste sisejõud		28	-29.8145
Jrk	N	29	23.2812
-----		30	-0.0000 - toereaktsioon C1
1	-32.6159	31	-20.3750 - toereaktsioon C2
2	5.0000	32	-18.6250 - toereaktsioon C3
3	25.4688	-----	
4	-32.0866	=====	
5	5.5360	Ühikjõud sõlmedes	
6	25.4688	Jrk	X-suunas Z-suunas
7	7.9444	-----	
8	-30.0553	1	0 1
9	-1.7535	2	0 0
10	30.8437	3	0 1
11	4.0000	4	0 0
12	-31.8750	5	0 1
13	1.7187	6	0 0
14	30.8437	7	0 1
15	-0.0000	8	0 0
16	-31.8750	9	0 1
17	8.2812	10	0 0
18	-4.2188	11	0 1
19	26.9062	12	0 0
20	-24.5907	13	0 1
21	0.0000	14	0 0
22	26.9062	15	0 1
23	6.5000	16	0 1
24	-26.2527	-----	
25	1.4007	=====	
26	23.2812		

=====

Mõjujooned N(i)-le sõlmedes. Viimased kolm on toereaktsioonide mõjujooned

1	0.0000	-1.4007	-1.2006	-1.0005	-0.8004	-0.6003	-0.4002	-0.2001	0.0000
2	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
3	0.0000	1.0938	0.9375	0.7813	0.6250	0.4688	0.3125	0.1562	0.0000
4	0.0000	-0.6731	-1.3463	-1.1219	-0.8975	-0.6731	-0.4488	-0.2244	0.0000
5	0.0000	-0.6003	0.4002	0.3335	0.2668	0.2001	0.1334	0.0667	-0.0000
6	0.0000	1.0938	0.9375	0.7813	0.6250	0.4688	0.3125	0.1562	0.0000
7	0.0000	0.1667	0.3333	0.2778	0.2222	0.1667	0.1111	0.0556	-0.0000
8	0.0000	-0.6305	-1.2611	-1.0509	-0.8407	-0.6305	-0.4204	-0.2102	0.0000
9	0.0000	0.2604	0.5208	-0.6076	-0.4861	-0.3646	-0.2431	-0.1215	0.0000
10	0.0000	0.4688	0.9375	1.4062	1.1250	0.8437	0.5625	0.2812	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
12	0.0000	-0.3750	-0.7500	-1.1250	-1.5000	-1.1250	-0.7500	-0.3750	0.0000
13	0.0000	-0.1563	-0.3125	-0.4688	0.6250	0.4687	0.3125	0.1562	-0.0000
14	0.0000	0.4688	0.9375	1.4062	1.1250	0.8437	0.5625	0.2812	0.0000
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
16	0.0000	-0.3750	-0.7500	-1.1250	-1.5000	-1.1250	-0.7500	-0.3750	0.0000
17	0.0000	0.1563	0.3125	0.4688	0.6250	-0.4688	-0.3125	-0.1562	0.0000

18	0.0000	-0.1215	-0.2431	-0.3646	-0.4861	-0.6076	0.5208	0.2604	-0.0000
19	0.0000	0.2812	0.5625	0.8437	1.1250	1.4062	0.9375	0.4688	0.0000
20	0.0000	-0.2102	-0.4204	-0.6305	-0.8407	-1.0509	-1.2611	-0.6305	0.0000
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
22	0.0000	0.2812	0.5625	0.8437	1.1250	1.4062	0.9375	0.4688	0.0000
23	0.0000	0.0556	0.1111	0.1667	0.2222	0.2778	0.3333	0.1667	-0.0000
24	0.0000	-0.2244	-0.4488	-0.6731	-0.8975	-1.1219	-1.3463	-0.6731	0.0000
25	0.0000	0.0667	0.1334	0.2001	0.2668	0.3335	0.4002	-0.6003	0.0000
26	0.0000	0.1563	0.3125	0.4688	0.6250	0.7812	0.9375	1.0938	0.0000
27	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	1.0000	-0.0000
28	0.0000	-0.2001	-0.4002	-0.6003	-0.8004	-1.0005	-1.2006	-1.4007	0.0000
29	0.0000	0.1563	0.3125	0.4688	0.6250	0.7812	0.9375	1.0938	-0.0000
30	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
31	-1.0000	-0.8750	-0.7500	-0.6250	-0.5000	-0.3750	-0.2500	-0.1250	0.0000
32	0.0000	-0.1250	-0.2500	-0.3750	-0.5000	-0.6250	-0.7500	-0.8750	-1.0000

=====

Mõjujoone x koordinaadid

0 3 6 9 12 15 18 21 24

octave:5> diary off

Arvutuspäevikust 6.1 saame kontrollida sisestatud sõlmede koordinaate ja varraste topoloogiat. Varda 4 ja 8 suunakoosinused saame päevikust $\cos \alpha_4 = 0.92848$, $\cos \beta_4 = -0.37139$, $\cos \alpha_8 = 0.99123$, $\cos \beta_8 = -0.13216$. Kontrollime leitud toereaktsioonide väärtusi $C_2 = -20.375$ kN, $C_3 = -18.625$ kN, koostades tasakaalutingimuse Z -teljele $\sum Z = 0$

$$-20.375 - 18.625 + 5 + 10 + 4 + 4 + 8 + 8 = 0 \text{ kN} \quad (6.24)$$

Sisejõudude leidmiseks eraldame lõikega II – II sõrestiku vasakpoolse osa ja vaatleme selle tasakaalu (joonis 6.14). Varda 10 momendipunktiks on sõlm 6 (joonis 6.14). Varda momendipunkti otsimiseks teeme lõike II – II läbi kolme varda. Fikseerime varda, mille sisejõudu otsime. Selle varda momendipunkt on seal, kus kaks ülejäänud varrast lõikuvad. Sisejõu N_{10} sihi kaugus sõlmest 6 $r_{5-7} = 4.0$ m. Momendipunkti kohta koostatud tasakaalutingimusest

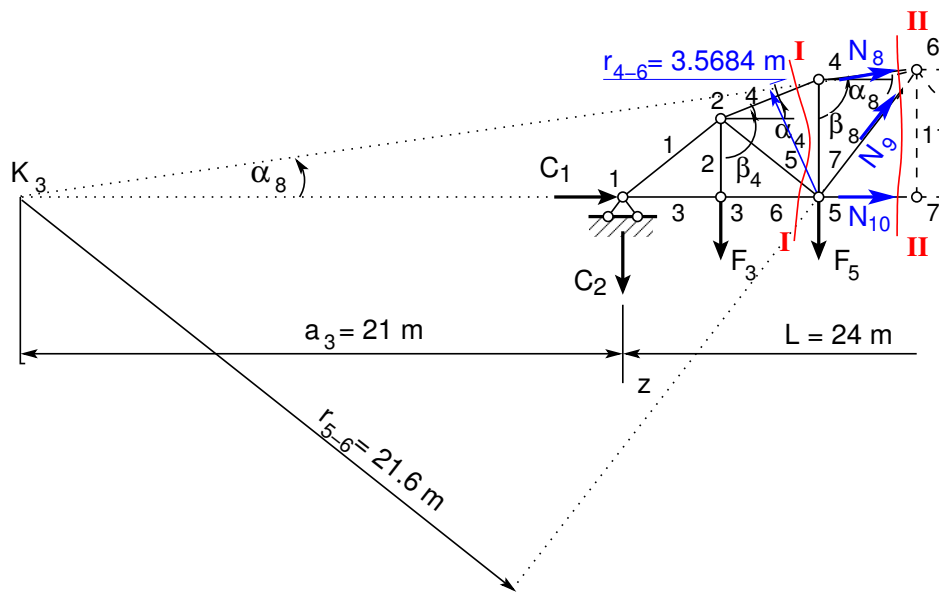
$$\sum M_6 = 0 : \quad -N_{10}r_{5-7} - F_5d - F_32d - C_23d = 0 \quad (6.25)$$

saame

$$N_{10} = \frac{M_5^0}{r_{5-7}} = \frac{-10 \cdot 3 - 5 \cdot 6 + 20.375 \cdot 9}{4} = 30.84 \text{ kN} \quad (6.26)$$

siin tähistab M_5^0 vastava lihttala paindemomendi punkti 5 suhtes antud koormusest. Varda 8 momendipunktiks on sõlm 5. Varda momendipunkti otsimiseks teeme lõike II – II läbi kolme varda. Fikseerime varda, mille sisejõudu otsime. Selle varda momendipunkt on seal, kus kaks ülejäänud varrast lõikuvad. Sisejõu N_8 sihi kaugus sõlmest 5 on $r_{4-6} = h_2 \cos \alpha_8 = 3.5684$ m. Siin $h_2 = 3.6$ m. Momendipunkti 5 kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_5 = 0 : \quad -N_8r_{4-6} - F_3d - C_22d = 0 \quad (6.27)$$



Joonis 6.14. Sõrestiku vasakpoolne osa

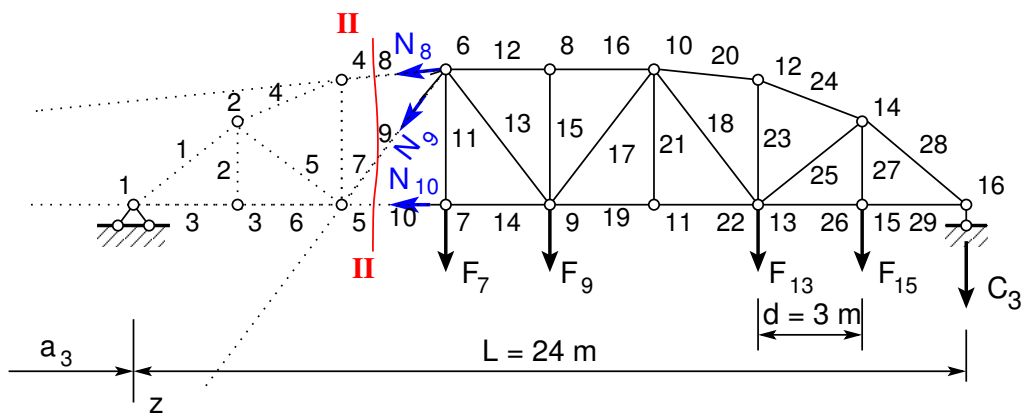
tuleneb

$$N_8 = -\frac{M_5^0}{r_{4-6}} = \frac{5 \cdot 3 - 20.375 \cdot 6}{3.5684} = -30.06 \text{ kN} \quad (6.28)$$

kus M_5^0 tähistab vastava lihttala paindemomenti punkti 5 suhtes antud koormusest. Märk '-' näitab, et ülemised kiud on surutud.

Sõrestikuvarda 8 momendipunktiks on sõlm 5. Varda momendipunkti otsimiseks teeme lõike I – I (joonis 6.14) läbi kolme varda. Fikseerime varda, mille sisejõudu otsime. Selle varda momendipunkt on seal, kus kaks ülejäänud varrast lõikuvad. Koostame lõikega I – I eraldatud osa kohta tasakaalutingimuse, millest saame analoogiliselt varda 8 sisejõuga

$$N_4 = -\frac{M_5^0}{r_{2-4}} = \frac{5 \cdot 3 - 20.375 \cdot 6}{3.3425} = -32.09 \text{ kN} \quad (6.29)$$



Joonis 6.15. Sõrestiku parempoolne osa

siin on sisejõu N_4 sihi kaugus sõlmest 5 $r_{2-4} = h_2 \cdot \cos \alpha_4 = 3.3425$ m, kus $h_2 = 3.6$ m.

Varda 9 momendipunkti otsimiseks teeme lõike II – II (joonis 6.14) läbi kolme varda. Fikseerime varda 9, milles otsime sisejõudu. Selle varda momendipunkt on seal, kus kaks ülejäänud varrast (vardad 10 ja 8) lõikuvad. Joonisel 6.14 on see punkt tähistatud K_3 -ga. Koostame selle punkti kohta tasakaalvõrrandi

$$\sum M_{K_3} = 0 : -N_9 r_{5-6} + F_5 (a_3 + 2d) + F_3 (a_3 + d) + C_2 a_3 = 0 \quad (6.30)$$

kus $r_{5-6} = 21.6$ m ja $a_3 = 21$ m (joonis 6.14). Tasakaalvõrrandist (6.30) saame

$$N_9 = \frac{10 \cdot 27 + 5 \cdot 24 - 20.375 \cdot 21}{21.6} = -1.75 \text{ kN} \quad (6.31)$$

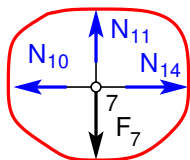
Varraste 11 ja 7 sisejõu leidmiseks lõikame sõlmed 7 ja 4 välja (joonis 6.16 ja 6.17).

Sõlme 7 tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0 : -N_{11} + F_7 = 0 \quad (6.32)$$

saame

$$N_{11} = 4 \text{ kN} \quad (6.33)$$



Joonis 6.16. Sõlme 7 tasakaal

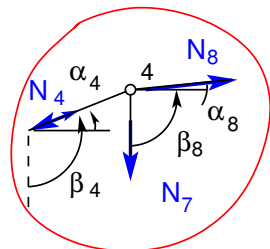
Sõlme 4 tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0 : N_7 - N_8 \cos \beta_8 + N_4 \cos \beta_4 = 0 \quad (6.34)$$

saame avaldisi (6.28) ja (6.29) kasutades

$$N_7 = \frac{M_5^0}{r_{4-6}} \cos \beta_8 - \frac{M_5^0}{r_{2-4}} \cos \beta_4 \quad (6.35)$$

Joonis 6.17. Sõlme 4 tasakaal



Võttes arvesse seosed $r_{4-6} = h_2 \cos \alpha_8$ ja $r_{2-4} = h_2 \cos \alpha_4$, saame

$$N_7 = \frac{M_5^0}{h_2} \left(\frac{\cos \beta_8}{\cos \alpha_8} - \frac{\cos \beta_4}{\cos \alpha_4} \right) \quad (6.36)$$

ehk arvestades seoseid (6.13) ja (6.14) saame

$$N_7 = \frac{M_5^0}{h_2} (\tan \alpha_4 - \tan \alpha_8) = \frac{20.375 \cdot 6 - 5 \cdot 3}{3.6} \left(\frac{1.2}{3} - \frac{0.4}{3} \right) = 7.94 \text{ kN} \quad (6.37)$$

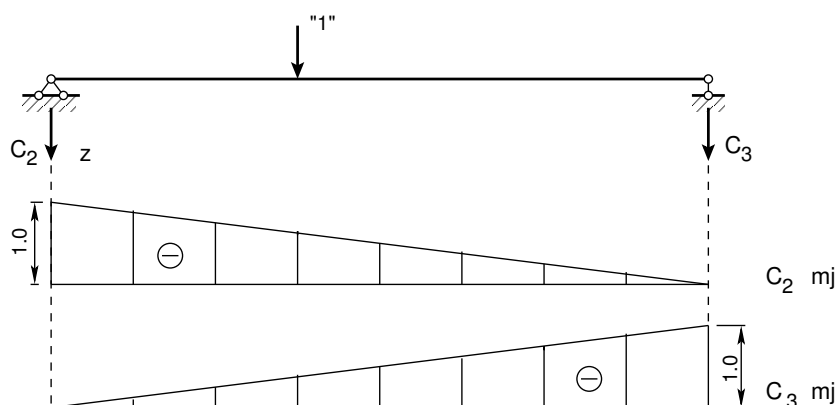
Sõrestiku sisejõude võib leida ka lõikest II – II paremale jääva osa (joonis 6.15) vaatlemisega.

Käitsi arvutatud kolmanda paneeli sisejõud N_7 , N_8 , N_9 , N_{10} ja N_{11} ühtivad arvutitiga leitutega.

6.4.3 Sõrestiku mõjujoonte koostamine. Näide 6.3 [slaidid]

Näide 6.3 Koostada joonisel 6.23 näidatud sõrestiku kolmanda paneeli varraste sisejõudude mõjujooned ja võrrelda neid arvutuspäevikus 6.1 toodud mõjujoonte ordinaatidega.

Talasõrestiku mõjujoonte konstrueerimiseks vaatleme vastava tala mõjujooni (joonis 6.18).

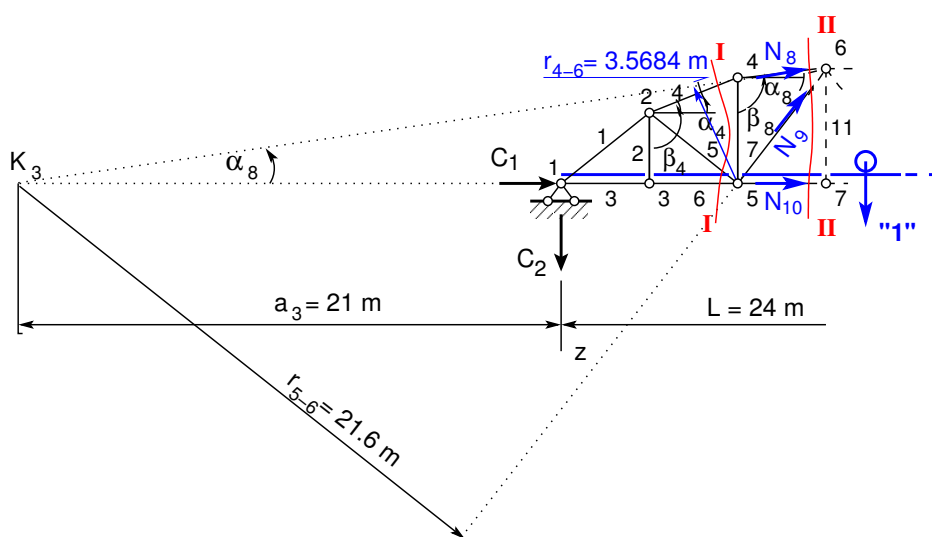


Joonis 6.18. Lihttala toereaktsioonide mõjujooned

Mõjujoonte konstrueerimiseks jagame löikega II – II sõrestiku kaheks osaks (joonis 6.23). Kui ühikjõud liigub läbilõigatud paneelist paremal, siis vaatleme vasakpoolse osa tasakaalu (joonis 6.19), ja kui ühikjõud liigub läbilõigatud paneelist vasakul, siis vaatleme parempoolse osa tasakaalu (joonis 6.20).

Varda 10 momendipunkti on sõlm 6 (joonis 6.19). Sisejõu N_{10} sihi kaugus sõlmest 6 $h_3 = 4.0$ m. Momendipunkti kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_6 = 0: \quad -N_{10}h_3 - C_2 3d = 0 \quad (6.38)$$



Joonis 6.19. Sõrestik. Ühikjõud paremal

Liikva koormuse all (läbilõigatud paneelist paremal) sarnaneb varda N_9 mõjujoon toereakt-siooni C_2 mõjujoonega, mille ordinaadid on korrutatud a_3/r_{5-6} -ga.

Kui koormus liigub vasakul pool läbilõigatud paneeli, siis vaatleme sõrestiku parempoolse osa tasakaalu (joonis 6.20). Varda 9 momendipunkti K_3 kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_{K3} = 0 : \quad -N_9 r_{5-6} + C_3 (a_3 + L) = 0 \quad (6.45)$$

kus $a_3 = 21$ m (joonis 6.19), saame

$$N_9 = -\frac{C_3 (a_3 + L)}{r_{5-6}} = \frac{21 + 24}{21.6} = \frac{45}{21.6} \quad (6.46)$$

Liikva koormuse all (läbilõigatud paneelist vasakul) sarnaneb varda N_9 mõjujoon toereakt-siooni C_3 mõjujoonega, mille ordinaadid on korrutatud $(a_3 + L)/r_{5-6}$ -ga (joonis 6.23).

Varda 11 mõjujoone leidmiseks lõikame sõrestikust (joonis 6.23) välja sõlme 7 (joonis 6.21).

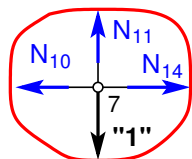
Sõlme 7 tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0 : \quad -N_{11} + 1 = 0 \quad (6.47)$$

saame

$$N_{11} = 1 \quad (6.48)$$

Kui ühikjõud asub teistes sõlmedes, on $N_{11} = 0$.



Joonis 6.21. Sõlm 7

Varda 7 mõjujoone leidmiseks lõikame sõrestikust (joonis 6.23) välja sõlme 4 (joonis 6.22).

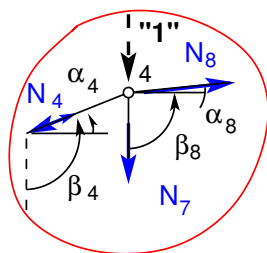
Sõlme 4 tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0 : \quad N_7 - N_8 \cos \beta_8 + N_4 \cos \beta_4 = 0 \quad (6.49)$$

saame avaldisi (6.28) ja (6.29) kasutades

$$N_7 = \frac{M_5^0}{r_{4-6}} \cos \beta_8 + \frac{M_5^0}{r_{2-4}} \cos \beta_4 \quad (6.50)$$

Kui ühikjõud asub sõlmes 4, lisandub tasakaaluvõrrandile (6.49) ühikjõud ja N_7 avaldis (6.50) on ühe võrra väiksem.



Joonis 6.22. Sõlm 4

Võttes arvesse seosed $r_{4-6} = h_2 \cos \alpha_8$ ja $r_{2-4} = h_2 \cos \alpha_4$, (6.13), (6.14), saame

$$N_7 = \frac{M_5^0}{h_2} (\tan \alpha_4 - \tan \alpha_8) = \frac{M_5^0}{3.6} \left(\frac{1.2}{3} - \frac{0.4}{3} \right) \quad (6.51)$$

Varda N_7 mõjujoon sarnaneb lihttala mõjujoonega M_3^0 , mille ordinaadid on korrutatud $\frac{1}{3.6} \left(\frac{1.2}{3} - \frac{0.4}{3} \right)$ (joonis 6.23).

Sõrestiku varda 13 mõjujoone konstrueerimisel kasutame projektsioonide võtet.

Kui koormus liigub vasakul pool läbilõigatud paneelist, vaatleme löikest paremale poole jäävat osa (joonis 6.20). Koostame tasakaalvõrrandi z -teljele

$$\sum z = 0 : \quad N_{13} \cos \gamma - C_3 = 0 \quad (6.52)$$

$$N_{13} = C_3 / \cos \gamma, \quad (0 \leq x \leq 3d) \quad (6.53)$$

Avaldisest (6.53) näeme, et esimese kolme paneeli ulatuses on varda 13 mõjujoon sarnane toereaktsiooni C_3 mõjujoonega (joonis 6.18), mille ordinaadid on jagatud nurga γ koosinusega $\cos \gamma = 4/5 = 0.8$ (joonis 6.23).

Kui koormus liigub paremal pool läbilõigatud paneelist, vaatleme löikest vasakule poole jäävat osa (joonis 6.20). Koostame tasakaalvõrrandi z -teljele

$$\sum z = 0 : \quad N_{13} \cos \gamma + C_2 = 0 \quad (6.54)$$

$$N_{13} = -C_2 / \cos \gamma, \quad (4d \leq x \leq l) \quad (6.55)$$

Avaldisest (6.55) näeme, et viimase nelja paneeli ulatuses on varda 13 mõjujoon sarnane toereaktsiooni ' $-C_2$ ' mõjujoonega (joonis 6.18), mille ordinaadid on jagatud nurga γ koosinusega $\cos \gamma = 4/5 = 0.8$ (joonis 6.23).

Läbilõigatud paneeli ulatuses ühendame vasaku ja parema poole mõjujooned (joonis 6.23).

Mõjujoonte abil arvutame sisejõud valemiga

$$N_i = \sum F_j \eta_{ij} = F_j \eta_{ij} \quad (6.56)$$

kus η_j on sisejõu N_i mõjujoone ordinaat sõlmes j ja F_j on koormus sõlmes j . Saame

$$N_{10} = 5 \cdot 0.4688 + 10 \cdot 0.9375 + 4 \cdot (1.4063 + 0.5625) + \\ + 8 \cdot (1.1250 + 0.2812) = 30.84 \text{ kN} \quad (6.57)$$

$$N_8 = - [5 \cdot 0.6305 + 10 \cdot 1.2611 + 4 \cdot (1.0509 + 0.4204) + \\ + 8 \cdot (0.8407 + 0.2102)] = -30.06 \text{ kN} \quad (6.58)$$

$$N_9 = 5 \cdot 0.2604 + 10 \cdot 0.5208 + 4 \cdot (0.6076 + 0.2430) + \\ + 8 \cdot (0.4861 + 0.1215) = -1.75 \text{ kN} \quad (6.59)$$

$$N_{11} = 4 \cdot 1.000 = 4.00 \text{ kN} \quad (6.60)$$

$$N_7 = 5 \cdot 0.1667 + 10 \cdot 0.3333 + 4 \cdot (0.2778 + 0.1111) + \\ + 8 \cdot (0.2222 + 0.0556) = 7.94 \text{ kN} \quad (6.61)$$

Tabelis 6.3 on arvu- ja käsitsi ja mõjujoonte abil leitud sisejõudude võrdlus.

Tabel 6.3. Varraste sisejõudude võrdlus

Varras	N_i arvutiga [kN]	N_i käsitsi [kN]	N_i mõjujoontega [kN]
10	30.84	30.84	30.84
8	-30.06	-30.06	-30.06
9	-1.75	-1.75	-1.75
11	4.00	4.00	4.00
7	7.94	7.94	7.94

7. Siirete arvutus

7.1 Sise- ja rajajõudude töö

Deformeerunud oleku kasutamisel virtuaalsiirdena tuleb muude tööde kõrval arvestada ka sisejõudude tööd. Varrassüsteemi virtuaalsiirdeks sobib selle mis tahes tegelikult võimalik deformeerunud seisund, mis lubab rakendada algmõõtmete printsiipi. Seejuures pole oluline deformeerumise põhjus, milleks võib olla mis tahes lubatav koormus, temperatuuri muutumine, tugevde vajumine jt. [Jür85]. Juhul kui sidemed on statsionaarsed, siis virtuaalsiirete klass ühtib võimalike siirete klassiga ja tegelik siire on üks virtuaalsiiretest.

Ehitusmehaanikas eristame kolme liiki tööd – *passiivtöö*, *aktiivtöö* ja *täiendustöö*.

- Passiivtöö ([Rää75] – *võimalik töö*, ingl *passive work*, sks *Verschiebungsarbeit*) on jõudude töö virtuaalsiiretel, kui neid siirdeid ei kutsunud esile vaadeldavad jõud (joonis 7.1).
- Aktiivtöö ([Rää75] – *tegelik töö*, ingl *active work*, sks *Eigenarbeit*) on jõudude töö virtuaalsiiretel ja -pööretel, kui need siirded ja pöörded on kutsunud esile vaadeldavad jõud (joonis 7.2).
- Täiendustöö (ingl *complementary work*, sks *Ergänzungarbeit*) on virtuaaljõudude töö siiretel ja pööretel, kui need jõud on kutsunud esile vaadeldavad siirded ja pöörded [PRZ68] (joonis 7.3).

Tööde avaldise (1.8) (lk 37) pikkel kirjutame kujul

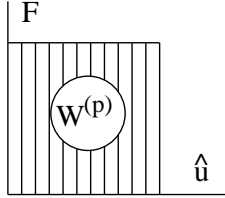
$$\underbrace{\overset{\leftrightarrow}{N}_x \hat{u} \Big|_a^b}_{W_r} - \underbrace{\int_a^b N_x \hat{\lambda} dx}_{W_s} + \underbrace{\left(\int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \right)}_{W_v} = 0 \quad (7.1)$$

Kui vaadelda avaldises (7.1) \hat{u} -d kui *virtuaalset siiret*, siis väljendab see avaldis *virtuaalsiirete printsiipi*. Kirjutame võrrandi (7.1) ümber järgmiselt:

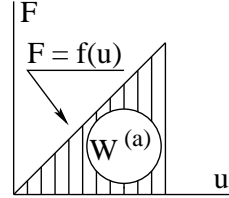
$$W^{(p)} = W_r^{(p)} + W_s^{(p)} + W_v^{(p)} = 0 \quad (7.2)$$

kus üldjuhul (vt joonis 1.3 lk 33 ja avaldis (F.28) lk 686)

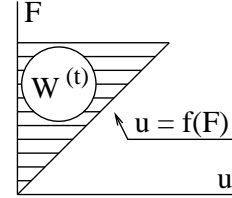
$$W_r^{(a)} = \left[\overset{\leftrightarrow}{N}_x \hat{u} \right]_a^b + \left[\overset{\leftrightarrow}{Q}_z \hat{w} \right]_a^b + \left[\overset{\leftrightarrow}{M}_y \hat{\varphi}_y \right]_a^b \quad (7.3)$$



Joonis 7.1. Passiivtöö



Joonis 7.2. Aktiivtöö



Joonis 7.3. Täiendustöö

$$W_s^{(p)} = - \int_a^b N_x \hat{\lambda} dx - \int_a^b Q_z \hat{\beta}_z dx - \int_a^b M_y \hat{\psi}_y dx \quad (7.4)$$

$$W_v^{(p)} = \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i + \int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i + \int_0^l m_y(x) \hat{\varphi}_y dx + \mathcal{M}_{zi} \hat{\varphi}_{yi} \quad (7.5)$$

Avaldist (7.2) nimetatakse *energiateoreemiks pikkel*: rajajõudude, sisejõudude ja välisjõudude tööde summa on null. Avaldises (7.2) esinevad tööd $W^{(p)}$ on *passiivtööd*, kuna vaadeldavad jõud ei kutsu esile virtuaalsiirdeid \hat{u} .

Kui vaadeldav jõud sõltub siiretest ja pööretest, siis tööd, mida need jõud teevad nendel siiretel ja pööretel, nimetatakse *aktiivtööks* (joonis 7.2). Aktiivtööde *energiateoreem* [KW90]

$$W^{(a)} = W_r^{(a)} + W_s^{(a)} + W_v^{(a)} = 0 \quad (7.6)$$

kus

$$W_r^{(a)} = \frac{1}{2} \left[\overleftrightarrow{N}_x u \right]_a^b + \frac{1}{2} \left[\overleftrightarrow{Q}_z w \right]_a^b + \frac{1}{2} \left[\overleftrightarrow{M}_y \varphi_y \right]_a^b \quad (7.7)$$

$$W_s^{(a)} = -\frac{1}{2} \int_a^b N_x \lambda dx - \frac{1}{2} \int_a^b Q_z \beta_z dx - \frac{1}{2} \int_a^b M_y \psi_y dx \quad (7.8)$$

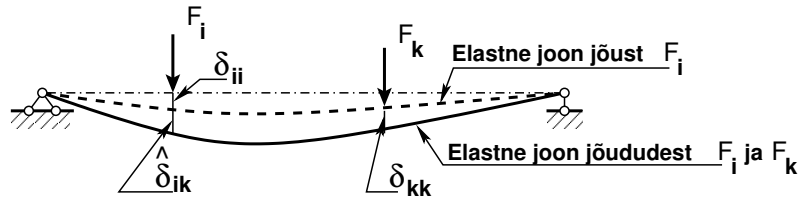
$$W_v^{(a)} = \frac{1}{2} \left(\int_a^b q_x(x) u dx + F_{xi} u_i + \int_0^l q_z(x) w dx + F_{zi} w_i + \int_0^l m_y(x) \varphi_y dx + \mathcal{M}_{zi} \varphi_{yi} \right) \quad (7.9)$$

Sisejõudude töö avaldis (7.8) on miinusmärgiga. Sisejõudude *potentsiaalenergia* Π_s ehk *deformatsioonienergia* (joonis 1.3 lk 33) U on arvuliselt võrdne sisejõudude tööga, kuid vastupidise märgiga

$$\Pi_s = U = -W_s^{(a)} \quad (7.10)$$

7.2 Virtuaalne töö

Koormame tala (joonis 7.4) jõuga F_i . Tala saab ristlõikes i siirde δ_{ii} (siire kohas i ja põhjustatud jõust F_i). Seejärel rakendame jõu F_k . Talale lisandub ristlõikes k siire δ_{kk} (siire kohas k ja põhjustatud jõust F_k). Tala ristlõikes i lisandub siire $\hat{\delta}_{ik}$ (siire kohas i ja põhjustatud jõust F_k). Nüüd ristlõikes i ei põhjustanud siiret jõud F_i , vaid liikus kaasa (teeb passiivtööd). Selle jõu poolt saame virtuaalseks tööks $F_i \hat{\delta}_{ik}$.



Joonis 7.4. Virtuaalne töö

Avaldame jõu F_k poolt põhjustatud prinkused varda elastsusseostest (vt joonis 1.3 lk 33):

$$\hat{\lambda}_k = \frac{N_k}{EA}, \quad \hat{\beta}_{zk} = \frac{Q_{zk}}{GA_{red}}, \quad \hat{\psi}_{yk} = \frac{M_{yk}}{EI_y} \quad (7.11)$$

Jõudude F_i poolt tekitatud sisejõudude virtuaalne töö jõu F_k põhjustatud siiretel arvutame avaldisega:

$$W_s^{(p)} = - \sum \int_0^l N_{xi} \frac{N_k}{EA} dx - \sum \int_0^l Q_{zi} \frac{Q_{zk}}{GA_{red}} dx - \sum \int_0^l M_{yi} \frac{M_{yk}}{EI_y} dx \quad (7.12)$$

Kui rajajõudude töö $W_r^{(p)} = 0$, siis välisjõudude töö $W_v^{(p)}$ ja sisejõudude $W_s^{(p)}$ summa on null, millest saame:

$$F_i \hat{\delta}_{ik} = \sum \int_0^l N_{xi} \frac{N_k}{EA} dx + \sum \int_0^l Q_{zi} \frac{Q_{zk}}{GA_{red}} dx + \sum \int_0^l M_{yi} \frac{M_{yk}}{EI_y} dx \quad (7.13)$$

Saadud avaldis on Mohri¹² integraal siirete määramiseks. Võrrandis (7.13) vasakul pool võrdusmärki on esimese koormusolukorra *välisjõudude töö* siiretel, mis on põhjustatud teise koormusolukorra jõudude poolt. Paremal pool võrdusmärki on esimese koormusolukorra *sisejõudude töö* teise koormusolukorra poolt põhjustatud siiretel.

Akiivtöö korral on välisjõudude F_i töö $W_v^{(a)}$ nende endi poolt põhjustatud siiretel δ_{ii}

$$\frac{1}{2} F_i \delta_{ii} = \frac{1}{2} \sum \int_0^l N_{xi} \frac{N_i}{EA} dx + \frac{1}{2} \sum \int_0^l Q_{zi} \frac{Q_{zi}}{GA_{red}} dx + \frac{1}{2} \sum \int_0^l M_{yi} \frac{M_{yi}}{EI_y} dx \quad (7.14)$$

¹http://en.wikipedia.org/wiki/Christian_Otto_Mohr

²Christian Otto Mohr, saksa ehitusinsener, 1835–1918.

Avaldise (7.14) paremal pool võrdusmärki olev avaldis on deformatsioonienergia (sisejõudude potentsiaalenergia).

Potentsiaalenergia jaoks ei ole jõudude sõltumatuse printsiip rakendatav, sest summa ruut ei võrdu üksikute liikmete ruutude summaga.

Joonisel 7.4 näidatud tala puhul kasutame energiateoreemi. Täistöö $W_1 = 0$ avaldis (7.15) koosneb sisejõudude tööst W_{1s} (rajajõudude töö puudub $W_{1r} = 0$), välisjõudude aktiivtööst ($W_v^{(a)} = \frac{1}{2}F_i\delta_{ii} + \frac{1}{2}F_k\delta_{kk}$) ja passiivtööst ($W_v^{(p)} = F_i\hat{\delta}_{ik}$):

$$W_1 = W_{1s} + W_v^{(a)} + W_v^{(p)} = 0 \quad (7.15)$$

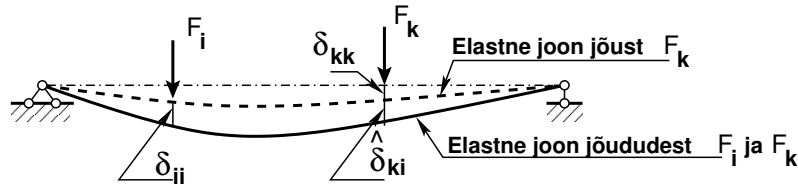
Tasakaalus olevas süsteemis kinemaatilisel võimalikel väikestel siiretel (virtuaalsiiretel) täistööd ei tehta (täistöö on null).

Avaldisest (7.15) leiame sisejõudude töö (7.16).

$$W_{1s} = -W_v^{(a)} - W_v^{(p)} = -\frac{1}{2}F_i\delta_{ii} - \frac{1}{2}F_k\delta_{kk} - F_i\hat{\delta}_{ik} \quad (7.16)$$

7.3 Tööde vastastikkuse teoreem

Koormame tala (joonis 7.5) jõuga F_k . Tala saab ristlõikes k siirde δ_{kk} (siire kohas k ja põhjustatud jõust F_k). Seejärel rakendame jõu F_i . Talale lisandub ristlõikes i siire δ_{ii} (siire kohas i ja põhjustatud jõust F_i). Tala ristlõikes k lisandub siire $\hat{\delta}_{ki}$ (siire kohas k ja põhjustatud jõust F_i). Nüüd ristlõikes k ei põhjustanud siiret jõud F_k vaid liikus kaasa (teeb passiivtööd). Selle jõu poolt saame virtuaalseks tööks $F_k\hat{\delta}_{ki}$.



Joonis 7.5. Tala virtuaalne töö

Joonisel 7.5 näidatud tala puhul kasutame energiateoreemi. Täistöö $W_2 = 0$ avaldis (7.17) koosneb sisejõudude tööst W_{2s} (rajajõudude töö puudub $W_{2r} = 0$), välisjõudude aktiivtööst ($W_v^{(a)} = \frac{1}{2}F_i\delta_{ii} + \frac{1}{2}F_k\delta_{kk}$) ja passiivtööst ($W_v^{(p)} = F_k\hat{\delta}_{ki}$):

$$W_2 = W_{2s} + W_v^{(a)} + W_v^{(p)} = 0 \quad (7.17)$$

Avaldisest (7.17) leiame sisejõudude töö (7.18).

$$W_{2s} = -W_v^{(a)} - W_v^{(p)} = -\frac{1}{2}F_i\delta_{ii} - \frac{1}{2}F_k\delta_{kk} - F_k\hat{\delta}_{ki} \quad (7.18)$$

Nimetame joonisel 7.4 näidatud talale rakendatud jõudude süsteemi *esimeseks koormusolukorraks* ja joonisel 7.5 (sama tala) näidatud talale rakendatud jõudude süsteemi

teiseks koormusolukorraks. Koormusolukorrad erinevad jõudude rakendamise järjekorra poolest. Koormamise lõpus on nende olukordade siirded ühesugused, ei erine teineteisest. Kui koormamise alguses ja lõpus on siirded ühesugused, siis on ka nende sisejõudude potentsiaalenergiad ($\Pi_1 = \Pi_2$) ja sisejõudude tööd (avaldis (7.10)) ühesugused

$$W_{1s} = W_{2s} \quad (7.19)$$

Võttes arvesse avaldised (7.16) ja (7.18) saame avaldisest (7.19):

$$F_i \hat{\delta}_{ik} = F_k \hat{\delta}_{ki} \quad (7.20)$$

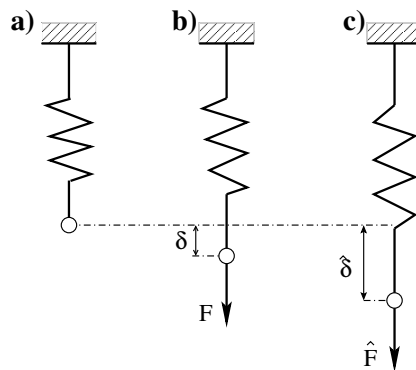
Avaldis (7.20) väljendab Betti³ teoreemi (*tööde vastastikkuse teoreemi*): *esimese koormusolukorra välisjõudude virtuaaltöö teise koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel on võrdne teise koormusolukorra välisjõudude virtuaaltööga esimese koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel.*

7.3.1 Vedru vastastikune töö

Vaatleme vedru (joonis 7.6 a)) kui lihtsaimat elementi, et selgitada vardamehaanika printsiipe. Rakendame vedrule jõu F ja \hat{F} (joonis 7.6 b), c)). Vedru siirded δ , $\hat{\delta}$ on jõududega proportsionaalsed

$$F = k\delta, \quad \hat{F} = k\hat{\delta} \quad (7.21)$$

kus on k vedru jäikus.



Joonis 7.6. Vastastikune töö

Siirete δ , $\hat{\delta}$ erinevate arvuliste väärtuste korral kirjutame samasuse

$$\underbrace{\delta k}_F \hat{\delta} - \delta k \hat{\delta} = 0 \quad (7.22)$$

Kui asendame avaldises (7.22) δk jõuga F , saame

$$F \hat{\delta} - \delta k \hat{\delta} = 0 \quad (7.23)$$

³Enrico Betti, itaalia ehitusinsener, 1823–1892.

Seda triviaalset samasust nimetatakse *vedru esimeseks samasuseks* [Har85]

$$G(\delta, \hat{\delta}) \equiv F\hat{\delta} - \delta k\hat{\delta} = 0, \quad \forall \delta, \hat{\delta} \quad (7.24)$$

siin tuleb tähistust $\forall \delta, \hat{\delta}$ lugeda kõigi $\delta, \hat{\delta}$ puhul. Avaldis (7.24) väljendab *energiateoreemi*, st välisjõudude ja sisejõudude tööde summa on null. Samasus (7.24) jääb kehtima, kui vahetame ära δ ja $\hat{\delta}$ ning F ja \hat{F}

$$G(\hat{\delta}, \delta) \equiv \hat{F}\delta - \hat{\delta}k\delta = 0, \quad \forall \delta, \hat{\delta} \quad (7.25)$$

Vedru teise samasuse saame, kui lahutame avaldisest (7.24) avaldise (7.25)

$$B(\delta, \hat{\delta}) \equiv G(\delta, \hat{\delta}) - G(\hat{\delta}, \delta) = F\hat{\delta} - \hat{F}\delta \quad (7.26)$$

Vaatleme vedru aktiivtööd $W^{(a)}$ (joonis 7.2). Elastse vedru *deformatsioonienergia* U (vedru sisejõudude potentsiaalenergia Π_s) on võrdne vedru aktiivtööga $W_s^{(a)}$, kuid vastupidise märgiga

$$U(\delta) = \Pi_s(\delta) = -W_s^{(a)}(\delta) = \frac{1}{2}\delta k\hat{\delta} \quad (7.27)$$

Energiateoreem (7.24) aktiivtöö korral

$$\frac{1}{2}G(\delta, \delta) \equiv \frac{1}{2}F\delta - \frac{1}{2}\delta k\delta = 0 \quad (7.28)$$

Vedru potentsiaalenergia $\Pi(\delta)$ koosneb sisejõudude potentsiaalenergiast $\Pi_s^{(a)}$ ja välisjõudude potentsiaalenergiast $\Pi_v^{(a)}$

$$\Pi(\delta) = \Pi_s^{(a)} + \Pi_v^{(a)} = \frac{1}{2}\delta k\delta - \frac{1}{2}F\delta \quad (7.29)$$

siin

$$\Pi_v = -W_v \quad (7.30)$$

ja W_v on välisjõudude töö.

Vedru potentsiaalenergia (7.29) esimene variatsioon on funktsionaal $\Pi(\delta)$.

7.3.2 Tööde vastastikkuse teoreemi avaldisi

Sisejõudude tööde vastastikkuse teoreem *pikkel* on esitatud avaldisega (F.15) lk 685

$$\int_0^l N_x \frac{\hat{N}_x}{EA} dx = \int_0^l \hat{N}_x \frac{N_x}{EA} dx \quad (7.31)$$

ja *paindel* avaldisega (F.30)

$$\underbrace{\int_0^l M_y \frac{\hat{M}_y}{EI_y} dx}_{W_s^{(I)}} = \underbrace{\int_0^l \hat{M}_y \frac{M_y}{EI_y} dx}_{W_s^{(I)}} \quad (7.32)$$

Raja- ja välisjõudude töö vastastikkuse teoreem *pikkel* on esitatud avaldisega (F.11) lk 684

$$\underbrace{\overset{\leftrightarrow}{N}_x \hat{u}}_{W_r^I} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i}_{W_v^I} = \underbrace{\overset{\leftrightarrow}{\hat{N}}_x u}_{\hat{W}_r^{II}} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_x(x) u dx + \hat{F}_{xi} u_i}_{\hat{W}_v^{II}} \quad (7.33)$$

ja *paindel* avaldisega (F.28)

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[\overset{\leftrightarrow}{Q}_z \hat{w} + \overset{\leftrightarrow}{M}_y \hat{\varphi}_y \right]}_{W_r^I} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^I} = \\ & = \underbrace{\left[\overset{\leftrightarrow}{\hat{Q}}_z w + \overset{\leftrightarrow}{\hat{M}}_y \varphi_y \right]}_{\hat{W}_r^{II}} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_z(x) w dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{\hat{W}_v^{II}} \end{aligned} \quad (7.34)$$

siin on Q_z , M_y , p_z , w ja φ_y esimese koormusolukorra jõud ja siirded ning \hat{Q}_z , \hat{M}_y , \hat{p}_z , \hat{w} ja $\hat{\varphi}_y$ teise koormusolukorra jõud ja siirded.

7.4 Siirete vastastikkuse teoreem

Siirete vastastikkuse teoreem on tööde vastastikkuse teoreemi erijuht. Oletame, et nii esimeses kui ka teises koormusolukorras mõjub ainult üks üldistatud jõud, siis avaldisest (7.20) saame

$$1_i \hat{\delta}_{ik} = 1_k \hat{\delta}_{ki} \quad (7.35)$$

või

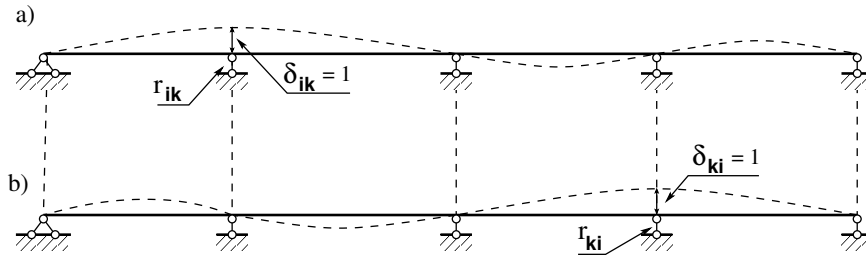
$$\hat{\delta}_{ik} = \hat{\delta}_{ki} \quad (7.36)$$

Avaldis (7.36) väljendab siirete vastastikkuse teoreemi (J. Maxwell⁴): *kohas k mõjuvale jõule 1_k vastav üldistatud siire, mis on põhjustatud ühikjõust kohas i, võrdub jõule 1_i vastava üldistatud siirdega, mis on põhjustatud ühikjõust kohas k.*

7.5 Reaktsioonide vastastikkuse teoreem

Staatikaga määramatu konstruktsiooni toe siire võib tekitada konstruktsioonis nii toe reaktsioone kui ka sisejõude. Vaatame staatikaga määramatut tala (joonis 7.7).

⁴James Clerk Maxwell, inglise füüsik, 1831–1879.



Joonis 7.7. Reaktsioonide vastastikune töö

Kasutame kahele koormusolukorrale tööde vastastikkuse teoreemi (7.34) (siin rajajõudude töö $W_r^{(p)} \neq 0$), toereaktsioone vaadeldakse kui välisjõude, saame

$$r_{ik}\delta_{ik} = r_{ki}\delta_{ki} \quad (7.37)$$

Kui $\delta_{ik} = \delta_{ki} = 1$, siis

$$r_{ik} = r_{ki} \quad (7.38)$$

Avaldis (7.38) väljendab reaktsioonide vastastikkuse teoreem (J. Rayleigh⁵): *sideme k ühiksiirdest (δ_{ki}) põhjustatud reaktsioon (r_{ik}) sidemes i võrdub sideme i ühiksiirdest (δ_{ik}) põhjustatud reaktsiooniga (r_{ki}) sidemes k.*

7.6 Siirete arvutamine

Konstruksiooni mingi punkti siirde arvutamisel vaadeldakse konstruktsiooni arvutuskeemi kahte tasakaaluolukorda. Ühe olukorrana vaadeldakse koormuse põhjustatud tasakaaluolukorda p ja arvutuskeemis tekkivaid sisejõude tähistatakse sel juhul N_p , Q_p , M_p . Teise olukorrana vaadeldakse tasakaaluolukorda, kus arvutuskeemile mõjub ainult üks otsitavale siirdele vastav üldistatud ühikjõud 1_i . Selles tasakaaluolukorras i tähistatakse sisejõud ja reaktsioonid väikeste tähtedega n_i , q_i , m_i ja c_i .

Virtuaaltöö avaldised pikkel (F.7) ja paindel (F.26) on

$$W^p = F_{xi}\hat{u}_i + \int_0^l q_x(x) \hat{u} dx + \overset{\leftrightarrow}{N}_x \hat{u} \Big|_0^l - \int_0^l N_x \hat{\lambda} dx = 0 \quad (7.39)$$

$$W^p = F_{zi}\hat{w}_i + \int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + \left[\overset{\leftrightarrow}{Q}_z \hat{w} + \overset{\leftrightarrow}{M}_y \hat{\varphi}_y \right] \Big|_0^l - \int_0^l M_y \hat{\psi}_y dx = 0 \quad (7.40)$$

Kirjutame lahti avaldistes (7.39) ja (7.40) esinevad rajaväärtused

$$\overset{\leftrightarrow}{N}_x \hat{u} \Big|_a^b = \overset{\leftrightarrow}{N}_{xb} \hat{u}_b - \overset{\leftrightarrow}{N}_{xa} \hat{u}_a \quad (7.41)$$

$$\left[\overset{\leftrightarrow}{Q}_z \hat{w} + \overset{\leftrightarrow}{M}_y \hat{\varphi}_y \right] \Big|_a^b = \overset{\leftrightarrow}{Q}_{zb} \hat{w}_b + \overset{\leftrightarrow}{M}_{yb} \hat{\varphi}_{yb} - \overset{\leftrightarrow}{Q}_{za} \hat{w}_a - \overset{\leftrightarrow}{M}_{ya} \hat{\varphi}_{ya} \quad (7.42)$$

⁵John William Rayleigh, inglise füüsik, 1842–1919, 1904. a Nobeli preemia.

Tugede siirete mõju arvestamisel võetakse kasutusele II märgikokkulepe. See kokkulepe avaldub toe siirde ja toereaktsiooni korrutises, vt R. Räämet [Rää75] lk 335: „Korrutis $\Delta c_j \cdot r'_{jk}$ on positiivne, kui paigutise ja reaktsiooni suunad ühtivad, ja negatiivne, kui nad on vastassuunalised.” Võtame kasutusele parema käe teljestiku (joonis 1.20). Seome x-telje varda teljega nii, et x-telg on suunatud varda algusest A lõppu B. Võtame kasutusele II märgikokkuleppe, mille puhul varda lõpus olevate rajajõudude suunad langevad kokku I märgikokkuleppes kasutusel olevate suundadega. Varda alguses olevate rajajõudude suunad on vastupidised I märgikokkuleppes kasutusel olevate suundadega. Seega langevad varda alguses olevad rajajõudude suunad kokku varda lõpus olevate rajajõudude suundadega. Selgituse kohaselt võtame avaldistes (7.39) ja (7.40) kasutusele järgmised tähised:

$$\begin{aligned}
F_{xi} \cdot \hat{u}_i &\equiv \text{„1}_i\text{”} \cdot u_i \\
N_x \cdot \hat{\lambda} &\equiv n_i \cdot \frac{N_p}{EA} \\
\overleftrightarrow{N}_x \cdot \hat{u} |_a &\equiv -C_a^{(N)} \cdot u_a \\
\overleftrightarrow{N}_x \cdot \hat{u} |^b &\equiv C_b^{(N)} \cdot u_b \\
F_{zi} \cdot \hat{w}_i &\equiv \text{„1}_i\text{”} \cdot w_i \\
M_y \cdot \hat{\psi}_y &\equiv m_i \cdot \frac{M_p}{EI} \\
\overleftrightarrow{M}_y \cdot \hat{\varphi}_y |_a &\equiv -C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \\
\overleftrightarrow{M}_y \cdot \hat{\varphi}_y |^b &\equiv C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b \\
\overleftrightarrow{Q}_z \cdot \hat{w} |_a &\equiv -C_a^{(Q_z)} \cdot w_a \\
\overleftrightarrow{Q}_z \cdot \hat{w} |^b &\equiv C_b^{(Q_z)} \cdot w_b
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Üldistatud ühikjõu „1_i” rakendamisel $q_x(x) = 0$ ja $q_z(x) = 0$. Koormuse põhjustatud tasakaaluolukorra „p” arvutusskeemis tekkivad sisejõud N_p , Q_p , M_p ja siire leitakse üldistatud ühikjõu „1_i” sihis järgmiste avaldistega:

$$\text{„1}_i\text{”} \cdot u_i = \int_a^b n_i \frac{N_p}{EA} dx - C_b^{(N)} \cdot u_b - C_a^{(N)} \cdot u_a \tag{7.44}$$

$$\text{„1}_i\text{”} \cdot w_i = \int_a^b m_i \frac{M_p}{EI} dx - C_b^{(Q_z)} \cdot w_b - C_a^{(Q_z)} \cdot w_a - C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b - C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \tag{7.45}$$

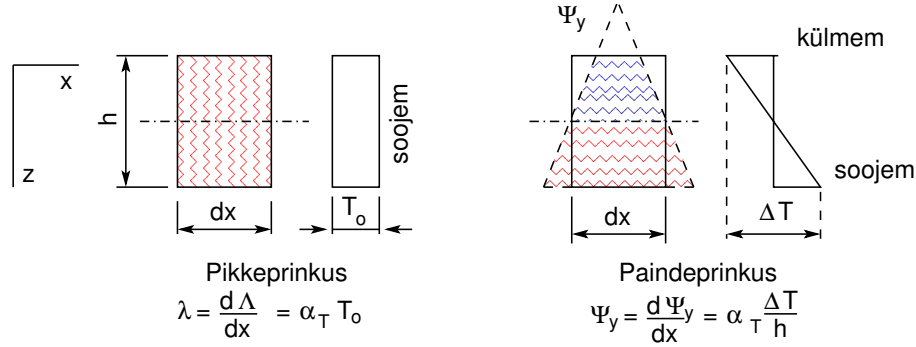
Siin on ühikjõust „1_i” põhjustatud rajajõudude (kontaktjõudude „C^m – contact force [KW90]) $C_a^{(N)}$, $C_b^{(N)}$, $C_a^{(Q_z)}$, $C_b^{(Q_z)}$, $C_a^{(M_y)}$ · φ_a , $C_a^{(M_y)}$ · φ_b ja toe siirete u_a , u_b , w_a , w_b , φ_a , φ_b korrutised positiivsed siis, kui nende suunad ühtivad.

7.7 Siirded temperatuuri muutusest

Joonisel 7.8 on vardast eraldatud elementaarlõik pikkusega dx . Temperatuuri muutust z-telje positiivsel poolel tähistame $T_{(+)}$ ja z-telje negatiivsel poolel $T_{(-)}$. Temperatuuri tõusmisel varda elementaarlõigu ülemised ja alumised kiud pikenevad $\alpha_T \cdot T_{(+)} dx$ ja $\alpha_T \cdot T_{(-)} dx$. Varda elementaarlõigu pikenemine

$$\lambda = \alpha_T \cdot T_0 \tag{7.46}$$

kus α_T on materjali joonpaisumistegur. Näiteks ehitusterasel (St 37) $\alpha_T = 1,1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.



Joonis 7.8. Prinkused temperatuuri muutusest

Kui ristlõige on mõlema peatelje suhtes sümmeetriline, siis arvutatakse temperatuuri muut telgjoonel valemiga

$$T_0 = \frac{1}{2} (T_{(+)} + T_{(-)}) \quad (7.47)$$

Kui aga ristlõige ei ole peatelje suhtes sümmeetriline, siis arvutatakse temperatuuri muut telgjoonel järgmise avaldisega:

$$T_0 = \frac{1}{h} (h_{\text{ülemine}} \cdot T_{(+)} + h_{\text{alumine}} \cdot T_{(-)}) \quad (7.48)$$

kus $h_{\text{ülemine}}$ ja h_{alumine} on tala ristlõike ülemiste ja alumiste kiudude kaugused varda telgjoonest.

Ülemiste ja alumiste kiudude erinevast temperatuuri muutusest tingitud varda kõverdumist nimetatakse temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud prinkuseks ψ_y

$$\psi_y = \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T \quad (7.49)$$

siin

$$\Delta T = T_{(-)} - T_{(+)} \quad (7.50)$$

Temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamiseks asendame valemities (7.39), (7.40) $\hat{\lambda}$ ja $\hat{\psi}_y$ avaldistega (7.46), (7.49). Koormusest põhjustatud siirete arvutamise valemities (7.44), (7.45) saab järgmised temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamise avaldisid:

$$„1_i” \cdot u_i = \int_a^b n_i \alpha_T \cdot T_0 dx - C_b^{(N)} \cdot u_b - C_a^{(N)} \cdot u_a \quad (7.51)$$

$$„1_i” \cdot w_i = \int_a^b m_i \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T dx - C_b^{(Qz)} \cdot w_b - C_a^{(Qz)} \cdot w_a - C_b^{(My)} \cdot \varphi_b - C_a^{(My)} \cdot \varphi_a \quad (7.52)$$

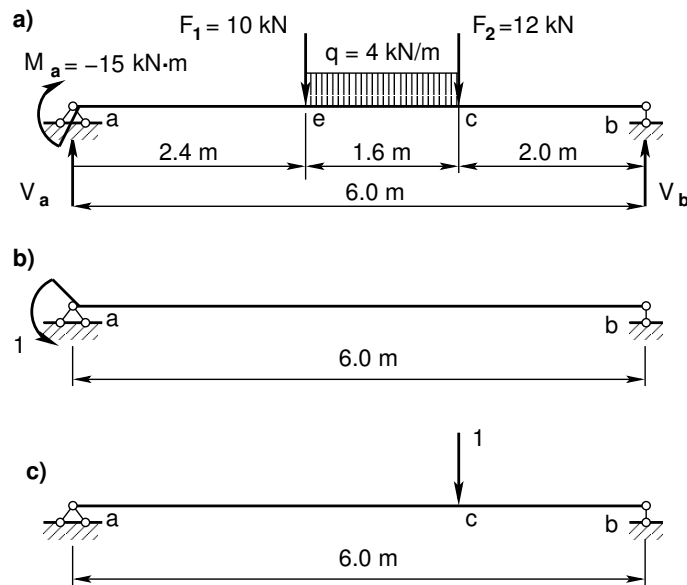
Avaldises (7.51) esineva integraali märk sõltub sisejõu n_i ja temperatuurist põhjustatud pikkeprinkuse $\alpha_T \cdot T_0$ märkidest. Kui sisejõud n_i ja $\alpha_T \cdot T_0$ on ühemärgilised, siis on integraali märk positiivne.

Avaldises (7.52) esineva integraali märgi võib määrata ka varda deformeerunud kuju järgi: kui ühikjõust põhjustatud kõverus $\frac{mn_i}{EI}$ ja temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud kõverus $\alpha_T \frac{1}{h} \Delta T$ on ühesuunalised, siis on korrutis positiivne, vastupidisel juhul negatiivne. Viimase kõveruse hindamisel arvestame, missugused kiud pikenevad ja missugused lühenevad.

7.8 Siirete arvutamise näited

7.8.1 Lihttala siirete arvutamise näide 7.1

Näide 7.1 Arvutada joonisel 7.9 a) näidatud lihttala pöördnurk φ_a tala algul ja tala ristlõike c siire w_c .



Joonis 7.9. Lihttala siirete arvutus

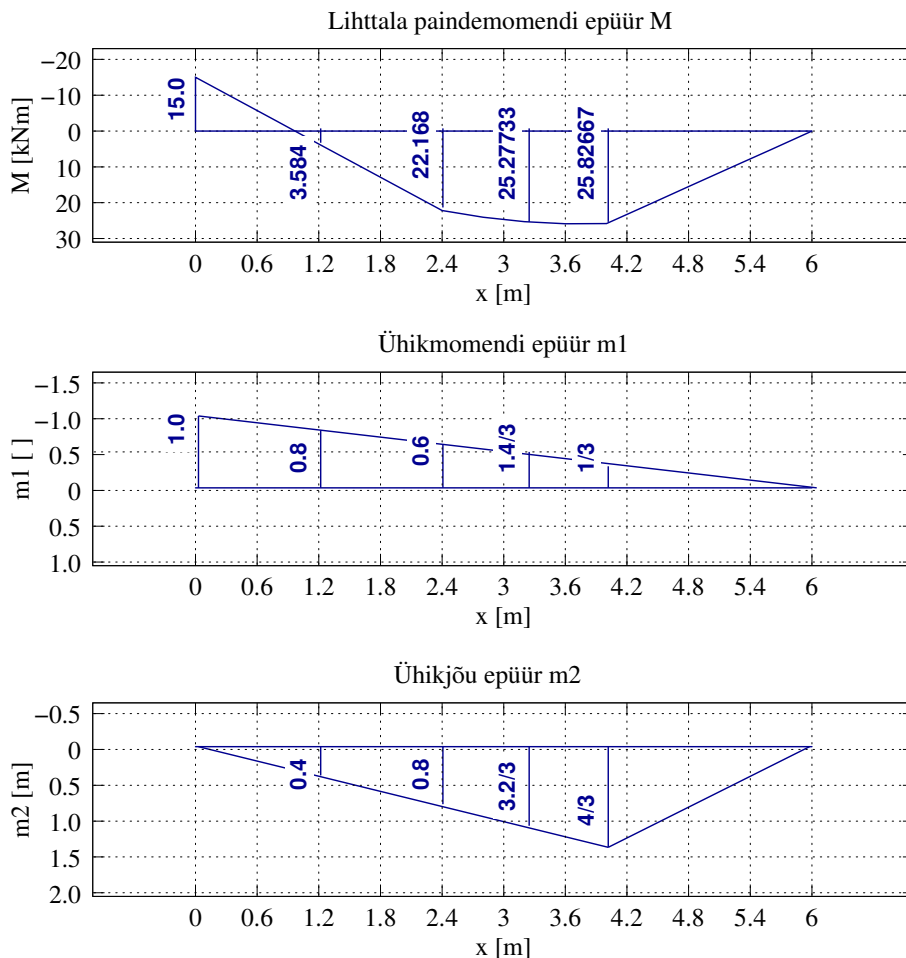
Talale 7.9 a) on koostatud paindemomentide epüür, mis on näidatud joonisel 7.10.

Pöördnurga φ_a arvutamiseks rakendame tala algusesse dimensioonita ühikmomendi. Ühikmomendi rakendamise suund on valitud antud teljestiku x - z positiivse pöörde suunas. Sellest ühikmomendist tekivad momendid m_1 on näidatud joonisel 7.10.

Tala ristlõike c siirde w_c arvutamiseks rakendame ristlõikesse dimensioonita ühikjõu. Ühikjõule vastav epüür m_2 on esitatud joonisel 7.10.

Alustame pöördnurga φ_a arvutamist. Kasutame Mohri valemist (7.45) ja integreerimiseks jagame tala kolmeks integreerimispiirkonnaks:

$$\varphi_a = \int_a^e m_1 \frac{M}{EI} dx + \int_e^c m_1 \frac{M}{EI} dx + \int_c^b m_1 \frac{M}{EI} dx \quad (7.53)$$



Joonis 7.10. Koormus- ja ühikepüürid

Avaldise (7.53) kaks esimest integraali arvutame Simpsoni valemi (D.17) järgi. Viimase integraali arvutamiseks kasutame Vereštšagini võtet (D.26). Saame

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{2.4}{6EI} [15.0 \cdot 1.0 - 4 \cdot 3.584 \cdot 0.8 - 22.168 \cdot 0.6] + \\ &+ \frac{1.6}{6EI} \left[-22.168 \cdot 0.6 - 4 \cdot 25.27733 \cdot \frac{1.4}{3} - 25.82667 \cdot \frac{1}{3} \right] + \\ &- \frac{2.0}{3EI} \cdot 25.82667 \cdot \frac{1}{3} = -28.072 \frac{1.0}{EI} \text{ rad} \end{aligned} \quad (7.54)$$

Siirde w_c arvutamiseks jagame tala kolmeks integreerimispiirkonnaks:

$$w_c = \int_a^e m_2 \frac{M}{EI} dx + \int_e^c m_2 \frac{M}{EI} dx + \int_c^b m_2 \frac{M}{EI} dx \quad (7.55)$$

Numbrilisel integreerimise arvutame avaldise (7.55) kaks esimest integraali Simpsoni valemi (D.17) järgi. Viimase integraali arvutamiseks kasutame Vereštšagini võtet (D.26):

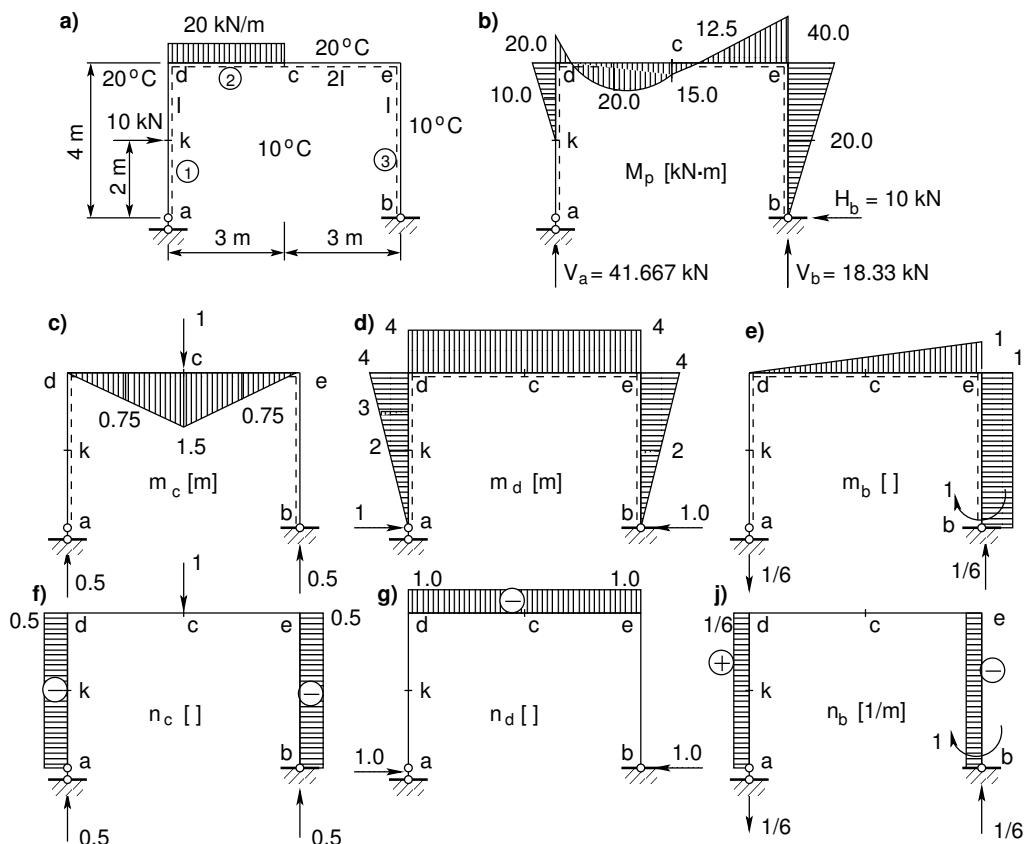
$$w_c = \frac{2.4}{6EI} [-15.0 \cdot 0.0 + 4 \cdot 3.584 \cdot 0.4 + 22.168 \cdot 0.8] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1.6}{6EI} \left[22.168 \cdot 0.8 + 4 \cdot 25.27733 \cdot \frac{3.2}{3} + 25.82667 \cdot \frac{4}{3} \right] + \\
 & + \frac{2.0}{3EI} \cdot 25.82667 \cdot \frac{4}{3} = 75.017 \frac{1.0}{EI} \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{7.56}$$

Ülekandemeetodi kasutamise näites 1.2 arvutasime sama tala ristlõigete pöörded ja siirdeid. Ristlõike a pöördenurgaks saime programmiga talaRajaSiirded.m arvutades $\varphi_a = -28.07218 \frac{1.0}{EI}$ rad ja ristlõike siirdeks $w_c = 75.01653 \frac{1.0}{EI}$ m.

7.8.2 Murdjoonelise teljega varda siirete arvutamise näide 7.2

Näide 7.2 Vaatleme siirete arvutust 1) koormusest, 2) temperatuuri muutusest, 3) tugede siiretest (ülesanne on võetud raamatust [Rää75] lk 346). Arvutada joonisel 7.11 a) kujutatud murdjoonelise teljega varda arvutusskeemi ristlõike c vertikaalsiire, toeristlõike a horisontaalsiire ja toeristlõike b pööre 1) koormusest, 2) temperatuuri muutusest, 3) tugede siiretest. Temperatuur tõuseb sisepoolel 10°C ja välispoolel vasakul ning üleval 20°C ja paremal 10°C võrra. Varraste ristlõiked on sümmeetrilised, ristlõigete inertsimomendid $I_1 = I_3 = I$ ja $I_2 = 2I$ ning ristlõigete kõrgused $h_1 = h_3 = 50$ cm ja $h_2 = 60$ cm. Joonpaisumistegur $\alpha = 2.1 \cdot 10^{-5}$. Tugi a vajub $\Delta a_z = 2$ cm ja tugi b $\Delta b_z = 1$ cm ning nihkub vasakult paremale $\Delta b_x = 0.5$ cm võrra.



Joonis 7.11. Siirete arvutus

Koormusest põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.11 b). Ristlõike c vertikaalsiirde arvutamiseks rakendatakse sinna ühikjõudu. Ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.11 c). Vertikaalsiirde w_{cp} arvutamiseks vaatleme epüüri M_p (joonis 7.11 b)) ja epüüri m_c (joonis 7.11 c)). Määrame integreerimisrajad (korrutisel $m_c \cdot M_p$ ei tohi vaadeldaval lõigul olla murdepunkte):

$$w_{cp} = \int_d^c m_c \frac{M_p}{E2I} dx + \int_c^e m_c \frac{M_p}{E2I} dx \quad (7.57)$$

Avaldise (7.57) mõlemad integraalid arvutame Simpsoni valemi (D.17) järgi

$$\begin{aligned} w_{cp} &= \frac{3.0}{6E2I} [0 \cdot 20.0 + 4 \cdot 0.75 \cdot 20.0 + 1.5 \cdot 15.0] + \\ &+ \frac{3.0}{6E2I} [1.5 \cdot 15.0 - 4 \cdot 0.75 \cdot 12.5 + 0 \cdot 40.0] = \\ &= 16.875 \frac{1.0}{EI} \approx 16.9 \frac{1.0}{EI} \text{ m} \end{aligned} \quad (7.58)$$

Ristlõikesse a rakendatud horisontaalsest ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.11 d). Toeristlõike a horisontaalsiirde arvutamiseks vaatleme epüüri M_p (joonis 7.11 b)) ja epüüri m_d (joonis 7.11 d)). Määrame integreerimisrajad (korrutisel $m_d \cdot M_p$ ei tohi vaadeldaval lõigul olla murdepunkte):

$$u_{ap} = \int_k^d m_d \frac{M_p}{EI} dx + \int_d^c m_d \frac{M_p}{E2I} dx + \int_c^e m_d \frac{M_p}{E2I} dx + \int_e^b m_d \frac{M_p}{E2I} dx \quad (7.59)$$

Avaldise (7.59) esimesed kaks integraali arvutame Simpsoni valemi (D.17) järgi. Viimase kahe integraali arvutamiseks kasutame Vereštšagini võtet (D.26). Saame

$$\begin{aligned} u_{ap} &= \frac{2.0}{6EI} [2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 10.0 + 4.0 \cdot 20.0] + \\ &+ \frac{3.0}{6E2I} [4 \cdot 20.0 - 4 \cdot 4 \cdot 20.0 - 4 \cdot 15.0] + \\ &+ \frac{1.0}{E2I} (12.5 \cdot 3) \cdot 4 + \frac{1.0}{EI} \left(\frac{1}{2} 40.0 \cdot 4 \right) \left(\frac{2}{3} 4 \right) = 280 \frac{1.0}{EI} \text{ m} \end{aligned} \quad (7.60)$$

Toeristlõikesse b rakendatud ühikmomendist põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.11 e). Määrame integreerimisrajad (korrutisel $m_e \cdot M_p$ ei tohi vaadeldaval lõigul olla murdepunkte)

$$\varphi_{bp} = \int_d^c m_e \frac{M_p}{EI} dx + \int_c^e m_e \frac{M_p}{E2I} dx + \int_e^b m_e \frac{M_p}{E2I} dx \quad (7.61)$$

Avaldise (7.61) esimesed kaks integraali arvutame Simpsoni valemi (D.17) järgi. Viimase integraali arvutamiseks kasutame Vereštšagini võtet (D.26). Saame

$$\begin{aligned} \varphi_{bp} &= \frac{3.0}{6E2I} [0 \cdot 20.0 - 4 \cdot 0.25 \cdot 20.0 - 0.5 \cdot 15.0] + \\ &+ \frac{3.0}{6E2I} [-0.5 \cdot 15.0 + 4 \cdot 0.75 \cdot 12.5 + 1 \cdot 40.0] + \\ &+ \frac{1.0}{EI} \left(\frac{1}{2} 40.0 \cdot 4 \right) \cdot 1 = \\ &= 90.625 \frac{1.0}{EI} \text{ rad} \approx 90.6 \frac{1.0}{EI} \text{ rad} \end{aligned} \quad (7.62)$$

Sümmeetriliste ristlõigetega varraste puhul arvutatakse temperatuuri muutus varda telgjoonel valemiga (7.47):

$$T_{01} = \frac{1}{2} (T_{(+)} + T_{(-)}) = \frac{1}{2} (10 + 20) = 15^\circ\text{C} \quad (7.63)$$

$$T_{02} = T_{01} = 15^\circ\text{C} \quad (7.64)$$

$$T_{03} = \frac{1}{2} (10 + 10) = 10^\circ\text{C} \quad (7.65)$$

Temperatuuri muutused varraste alumiste ja ülemiste kiudude vahel on järgmised (7.50):

$$\Delta T_1 = \Delta T_2 = (T_{(-)} - T_{(+)}) = 10 - 20 = -10^\circ\text{C} \quad (7.66)$$

$$\Delta T_3 = 10 - 10 = 0^\circ\text{C} \quad (7.67)$$

Süüded temperatuuri muutusest arvutatakse valemitega (7.51), (7.52)

$$\Delta_{iT} = \int_a^b n_i \alpha_T \cdot T_0 dx + \int_a^b m_i \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T dx \quad (7.68)$$

Ristlõike c vertikaalsiire temperatuuri muutusest

$$\begin{aligned} w_{ct} &= 1.2 \cdot 10^{-5} \left[15 \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \right) + 10 \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \right) \right] + \\ &\quad + 1.2 \cdot 10^{-5} \left[-\frac{10}{0.6} \cdot \frac{1.5 \cdot 6.0}{2} \right] = \\ &= -15 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -1.5 \text{ mm} \end{aligned} \quad (7.69)$$

Toeristlõike a horisontaalsiire temperatuuri muutusest

$$\begin{aligned} u_{at} &= 1.2 \cdot 10^{-5} [15 (0 \cdot 4) + 15 (-1 \cdot 6) + 10 (0 \cdot 4)] + \\ &\quad + 1.2 \cdot 10^{-5} \left[-\frac{10}{0.5} \left(-\frac{4 \cdot 4.0}{2} \right) + \frac{-10}{0.6} (-4 \cdot 6.0) + \frac{0}{0.5} (4 \cdot 4.0) \right] = \\ &= 564 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 5.64 \text{ mm} \end{aligned} \quad (7.70)$$

Toeristlõike b pööre temperatuuri muutusest

$$\begin{aligned} \varphi_{bt} &= 1.2 \cdot 10^{-5} \left[15 \left(\frac{1}{6} \cdot 4 \right) + 15 (0 \cdot 6) + 10 (0 \cdot 4) \right] \\ &\quad + 1.2 \cdot 10^{-5} \left[-\frac{10}{0.6} \left(-\frac{1 \cdot 6.0}{2} \right) + \frac{0}{0.5} (-1 \cdot 4.0) \right] = \\ &= 64 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 0.00064 \text{ rad} \end{aligned} \quad (7.71)$$

Süüded tugede nihkumisest arvutatakse valemitega (7.44), (7.45):

$$\begin{aligned} \Delta_{ic} &= -C_b^{(N)} \cdot u_b - C_a^{(N)} \cdot u_a - \\ &\quad - C_b^{(Q_z)} \cdot w_b - C_a^{(Q_z)} \cdot w_a - C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b - C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \end{aligned} \quad (7.72)$$

$$w_{cr} = -(-2 \cdot 0.5 - 1 \cdot 0.5) = 1.5 \text{ cm} \quad (7.73)$$

$$u_{ar} = -(-0.5 \cdot 1) = 0.5 \text{ cm} \quad (7.74)$$

$$\varphi_{cr} = -\left(2 \cdot \frac{1}{600} - 1 \cdot \frac{1}{600} \right) = -\frac{1}{600} \text{ rad} \quad (7.75)$$

7.8.3 Murdjoonelise teljega varda siirete arvutamise näide 7.3

Näide 7.3 Vaatleme eelmist näidet 7.2. Arvutused teostame programmiga *siireNAB.m*⁶.

Numbrilisel integreerimisel kasutame Simpsoni valemit (D.22 lk 666). Moodustame ühik-epüüridest (vt joonis 7.11 c), d) ja e)) matriksi \mathbf{M}_x ja koormusest põhjustatud paindemomendi epüürist matriksi \mathbf{M}_p

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -2.0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -2.0 & 0 \\ 0 & -3.0 & 0 \\ 0 & -4.0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -4.0 & 0.0 \\ 0.75 & -4.0 & -0.25 \\ 1.5 & -4.0 & -0.5 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1.5 & -4.0 & -0.5 \\ 0.75 & -4.0 & -0.75 \\ 0 & -4.0 & -1.0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -4.0 & -1.0 \\ 0 & -2.0 & -1.0 \\ 0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{post 2} \end{array} \quad \mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -10 \\ -20 \\ \dots \\ -20 \\ 20 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ -12.5 \\ -40 \\ \dots \\ -40 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.76)$$

Võtame kasutusele Simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori \mathbf{smps} ja varda telgjoonel temperatuuri kirjeldava vektori \mathbf{T}_o , mille transponeeritud kuju on esitatud avaldisega (7.77)

$$\mathbf{smps} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} h2/I2 \\ 4 \cdot h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 \cdot h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ L05/I1 \\ 4 \cdot L05/I1 \\ L05/I1 \\ \dots \\ L05/I1 \\ 4 \cdot L05/I1 \\ L05/I1 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 \cdot h2/I2 \\ h2/I2 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{post 2} \end{array} \quad \mathbf{T}_o = 1.2 \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (7.77)$$

⁶ ./octaveProgrammide/siireNAB.m

siin

$$\begin{aligned} h &= 4; & h2 &= h/2; \\ L &= 6; & L05 &= L/2; \\ I1 &= 2; & I2 &= 1; \end{aligned}$$

Simpsoni valemi abil pindala integreerides ei ole vaja ristlõike inertsimomente $I1, I2$. Järgnevalt avaldame Simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori $\mathbf{smps0}'$ (7.78)

$$\mathbf{smps0}' = \frac{1}{6} \cdot \left[\begin{array}{ccc} \underbrace{h2 \quad 4 \cdot h2 \quad h2}_{\text{pool posti 1}} & \underbrace{h2 \quad 4 \cdot h2 \quad h2}_{\text{pool posti 1}} & \\ \underbrace{L05 \quad 4 \cdot L05 \quad L05}_{\text{pool riivi}} & \underbrace{L05 \quad 4 \cdot L05 \quad L05}_{\text{pool riivi}} & \\ & \underbrace{h \quad 4 \cdot h \quad h}_{\text{post 2}} & \end{array} \right] \quad (7.78)$$

Ühikjõust põhjustatud normaaljõu epüüridest (vt joonis 7.11 f), g) ja j)) moodustame maatriksi \mathbf{N}_x ja temperatuuri muutusi alumiste ja ülemiste kiudude vahel kirjeldava vektori \mathbf{T}_p (7.79) (paine temperatuurist)

$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ \dots & \dots & \dots \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -0.5 & 0.0 & -1/6 \\ -0.5 & 0.0 & -1/6 \\ -0.5 & 0.0 & -1/6 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{post 2} \end{array} \quad \mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} -10 \setminus Hpost \\ -10 \setminus Hpost \\ -10 \setminus Hpost \\ \dots \\ -10 \setminus Hpost \\ -10 \setminus Hpost \\ -10 \setminus Hpost \\ \dots \\ -10 \setminus Hriiv \\ -10 \setminus Hriiv \\ -10 \setminus Hriiv \\ \dots \\ -10 \setminus Hriiv \\ -10 \setminus Hriiv \\ -10 \setminus Hriiv \\ \dots \\ 0 \setminus Hpost \\ 0 \setminus Hpost \\ 0 \setminus Hpost \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

siin

$Hpost$ – posti ristlõike kõrgus,

$Hriiv$ – riivi ristlõike kõrgus.

Vektorite \mathbf{M}_x' (7.76) ja \mathbf{M}_p (7.76) korrutamiseks kasutame element-element korrutamist (vt paragrahvi A.5 avaldist (A.24) lk 631). Tulemuse korrutame veel vektoriga \mathbf{smps} (7.77)

$$\mathbf{W} = \mathbf{M}_x' \cdot [\mathbf{M}_p'; \mathbf{M}_p'; \mathbf{M}_p'] \cdot \mathbf{smps} = \begin{bmatrix} 16.875 \\ 280.000 \\ 90.625 \end{bmatrix} \quad (7.80)$$

Saadud tulemus langeb kokku avaldistega (7.58), (7.60) ja (7.62).

Siirete arvutamiseks temperatuurist transponeerime ning korrutame $\mathbf{T_p}$ ja $\mathbf{T_o}$ avaldised (7.79) ja (7.77) joonpaisumisteguriga ($\alpha = 2.1 \cdot 10^{-5}$) läbi:

$$\mathbf{T_pT} = \alpha \cdot \mathbf{T_p}' \quad (7.81)$$

$$\mathbf{T_oT} = \alpha \cdot \mathbf{T_o}' \quad (7.82)$$

Korrutame epüürid temperatuuri ja temperatuuri erinevustega

$$\mathbf{M_xT T_p} = \mathbf{M_x}' \cdot [\mathbf{T_pT}; \mathbf{T_pT}; \mathbf{T_pT}] \quad (7.83)$$

$$\mathbf{N_xT T_o} = \mathbf{N_x}' \cdot [\mathbf{T_oT}; \mathbf{T_oT}; \mathbf{T_oT}] \quad (7.84)$$

Leiame siirded temperatuurist

$$\mathbf{WT} = \mathbf{M_xT T_p} \cdot \mathbf{smps0} + \mathbf{N_xT T_o} \cdot \mathbf{smps0} = \begin{bmatrix} -1.5000e^{-03} \\ 5.6400e^{-03} \\ 6.4000e^{-04} \end{bmatrix} \quad (7.85)$$

Leitud tulemus (7.85) ühtib tulemustega (7.69), (7.70) ja (7.71).

Arvutuspäevik 7.1 octave:1> diary siireNA.out

octave:2> diary on

octave:3> siireNA

IntegreerimisPiirkondadeArv = 5

Joonpaisumistegur_talpha = 1.2000e-05

h = 4

h2 = 2

L = 6

L05 = 3

I1 = 2

I2 = 1

Hpost = 0.50000

Hriiv = 0.60000

=====

Ühikepüüride ordinaadid

Integreerimis-				
Jrk	piirkond	m1	m2	m3
1	1	0.0000	0.0000	0.0000
2	1	0.0000	0.0000	0.0000
3	1	0.0000	0.0000	0.0000
4	2	0.0000	0.0000	0.0000
5	2	0.0000	0.0000	0.0000
6	2	0.0000	0.0000	0.0000
7	3	0.0000	0.0000	0.0000
8	3	0.7500	-0.2500	-0.2500
9	3	1.5000	-0.5000	-0.5000
10	4	1.5000	-0.5000	-0.5000
11	4	0.7500	-0.7500	-0.7500
12	4	0.0000	-1.0000	-1.0000
13	5	0.0000	-1.0000	-1.0000

14	5	0.0000	-1.0000	-1.0000
15	5	0.0000	-1.0000	-1.0000

=====

Ühikepüüride ordinaadid

Integreerimis-				
Jrk	piirkond	n1	n2	n3
1	1	-0.5000	0.1667	0.1667
2	1	-0.5000	0.1667	0.1667
3	1	-0.5000	0.1667	0.1667
4	2	-0.5000	0.1667	0.1667
5	2	-0.5000	0.1667	0.1667
6	2	-0.5000	0.1667	0.1667
7	3	0.0000	0.0000	0.0000
8	3	0.0000	0.0000	0.0000
9	3	0.0000	0.0000	0.0000
10	4	0.0000	0.0000	0.0000
11	4	0.0000	0.0000	0.0000
12	4	0.0000	0.0000	0.0000
13	5	-0.5000	-0.1667	-0.1667
14	5	-0.5000	-0.1667	-0.1667
15	5	-0.5000	-0.1667	-0.1667

=====

Mp epüüri ordinaadid

Integreerimispiir-		
Jrk	kond	Mp

1	1	0.0000
2	1	0.0000
3	1	0.0000
4	2	0.0000
5	2	-10.0000
6	2	-20.0000
7	3	-20.0000
8	3	20.0000
9	3	15.0000
10	4	15.0000
11	4	-12.5000
12	4	-40.0000
13	5	-40.0000
14	5	-20.0000
15	5	0.0000

=====

W - siirded koormusest

1.6875e+01	2.8000e+02	9.0625e+01
------------	------------	------------

=====

WT - siirded temperatuurist

-1.5000e-03 5.6400e-03 6.4000e-04

octave:4> diary off

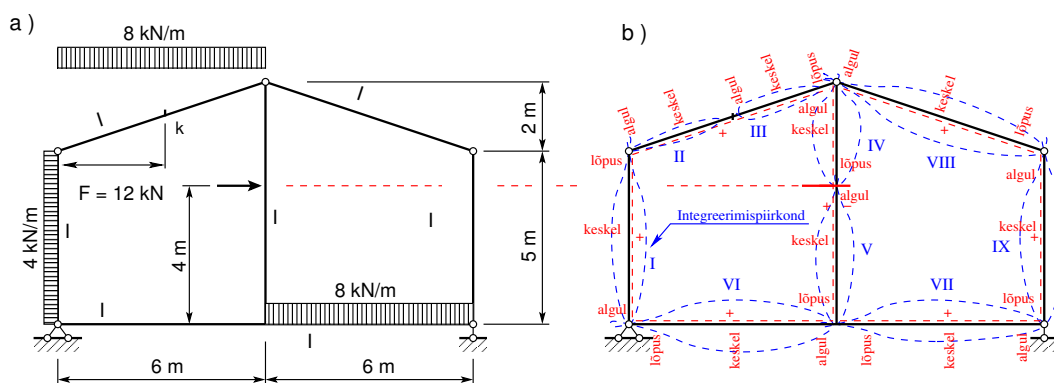
7.8.4 Raami siirete arvutamise näide 7.4

Näide 7.4 Leida joonisel 7.12 a) näidatud raami ristlõikes k vertikaalsiire ja pööre:

1) antud koormusest;

2) temperatuuri tõusust 15°C väljaspool raami ja 25°C raami sisemisel poolel.

Koormusest põhjustatud siirete leidmisel arvestada ainult paindemomendi mõju. Temperatuuri muutusest tingitud siirded arvutada kahes osas – vastavalt ühtlasele ja mitteühtlasele temperatuuri muutusele. I-tala profiil valida koormusest põhjustatud suurima paindemomendi järgi, võttes lubatavaks pingeks $[\sigma] = 0.16\text{ GPa}$. Kõnesolevas näites on raami varraste jäikused võrdsed, $EI = \text{const}$.



Joonis 7.12. Raami siirete arvutamine

Raami (joonis 7.12) toereaktsioonide arvutamiseks vaatleme joonist 7.13. Arvutuse teostame programmi GNU Octave'i abil (vaata arvutuse päevikut 7.2).

Arvutuspäevik 7.2 Toereaktsioonide arvutus koormusest q , F

```
octave:1> diary raamiSiitoeR.out
octave:2> diary on
octave:3> % momentide summa toe 'a' suhtes
octave:3> % -12*Vb+(4*5*2.5+8*6*3+12*4+8*6*9)=0
octave:3> Vb=(4*5*2.5+8*6*3+12*4+8*6*9)/12
Vb = 56.167
octave:4> % momentide summa toe 'b' suhtes
octave:4> % -12*Va+(-4*5*2.5+8*6*9-12*4+8*6*3)=0
octave:4> Va=(-4*5*2.5+8*6*9-12*4+8*6*3)/12
Va = 39.833
octave:5> % kontroll sumY
```



```

octave:5> sumY=8*6+8*6-Va-Vb
sumY = 0
octave:6> % horisontaalne toereaktsioon
octave:6> Ha=4*5+12
Ha = 32
octave:7> % leiame Na vardas 'af', selleks
octave:7> % momentide summa punkti 'd' suhtes
octave:7> Na=(Ha*5-4*5*2.5)/5
Na = 22
octave:8> % leiame Qa vardas 'af', selleks
octave:8> % momentide summa punkti 'c' suhtes
octave:8> Qa=(Ha*7+Va*6-Na*7-4*5*4.5-8*6*3)/6
Qa = 12.500
octave:9> % leiame horisontaalse jõu Hc sõlmes 'c'
octave:9> Hc=-Ha+Na+4*5
Hc = 10
octave:10> % leiame vertikaalse jõu Vc sõlmes 'c'
octave:10> Vc=-Va+Qa+8*6
Vc = 20.667
octave:11> diary off

```

Leitud toereaktsioonid kanname joonisele 7.13.

Arvutuspäevik 7.3 Paindemomentide M_p arvutus

```

octave:1> diary raamiMSi1.out
octave:2> diary on
octave:3> % arvutame momendi punktis 'i'
octave:3> Mi=10*3
Mi = 30
octave:4> % moment punktis 'f'
octave:4> Mfi=10*7+12*4
Mfi = 118
octave:5> Mfa=12.5*6
Mfa = 75
octave:6> Mfb=56.167*6-8*6^2/2
Mfb = 193.00
octave:7> Mfb_keskel=56.167*3-8*3^2/2
Mfb_keskel = 132.50
octave:8> Mad_keskel=4*5^2/8
Mad_keskel = 12.500
octave:9> Mdc_keskel=8*6^2/8
Mdc_keskel = 36
octave:10> Mkc_keskel=20.66667*1.5+10*0.5-8*1.5^2/2
Mkc_keskel = 27.000
octave:11> diary off

```

Leitud paindemomendid kanname joonisele 7.13.

Maksimaalne moment on $193.0 \text{ kN}\cdot\text{m} = 1.93\text{e}+05 \text{ N}\cdot\text{m}$. $1.93\text{e}+05$ tähendab, et 1.93 on korrutatud 10^5 (kümme astmes viis). Sellist arvu esitamise kuju nimetatakse inseneri-formaadiks.

Valime ristlõikeks I-tala. Teraselastsusmodul ($E=210\text{GPa}$) $E = 2.1e+11$ [Pa] ja lubatav pingeline $[\sigma] = 0.16\text{GPa} = 1.6e+08$ [Pa].

$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]} = \frac{1.93e+05}{[1.6e+08]} = 1.2063e-04 \text{ N} \cdot \text{m}^3 \quad (7.86)$$

Valime I-18, mille $I = 1290 \text{ cm}^4 = 1.29e+03 \text{ cm}^4 = 1.29e-05 \text{ m}^4$, $W = 143 \text{ cm}^3$.

Pikijõu arvutamiseks vaatleme esmalt koordinaatteisendust (1.45). Arvestades seost $\cos \beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, võime seosed (1.45) kirjutada kujul

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (7.87)$$

Arvutuspäevik 7.4 Pikijõu N_p arvutus

```
octave:1> diary raamiNSi1.out
octave:2> diary on
octave:3> Lk=sqrt(6^2+2^2)
Lk = 6.3246
octave:4> cosA=6/Lk
cosA = 0.94868
octave:5> sinA=2/Lk
sinA = 0.31623
octave:6> % teisendusmaatriks T
octave:6> T=[cosA -sinA; sinA cosA]
T =

    0.94868   -0.31623
    0.31623    0.94868

octave:7> % jõuvektori komponendid globaalsetes koordinaatides, punktis 'c'
octave:7> % x-telje suunal Fx=-10.0 ja z-telje suunal Fz=-20.6667
octave:7> % z-telg on suunatud alla
octave:7> F=[-10.0; -20.666666667]
F =

   -10.000
   -20.667

octave:8> % Fx_lokaalne=Floc(1,1) ja Fz_lokaalne=Floc(2,1)
octave:8> % N_lokaalne=Fx_lokaalne ja Q_lokaalne=Fz_lokaalne
octave:8> Floc=T*F
Floc =

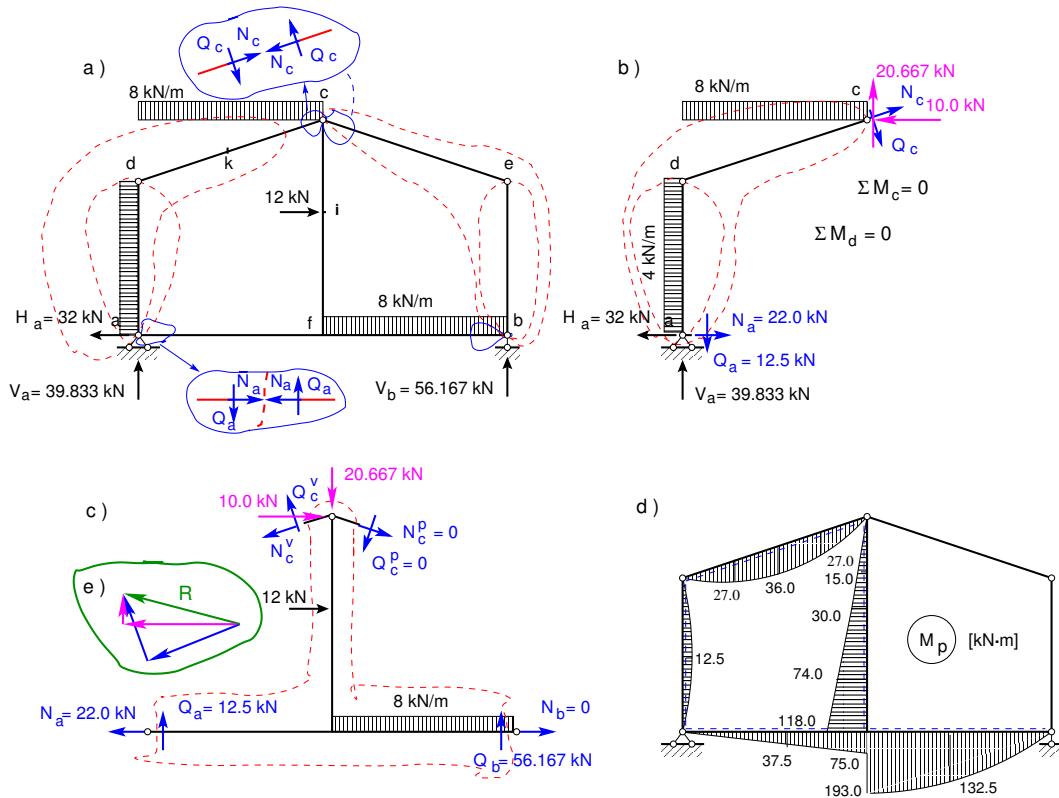
   -2.9513
  -22.7687

octave:9> % Qc=-22.7687 ja Nc=-2.9513
octave:9> Qc=Floc(2,1)
Qc = -22.7687
octave:10> Nc=Floc(1,1)
Nc = -2.9513
```

```

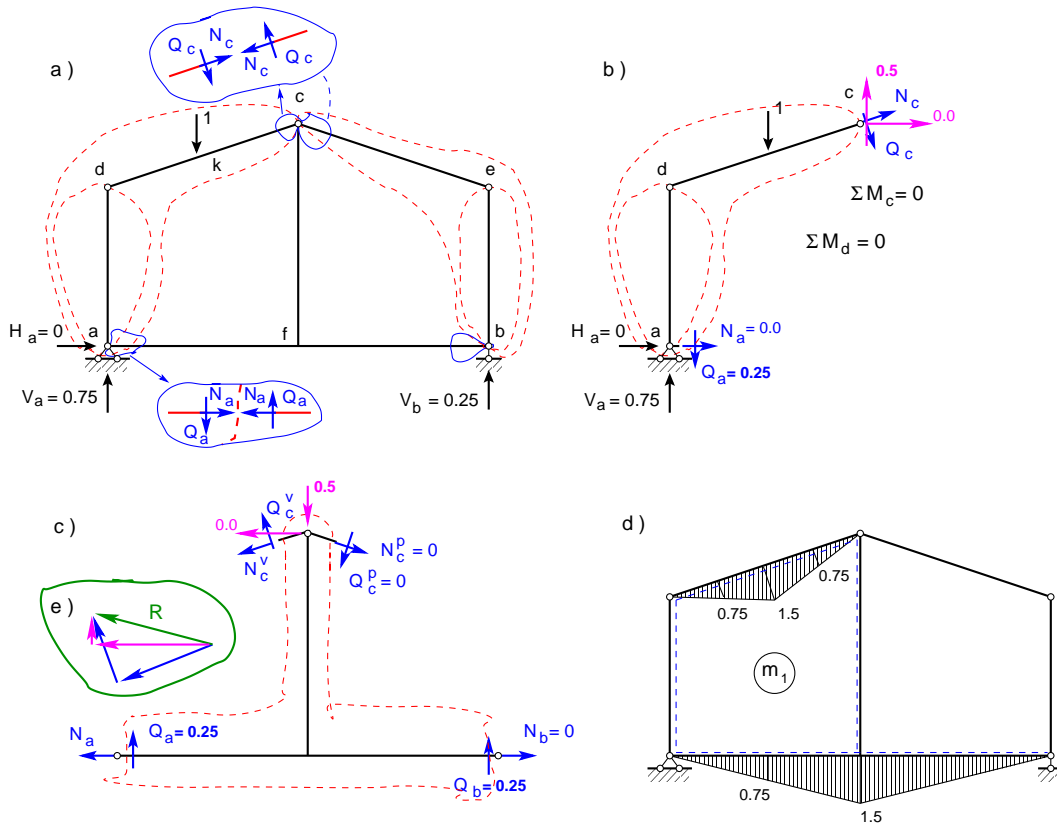
octave:11> Ndc=Nc-8*6*sinA
Ndc = -18.130
octave:12> Qdc=Qc+8*6*cosA
Qdc = 22.768
octave:13> Va=39.833
Va = 39.833
octave:14> Qa=12.5
Qa = 12.500
octave:15> Nad=-Va+Qa
Nad = -27.333
octave:16> Nfc=-20.667
Nfc = -20.667
octave:17> Naf=22.0
Naf = 22
octave:18> diary off
    
```

Leitud pikijõud kanname joonisele 7.16.



Joonis 7.13. Siirete arvutamine. Raami paindemoment M_p

Raami (joonis 7.12) punkti k siirete arvutamiseks vaatleme joonist 7.14. Leiame raami toereaktsioonid. Arvutuse teeme programmi GNU Octave, i abil (vaata arvutuspäevikut 7.5).

Joonis 7.14. Siirete arvutamine. Raami paindemoment m_1

Arvutuspäevik 7.5 Toereaktsioonide arvutus ühikjõust

```

octave:1> diary raamiSi2toeR.out
octave:2> diary on
octave:3> % momentide summa toe 'a' suhtes
octave:3> % -12*Vb+1*3=0
octave:3> Vb=1*3/12
Vb = 0.25000
octave:4> % momentide summa toe 'b' suhtes
octave:4> % -12*Va+1*9=0
octave:4> Va=1*9/12
Va = 0.75000
octave:5> % reaktsioon sõlmes 'a' Qa
octave:5> Qa=(Va*6-1*3)/6
Qa = 0.25000
octave:6> % reaktsioon sõlmes 'c' sum Y
octave:6> Vc=1+Qa-Va
Vc = 0.50000
octave:7> diary off

```

Leitud toereaktsioonid kanname joonisele 7.14.

Arvutuspäevik 7.6 *Paindemomentide m_1 arvutus*

```

octave:8> diary raamiMSi2.out
octave:9> diary on
octave:10> Va
Va = 0.75000
octave:11> Vb
Vb = 0.25000
octave:12> Vc
Vc = 0.50000
octave:13> Qa
Qa = 0.25000
octave:14> F=1
F = 1
octave:15> L=6
L = 6
octave:16> % paindemoment punktis 'k'
octave:16> Mk=F*L/4
Mk = 1.5000
octave:17> % paindemoment punktis 'f'
octave:17> Mfa=Qa*6
Mfa = 1.5000
octave:18> diary off

```

Leitud paindemomendid kanname joonisele 7.14.

Arvutuspäevik 7.7 *Pikijõu n_1 arvutus*

```

octave:1> diary raamiNSi2.out
octave:2> diary on
octave:3> Lk=sqrt(6^2+2^2)
Lk = 6.3246
octave:4> cosA=6/Lk
cosA = 0.94868
octave:5> sinA=2/Lk
sinA = 0.31623
octave:6> % teisendusmaatriks T
octave:6> T=[cosA sinA; -sinA cosA]
T =

    0.94868   -0.31623
    0.31623    0.94868

octave:7> % Jõuvektori komponendid globaalsetes koordinaatides
octave:7> % x-telje suunal Fx=0.0 ja z-telje suunal Fz=-0.5
octave:7> % z-telg on suunatud alla
octave:7> F=[0.0; -0.5]
F =

    0.00000
   -0.50000

octave:8> % Fx_lokaalne=Floc(1,1) ja Fz_lokaalne=Floc(2,1)

```

```

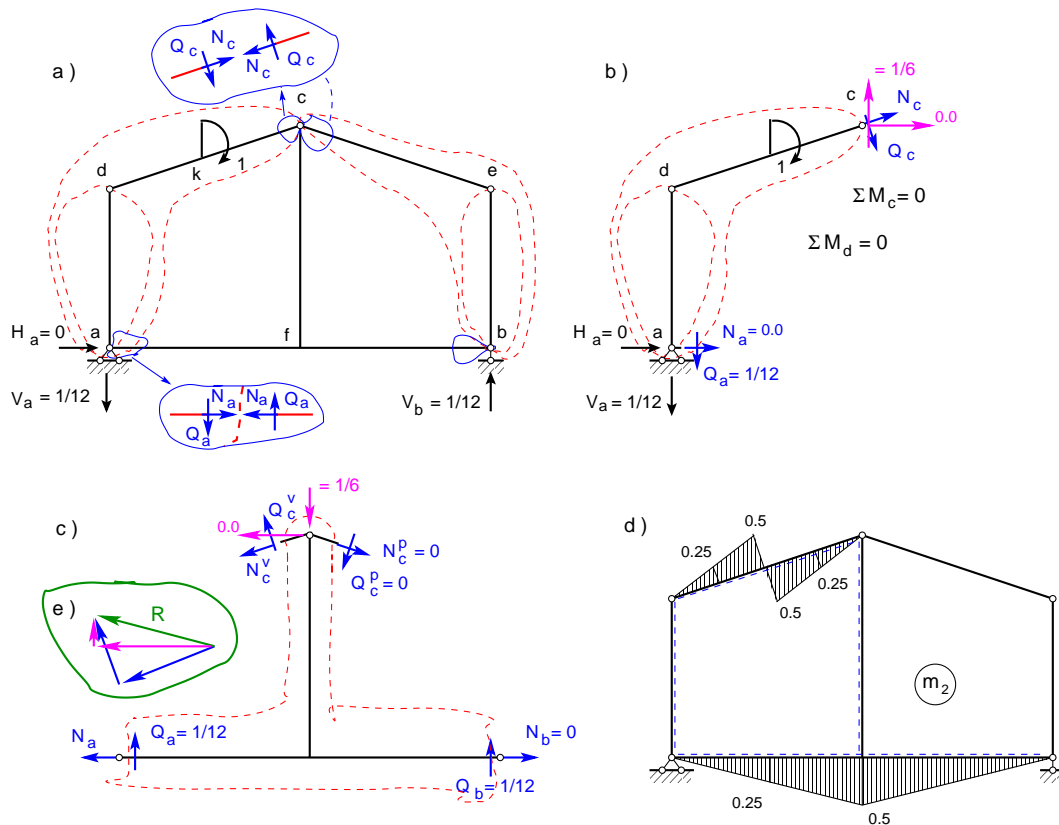
octave:8> % N_lokaalne=Fx_lokaalne ja Q_lokaalne=Fz_lokaalne
octave:8> Floc=T*F
Floc =

    0.15811
   -0.47434

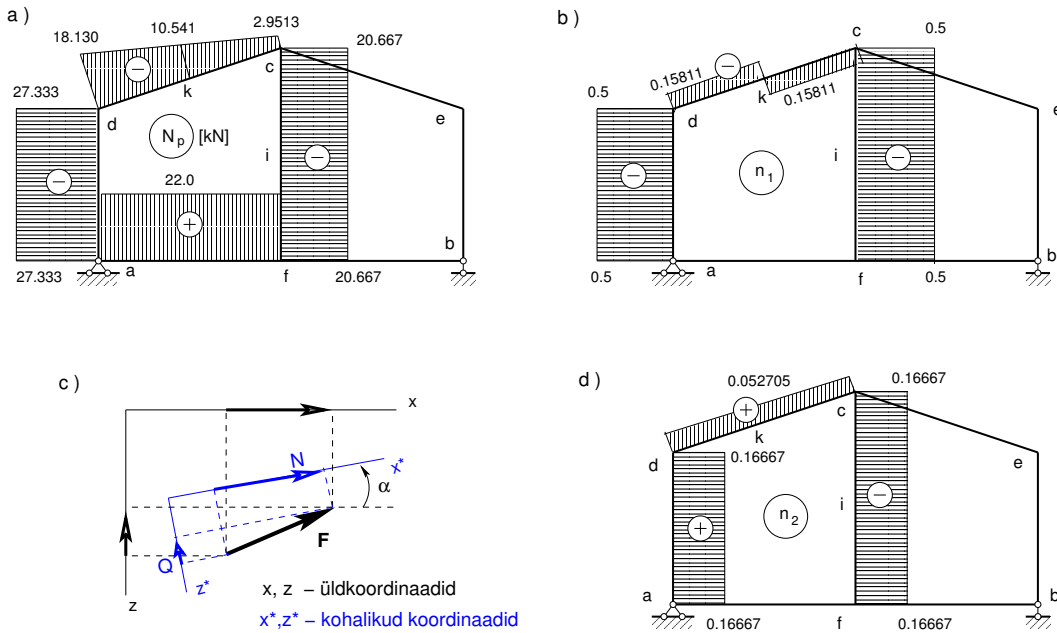
octave:9> % kontrollin põikjõudu Qc
octave:9> Qc=-0.5*cosA
Qc = -0.47434
octave:10> Nc=Floc(1,1)
Nc = 0.15811
octave:11> Nk_vasakul=Nc-1*sinA
Nk_vasakul = -0.15811
octave:12> Nad= -0.5
Nad = -0.50000
octave:13> Ncf=-0.5
Ncf = -0.50000
octave:14> diary off

```

Leitud pikijõud kanname joonisele 7.16.



Joonis 7.15. Siirete arvutamine. Raami paindemoment m_2



Joonis 7.16. Siirete arvutamine. Normaaljõu epüürid

Raami (joonis 7.12) punkti k pöörde arvutamiseks vaatleme joonist 7.15. Leiame raami toereaktsioonid. Arvutuse teeme programmi GNU Octave, i abil (vaata arvutuspäevikut 7.8).

Arvutuspäevik 7.8 Toereaktsioonide arvutus ühikmomendist

```

octave:1> diary raamiSi3toeR.out
octave:2> diary on
octave:3> % raami toereaktsioonid ühikmomendist
octave:3> % momentide summa toe 'b' suhtes
octave:3> % -12*Va-1=0
octave:3> Va=-1/12
Va = -0.083333
octave:4> % momentide summa toe 'a' suhtes
octave:4> % -12*Vb+1=0
octave:4> Vb=1/12
Vb = 0.083333
octave:5> Ha=0
Ha = 0
octave:6> % momentide summa liigendi 'd' suhtes
octave:6> Na=0
Na = 0
octave:7> % momentide summa liigendi 'c' suhtes
octave:7> % -6*Qa+(1/12*6-1)=0
octave:7> Qa=(1/12*6-1)/6
Qa = -0.083333
octave:8> % seega Qa=-1/12
octave:8> % reaktsioon liigendis 'c'
octave:8> Vc=-Va-Qa
    
```

```
Vc = 0.16667
octave:9> % seega Nc=1/6
octave:9> diary off
```

Leitud toereaktsioonid kanname joonisele 7.15.

Arvutuspäevik 7.9 Paindemomendi m_2 arvutus

```
octave:1> diary raamiMSi3.out
octave:2> diary on
octave:3> Va=-1/12
Va = -0.083333
octave:4> Vb=1/12
Vb = 0.083333
octave:5> Qa=-1/12
Qa = -0.083333
octave:6> Vc=1/6
Vc = 0.16667
octave:7> % moment Mkc
octave:7> Mkc=1/6*3
Mkc = 0.50000
octave:8> Mkd=(Va+Qa)*3
Mkd = -0.50000
octave:9> % moment talas 'ab' jõust Nc=1/6 vt joonist
octave:9> % Mfa=Mfb=Nc*L/4, kus L=12
octave:9> Mfa=1/6*12/4
Mfa = 0.50000
octave:10> diary off
```

Leitud paindemomendid kanname joonisele 7.15.

Arvutuspäevik 7.10 Pikijõu n_2 arvutus

```
octave:1> diary raamiNSi3.out
octave:2> diary on
octave:3> Lk=sqrt(2^2+6^2)
Lk = 6.3246
octave:4> cosA=6/Lk
cosA = 0.94868
octave:5> sinA=2/Lk
sinA = 0.31623
octave:6> % teisendusmaatriks T
octave:6> T=[cosA sinA; -sinA cosA]
T =

    0.94868    -0.31623
    0.31623    0.94868

octave:7> F=[0.0; -1/6]
F =

    0.00000
   -0.16667
```



```

octave:8> Floc=T*F
Floc =

    0.052705
   -0.158114

octave:9> Nc=Floc(1,1)
Nc = 0.052705
octave:10> % pikijõud vardas 'ad' Nad=-Va-Qa
octave:10> Nad=1/12+1/12
Nad = 0.16667
octave:11> Nfc=-1/6
Nfc = -0.16667
octave:12> diary off

```

Leitud pikijõud kanname joonisele 7.16.

Siirded koormusest leiame momendi epüüride korrutamise ja numbrilise integreerimise teel Simpsoni valemiga (D.17). Kasutame Mohri valemit

$$\Delta_{i,p} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{m_i M_p}{EI} ds \quad (7.88)$$

Siin võetakse summa Σ üle kõigi varraste. Integreerimisel jälgige integreerimise piirkondi. Kui funktsioon muutub, tuleb alustada uue integreerimise piirkonnaga. Leiame vertikaalse siirde w_1 .

Arvutuspäevik 7.11 Siirde w_1 arvutus

```

octave:5> diary siireInt1.out
octave:6> diary on
octave:7> Ld=sqrt(6^2+2^2)
Ld = 6.3246
octave:8> L2=Ld/2
L2 = 3.1623
octave:9> % integreerimispiirkond 2. - Sd1
octave:9> Sd1=(L2/6)*(4*0.75*27.0+1.5*36.0)
Sd1 = 71.151
octave:10> % integreerimispiirkond 3. - Sd2
octave:10> Sd2=Sd1
Sd2 = 71.151
octave:11> % integreerimispiirkond 6. - Sd3
octave:11> Sd3=(6/6)*(4*0.75*37.5+1.5*75.0)
Sd3 = 225
octave:12> % integreerimispiirkond 7. - Sd4
octave:12> Sd4=(6/6)*(4*0.75*132.5+1.50*193.0)
Sd4 = 687
octave:13> Sd=Sd1+Sd2+Sd3+Sd4
Sd = 1054.3
octave:14> E=2.1E+11
E = 2.1000e+11

```

```

octave:15> I=1.29E-05
I = 1.2900e-05
octave:16> EI=E*I
EI = 2709000
octave:17> w1=Sd*1000/EI
w1 = 0.38919
octave:18> diary off

```

Leiame pöörde φ_1 .

Arvutuspäevik 7.12 Pöörde $w_2 = \varphi_1$ arvutus

```

octave:5> diary siireInt2.out
octave:2> diary on
octave:3> I=1.29E-05
I = 1.2900e-05
octave:4> E=2.1E+11
E = 2.1000e+11
octave:5> EI=E*I
EI = 2709000
octave:6> Ld=sqrt(6^2+2^2)
Ld = 6.3246
octave:7> L2=Ld/2
L2 = 3.1623
octave:8> % integreerimispiirkond 2. - Sd1
octave:8> Sd1=(L2/6)*(-4*0.25*27.0-0.5*36.0)
Sd1 = -23.717
octave:9> % integreerimispiirkond 3. - Sd2
octave:9> Sd2=-Sd1
Sd2 = 23.717
octave:10> % integreerimispiirkond 6. - Sd3
octave:10> Sd3=(6/6)*(4*0.25*37.5+0.5*75.0)
Sd3 = 75
octave:11> % integreerimispiirkond 7. - Sd4
octave:11> Sd4=(6/6)*(4*0.25*132.5+0.5*193.0)
Sd4 = 229
octave:12> Sd=Sd1+Sd2+Sd3+Sd4
Sd = 304
octave:13> w1=Sd*1000/EI
w1 = 0.11222
octave:14> diary off

```

Leitud siire (Arvutuspäevik 7.11) ja pööre (Arvutuspäevik 7.12) langevad kokku programmiga *siireNAD.m* arvutatud siirde ja pöördega (Arvutuspäevik 7.14). Siirded temperatuuri muutusest arvutatakse valemitega (7.51), (7.52)

$$\Delta_{iT} = \sum_{i=1}^n \int_a^b n_i \alpha_T \cdot T_0 dx + \sum_{i=1}^n \int_a^b m_i \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T dx \quad (7.89)$$

Arvutuspäevik 7.13 *Siirde w_t ja pöörde φ_t arvutus temperatuurist*

```

octave-3.0.1:1> diary siireInt2.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> % joonpaisumistegur talpha=1.2*10^-5
octave-3.0.1:3> talpha=1.2*0.00001
talpha = 1.2000e-05
octave-3.0.1:4> % Ristlõike inertsimoment [m4]
octave-3.0.1:4> I=1.29E-05
I = 1.2900e-05
octave-3.0.1:5> % Elastsusmoodul (E=210GPa) E=2.1E+11 [Pa]
octave-3.0.1:5> E=2.1E+11
E = 2.1000e+11
octave-3.0.1:6> % Ristlõike jäikus EI
octave-3.0.1:6> EI=E*I
EI = 2709000
octave-3.0.1:7> % Profiili ristlõike kõrgus
octave-3.0.1:7> Hristloige=0.18
Hristloige = 0.18000
octave-3.0.1:8> % Temperatuur teljel To
octave-3.0.1:8> To=(25+15)/2
To = 20
octave-3.0.1:9> % Temperatuur teljel post Tok
octave-3.0.1:9> Tok=(25+25)/2
Tok = 25
octave-3.0.1:10> % Temperatuuri erinevus deltaT=Ta-Ty
octave-3.0.1:10> deltaT=25-15
deltaT = 10
octave-3.0.1:11> %Temperatuuri erinevus deltaTk=Ta-Ty
octave-3.0.1:11> deltaTk=25-25
deltaTk = 0
octave-3.0.1:12> lp=sqrt(6^2+2^2)
lp = 6.3246
octave-3.0.1:13> l2=lp/2
l2 = 3.1623
octave-3.0.1:14> % So=talphi*To*ni+talphi*deltaT*mi
octave-3.0.1:14> wkt=talphi*To*(-0.5*5-0.15811*l2+0.15811*l2)-talphi*Tok*(0.5*7)+ ...
> talphi*deltaT*1/Hristloige*(1.5*lp/2-1.5*12/2)
wkt = -0.0044877
octave-3.0.1:15> fikt=talphi*To*(1/6*5+0.052705*lp)-talphi*Tok*(1/6*7)+ ...
> talphi*deltaT*1/Hristloige*(-0.5*12/2+0.5*12/2-0.5*12/2)
fikt = -0.0020700
octave-3.0.1:16> diary off

```

Leitud siire ja pööre temperatuurist (Arvutuspäevik 7.13) langevad kokku programmiga siireNAD.m arvutatud siirde ja pöördega temperatuurist (Arvutuspäevik 7.14).

Arvutuspäevik 7.14 *Siirete arvutus programmiga siireNAD.m*

```

octave-3.0.1:1> diary siireNAD.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> siireNAD
    %siireN74.m    Jaan Mets

```

IntegreerimisPiirkondadeArv = 7
 Joonpaisumistegur_talpha = 1.2000e-05
 IntegreerimisPiirkondadePikkused =

5.0000 3.1623 3.1623 3.0000 4.0000 6.0000 6.0000

I = 1.2900e-05
 E = 2.1000e+11
 EI = 2709000
 Hristloige = 0.18000

=====

Ühikepüüride ordinaadid

Integreerimis-

Jrk	piirkond	m1	m2
1	1	0.0000	0.0000
2	1	0.0000	0.0000
3	1	0.0000	0.0000
4	2	0.0000	0.0000
5	2	0.7500	-0.2500
6	2	1.5000	-0.5000
7	3	1.5000	0.5000
8	3	0.7500	0.2500
9	3	0.0000	0.0000
10	4	0.0000	0.0000
11	4	0.0000	0.0000
12	4	0.0000	0.0000
13	5	0.0000	0.0000
14	5	0.0000	0.0000
15	5	0.0000	0.0000
16	6	-1.5000	-0.5000
17	6	-0.7500	-0.2500
18	6	0.0000	0.0000
19	7	0.0000	0.0000
20	7	-0.7500	-0.2500
21	7	-1.5000	-0.5000

=====

Ühikepüüride ordinaadid

Integreerimis-

Jrk	piirkond	n1	n2
1	1	-0.5000	0.1667
2	1	-0.5000	0.1667
3	1	-0.5000	0.1667
4	2	-0.1581	0.0527
5	2	-0.1581	0.0527
6	2	-0.1581	0.0527
7	3	0.1581	0.0527
8	3	0.1581	0.0527
9	3	0.1581	0.0527

10	4	-0.5000	-0.1667
11	4	-0.5000	-0.1667
12	4	-0.5000	-0.1667
13	5	-0.5000	-0.1667
14	5	-0.5000	-0.1667
15	5	-0.5000	-0.1667
16	6	0.0000	0.0000
17	6	0.0000	0.0000
18	6	0.0000	0.0000
19	7	0.0000	0.0000
20	7	0.0000	0.0000
21	7	0.0000	0.0000

=====

Mp epüüri ordinaadid

Integree-

rimispiir-

Jrk	kond	Mp [N*m]
1	1	0.0000e+00
2	1	1.2500e+04
3	1	0.0000e+00
4	2	0.0000e+00
5	2	2.7000e+04
6	2	3.6000e+04
7	3	3.6000e+04
8	3	2.7000e+04
9	3	0.0000e+00
10	4	0.0000e+00
11	4	1.5000e+04
12	4	3.0000e+04
13	5	3.0000e+04
14	5	7.4000e+04
15	5	1.1800e+05
16	6	-7.5000e+04
17	6	-3.7500e+04
18	6	0.0000e+00
19	7	0.0000e+00
20	7	-1.3250e+05
21	7	-1.9300e+05

```
=====
W - siirded koormusest
-----
3.8919e-01  1.1222e-01
=====
```

```
WT - siirded temperatuurist
-----
-4.4877e-03 -2.0700e-03
octave-3.0.1:4> diary off
```


Osa II

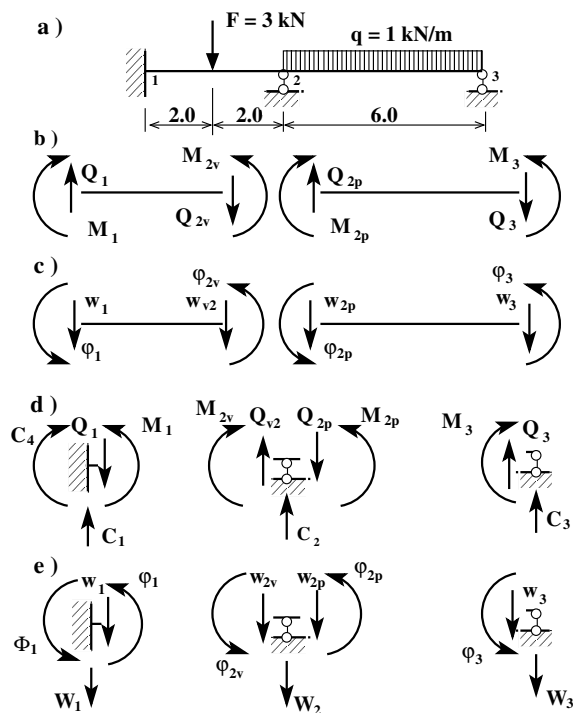
Staatikaga määramatud süsteemid

8. Staatikaga määramatud konstruktsioonid

8.1 Staatikaga määramatu konstruktsioon

Konstruktsiooni arvutuskeem on staatikaga määramatu, kui kõik sisejõud ja toereaktsioonid ei ole arvutatavad ainult tasakaaluvõrranditest.

Jooniselt 8.1 d) on näidatud, et talal on neli toereaktsiooni C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 . Nende toereaktsioonide leidmiseks on kaks tasakaaluvõrrandit (ilma horisontaalse toereaktsioonita kaks tasakaaluvõrrandit).



Joonis 8.1. Toereaktsioonid ja toesiirded

Joonisel 8.1 a) näidatud tala sisejõudude ja toereaktsioonide leidmiseks ei piisa staatika tasakaaluvõrranditest.

Staatikaga määramatu konstruktsiooni arvutamisel esineb kahte liiki tundmatuid: *staatilis*ed tundmatud ja *kinemaatilised* tundmatud. Nendele vastavalt on staatilised rajatingimused ja kinemaatilised rajatingimused. Kui kinemaatiline rajatingimus on ette antud, siis vastav staatiline suurus on tundmatu (vt Toed ja toereaktsioonid joonis 3.1) ja vastupidi.

Toereaktsioonidele (joonis 8.1 d)) vastavad toesiirded on W_1 , W_2 , W_3 ja Φ_1 (joonis 8.1 e)).

Joonistel 8.1 b), c) näidatud kontaktjõudude Q_1 , M_1 , Q_{2v} , M_{2v} ja Q_{2p} , M_{2p} , Q_3 , M_{3p} ning vastavate siirete w_1 , φ_1 , w_{2v} , φ_{2v} ja w_{2p} , φ_{2p} , w_3 , φ_{3p} leidmiseks koostame talade tasakaaluvõrrandid (1.63).

Joonisel 8.1 näidatud talal on 8 tundmatut kontaktjõudu Q_1 , M_1 , Q_{2v} , M_{2v} , Q_{2p} , M_{2p} , Q_3 , M_{3p} ja 8 rajasiiret w_1 , φ_1 , w_{2v} , φ_{2v} , w_{2p} , φ_{2p} , w_3 , φ_{3p} ning 4 toereaktsiooni C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 . Nende jõudude suunad vastavad esimesele märgikokkuleppele (vt

märgikokkulepe lk 48). Kokku 20 tundmatut. Tähistame tundmatute arvu n -iga. Siis

$$n = r + t \quad (8.1)$$

kus r on kontaktjõudude arv,
 t – toesidemete arv.

Sarnaselt rajaelementide meetodile (REM) [Har87] kasutatakse EST-meetodis [Lah97a], [Lah97b], [Lah98a], [Lah98b] staatilisi ja kinemaatilisi tundmatuid. Rajaelementide meetodi puhul rahuldatakse diferentsiaalvõrrandid määramispiirkondades (varrastes) täpselt (ülekandevõrrandid). Rajatingimused (kontaktjõud ja siirded) rahuldatakse ligikaudselt (kontaktjõud ja siirded leitakse võrrandisüsteemi lahendamisega).

Varraste otstes esinevad kontaktjõud ja siirded ühendame sõlmpunktides kinemaatiliste ja staatiliste kontaktitingimustega. Toetingimused (vt joonis 3.1) jagunevad toereaktsioonideks ja toesiireteks. Kontakti- ja toetingimusi nimetatakse üldiselt *rajatingimusteks*. Rajatingimused jagunevad *staatilisteks rajatingimusteks* ja *kinemaatilisteks rajatingimusteks*.

Joonisel 8.1 näidatud kontaktjõudude ja siirete ning toereaktsioonide ja toesiirete suunad vastavad *esimesele märgikokkuleppele*.

Kahekümne tundmatu leidmiseks saame kasutada ülekandemaatriksi abil saadud tasakaaluvõrrandeid (1.63). Ühe tala kohta saame koostada 4 võrrandit. Joonisel 8.1 esitatud jätkuvtala koosneb kahest talast. Saame

$$võrrandeid = 4_{võrrandit} \times 2_{tala} = 8 \text{ võrrandit}$$

8.1.1 Rajatingimused ja esimene märgikokkulepe

Ülejäänud 12 võrrandit saame rajatingimustest. Vaatleme joonisel 8.1 d) *esimest toesõlme* ja kirjutame välja tasakaalutingimused (staatilised rajatingimused)

$$Q_1 - C_1 = 0 \quad (8.2)$$

$$M_1 - C_4 = 0 \quad (8.3)$$

ja pidevuse tingimused (kinemaatilised rajatingimused)

$$w_1 = 0 \quad (8.4)$$

$$\varphi_1 = 0 \quad (8.5)$$

Joonisel 8.1 d) *teise toesõlme* kohta kirjutame välja tasakaalutingimused (staatilised rajatingimused)

$$Q_{2v} + C_2 - Q_{2p} = 0 \quad (8.6)$$

$$M_{2v} - M_{2p} = 0 \quad (8.7)$$

ja pidevuse tingimused (kinemaatilised rajatingimused)

$$w_{2v} = 0 \quad (8.8)$$

$$w_{2p} = 0 \quad (8.9)$$

$$\varphi_{2v} - \varphi_{2p} = 0 \quad (8.10)$$

Joonisel 8.1 d) kirjutame kolmanda toesõlme kohta välja tasakaalutingimused (staatiliselt rajatingimused)

$$Q_3 + C_3 = 0 \quad (8.11)$$

$$M_3 = 0 \quad (8.12)$$

ja pidevuse tingimuse (kinemaatiline rajatingimus)

$$w_3 = 0 \quad (8.13)$$

Need 12 võrrandit lisame 8 tasakaaluvõrrandile. Seega on meil vajalik arv võrrandeid tundmatute leidmiseks.

Väljavõttes 8.1 programmist `spTundmatudVorrandid.m`¹ on toodud maatriks *tundmatud*.

Väljavõte programmist 8.1 *Võrrandisüsteemi tundmatud EST-programmis*

```
tundmatud=['- 1 - siire 1.tala lõpus          ';
           '- 2 - pööre 1.tala lõpus          ';
           '- 3 - pöikjõud 1.tala lõpus       ';
           '- 4 - paindemoment 1.tala lõpus  ';
           '- 5 - siire 1.tala algul          ';
           '- 6 - pööre 1.tala algul          ';
           '- 7 - pöikjõud 1.tala algul       ';
           '- 8 - paindemoment 1.tala algul   ';
           '- 9 - siire 2.tala lõpus          ';
           '- 10 - pööre 2.tala lõpus         ';
           '- 11 - pöikjõud 2.tala lõpus      ';
           '- 12 - paindemoment 2.tala lõpus  ';
           '- 13 - siire 2.tala algul         ';
           '- 14 - pööre 2.tala algul         ';
           '- 15 - pöikjõud 2.tala algul      ';
           '- 16 - paindemoment 2.tala algul  ';
           '- 17 - 1. toereaktsioon          ';
           '- 18 - 2. toereaktsioon          ';
           '- 19 - 3. toereaktsioon          ';
           '- 20 - 4. toereaktsioon          '];
```

Väljavõttes 8.2 programmist `spTundmatudVorrandid.m` on koostatud *rajatingimused*, kus funktsiooniga `spIN(N,M,Av)` sisestatakse võrrandisüsteemi N rea, M veeru väärtus Av ja vastav vabaliige `ZoS(N,1)`

Väljavõte programmist 8.2 *I märgikokkuleppe 12 rajatingimust*

```
% Esimese märgikokkuleppe puhul võrrandisse:
% + (Q tala lõpus) + (toereaktsioon) - (Q tala algul) = 0
%.1. tugi
% tasakaalutingimus
% 9. võrrand (17 - 1. toereaktsioon) - (7 - pöikjõud 1.tala algul) = 0
```

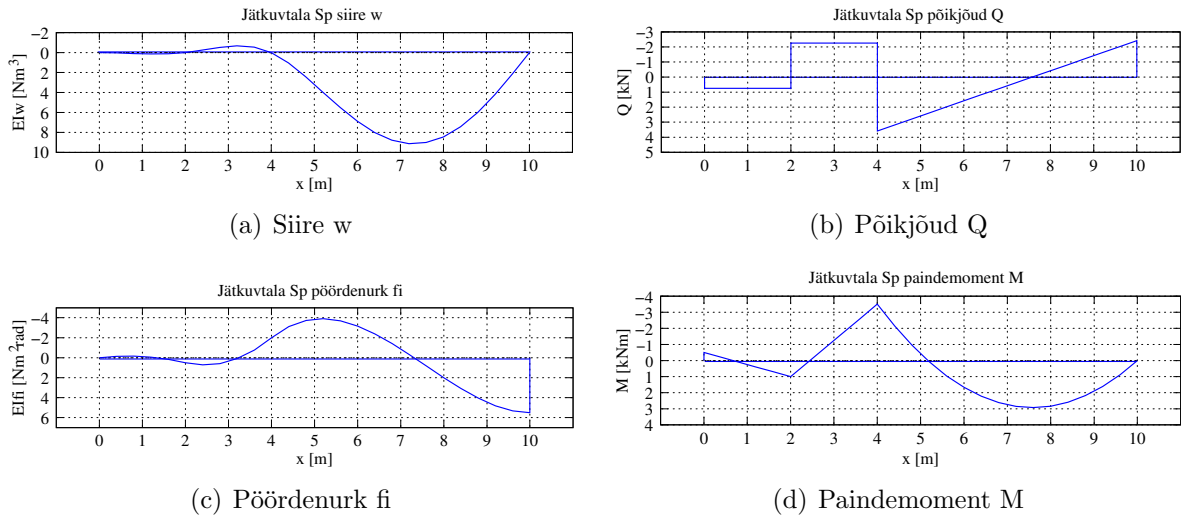
¹[./octaveProgrammid/spTundmatudVorrandid.m](#)

```

    spUal=spIN(9,17,1.0);
    spUal=spIN(9,7,-1.0);
    ZoS(9,1)=0;
% 10. võrrand -(8 - paindemoment 1.tala algul) + (20 - 4. toereaktsioon) = 0
    spUal=spIN(10,8,-1.0);
    spUal=spIN(10,20,1.0);
    ZoS(10,1)=0;
%
% siirded/pöörded
% 11. võrrand (5 - siire 1.tala algul) = 0
    spUal=spIN(11,5,1.0);
    ZoS(11,1)=0;
% 12. võrrand (6 - pööre 1.tala algul) = 0
    spUal=spIN(12,6,1.0);
    ZoS(12,1)=0;
%.2. tugi
%
% tasakaalutingimus
% 13. võrrand (4 - paindemoment 1.tala lõpu) - (16 - paindemoment 2.tala algul) = 0
    spUal=spIN(13,4,1.0);
    spUal=spIN(13,16,-1.0);
    ZoS(13,1)=0;
% 14. võrrand +(3 - pöikjõud 1.tala lõpus) - (15 - pöikjõud 2.tala algul) + ...
    (18 - 2. toereaktsioon) = 0
    spUal=spIN(14,3,1.0);
    spUal=spIN(14,15,-1.0);
    spUal=spIN(14,18,1.0);
    ZoS(14,1)=0;
%
% siirded/pöörded
% 15. võrrand (2 - pööre 1.tala lõpus) - (14 - pööre 2.tala algul) = 0
    spUal=spIN(15,2,1.0);
    spUal=spIN(15,14,-1.0);
    ZoS(15,1)=0;
% 16. võrrand (1 - siire 1.tala lõpus) = 0
    spUal=spIN(16,1,1.0);
    ZoS(16,1)=0;
% 17. võrrand (13 - siire 2.tala algul) = 0
    spUal=spIN(17,13,1.0);
    ZoS(17,1)=0;
%.3. tugi
%
% tasakaalutingimus
% 18. võrrand +(11 - pöikjõud 2.tala lõpus) + (19 - 3. toereaktsioon) = 0
    spUal=spIN(18,11,1.0);
    spUal=spIN(18,19,1.0);
    ZoS(18,1)=0;
% 19. võrrand (12 - paindemoment 2.tala lõpus) = 0
    spUal=spIN(19,12,1.0);
    ZoS(19,1)=0;
%
% siirded/pöörded
% 20. võrrand (9 - siire 2.tala lõpus) = 0
    spUal=spIN(20,9,1.0);
    ZoS(20,1)=0;

```

Ülekandemaatriksi abil saadud varda hõredad tasakaaluvõrrandid kirjeldame funktsiooni `spUlintala_ImkSc` abil. Hõreda maatriksiga kirjeldatud tasakaaluvõrrandid ja ra-



Joonis 8.2. Jätkuvtala sisejõud ja siirded EST-meetodiga

jatingimused koosnevad 47 nullist erinevast elemendist (rows = 20, cols = 20, nnz = 47). Suurte hõredate mittediagonaalsete võrrandisüsteemide lahendamiseks on loodud häid meetodeid.

Joonisel 8.2 on näidatud programmiga `spTundmatudVorrandid.m` arvutatud tala sisejõudude graafikud.

Joonisel 8.1 ja väljavõttes 8.2 programmist vaatlesime rajatingimusi I märgikokkuleppe puhul.

8.1.2 Rajatingimused ja teine märgikokkulepe

I märgikokkuleppe puhul rajatingimuste kirjutamine sõlmedes mitme varda ühendamisel on keerukas. Lihtsam on need tingimused välja kirjutada II märgikokkuleppe puhul.

Rajajõududele tasakaaluvõrrandi koostamisel liidame kõik suurused. Siirete võrduse korral, kirjutades nad ühele poole võrdusmärgi, on üks neist miinusmärgiga.

Teise märgikokkuleppe puhul kirjutame 12 rajatingimust. Vaatleme joonisel 8.3 d) *esimest toesõlme* ja kirjutame välja tasakaalutingimused (staatiliselt rajatingimused)

$$Q_1 - C_1 = 0 \quad (8.14)$$

$$M_1 - C_4 = 0 \quad (8.15)$$

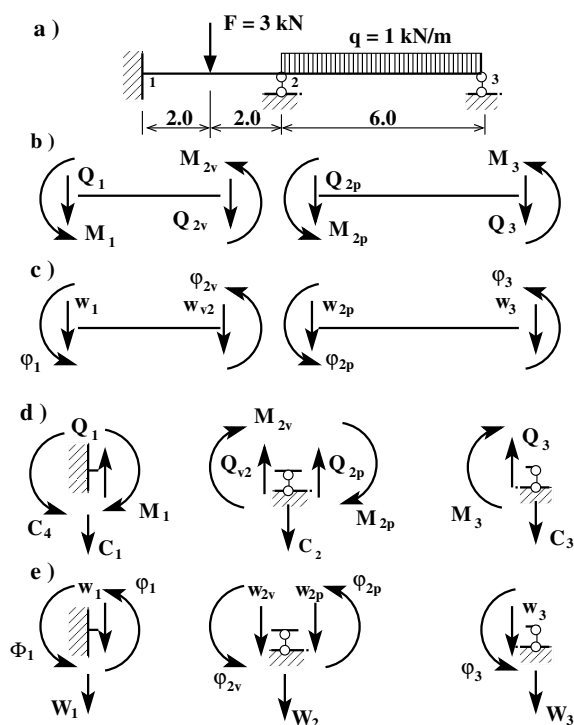
ja pidevuse tingimused (kinemaatilised rajatingimused)

$$w_1 = 0 \quad (8.16)$$

$$\varphi_1 = 0 \quad (8.17)$$

Joonisel 8.3 d) *teise toesõlme* kohta kirjutame välja tasakaalutingimused (staatiliselt rajatingimused)

$$Q_{2v} - C_2 + Q_{2p} = 0 \quad (8.18)$$



Joonis 8.3. Tundmatud tala arvutamiseks. II märgikokkulepe

$$M_{2v} + M_{2p} = 0 \quad (8.19)$$

ja pidevuse tingimused (kinemaatilised rajatingimused)

$$w_{2v} = 0 \quad (8.20)$$

$$w_{2p} = 0 \quad (8.21)$$

$$\varphi_{2v} - \varphi_{2p} = 0 \quad (8.22)$$

Joonisel 8.3 d) kolmanda toesõlme kohta kirjutame välja tasakaalutingimused (staatiliselt rajatingimused)

$$Q_3 - C_3 = 0 \quad (8.23)$$

$$M_3 = 0 \quad (8.24)$$

ja pidevuse tingimuse (kinemaatiline rajatingimus):

$$w_3 = 0 \quad (8.25)$$

Need 12 võrrandit lisame 8-le tasakaaluvõrrandile. Seega on meil vajalik arv võrrandeid tundmatute leidmiseks.

Joonisel 8.3 ja väljavõttes 8.3 programmist [spTundmatudVorrandidIII.m](#) on koostatud *rajatingimused* II märgikokkuleppel, kus funktsiooniga `spIN(N,M,Av)` sisestatakse võrrandisüsteemi N rea, M veeru väärtus Av ja vastav vabaliige `ZoS(N,1)`

Väljavõte programmist 8.3 II märgikokkuleppe 12 rajatingimust

```

% Teise märgikokkuleppe puhul võrrandisse:
%   (Q tala lõpus) - (toereaktsioon) + (Q tala algul) = 0
%   (siirete1) - (siire2)= 0 - on võrdsed
%.1. tugi
%   tasakaalutingimus
% 9. võrrand (17 - 1. toereaktsioon) + (7 - põikjõud 1.tala algul) = 0
    spUal=spIN(9,17,1.0);
    spUal=spIN(9,7,1.0);
    ZoS(9,1)=0;
% 10. võrrand (8 - paindemoment 1.tala algul) - (20 - 4. toereaktsioon) = 0
    spUal=spIN(10,8,1.0);
    spUal=spIN(10,20,-1.0);
    ZoS(10,1)=0;
%   siirded/pöörded
% 11. võrrand (5 - siire 1.tala algul) = 0
    spUal=spIN(11,5,1.0);
    ZoS(11,1)=0;
% 12. võrrand (6 - pööre 1.tala algul) = 0
    spUal=spIN(12,6,1.0);
    ZoS(12,1)=0;
%.2. tugi
%   tasakaalutingimus
% 13. võrrand (4 - paindemoment 1.tala lõpu) + (16 - paindemoment 2.tala algul) = 0
    spUal=spIN(13,4,1.0);
    spUal=spIN(13,16,1.0);
    ZoS(13,1)=0;
% 14. võrrand +(3 - põikjõud 1.tala lõpus) + (15 - põikjõud 2.tala algul) - ...
    (18 - 2. toereaktsioon) = 0
    spUal=spIN(14,3,1.0);
    spUal=spIN(14,15,1.0);
    spUal=spIN(14,18,-1.0);
    ZoS(14,1)=0;
%   siirded/pöörded
% 15. võrrand (2 - pööre 1.tala lõpus) - (14 - pööre 2.tala algul) = 0
    spUal=spIN(15,2,1.0);
    spUal=spIN(15,14,-1.0);
    ZoS(15,1)=0;
% 16. võrrand (1 - siire 1.tala lõpus) = 0
    spUal=spIN(16,1,1.0);
    ZoS(16,1)=0;
% 17. võrrand (13 - siire 2.tala algul) = 0
    spUal=spIN(17,13,1.0);
    ZoS(17,1)=0;
%.3. tugi
%   tasakaalutingimus
% 18. võrrand +(11 - põikjõud 2.tala lõpus) - (19 - 3. toereaktsioon) = 0
    spUal=spIN(18,11,1.0);
    spUal=spIN(18,19,-1.0);
    ZoS(18,1)=0;
% 19. võrrand (12 - paindemoment 2.tala lõpus) = 0
    spUal=spIN(19,12,1.0);

```

```

ZoS(19,1)=0;
% siirded/pöörded
% 20. võrrand (9 - siire 2.tala lõpus) = 0
spUal=spIN(20,9,1.0);
ZoS(20,1)=0;
=====

```

Programmiga `spTundmatudVorrandidII.m` tehtud arvutused on toodud arvutuspäevikus [8.1](#)

Arvutuspäevik 8.1 *Jätkuvtala arvutus EST-meetodiga*

```

octave-3.0.1:2> diary spTundmatudVorrandidII.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spTundmatudVorrandidII
I = 1.9020e-05
E = 2.1000e+11
EI = 3994200
GAR = 4.5036e+15
F1 = 3
aF1 = 2
L = 10
L1 = 4
L2 = 6
qz = 1
II märgikokkuleppe
Skaleerimise tegurid EIsuhe = EIo/EI  GARSuhe=EIo/GAR
EIsuhe1 = 1
GARSuhe1 = 8.8689e-10
EIsuhe2 = 1
GARSuhe2 = 8.8689e-10
siirded ja pöörded on nüüd EIo kordsed

```

Võrrandisüsteemi vasak pool spUS

spUS =

Compressed Column Sparse (rows = 20, cols = 20, nnz = 47)

```

(1, 1) -> -1
(16, 1) -> 1
(2, 2) -> -1
(15, 2) -> 1
(3, 3) -> -1
(14, 3) -> 1
(4, 4) -> -1
(13, 4) -> 1
(1, 5) -> 1
(11, 5) -> 1
(1, 6) -> -4
(2, 6) -> 1
(12, 6) -> 1
(1, 7) -> 10.667
(2, 7) -> -8
(3, 7) -> -1
(4, 7) -> -4
(9, 7) -> 1
(1, 8) -> 8
(2, 8) -> -4
(4, 8) -> -1
(10, 8) -> 1
(5, 9) -> -1
(20, 9) -> 1
(6, 10) -> -1
(7, 11) -> -1

```


(18, 11) -> 1	(8, 15) -> -6
(8, 12) -> -1	(14, 15) -> 1
(19, 12) -> 1	(5, 16) -> 18
(5, 13) -> 1	(6, 16) -> -6
(17, 13) -> 1	(8, 16) -> -1
(5, 14) -> -6	(13, 16) -> 1
(6, 14) -> 1	(9, 17) -> 1
(15, 14) -> -1	(14, 18) -> -1
(5, 15) -> 36.000	(18, 19) -> -1
(6, 15) -> -18	(10, 20) -> -1
(7, 15) -> -1	-----

Võrrandisüsteemi parem pool ZoS

ZoS =	0
	0
-4	0
6	0
3	0
6	0
-54	0
36	0
6	0
18	0
0	-----
0	

Võrrandisüsteemi lahendamine

X=spUS\ZoS;

=====

Toereaktsioonid ja kontaktjõud X II märgikokkulepe

=====

0.000000e+00 - 1 - siire 1.tala lõpus
 -2.000000e+00 - 2 - pööre 1.tala lõpus
 -2.250000e+00 - 3 - põikjõud 1.tala lõpus
 -3.500000e+00 - 4 - paindemoment 1.tala lõpus
 0.000000e+00 - 5 - siire 1.tala algul
 0.000000e+00 - 6 - pööre 1.tala algul
 -7.500000e-01 - 7 - põikjõud 1.tala algul
 5.000000e-01 - 8 - paindemoment 1.tala algul
 0.000000e+00 - 9 - siire 2.tala lõpus
 5.500000e+00 - 10 - pööre 2.tala lõpus
 -2.416667e+00 - 11 - põikjõud 2.tala lõpus
 0.000000e+00 - 12 - paindemoment 2.tala lõpus
 0.000000e+00 - 13 - siire 2.tala algul
 -2.000000e+00 - 14 - pööre 2.tala algul
 -3.583333e+00 - 15 - põikjõud 2.tala algul
 3.500000e+00 - 16 - paindemoment 2.tala algul
 7.500000e-01 - 17 - 1. toereaktsioon
 -5.833333e+00 - 18 - 2. toereaktsioon
 -2.416667e+00 - 19 - 3. toereaktsioon
 5.000000e-01 - 20 - 4. toereaktsioon

siirded ja pöörded on EIo kordsed

Walg =

0.00000 -0.00000 0.75000 -0.50000

tegur = 2

minimaalne jaotuste arv - jaotusi = L/tegur

NT=jaotusi*KordaNT; % jaotusi suurendatakse KordaNT korda

NT = 25

=====

Siirded ja sisejõud lihttalas

=====

Jrk	x	w	fi	Q	M
1	0.00	0.000	0.000	0.750	-0.500
2	0.40	0.032	-0.140	0.750	-0.200
3	0.80	0.096	-0.160	0.750	0.100
4	1.20	0.144	-0.060	0.750	0.400
5	1.60	0.128	0.160	0.750	0.700
6	2.00	0.000	0.500	0.750	1.000
7	2.00	0.000	0.500	-2.250	1.000
8	2.40	-0.256	0.720	-2.250	0.100
9	2.80	-0.528	0.580	-2.250	-0.800
10	3.20	-0.672	0.080	-2.250	-1.700
11	3.60	-0.544	-0.780	-2.250	-2.600
12	4.00	-0.000	-2.000	-2.250	-3.500
13	4.00	-0.000	-2.000	3.583	-3.500
14	4.40	1.043	-3.124	3.183	-2.147
15	4.80	2.431	-3.739	2.783	-0.953
16	5.20	3.974	-3.908	2.383	0.080
17	5.60	5.507	-3.696	1.983	0.953
18	6.00	6.889	-3.167	1.583	1.667
19	6.40	8.006	-2.384	1.183	2.220
20	6.80	8.771	-1.412	0.783	2.613
21	7.20	9.119	-0.315	0.383	2.847
22	7.60	9.014	0.844	-0.017	2.920
23	8.00	8.444	2.000	-0.417	2.833
24	8.40	7.423	3.089	-0.817	2.587
25	8.80	5.990	4.048	-1.217	2.180
26	9.20	4.211	4.812	-1.617	1.613
27	9.60	2.175	5.317	-2.017	0.887
28	10.00	-0.000	5.500	-2.417	-0.000

Siin siire w ja ristlõike pööre fi on EIo kordsed

Tegelik siire w/EIo ja ristlõike pööre fi/EIo

octave-3.0.1:4> diary off

8.2 Konstruksioonide arvutamise meetodid

Kui kõiki tundmatuid ei arvutata ühel ajal, koostatakse võrrandisüsteem esialgu leitavate tundmatute ehk *lisatundmatute* jaoks. Ülejäänud tundmatud arvutatakse koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena. Olenevalt sellest, missugused tundmatud võetakse lisatundmatuteks, jagatakse arvutusmeetodid järgmiselt:

- *Jõumeetodi* puhul valitakse lisatundmatuteks varraste otstes olevad rajajõud. Lisatundmatute leidmiseks koostatakse võrrandisüsteem pidevustingimuste alusel.
- *Siirde- ehk deformatsioonimeetodi* puhul valitakse lisatundmatuteks raami sõlmede siirded. *Kinemaatiliste lisatundmatute* leidmiseks koostatakse võrrandisüsteem sõlmede tasakaalutingimuste alusel.
- *Segameetodi* puhul võetakse lisatundmatuteks osalt siirded ja osalt jõud.
- *Tervikmeetodi* (sks *Gesamtmatrixverfahren GMV*) (ingl *Complete Matrix Method (CMM)*) [Eb190] puhul koostatakse võrrandisüsteem kõigi tundmatute kohta (ei tehta vahet lisatundmatute ja ülejäänud tundmatute vahel) korraga.

Staatiliselt määramatute konstruksioonide üheks iseloomulikuks iseärasuseks on see, et nende sisejõudude jaotus oleneb varraste ristlõike jäikusest. Tugede siirded ja ka temperatuuri muutus kutsuvad esile sisejõude.

8.3 Staatikaga määramatute konstruksioonide omadused

Loetelu on võetud raamatust [Rää75].

1. Staatikaga määramatul konstruksioonil on lõpmata palju lahendeid, mis rahuldavad tasakaalutingimusi, kuid ainult üks neist rahuldab ka deformatsioonide pidevuse tingimusi.
2. Staatikaga määramatul konstruksioonil on liigsideid. *Liigside* on niisugune element, mille eemaldamisel ülejäänud konstruksiooniosa on ikka geomeetriliselt muutumatu.
3. Tingimata vajalikes sidemetes saab sisejõude leida tasakaalutingimustega. Tingimata vajaliku sideme eemaldamisel muutub osa konstruksioonist geomeetriliselt muutuvaks.
4. Temperatuuri muutus, tugede siirded ja konstruksiooni elementide mõõtmete ebatäpsus võib põhjustada staatikaga määramatus konstruksioonis sisejõudusid. Tingimata vajalikes sidemetes need mõjud sisejõudusid ei põhjusta.

5. Staatikaga määramatu konstruktsiooni sisejõud olenevad varraste jäikusest.
6. Staatikaga määramatus konstruktsioonis võivad esineda pinged ka ilma koormuse-
ta. Neid pingeid nimetatakse *eelpingeteks*.

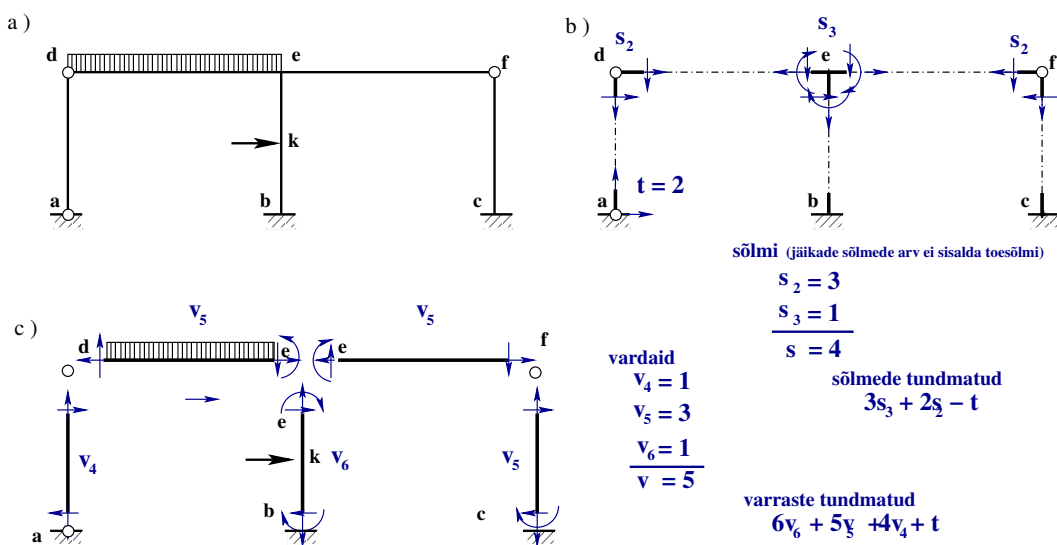
9. Jõumeetod

Loeng 1¹: Jõumeetodi kanooniline võrrandisüsteem. Näide 9.1. Raam. Loeng 2²: Näite 9.1 arvutiprogramm. Näide 9.2. Loeng 3³: Näite 9.2 arvutiprogramm. Näide 9.3.

Konstruksiooni varraste arv v (vt joonis 9.1) koosneb kolmest osast:

$$v = v_6 + v_5 + v_4 \quad (9.1)$$

kus v_6 on mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varraste arv, v_5 ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varraste arv, v_4 mõlemast otsast liigendiga kinnitatud varraste arv.



Joonis 9.1. Tundmatute üldarv

Varraste otstes olevaid rajajõude koos toereaktsioonidega on

$$6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t \quad (9.2)$$

kus on t liigendtugede toesidemete arv.

Konstruksiooni sõlmede arv s

$$s = s_3 + s_2 \quad (9.3)$$

¹./videod/jouMetLoeng1.html

²./videod/jouMetLoeng2.html

³./videod/jouMetLoeng3.html

kus s_2 on liigendsõlmede arv ja s_3 jääkade sõlmede arv, mis ei sisalda jääku toesõlmi. Varraste ja sõlmede kohta saab kirjutada

$$3v + 3s_3 + 2s_2 \quad (9.4)$$

tasakaaluvõrrandit. Lisatundmatute arv n on võrdne staatiliste tundmatute üldarvu (9.2) ja tasakaaluvõrrandite (9.4) arvu vahega

$$n = 6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t - 3v - 3s_3 - 2s_2 \quad (9.5)$$

mida nimetatakse *staatikaga määramatuse astmeks*. Kui asetada avaldisse (9.5) varraste üldarv v (9.1), saab

$$n = 3v_6 + 2v_5 + v_4 + t - 3s_3 - 2s_2 \quad (9.6)$$

Valemis (9.6) tähistab t ainult liigendtügedede toesidemete arvu. Ülesannet nimetatakse n -kordselt staatikaga määramatuks.

9.1 Raamid

9.1.1 Staatilise määramatuse aste

Avaldis (9.6) kehtib kõigi varrastest moodustatud konstruktsioonide kohta. Raamide staatilise määramatuse astet saab arvutada lihtsamate valemitega.

Kui konstruktsioonis on nii liigendita kui ka liigenditega suletud kontuure, siis saab staatilise määramatuse astet arvutada valemiga

$$n = 3m_1 - l_1 \quad (9.7)$$

siin on m_1 suletud (nii liigendita kui ka liigenditega) kontuuride arv, l_1 – lihtliigendite arv.

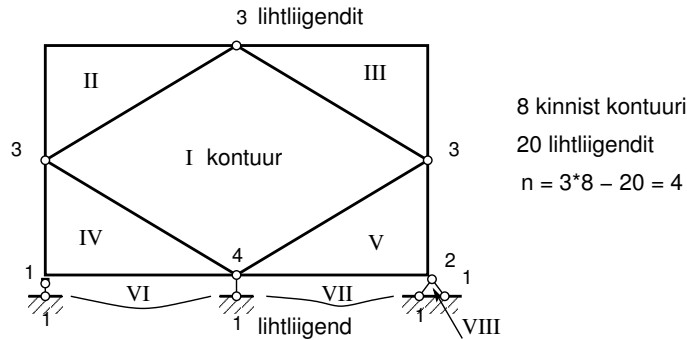
Näiteks raamil (joonis 9.1 a)) on suletud kontuuride arv $m_1 = 2$ ja lihtliigendeid $l_1 = 3$. Seega on staatilise määramatuse aste n

$$n = 3m_1 - l_1 = 3 \cdot 2 - 3 = 3. \quad (9.8)$$

Joonisel 9.2 näidatud raamil on 8 kinnist kontuuri ja 20 lihtliigendit. Seega,

$$n = 3m_1 - l_1 = 3 \cdot 8 - 20 = 4 \quad (9.9)$$

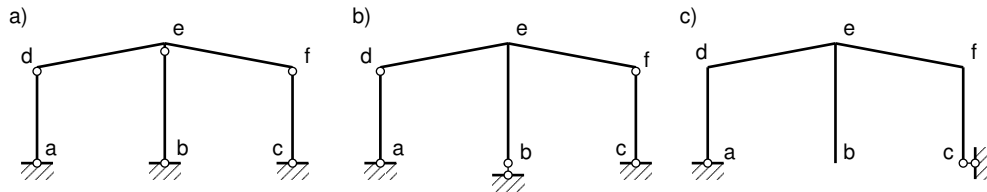
Lihtliigendite arv on ühe võrra väiksem selles liigendis kinnitatud varraste arvust. Näiteks on joonisel 9.2 all vasakus nurgas üks lihtliigend (kinnitatud üks jääk nurk ja toe varras). Samal joonisel üleval keskel olevas liigendis on ühendatud varrast ja lihtliigendite arv on kolm.



Joonis 9.2. Kinnised kontuurid ja lihtliigendid

9.1.2 Põhiskeem ja lisatundmatud

Staatikaga määramatust raamist saadakse liigsidemete eemaldamisel staatikaga määratav raam. Selliselt saadud uut staatikaga määratavat skeemi nimetatakse *põhiskeemiks*. Jõumeetodi puhul on eemaldatud sidemete asemel rakendatud jõud lisatundmatuteks. Liigsidemeteks võib valida sidemed, mille eemaldamisel ei ole skeem geomeetriselt muutuv (vt joonis 9.3 a) ja b)) või hetkmuutuv (joonis 9.3 c)).



Joonis 9.3. Geomeetriselt muutuvad ja hetkmuutuvad skeemid

Joonisel 9.4(a) ja 9.4(b) on toodud raam, mis on kahekordselt staatikaga määratu. Lisatundmatuteks on momendid X_1 ja X_2 . Joonisel 9.4(a) oleva raami sõlme f pöördumisel pöördenurga φ_{fe} võrra, pöörduvad ka varraste fe ja fc otste ristlõiked nurga φ_{fe} ning φ_{fc} võrra. Deformatsiooni pidevuse tingimuseks on nende pöördenurkade võrdsus $\varphi_{fe} = \varphi_{fc}$, s.o

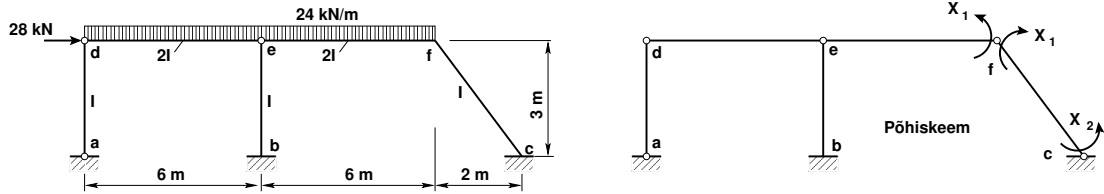
$$\varphi_{fe} - \varphi_{fc} = 0 \tag{9.10}$$

Toe c ristlõike pöördenurk võrdub nulliga.

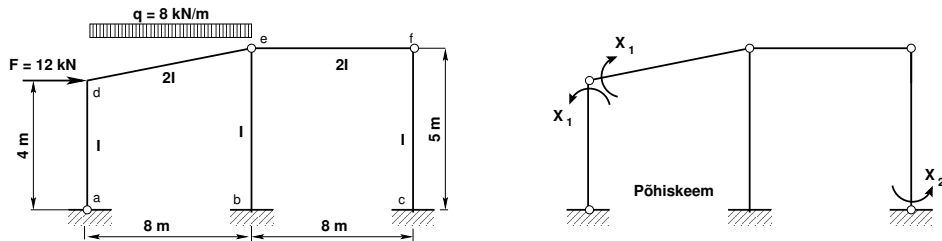
$$\varphi_{cf} = 0 \tag{9.11}$$

Sarnased tingimused saame kirjutada ka joonisel 9.4(b) oleva raami kohta. Lisaks pöördenurkade pidevuse tingimusele võib lõigata ristlõike läbi ja võtta pikisiirete, põikisiirete ning paindemomentide võrdsuse (vt joonis 9.4(c)). Erinevate põhiskeemide puhul on arvutuste maht erinev.

Järgnevalt vaatleme, kuidas nende tingimuste põhjal saada võrrandid lisatundmatute (X_i) leidmiseks.



(a) Põhiskeem a



(b) Põhiskeem b



(c) Põhiskeem c

Joonis 9.4. Raamide põhiskeeme

9.1.3 Lisatundmatute arvutamise võrrandid

Lisatundmatute X_i leidmiseks koostatakse võrrandid staatikaga määramatu skeemi siirete pidevustingimuste alusel. Arvutusskeemi suvalise punkti siire arvutatakse jõudude sõltumatuse printsiibi (vt jaotis 1.2) alusel:

$$\Delta_k = \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{k0} \tag{9.12}$$

kus Δ_{k0} on koormusest, temperatuurist ja tugede vajumisest põhjustatud ristlõike k siire põhiskeemis; δ_{ki} on ristlõike k siire lisatundmatust $X_i = 1$.

Võrrandid tundmatute arvutamiseks saame, kui kirjutame tingimused (9.10), (9.11) avaldise (9.12) abil lahti. Kui arvutusskeem on n korda staatikaga määramatu, siis n tingimuse kohta koostatakse n võrrandit:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{10} = 0 \\ \Delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{20} = 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_k &= \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{k0} = 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n0} = 0 \end{aligned} \tag{9.13}$$

ehk

$$\Delta_k = \delta_{ki}X_i + \Delta_{k0} = 0, \quad (k, i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.14)$$

Võrrandisüsteemi (9.14) nimetatakse *jõumeetodi kanooniliseks võrrandisüsteemiks*.

Võrrandisüsteemi (9.13), (9.14) kordajad δ_{ij} ja vabaliige Δ_{i0} leitakse valemitega

$$\delta_{ij} = \sum \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i m_j}{EI} + \frac{n_i n_j}{EA} + k_j \frac{q_i q_j}{EA} \right) dx \quad (9.15)$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p^0}{EI} + \frac{n_i N_p^0}{EA} + k_j \frac{q_i Q_p^0}{EA} \right) dx \quad (9.16)$$

$$\Delta_{it} = \sum \int_0^{l_j} \alpha_j \left(\frac{\Delta t_j}{h_j} m_i + t_{0j} n_i \right) dx \quad (9.17)$$

$$\Delta_{ir} = - \sum \Delta c_j r'_{ji} \quad (9.18)$$

$$\Delta_{i0} = \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{ir} \quad (9.19)$$

kus α_j – varda j materjali joonpaisumistegur;

k_j – tegur, mis arvestab nihkepingete ebahütlast jaotumist varda j ristlõikes, näiteks ristkülikulise ristlõike puhul $k_j = 1.2$.

Võrrandisüsteemi (9.13), (9.14) kordajate δ_{ij} ja vabaliikme Δ_{i0} leidmiseks kasutame numbrilist integreerimist (Simpsoni valemit vt lõik D.2.1 lk 665 ja Vereštšagini võtet vt lõik D.2.3 lk 666). Numbrilist integreerimist kasutatakse näites (9.1), (9.2) ja arvutiprogrammis I.61 lk 733.

9.1.4 Sisejõudude arvutus

Konstruksiooni varda mis tahes vabalt valitud ristlõikes k arvutatakse sisejõud M_k jõudude mõjumise sõltumatuse printsiibi põhjal:

$$M_k = m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + \dots + m_{kj}X_j + \dots + m_{kn}X_n + M_{kp}^0 \quad (9.20)$$

siin m_{kj} on paindemoment ühikepüüri m_j ristlõikes k ,

M_{kp}^0 – paindemoment koormusepüüri M_p^0 ristlõikes k ,

X_j – lisatundmatu.

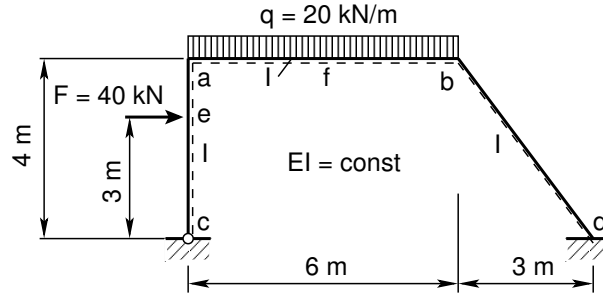
9.1.5 Raami arvutus jõumeetodiga. Näide 9.1

Näide 9.1

Koostada joonisel 9.5 staatikaga määramatu raami paindemomendi, põikjõu ja normaaljõu epüürid.

Joonise 9.5 raamil on üks kinnine kontuur ($m_1 = 1$) ja üks lihtliigend ($l_1 = 1$). Raami staatilise määramatuse astet arvutame valemiga (9.7). Saame

$$n = 3m_1 - l_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \quad (9.21)$$



Joonis 9.5. Kahekordselt staatiliselt määramatu raam 1

st raami staatilise määramatuse aste on kaks. Kirjutame välja jõumeetodi kanoonilised võrrandid kahekordselt staatikaga määramatu raami jaoks:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &= -\Delta_{1p} \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 &= -\Delta_{2p} \end{aligned} \quad (9.22)$$

Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi kordajate arvutamise valemities (9.15) ja (9.16) arvestame ainult paindemomendi mõju:

$$E_oI_o\delta_{i,j} = \Sigma \int_0^l \frac{m_i m_j E_oI_o}{EI} ds, \quad E_oI_o\Delta_{i,p} = \Sigma \int_0^l \frac{m_i M_p^0 E_oI_o}{EI} ds \quad (9.23)$$

Siin summa Σ võetakse üle kõigi varraste. Integreerimisel jälgime integreerimispiirkondi. Kui funktsioon muutub, tuleb alustada uue integreerimispiirkonnaga nii, nagu toimisime siirete numbrilisel arvutamisel (näide 7.1). Integraalide arvutamisel kasutame Vereštšagini võtet (D.26) ja Simpsoni valemit (D.17).

Järgnevaid arvutusi saame korrata, kui kopeerime tekstist R3kasud.txt⁴ käsu/käsud ja asetame GNU Octave'i käsureale.

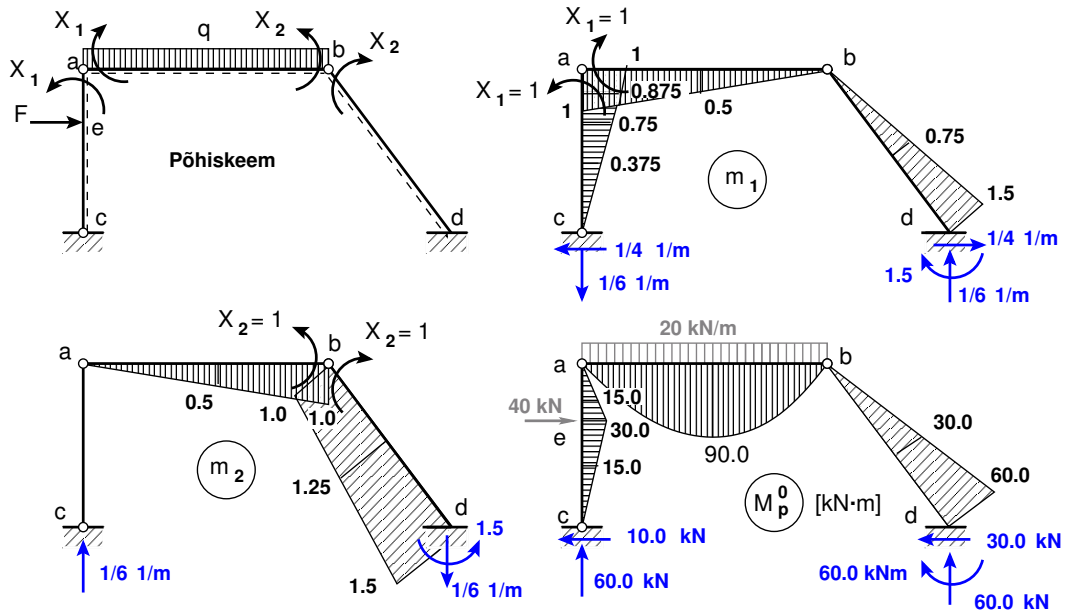
Koostame m_i ja M_p^0 epüürid (joonis 9.6) ja arvutame võrrandisüsteemi (9.22) kordajad ning vabaliikme

$$\begin{aligned} EI\delta_{11} &= \frac{4}{3} \cdot 1^2 + \frac{6}{3} \cdot 1^2 + \frac{5}{3} \cdot 1.5^2 = 7.0833 \text{ m} \\ EI\delta_{22} &= \frac{6}{3} \cdot 1^2 + \frac{5}{6} (1.0 \cdot 1.0 + 4 \cdot 1.25 \cdot 1.25 + 1.5 \cdot 1.5) = 9.9167 \text{ m} \\ EI\delta_{12} &= EI\delta_{21} = \frac{6}{6} \cdot 1^2 + \frac{5}{6} (0 \cdot 1.0 - 4 \cdot 0.75 \cdot 1.25 - 1.5 \cdot 1.5) = -4.0000 \text{ m} \\ EI\Delta_{1p} &= \frac{1}{3} \cdot 0.75 \cdot 30.0 \cdot 3.0 + \frac{1}{6} (0.75 \cdot 30.0 + 4 \cdot 0.875 \cdot 15.0 + 1.0 \cdot 0) + \\ &\quad + \frac{2}{3} \cdot 90 \cdot 6.0 \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 1.5 \cdot 60.0 \cdot 5.0 = 365.000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\ EI\Delta_{2p} &= \frac{2}{3} \cdot 90 \cdot 6.0 \cdot 0.5 + \frac{5}{6} \cdot (1.0 \cdot 0 - 4 \cdot 1.25 \cdot 30.0 - 1.5 \cdot 60) = -20.000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \end{aligned} \quad (9.24)$$

Saadud võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} 7.0833X_1 - 4.0000X_2 &= -365.000 \\ -4.0000X_1 + 9.9167X_2 &= 20.000 \end{aligned} \quad (9.25)$$

⁴./octaveProgrammide/R3kasud.txt



Joonis 9.6. Raami 1 põhiskeem ja paindemomentide epüürid

lahendame GNU Octave'iga:

```
octave:1> VasakPool=[7.0833 -4.0000; -4.0000 9.9167]
VasakPool =
```

```
    7.0833  -4.0000
   -4.0000   9.9167
```

```
octave:2> ParemPool=[-365.000;20.0]
ParemPool =
```

```
   -365
     20
```

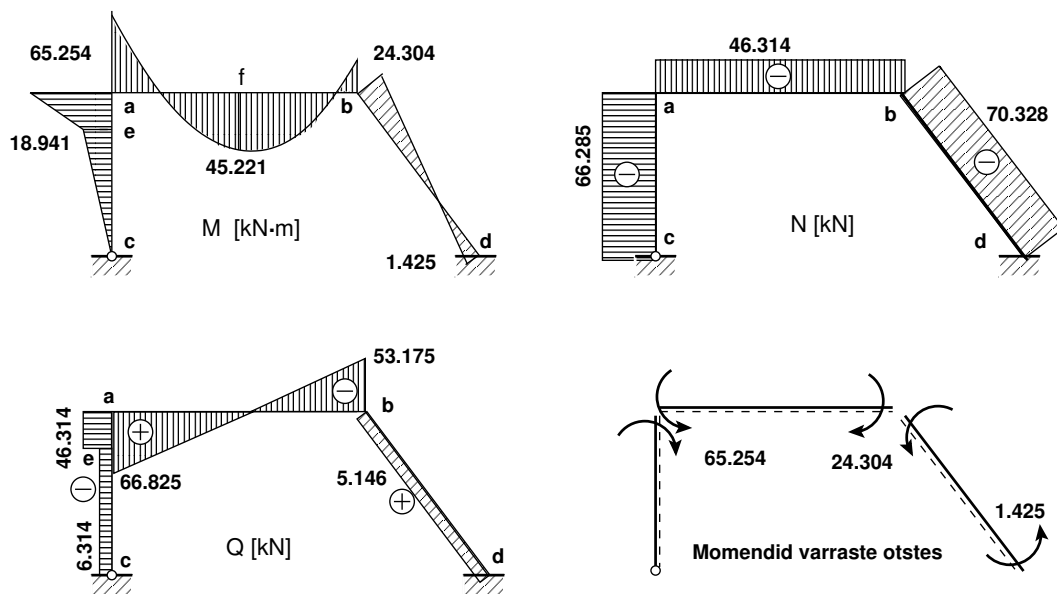
```
octave:3> X=VasakPool\ParemPool
X =
```

```
   -65.254
   -24.304
```

```
octave:4>
```

Väikest süsteemi saame lahendada ka determinantidega (vt lisa A.10)

$$\begin{aligned}
 D &= 7.0833 \cdot 9.9167 - 4.0000^2 = 54.243 \\
 D_1 &= -365.000 \cdot 9.9167 + 4.0000 \cdot 20.0 = -3539.6 \\
 D_2 &= 7.0833 \cdot 20.0 - 4.0000 \cdot 365.000 = -1318.3
 \end{aligned}
 \tag{9.26}$$



Joonis 9.7. Raami 1 sisejõudude epüürid

$$\begin{aligned} X_1 &= D_1/D = -3539.6/54.243 = -65.254 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ X_2 &= D_2/D = -1318.3/54.243 = -24.304 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (9.27)$$

Konstruksiooni varda sisejõu arvutamisel kasutame avaldist (9.20). Saame:

$$\begin{aligned} M_a &= 1 \cdot X_1 = -65.254 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_b &= 1 \cdot X_2 = -24.304 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_d &= -1.5 \cdot (-65.254) + 1.5 \cdot (-24.304) - 60.0 = 1.425 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_e &= 0.75 \cdot (-65.254) + 0.0 \cdot (-24.304) + 30.0 = -18.941 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_f &= 0.5 \cdot (-65.254) + 0.5 \cdot (-24.304) + 90.0 = 45.221 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (9.28)$$

Varda ac ristlõikes e momendi M_e ja varda ab ristlõikes f momendi M_f võime leida epüüride liitmisel, kasutades nn superpositsiooniprintsiipi. Vaatleme esmalt mõõduta koordinaate ξ ja η (vt joonis 9.8)

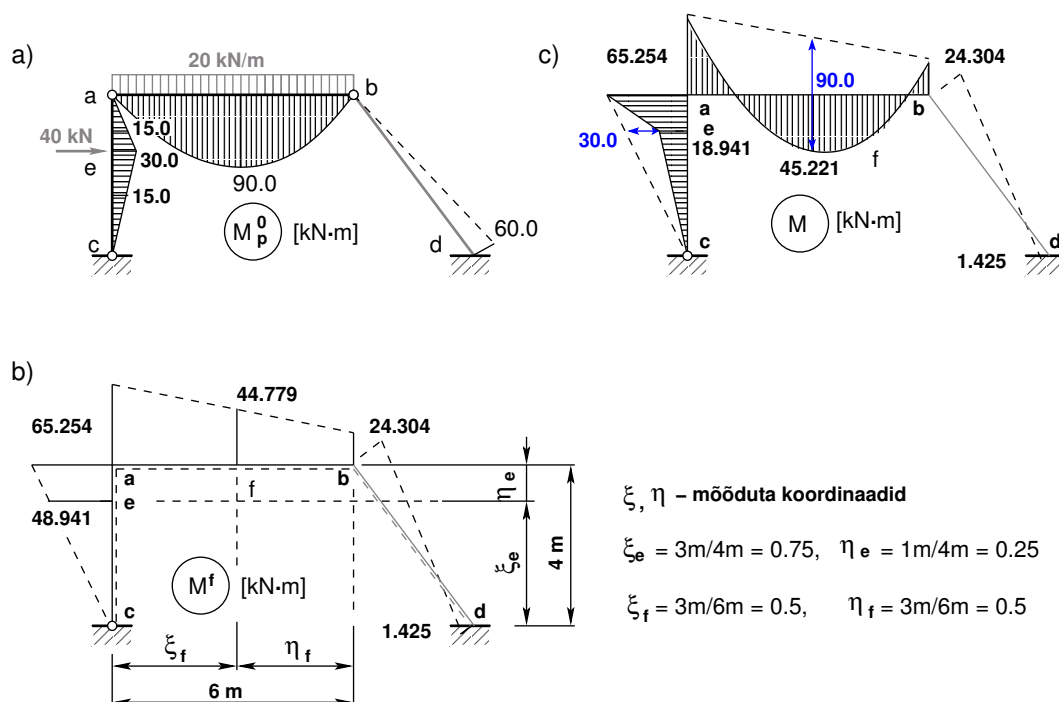
$$\xi_e = \frac{3}{4}; \quad \eta_e = \frac{1}{4} \quad (9.29)$$

$$\xi_f = \frac{3}{6}; \quad \eta_f = \frac{3}{6} \quad (9.30)$$

Joonisel 9.8 b) oleva momendi M_e^f ja M_f^f leiame järgmiselt:

$$M_e^f = \xi_e \cdot M_{ac} + \eta_e \cdot M_{ca} = 0.75 \cdot (-65.254) + 0.25 \cdot 0.0 = -48.941 \text{ [kNm]} \quad (9.31)$$

$$M_f^f = \xi_f \cdot M_{ba} + \eta_f \cdot M_{ab} = 0.5 \cdot (-24.304) + 0.5 \cdot (-65.254) = -44.779 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (9.32)$$



Joonis 9.8. Raam 1. Epüüride liitmine

Liidame varda ac momendid M_e^0 ja M_e^f ning momendid M_f^0 ja M_f^f varda ab keskel

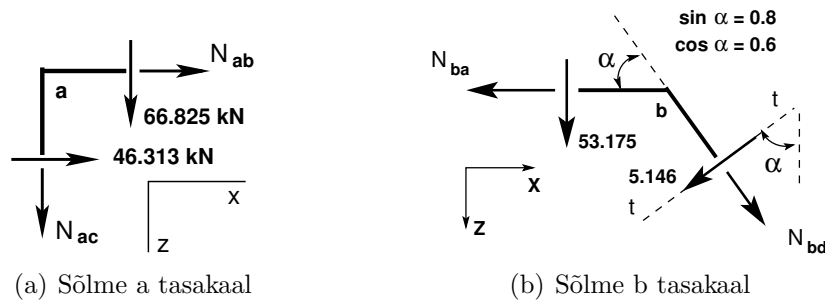
$$M_e = M_e^0 + M_e^f = 30.0 - 48.941 = -18.941 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (9.33)$$

$$M_f = M_f^0 + M_f^f = 90.0 - 44.779 = 45.221 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (9.34)$$

Leitud paindemomentide (9.28) põhjal koostame paindemomentide epüüri (joonis 9.7).

Põikjõu epüüri ordinaatide arvutamisel kasutame diferentsiaalseid (vt jaotis 1.10). Siin valime koordinaattelje x suuna vasakult paremale nii, et varda positiivsed kiud (joonisel 9.7 näidatud punktiirjoonega) jäävad allapoole. Momendi juurdekasvu ΔM arvutamisel parempoolsest momendist M_{paremal} lahutame vasakpoolse momendi M_{vasakul} ($\Delta M = M_{\text{paremal}} - M_{\text{vasakul}}$). Raami varda ce põikjõu Q_{ce} arvutamisel kasutame diferentsuhet $Q = \frac{\Delta M}{\Delta x}$ (1.31). Saame:

$$\begin{aligned} Q_{ce} &= Q_{ec} = \frac{M_e}{3.0} = \frac{-18.941}{3.0} = -6.314 \text{ kN} \\ Q_{ae} &= Q_{ea} = \frac{M_a - M_e}{1.0} = \frac{-65.254 - (-18.941)}{1.0} = -46.313 \text{ kN} \\ Q_{ab} &= Q_{ab}^0 + \frac{M_b - M_a}{6.0} = \\ &= \frac{20 \cdot 6}{2} + \frac{-24.304 - (-65.254)}{6.0} = 60.0 + 6.825 = 66.825 \text{ kN} \quad (9.35) \\ Q_{ba} &= Q_{ba}^0 + \frac{M_b - M_a}{6.0} = \\ &= -\frac{20 \cdot 6}{2} + \frac{-24.304 - (-65.254)}{6.0} = -60.0 + 6.825 = -53.175 \text{ kN} \\ Q_{bd} &= Q_{db} = \frac{M_d - M_b}{5.0} = \frac{1.425 - (-24.304)}{5.0} = -5.146 \text{ kN} \end{aligned}$$



Joonis 9.9. Raami 1 sõlmede tasakaal

Leitud põikjõudude (9.35) põhjal koostame põikjõu epüüri (joonis 9.7).

Raami varrastes mõjuvate normaaljõudude määramiseks lõikame välja raami sõlme a ja sõlme b (vt joonis 9.9). Tundmatud normaaljõud N kanname joonisele 9.9 positiivses suunas (I märgikokkuleppe järgi tõmbele). Põikjõu kanname joonisele vastavalt I märgikokkuleppe märgile (vt lõik 1.12).

Sõlme a (joonis 9.9(a)) tasakaalust saame

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 \quad -N_{ab} - 46.313 &= 0 \\ N_{ab} &= -46.313 \text{ kN} \end{aligned} \quad (9.36)$$

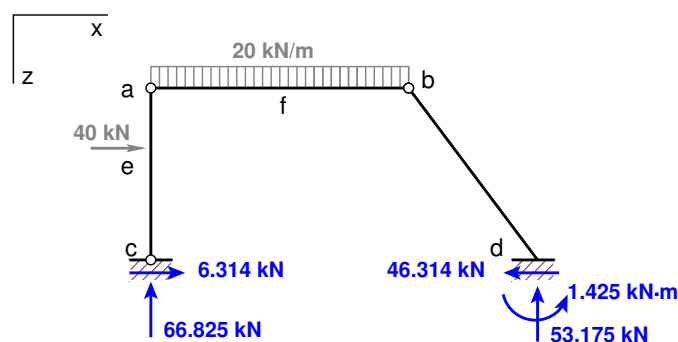
$$\begin{aligned} \Sigma Z = 0 \quad -N_{ac} - 66.825 &= 0 \\ N_{ac} &= -66.825 \text{ kN} \end{aligned} \quad (9.37)$$

Koostame sõlmes b (joonis 9.9(b)) tasakaaluvõrrandi teljele t-t ja Z:

$$\begin{aligned} \Sigma t = 0: \quad -N_{ba} \cdot \sin \alpha - 53.175 \cdot \cos \alpha - 5.146 &= 0 \\ N_{ba} &= (-53.175 \cdot \cos \alpha - 5.146) / \sin \alpha = -46.314 \text{ kN} \end{aligned} \quad (9.38)$$

$$\begin{aligned} \Sigma Z = 0: \quad -N_{bd} \cdot \sin \alpha - 5.146 \cdot \cos \alpha - 53.175 &= 0 \\ N_{bd} &= (-5.146 \cdot \cos \alpha - 53.175) / \sin \alpha = -70.328 \text{ kN} \end{aligned} \quad (9.39)$$

Teostame raami staatilise kontrolli.



Joonis 9.10. Raami 1 toereaktsioonid

Projitseerime kõik jõud horisontaalteljele x (joonis 9.10)

$$\Sigma X = 0; \quad 40.0 + 6.314 - 46.314 = 0 \quad (9.40)$$

Projitseerime kõik jõud vertikaalteljele Z (joonis 9.10):

$$\Sigma Z = 0; \quad 20.0 \cdot 6.0 - 66.825 - 53.175 = 0 \quad (9.41)$$

Momentide summaga kontrollimine on väga oluline kontroll. Paljudel juhtudel avastatakse arvutustes tehtud viga alles selle kontrolliga.

Momentide summa toe c suhtes:

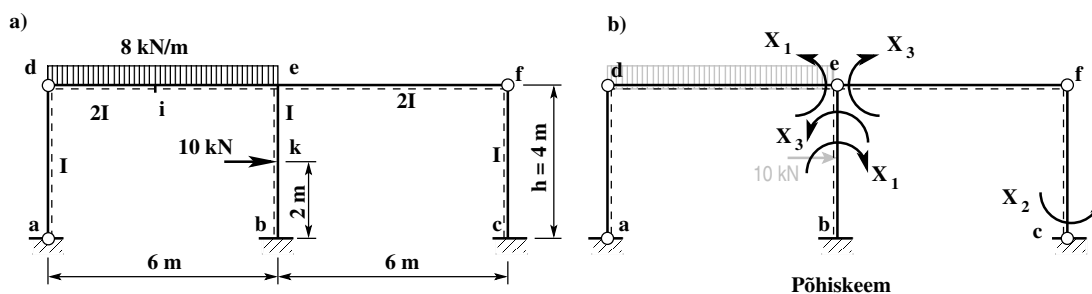
$$\Sigma M_c = 0; \quad -40.0 \cdot 3.0 - 20.0 \cdot 6.0 \cdot 3.0 + 53.175 \cdot 9.0 + 1.425 = -1.1 \cdot 10^{-14} \approx 0 \quad (9.42)$$

Lahendamiseks saab kasutada ka programmi [journR3.m](#)^{5 6}.

9.1.6 Raami arvutus jõumeetodiga. Näide 9.2

Näide 9.2 (Kolmekordselt staatikaga määratu raam)

Koostada joonisel 9.11 a) näidatud raamile paindemomendi epüüür, kasutades arvutusprogrammi Octave (programm I.61 lk 733). Raami kõrgus $h = 4$ m ja avad $l = 6$ m. Raami riivile $d-e$ on rakendatud ühtlaselt jaotatud koormus $q = 8$ kN/m ja posti $b-e$ keskele koondatud jõud $F = 10$ kN. Raami postide ristlõike jäikus $I_2 = I$ ja riivide ristlõike jäikus $I_1 = 2I$.



Joonis 9.11. Kolmekordselt staatiliselt määratu raam 2 ja põhiskeem

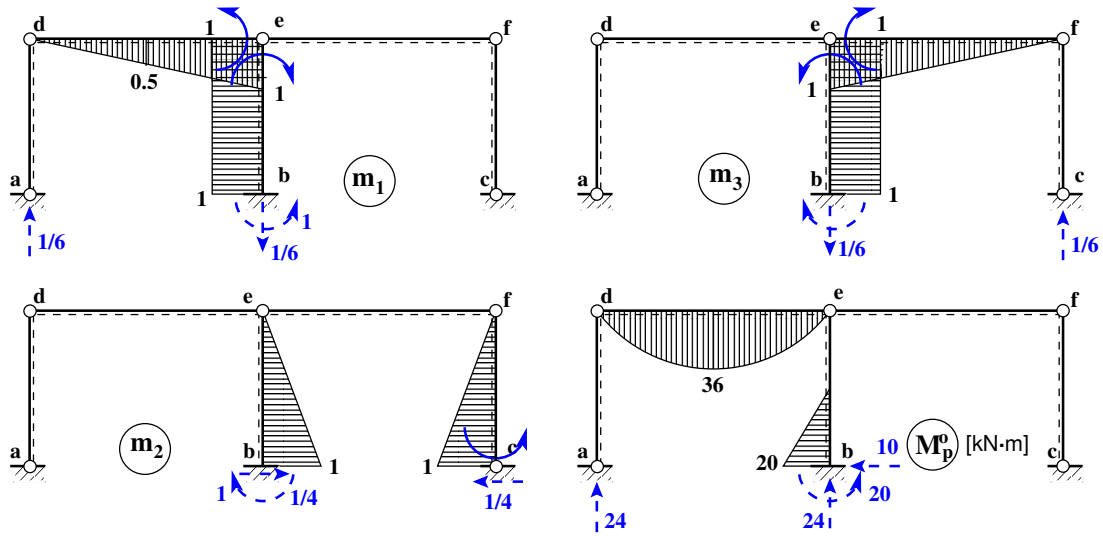
Joonisel 9.11 a) näidatud raamil on 2 suletud kontuuri ja 3 lihtliigendit. Staatilise määratuse astet arvutame valemiga (9.7):

$$n = 3 \cdot m_1 - l_1 = 3 \cdot 2 - 3 = 3 \quad (9.43)$$

siin on $m_1 = 2$ suletud (nii liigendita kui ka liigenditega) kontuuride arv, $l_1 = 3$ lihtliigendite arv. Seega on staatikaga määratuse aste $n = 3$.

⁵ [./octaveProgrammide/journR3.m](#)

⁶ [./octaveProgrammide/journR3.Kommentaaris.pdf](#)



Joonis 9.12. Põhiskeemi epüürid

Joonisel 9.11 b) on näidatud valitud põhiskeem. Sellele põhiskeemile vastavad ühikjõududest ja koormusest põhjustatud momendid on näidatud joonisel 9.12.

Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi avaldame järgmisel kujul:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_{1p} \\ -\Delta_{2p} \\ -\Delta_{3p} \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

ehk

$$\delta_{ij}X_j = -\Delta_{ip} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (9.45)$$

Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi (9.44) kordajad leitakse momendi epüüride korrutamise ja integreerimise teel. Võrrandisüsteemi kordajate arvutamise valemites (9.15) ja (9.16) arvestame ainult paindemomendi mõju. Võrrandisüsteemi vasaku ja parema poole võib korrutada ristlõike baasjäikusega E_oI_o . Võrrandisüsteemi tundmatud sellest ei muutu. Võrrandisüsteemi kordajatesse jäävad ainult ristlõigete jäikuste suhted. Kui materjal on ühesugune ($E = E_o$), jääb ainult inertsimomentide suhe (vaata kordajate (9.47) ja (9.48) arvutust). Saame

$$E_oI_o\delta_{i,j} = \Sigma \int_0^l \frac{m_i m_j E_o I_o}{EI} ds, \quad E_oI_o\Delta_{i,p} = \Sigma \int_0^l \frac{m_i M_p^0 E_o I_o}{EI} ds \quad (9.46)$$

Siin summa Σ võetakse üle kõigi varraste. Integreerimisel jälgige integreerimise piirkondi. Kui funktsioon muutub, tuleb alustada uue integreerimispiirkonnaga. Arvutame võrrandisüsteemi

(9.44) vasaku poole kordajad:

$$\begin{aligned}
 E_o I_o \delta_{11} &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 6.0}{3 \cdot \underbrace{2}_{I=2}} + 1.0 \cdot 4.0 \cdot 1.0 = 5.000 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{12} &= E_o I_o \delta_{21} = -\frac{1.0 \cdot 4.0}{2} \cdot 1.0 = -2.000 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{22} &= 2 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{3} = 2.6667 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{33} &= E_o I_o \delta_{11} = 5.000 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{13} &= E_o I_o \delta_{31} = -1.0 \cdot 4.0 \cdot 1.0 = -4.000 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{2,3} &= E_o I_o \delta_{32} = \frac{1.0 \cdot 4.0}{2} \cdot 1.0 = 2.000 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{9.47}$$

Võrrandisüsteemi (9.44) vabaliikmed $\Delta_{i,p}$ leiame integreerimisega:

$$\begin{aligned}
 E_o I_o \Delta_{1p} &= \frac{2}{3} 36.0 \cdot 6.0 \cdot 0.5 \frac{1}{\underbrace{2}_{I=2}} + \frac{20.0 \cdot 2.0}{2} \cdot 1 = 56.000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\
 E_o I_o \Delta_{2p} &= \frac{2.0}{6} [-0 \cdot 0.5 - 4 \cdot 10.0 \cdot 0.75 - 20 \cdot 1.0] = -16.667 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\
 E_o I_o \Delta_{3p} &= -\frac{20.0 \cdot 2.0}{2} \cdot 1 = -20.000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned} \tag{9.48}$$

Võrrandisüsteem on arvuliselt järgmine:

$$\begin{bmatrix} 5.000 & -2.000 & -4.000 \\ -2.000 & 2.6667 & 2.000 \\ -4.000 & 2.000 & 5.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -56.000 \\ 16.667 \\ 20.000 \end{bmatrix} \tag{9.49}$$

mille lahend (võrrandisüsteemi lahendamist vt lisa A.10) on

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -22.250 \\ -0.125 \\ -13.750 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m} \tag{9.50}$$

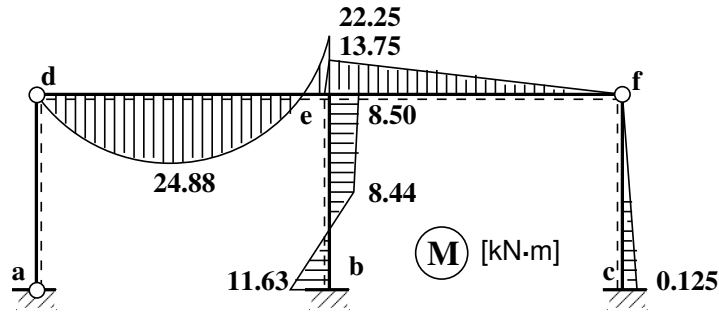
Saadud lahendit X_i ($i=1,2,3$) kasutame paindemomentide arvutamiseks.

Paindemomendid arvutatakse ühikepüüride m_1 , m_2 , m_3 (joonis 9.12) korrutamisega vastavate X_i -dega ja koormusepüüri M_p^0 lisamisega:

$$M_p = m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 + m_3 \cdot X_3 + M_p^0 \tag{9.51}$$

Arvutame paindemomendid varraste ristlõigetel:

$$\begin{aligned}
 M_{ed} &= 1 \cdot x_1 = 1 \cdot (-22.250) = -22.25 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 M_i &= 0.5 \cdot x_1 + 8 \cdot 8^2 / 8 = 0.5 \cdot (-22.25) + 36.0 = 24.880 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 M_{eb} &= 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_3 = 1 \cdot (-22.25) - 1 \cdot (-13.750) = -8.50 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 M_{ef} &= 1 \cdot x_3 = 1 \cdot (-13.750) = -13.750 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 M_k &= 1.0 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 1.0 \cdot x_3 = \\
 &= 1.0 \cdot (-22.25) - 0.5 \cdot (-0.125) - 1.0 \cdot (-13.750) = -8.44 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 M_{be} &= 1.0 \cdot x_1 - 1.0 \cdot x_2 - 1.0 \cdot x_3 + M_{be}^0 = \\
 &= 1.0 \cdot (-22.25) - 1.0 \cdot (-0.125) - 1.0 \cdot (-13.750) + 20.0 = 11.63 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 M_{cf} &= 1 \cdot x_2 = 1 \cdot (-0.125) = -0.125 \text{ kN} \cdot \text{m}
 \end{aligned} \tag{9.52}$$



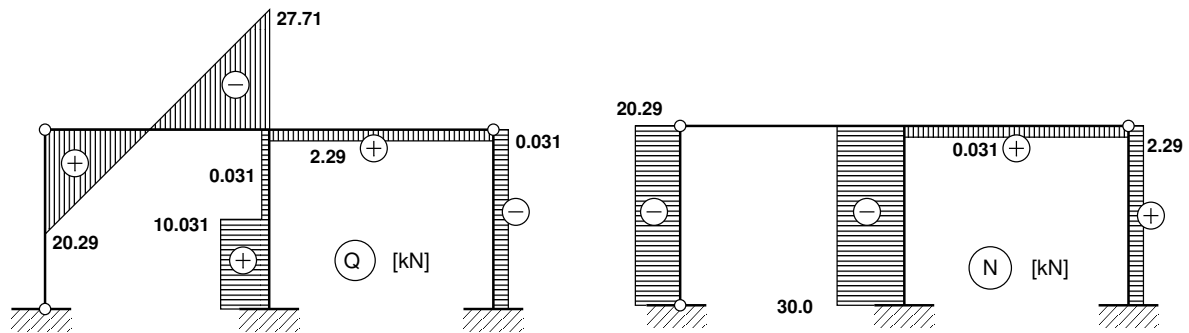
Joonis 9.13. Raami 2 paindemomendi epüür

Leitud paindemomentide järgi koostame paindemomentide epüüri (joonis 9.13).

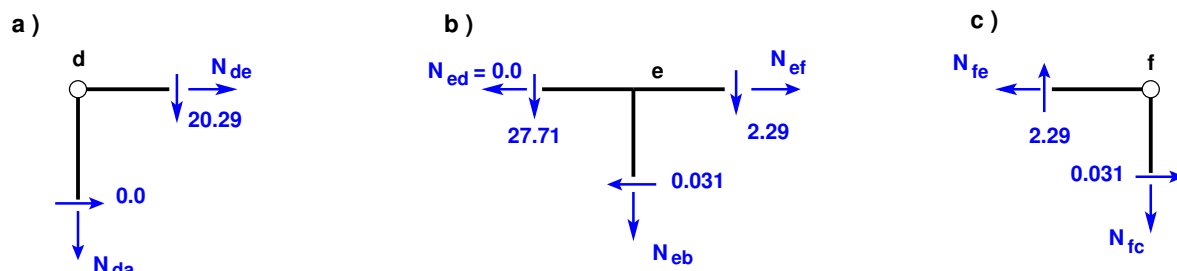
Põikjõu epüüri ordinaatide arvutamisel kasutame diferentsiaalseid (vt jaotis 1.10). Siin valime koordinaattelje x suuna vasakult paremale nii, et varda positiivsed kiud (joonisel 9.11 näidatud punktiirjoonega) jäävad allapoole. Momendi juurdekasvu ΔM arvutamisel parempoolsest momendist $M_{paremal}$ lahutame vasakpoolse momendi $M_{vasakul}$ ($\Delta M = M_{paremal} - M_{vasakul}$).

Raami varda ce põikjõu Q_{ce} arvutamisel kasutame diferentsiaalset $Q = \frac{\Delta M}{\Delta x}$ (1.31). Saame:

$$\begin{aligned}
 Q_{ef} &= Q_{fe} = -\frac{M_f}{6.0} = -\frac{-13.75}{6.0} = -2.29 \text{ kN} \\
 Q_{fc} &= Q_{cf} = \frac{M_{cf} - M_{fc}}{4.0} = \frac{-0.125 - 0}{4.0} = -0.31 \text{ kN} \\
 Q_{de} &= Q_{de}^o + \frac{M_{ed} - M_{de}}{6.0} = \\
 &= \frac{8.0 \cdot 6}{2} + \frac{-22.25 - 0}{6.0} = 24.0 - 3.7083 = 20.2917 \text{ kN} \\
 Q_{ed} &= Q_{ed}^o + \frac{M_{ed} - M_{de}}{6.0} = \\
 &= -\frac{8.0 \cdot 6}{2} + \frac{-22.25 - 0}{6.0} = -24.0 - 3.7083 = -27.708 \text{ kN} \\
 Q_{ek} &= Q_{ke} = \frac{M_{ke} - M_{ek}}{2.0} = \frac{-8.44 - (-8.50)}{2.0} = 0.031 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{9.53}$$



Joonis 9.14. Raami 2 N ja Q epüürid



Joonis 9.15. Raami 2 sõlmed

$$Q_{bk} = Q_{kb} = \frac{M_{bk} - M_{kb}}{2.0} = \frac{11.63 - (-8.44)}{2.0} = 10.0316 \text{ kN}$$

Leitud põikjõudude (9.53) põhjal koostame põikjõu epüüri (joonis 9.14).

Raami varrastes mõjuvate normaaljõudude määramiseks lõikame välja raami sõlmed d, e ja f (vt joonis 9.15). Tundmatud normaaljõud N kanname joonisele 9.15 positiivses suunas (I märgikokkuleppe järgi tõmbele). Põikjõu kanname joonisele vastavalt I märgikokkuleppe märgile (vt jaotis 1.12).

Sõlme d (joonis 9.15 a)) tasakaalust saame

$$\Sigma X = 0 : \quad -N_{de} - 0.0 = 0, \quad N_{de} = 0.0 \text{ kN}, \quad N_{ed} = N_{de} \quad (9.54)$$

$$\Sigma Z = 0 : \quad -N_{da} - 20.29 = 0, \quad N_{da} = -20.29 \text{ kN}, \quad N_{ad} = N_{da} \quad (9.55)$$

Sõlme f (joonis 9.15 c)) tasakaalust saame

$$\Sigma X = 0 : \quad -N_{fe} + 0.031 = 0, \quad N_{fe} = 0.031 \text{ kN}, \quad N_{ef} = N_{fe} \quad (9.56)$$

$$\Sigma Z = 0 : \quad -N_{fc} + 2.29 = 0, \quad N_{fc} = 2.29 \text{ kN}, \quad N_{cf} = N_{fc} \quad (9.57)$$

Sõlme e (joonis 9.15 b)) tasakaalust saame

$$\Sigma X = 0 : \quad -N_{ef} + 0.031 = 0, \quad N_{ef} = 0.031 \text{ kN}, \quad N_{fe} = N_{ef} \quad (9.58)$$

$$\Sigma Z = 0 : \quad -N_{eb} - 27.71 - 2.29 = 0, \quad N_{eb} = -30.0 \text{ kN}, \quad N_{be} = N_{eb} \quad (9.59)$$

Leitud normaaljõud kanname normaaljõu epüürile (joonis 9.14).

Põikjõu ja normaaljõu epüürilt (joonis 9.14) leiame raami toereaktsioonid. Kanname need joonisele 9.16.

Raami staatiline kontroll.

Projitseerime kõik jõud horisontaalteljele X (joonis 9.16):

$$\Sigma X = 0 : \quad 10.0 - 10.031 + 0.031 = -5.8287 \cdot 10^{-16} \approx 0 \quad (9.60)$$

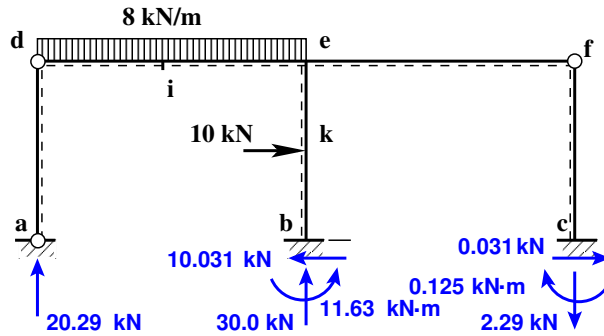
Projitseerime kõik jõud vertikaalteljele Z (joonis 9.16):

$$\Sigma Z = 0 : \quad 8.0 \cdot 6.0 - 20.29 - 30.62 + 2.91 = 8.8818 \cdot 10^{-16} \approx 0 \quad (9.61)$$

Momentide summaga kontrollimine on väga oluline kontroll. Paljudel juhtudel avastatakse arvutustes tehtud viga alles selle kontrolliga.

Momentide summa toe a suhtes:

$$\Sigma M_a = 0 : \quad -8.0 \cdot 6.0 \cdot 3.0 - 10.0 \cdot 2.0 + 30.0 \cdot 6.0 + 11.63 - 2.29 \cdot 12.0 - 0.125 = 0.025 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (9.62)$$



Joonis 9.16. Raami 2 toereaktsioonid

Erinevus nullist on siin $0.025 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Täpsustame toe c toereaktsiooni, mille õlg on 12 m

$$\begin{aligned}\Sigma M_a &= 0 : \\ -8.0 \cdot 6.0 \cdot 3.0 - 10.0 \cdot 2.0 + 30.0 \cdot 6.0 + 11.625 - 2.291667 \cdot 12.0 - 0.125 &= \quad (9.63) \\ &= -4.0000 \cdot 10^{-6} \text{ kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Kui toereaktsioonide arvutamisel hoiame rohkem kohti $M_b = 11.625$ ja $V_c = 2.291667$, on momentide tasakaalutingimus rahuldatud täpsuseni $-4.0000 \cdot 10^{-6} \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks maatrikskujul esitame võrrandi (9.51) järgmisel kujul:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_x \cdot \mathbf{x} + \mathbf{M}_p \quad (9.64)$$

kus M_x ja M_p on ühikjõududest ja koormusest põhjustatud maatriksid (vt avaldised (9.65) ja (9.66)). Nendes avaldistes sõltub elementide arv (ridade arv) integreerimispiirkondade arvust (integreerimiseks kasutame Simpsoni valemit (D.17), kus on momendi väärtused alguses, keskel ja lõpus). Paremaks jälgimiseks on maatriksites (9.65) ja (9.66) integreerimispiirkonnad eraldatud punktiiriga.

Vaatleme põhiskeemi epüüre joonisel 9.12. Valime raami varrastel kokkuleppeliselt positiivse poole ja tähistame selle poole punktiirjoonega (vt joonis 9.12). Raami varras, millel on koondatud jõud, on jagatud punktis k kaheks integreerimispiirkonnaks. Orienteerime varda nii, et varda positiivsed kiud jäävad allapoole. Varda d - e algul, keskel ja lõpus oleva momendi kanname maatriksi (9.66) veergu. Maatriksis M_x ja M_p (9.66) on ühepalju ridu ja nendes on kantud momendid ülevalt alla järjekorras algul, keskel ja lõpus. Vaadeldud raamil on 6 integreerimispiirkonda. Igas piirkonnas on kirjeldatud 3 ordinaati (alguses, keskel, lõpus). Kokku $3 \cdot 6 = 18$ väärtust (18 rida maatriksis (9.65) ja (9.66)).

Maatriksi M_x esimeses veerus on momentide väärtused epüüriilt m_1 , teises veerus momentide väärtused epüüriilt m_2 ja kolmandas veerus momentide väärtused epüüriilt m_3 .

Maatriksis M_p (9.65), (9.66) on põhiskeemi koormusepüüri M^0_p (joonis 9.12) ordinaadid. Ordinaadid on kantud järjekorras ülevalt alla: algul, keskel ja lõpus, kokku $3 \cdot 6 = 18$ ordinaati.

Numbrilisel integreerimisel kasutame Simpsoni valemit (D.17). Ühe integreerimispiirkonna jaoks on Simpsoni valemi kordajad esitatud vektorina (D.21). Vaadeldaval raamil on kuus integreerimispiirkonda. Nende piirkondade jaoks moodustame Simpsoni valemi kordajate vektori smps^T (9.67).

Koostatud maatriksid \mathbf{Mx} , \mathbf{Mp} (9.66) ja \mathbf{smps}^T (9.67) on kantud ka programmi *journNAq.m*^{7 8}.

Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi kordajate leidmisel kasutame Simpsoni valemit (D.17), kus ühikepüüri ordinaatide element-element korrutamise saadud tulemuse (D.20) korrutame skalaarselt läbi vektoriga (D.21). Saadud avaldist (D.22) kasutame võrrandisüsteemi kordajate ja vabaliikmete leidmiseks.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{ad} \\ M_{adk} \\ M_{da} \\ \dots \\ M_{de} \\ M_{dek} \\ M_{ed} \\ \dots \\ M_{ek} \\ M_{ekk} \\ M_{ke} \\ \dots \\ M_{kb} \\ M_{kbb} \\ M_{bk} \\ \dots \\ M_{fe} \\ M_{fek} \\ M_{ef} \\ \dots \\ M_{fc} \\ M_{fck} \\ M_{cf} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Mx} = \begin{bmatrix} m_{ad}^1 & m_{ad}^2 & m_{ad}^3 \\ m_{adk}^1 & m_{adk}^2 & m_{adk}^3 \\ m_{da}^1 & m_{da}^2 & m_{da}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{de}^1 & m_{de}^2 & m_{de}^3 \\ m_{dek}^1 & m_{dek}^2 & m_{dek}^3 \\ m_{ed}^1 & m_{ed}^2 & m_{ed}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{ek}^1 & m_{ek}^2 & m_{ek}^3 \\ m_{ekk}^1 & m_{ekk}^2 & m_{ekk}^3 \\ m_{ke}^1 & m_{ke}^2 & m_{ke}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{kb}^1 & m_{kb}^2 & m_{kb}^3 \\ m_{kbb}^1 & m_{kbb}^2 & m_{kbb}^3 \\ m_{bk}^1 & m_{bk}^2 & m_{bk}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{ef}^1 & m_{ef}^2 & m_{ef}^3 \\ m_{efk}^1 & m_{efk}^2 & m_{efk}^3 \\ m_{fe}^1 & m_{fe}^2 & m_{fe}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{fc}^1 & m_{fc}^2 & m_{fc}^3 \\ m_{fck}^1 & m_{fck}^2 & m_{fck}^3 \\ m_{cf}^1 & m_{cf}^2 & m_{cf}^3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{post 1} \\ \dots \\ \text{riiv 1} \\ \dots \\ \text{pool postist 2} \\ \dots \\ \text{pool postist 2} \\ \dots \\ \text{riiv 2} \\ \dots \\ \text{post 3} \end{array}; \quad \mathbf{Mp} = \begin{bmatrix} M_{ad}^0 \\ M_{adk}^0 \\ M_{da}^0 \\ \dots \\ M_{ed}^0 \\ M_{edk}^0 \\ M_{de}^0 \\ \dots \\ M_{ek}^0 \\ M_{ekk}^0 \\ M_{ke}^0 \\ \dots \\ M_{kb}^0 \\ M_{kbb}^0 \\ M_{bk}^0 \\ \dots \\ M_{ef}^0 \\ M_{efk}^0 \\ M_{fe}^0 \\ \dots \\ M_{fc}^0 \\ M_{fck}^0 \\ M_{cf}^0 \end{bmatrix} \quad (9.65)$$

Avaldise (D.22) kasutamine arvutiprogrammis näeb välja järgmiselt:

```
%=====
% Võrrandisüsteemi kordajate maatriksi 'a' leidmine
%=====
b1=MxT.*[MxT(1,:); MxT(1,:); MxT(1,:)]*smpsT;

b2=MxT.*[MxT(2,:); MxT(2,:); MxT(2,:)]*smpsT;

b3=MxT.*[MxT(3,:); MxT(3,:); MxT(3,:)]*smpsT;
%=====
a=[b1 b2 b3]
%=====
```

⁷ ./octaveProgrammide/journNAq.m

⁸ ./octaveProgrammide/journNAq.Kommentaarisid.pdf

```

%=====
% Võrrandisüsteemi vabaliikmete vektori 'b' leidmine
%=====
b=MxT.*[MpT; MpT; MpT]*smpsT
%=====

```

$$\mathbf{Mx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0.0 & -1 \\ 1 & -0.25 & -1 \\ 1 & -0.5 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & -0.5 & -1 \\ 1 & -0.75 & -1 \\ 1 & -1.0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Mp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 36 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.66)$$

Arvutiprogrammiga *joumNAq.m* arvutame jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi kordajad *a* ja vabaliikmed *b*.

```

Arvutuspäevik 9.1 octave:1> diary joumNAq.out
octave:2> diary on
octave:3> joumNAq
IntegreerimisPiirkondadeArv = 6

```

a =

```

5.0000 -2.0000 -4.0000
-2.0000 2.6667 2.0000
-4.0000 2.0000 5.0000

```

b =

```

56.000

```

```

-16.667
-20.000

x =

-22.25000
-0.12500
-13.75000
%
octave:4> diary off
    
```

$$\text{smps}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} h/I2 \\ 4 \cdot h/I2 \\ h/I2 \\ \dots \\ L/I1 \\ 4 \cdot L/I1 \\ L/I1 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 \cdot h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 \cdot h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ L/I1 \\ 4 \cdot L/I1 \\ L/I1 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 \cdot h2/I2 \\ h2/I2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{post 1} \\ \dots \\ \text{riiv 1} \\ \dots \\ \text{pool postist 2} \\ \dots \\ \text{pool postist 2} \\ \dots \\ \text{riiv 2} \\ \dots \\ \text{post 3} \end{matrix} \tag{9.67}$$

siin

$$\begin{aligned}
 h &= 4; & h2 &= h/2; \\
 L &= 6; & L05 &= L/2; \\
 I1 &= 2; & I2 &= 1;
 \end{aligned}$$

Arvutuspäevik 9.2 Momendid varraste integreerimispiirkondades.

```

=====
Jrk  M-alguses  M-keskel  M-lõpus
-----
1      0.00      0.00      0.00
    
```

2	0.00	24.88	-22.25
3	-8.50	-8.47	-8.44
4	-8.44	1.59	11.62
5	-13.75	-6.88	0.00
6	0.00	-0.06	-0.13

Põikjõud varraste integreerimispiirkondades
(siin DeltaQ = DeltaM/DeltaX).

Jrk	Q_o-algul	Q_o-lõpus	DeltaQ	Q-algul	Q-lõpus
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	24.0000	-24.0000	-3.7083	20.2917	-27.7083
3	0.0000	0.0000	0.0313	0.0313	0.0313
4	0.0000	0.0000	10.0312	10.0312	10.0312
5	0.0000	0.0000	2.2917	2.2917	2.2917
6	0.0000	0.0000	-0.0313	-0.0313	-0.0313

octave:4> diary off

9.1.7 Raami arvutus jõumeetodiga. Näide 9.3

Näide 9.3

Koostada joonisel 9.17 näidatud staatikaga määramatu raami paindemomendi, põikjõu ja normaaljõu epüürid.

Raam (joonis 9.17) on staatikaga neljakordselt määramatu:

$$n = 3 \cdot k - l = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \quad (9.68)$$

kus k on kinniste kontuuride arv ja l – lihtliigendite arv.

Joonisel 9.18 selgitatakse ühikepüüri m_1 ordinaatide arvutamist. Esmalt leiame $X_1 = 1$ toe-reaktsioonid (joonis 9.18 a)). Seejärel lõikame välja varda a-d (joonis 9.18 b)). Koostame momentide summa ($\Sigma M_d = 0$) ristlõike d kohta:

$$\begin{aligned} \Sigma M_d &= 0, & X_1 + N_a \cdot 5 &= 0 \\ N_a &= -\frac{X_1}{5} = -\frac{1}{5} \end{aligned} \quad (9.69)$$

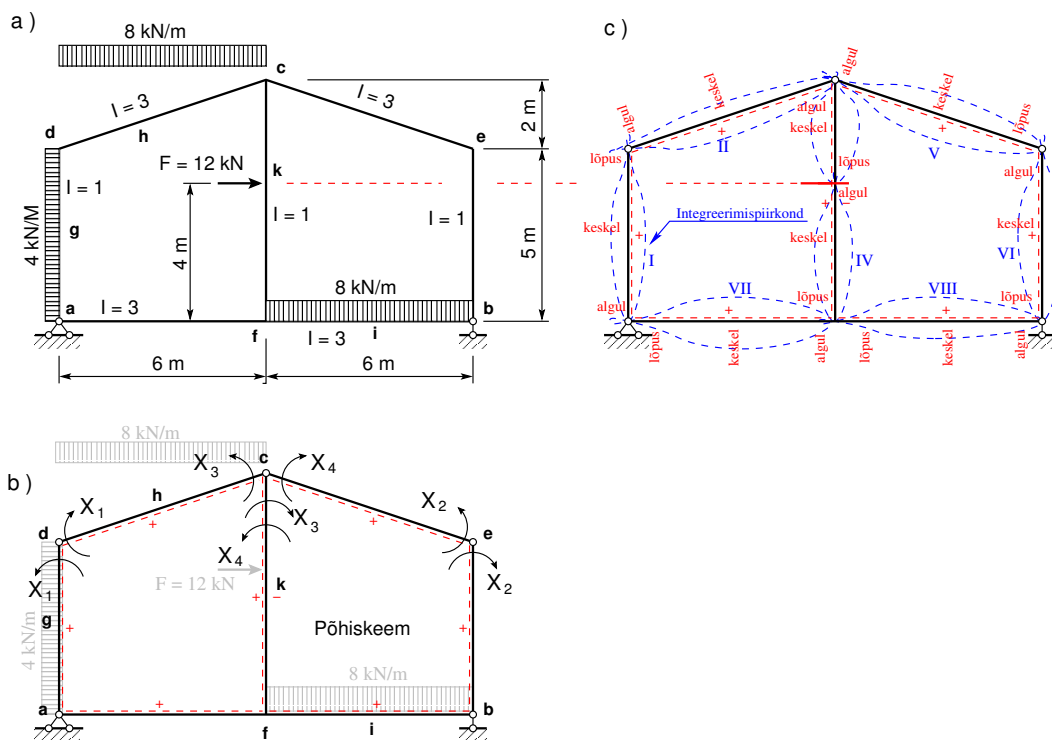
Seejärel koostame momentide summa ($\Sigma M_c = 0$) ristlõike c kohta:

$$\begin{aligned} \Sigma M_c &= 0, & X_1 - X_1 - \frac{1}{5} \cdot 7 + Q_a \cdot 6 &= 0 \\ Q_a &= \frac{X_1 - X_1 + 1/5 \cdot 7}{6} = \frac{1 \cdot 7}{5 \cdot 6} = 0.2333... \end{aligned} \quad (9.70)$$

Varrastes c-e ja b-e saab olla ainult normaaljõud (sõrestikuvarras). Kui sõlmes on ainult kaks sõrestikuvarrast, mis ei asu ühel sirgel, siis nende sisejõud on võrdsed nulliga $N_{ce} = 0$ ja $N_{be} = 0$. Siit järeldub, et $Q_b = 0$ ja $N_b = 0$ (joonis 9.18 c)).

Vardas a-f moment M_{fe} sõlmes f on

$$M_{fe} = Q_b \cdot 6 = 0.2333 \cdot 6 = 1.4 \quad (9.71)$$



Joonis 9.17. Neljakordselt staatiliselt määramatu raam 3 ja põhiskeem

Varraste $a-d$ ja $d-c$ tasakaalust (joonis 9.18 b)) saame $H_c = 1/5$ ja $V_c = 0.2333$. Rakendame need jõud vardale $c-f$ vastupidistes suundades (joonis 9.18 c)). Nüüd leiame momendi M_{fc}

$$M_{fc} = H_c \cdot 7 = (1/5) \cdot 7 = 1.4 \tag{9.72}$$

Need momendi väärtused on kantud m_1 epüürile (joonis 9.18 d)). Momendi epüürile m_1 kanname momendid integreerimispiirkondade (vt joonist 9.17 b)) algul, keskel ja lõpus. Kolmnurkse epüüri puhul on nende väärtuste leidmine lihtne. Trapetsikujulise epüüri puhul kasutame interpoleerimist (vt joonist 9.19). Joonisel 9.19 selgitatakse momendi interpoleerimist. Saame

$$M_x(x) = M_v(x) \cdot \xi' + M_p(x) \cdot \xi \tag{9.73}$$

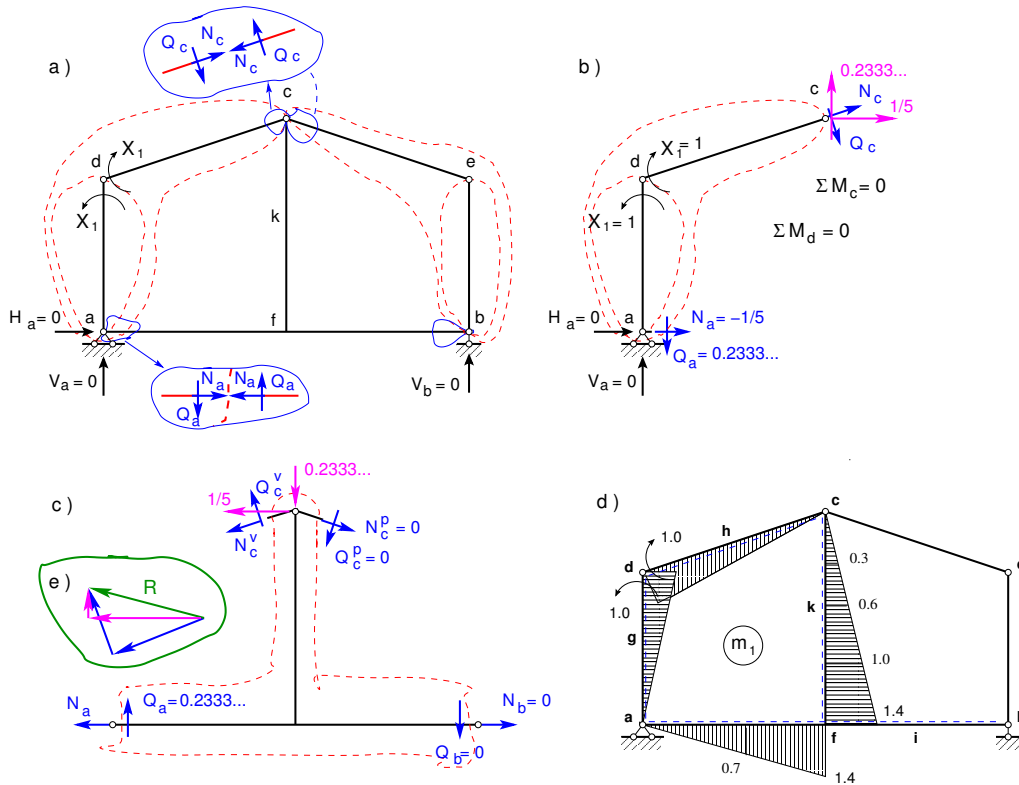
siin

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \xi' = \frac{l-x}{l} \tag{9.74}$$

Paindemomendi m_2 epüüri saame kui paindemomendi m_1 epüüri peegelpildi. Paindemomendi m_2 epüür on näidatud joonisel 9.21.

Ühikjõust $X_3 = 1$ paindemomendi epüüri m_3 koostamiseks leiame esmalt toereaktsioonid ja siis teeme lõiked sarnaselt paindemomendi epüüri m_1 koostamisel tehtud lõigetele. Paindemomendi m_3 epüür on näidatud joonisel 9.20.

Paindemomendi m_4 epüüri saame kui paindemomendi m_3 epüüri peegelpildi. Paindemomendi m_4 epüür on näidatud joonisel 9.21.

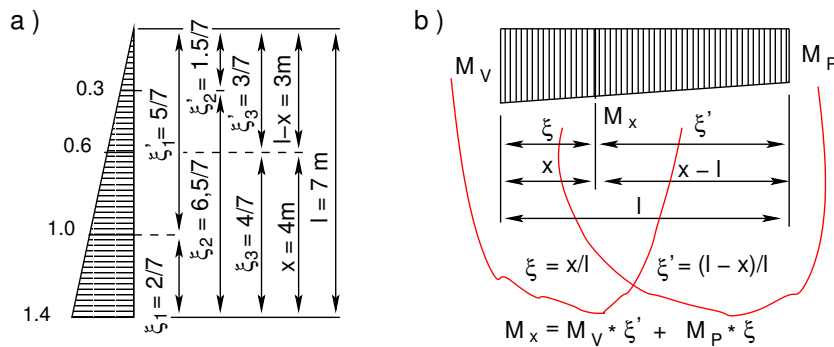


Joonis 9.18. Raam 3. Ühikmomendi m_1 epüür

Joonisel 9.22 on paindemomendi M_p^0 epüür.

Jõumeetodi kanoonilised võrrandid

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 &= -\Delta_{1p} \\
 \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 &= -\Delta_{2p} \\
 \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 &= -\Delta_{3p} \\
 \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 &= -\Delta_{4p}
 \end{aligned}
 \tag{9.75}$$



Joonis 9.19. Interpoleerimine

ehk

$$\delta_{ij} X_j = \Delta_{ip} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{9.76}$$

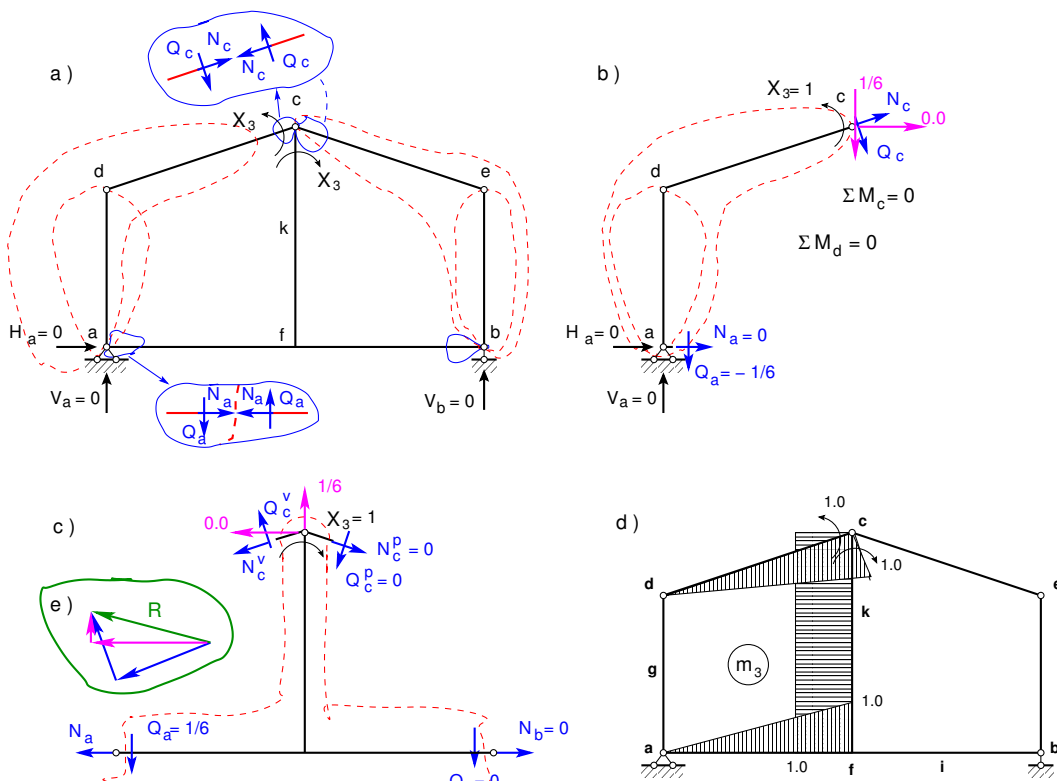
Võrrandisüsteemi (9.76) kordajad leitakse momendi epüüride korrutamise ja integreerimise teel. Võrrandisüsteemi vasaku ja parema poole võib korrutada ristlõike baasjäikusega $E_o I_o$. Võrrandisüsteemi tundmatud sellest ei muutu. Võrrandisüsteemi kordajatesse jäävad ainult ristlõigete jäikuste suhted. Kui materjal on ühesugune ($E = E_o$), jääb ainult inertsimomentide suhe (vaata kordajate (9.78) ja (9.79) arvutust). Saame

$$E_o I_o \delta_{ij} = \Sigma \int_0^l \frac{m_i m_j E_o I_o}{EI} ds, \quad E_o I_o \Delta_{ip} = \Sigma \int_0^l \frac{m_i M_p^0 E_o I_o}{EI} ds \tag{9.77}$$

Siin summa Σ võetakse üle kõigi varraste. Integreerimisel jälgige integreerimise piirkondi. Kui funktsioon muutub, tuleb alustada uue integreerimispiirkonnaga. Arvutame võrrandisüsteemi (9.76) vasaku poole kordajad:

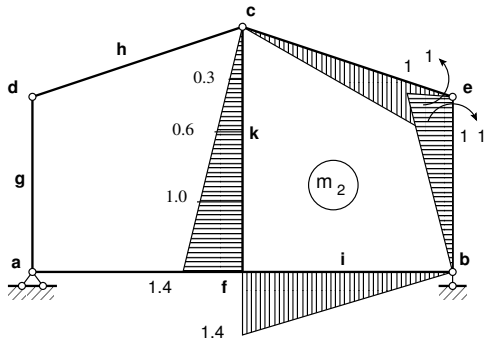
$$E_o I_o \delta_{11} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 5}{3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 6.3246}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} + \frac{1.4 \cdot 1.4 \cdot 7}{3} + \frac{1.4 \cdot 1.4 \cdot 6}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} = 8.2494 \text{ m}$$

$$E_o I_o \delta_{12} = E_o I_o \delta_{21} = -\frac{1.4 \cdot 1.4 \cdot 7}{3} = -4.5733 \text{ m}$$

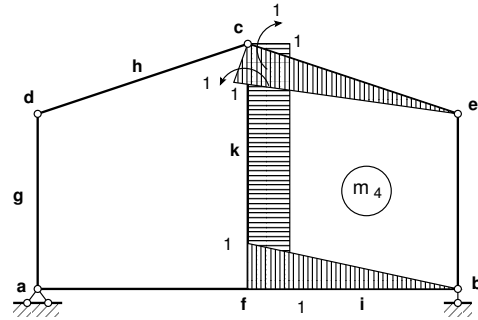


Joonis 9.20. Raam 3. Ühikmomendi m_3 epüür

a)



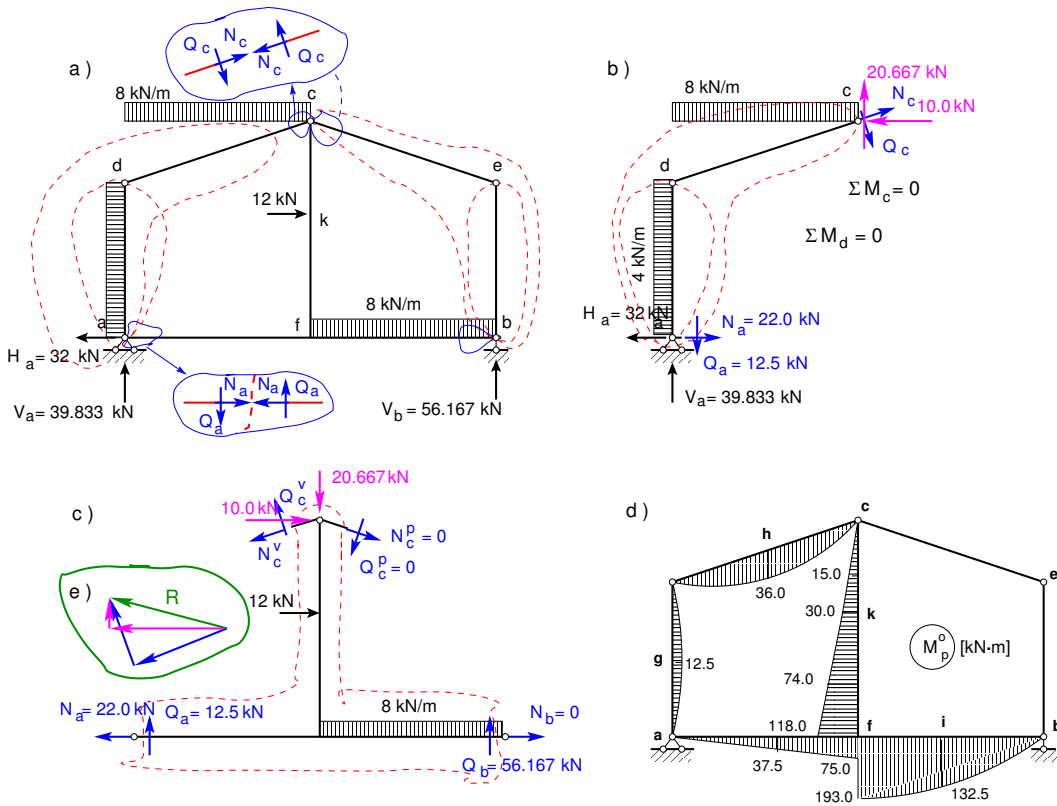
b)



Joonis 9.21. Raam 3. Ühikmomentide m_2 ja m_4 epüürid

$$E_o I_o \delta_{22} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 5}{3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 6.3246}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} + \frac{1.4 \cdot 1.4 \cdot 7}{3} + \frac{1.4 \cdot 1.4 \cdot 6}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} = 8.2494 \text{ m}$$

$$E_o I_o \delta_{33} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 6.3246}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} + 1.0 \cdot 1.0 \cdot 7 + \frac{1.0 \cdot 1.0 \cdot 6}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} = 8.3694 \text{ m}$$

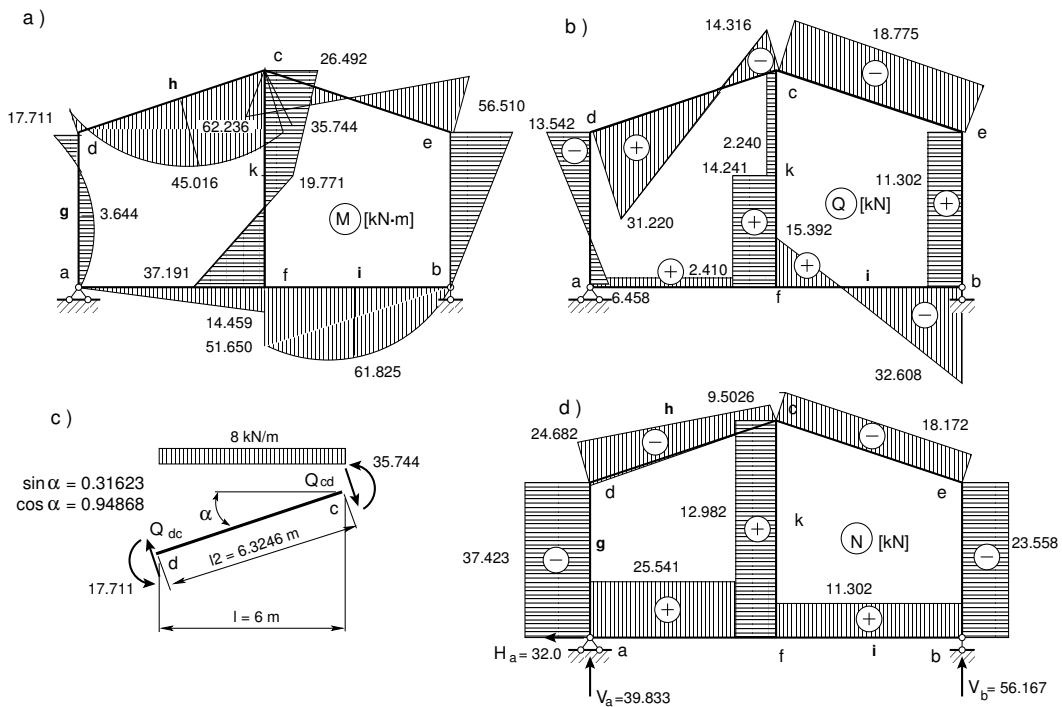


Joonis 9.22. Raam 3. Paindemomendi M_p^0 epüür

$$\begin{aligned}
 E_o I_o \delta_{13} &= E_o I_o \delta_{31} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 6.3246}{6 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} - \frac{1.4 \cdot 1.0 \cdot 7}{2} - \frac{1.4 \cdot 1.0 \cdot 6}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} = -5.4820 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{23} &= E_o I_o \delta_{32} = \frac{1.0 \cdot 1.4 \cdot 7}{2} = 4.900 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{44} &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 6.3246}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} + 1.0 \cdot 1.0 \cdot 7 + \frac{1.0 \cdot 1.0 \cdot 6}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} = 8.3694 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{14} &= E_o I_o \delta_{41} = \frac{1.0 \cdot 1.4 \cdot 7}{2} = 4.900 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{24} &= E_o I_o \delta_{42} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 6.3246}{6 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} - \frac{1.4 \cdot 1.0 \cdot 7}{2} - \frac{1.4 \cdot 1.0 \cdot 6}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} = -5.4820 \text{ m} \\
 E_o I_o \delta_{34} &= E_o I_o \delta_{43} = -1.0 \cdot 1.0 \cdot 7 = -7.0000 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{9.78}$$

Võrrandisüsteemi (9.76) vabaliikmed Δ_{ip} leiame integreerimisega

$$\begin{aligned}
 E_o I_o \Delta_{1p} &= \frac{2}{3} 12.5 \cdot 5 \cdot 0.5 + \frac{2}{3} 36.0 \cdot 6.3246 \cdot 0.5 \underbrace{\frac{1}{3}}_{I=3} - \frac{30.0 \cdot 0.6 \cdot 3.0}{3} + \\
 &+ \frac{4.0}{6} (-30 \cdot 0.6 - 4 \cdot 74.0 \cdot 1.0 - 118 \cdot 1.4) + \frac{75.0 \cdot 1.4 \cdot 6}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} = -221.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}$$



Joonis 9.23. Raam 3. Paandemomendi M_p , Q ja N epüürid

$$\begin{aligned}
E_o I_o \Delta_{2p} &= \frac{30.0 \cdot 0.6 \cdot 3.0}{3} + \frac{4.0}{6} (30 \cdot 0.6 + 4 \cdot 74.0 \cdot 1.0 + 118 \cdot 1.4) + \\
&+ \frac{6.0}{6 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} (193.0 \cdot 1.4 + 4 \cdot 132.5 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0) = 551.20 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\
E_o I_o \Delta_{3p} &= \frac{2}{3} 36.0 \cdot 6.3246 \cdot 0.5 \frac{1}{\underbrace{3}_{I=3}} + \frac{30.0 \cdot 3.0}{2} \cdot 1.0 + \\
&+ \frac{(30.0 + 118.0)}{2} \cdot 4.0 \cdot 1.0 - \frac{75.0 \cdot 1.0 \cdot 6}{3 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} = 316.30 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\
E_o I_o \Delta_{4p} &= -\frac{30.0 \cdot 3.0}{2} \cdot 1.0 - \frac{(30.0 + 118.0)}{2} \cdot 4.0 \cdot 1.0 + \\
&+ \frac{6.0}{6 \cdot \underbrace{3}_{I=3}} (-193.0 \cdot 1.00 - 4 \cdot 132.5 \cdot 0.5 - 0 \cdot 0) = -493.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (9.79)
\end{aligned}$$

Jõumeetodi kanoonilised võrrandid (9.75) esitame numbrilisel kujul:

$$\begin{aligned}
8.2494X_1 + -4.5733X_2 + -5.4820X_3 + 4.9000X_4 &= -221.34 \\
-4.5733X_1 + 8.2494X_2 + 4.9000X_3 + -5.4820X_4 &= 551.20 \\
-5.4820X_1 + 4.9000X_2 + 8.3694X_3 + -7.0000X_4 &= 316.30 \\
4.9000X_1 + -5.4820X_2 + -7.0000X_3 + 8.3694X_4 &= -493.67
\end{aligned} \quad (9.80)$$

Võrrandisüsteemi (9.80) kordajate matriksi a ja vabaliikmete vektori b sisestame arvutiprogrammi GNU Octave ja lahendame (vt joonis 9.24).

Leitud momentide

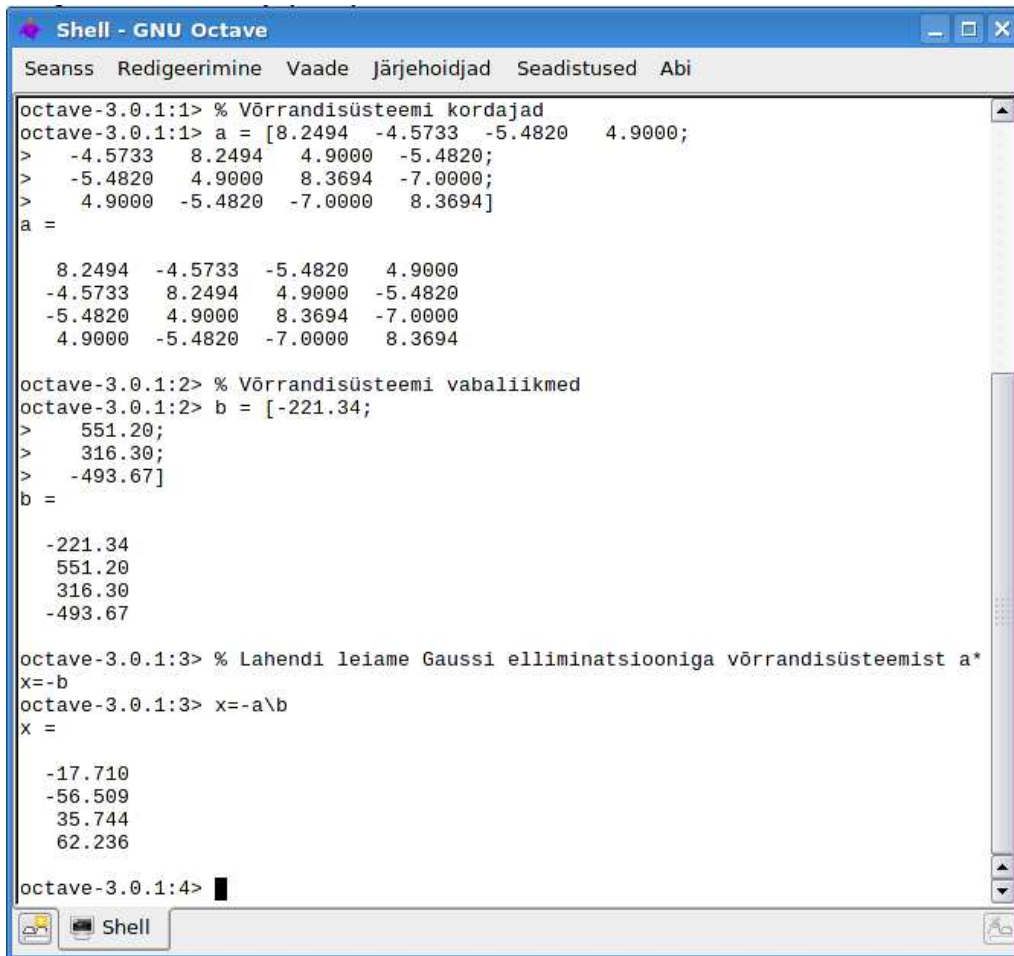
$$\begin{aligned}
X_1 &= -17.710 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
X_2 &= -56.509 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
X_3 &= 35.744 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
X_4 &= 62.236 \text{ kN} \cdot \text{m}
\end{aligned} \quad (9.81)$$

ja põhiskeemi epüüride (9.18), (9.20), (9.21), (9.22) abil arvutame raami varraste ristlõigetesse paindemomendid. Paindemomentide epüüri (joonis 9.23) ordinaadid saame, kui ühikjõudude epüüride m_i ordinaadid korrutame tundmatute X_i -dega ja liidame koormusest põhjustatud paindemomendi M_p^0 epüüri ordinaatidega.

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{X}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{X}_2 + \mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{X}_3 + \mathbf{m}_4 \cdot \mathbf{X}_4 + \mathbf{M}_p^0 \quad (9.82)$$

Arvutame paindemomendid varraste ristlõigetesse:

$$\begin{aligned}
M_{dc} &= 1 \cdot x_1 = 1 \cdot (-17.710) = -17.710 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
M_{da} &= 1 \cdot x_1 = 1 \cdot (-17.710) = -17.710 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
M_{ec} &= 1 \cdot x_2 = 1 \cdot (-56.509) = -56.509 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
M_{eb} &= 1 \cdot x_2 = 1 \cdot (-56.509) = -56.509 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
M_{cd} &= 1 \cdot x_3 = 1 \cdot 35.744 = 35.744 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
M_{ce} &= 1 \cdot x_4 = 1 \cdot 62.236 = 62.236 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
M_{ck} &= 1 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4 = 1 \cdot 35.744 - 1 \cdot 62.236 = -26.492 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
M_k &= -0.6 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 + 1.0 \cdot x_3 - 1.0 \cdot x_4 + 30.0 = \\
&= -0.6 \cdot (-17.710) + 0.6 \cdot (-56.509) + 1.0 \cdot 35.744 - \\
&\quad -1.0 \cdot 62.236 + 30.0 = -19.771 \text{ kN} \cdot \text{m}
\end{aligned}$$



```

Shell - GNU Octave
Seanss Redigeerimine Vaade Järjehoidjad Seadistused Abi

octave-3.0.1:1> % Võrrandisüsteemi kordajad
octave-3.0.1:1> a = [8.2494 -4.5733 -5.4820 4.9000;
> -4.5733 8.2494 4.9000 -5.4820;
> -5.4820 4.9000 8.3694 -7.0000;
> 4.9000 -5.4820 -7.0000 8.3694]
a =

    8.2494   -4.5733   -5.4820    4.9000
   -4.5733    8.2494    4.9000   -5.4820
   -5.4820    4.9000    8.3694   -7.0000
    4.9000   -5.4820   -7.0000    8.3694

octave-3.0.1:2> % Võrrandisüsteemi vabaliikmed
octave-3.0.1:2> b = [-221.34;
> 551.20;
> 316.30;
> -493.67]
b =

   -221.34
    551.20
    316.30
   -493.67

octave-3.0.1:3> % Lahendi leiame Gaussi elliminatsiooniga võrrandisüsteemist a*
x=-b
octave-3.0.1:3> x=-a\b
x =

   -17.710
   -56.509
    35.744
    62.236

octave-3.0.1:4>

```

Joonis 9.24. Kanoonilise võrrandisüsteemi lahendamine

$$\begin{aligned}
 M_{fk} &= -1.4 \cdot x_1 + 1.4 \cdot x_2 + 1.0 \cdot x_3 - 1.0 \cdot x_4 + 118.0 = \\
 &= -1.4 \cdot (-17.710) + 1.4 \cdot (-56.509) + 1.0 \cdot 35.744 - \\
 &\quad -1.0 \cdot 62.236 + 118.0 = 37.191 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_{fa} &= -1.4 \cdot x_1 + 1.0 \cdot x_3 - 75.0 = \\
 &= -1.4 \cdot (-17.710) + 1.0 \cdot 35.744 - 75.0 = -14.459 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_{fb} &= -1.4 \cdot x_2 + 1.0 \cdot x_4 - 193.0 = \\
 &= -1.4 \cdot (-56.509) + 1.0 \cdot 62.236 - 193.0 = -51.650 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_i &= -0.7 \cdot x_2 + 0.5 \cdot x_4 - 132.5 = \\
 &= -0.7 \cdot (-56.509) + 0.5 \cdot 62.236 - 132.5 = -61.825 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_g &= 0.5 \cdot x_1 + 12.5 = 0.5 \cdot (-17.710) + 12.5 = 3.644 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_h &= 0.5 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_3 + 36.0 = \\
 &= 0.5 \cdot (-17.710) + 0.5 \cdot 35.744 + 36.0 = 45.016 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned} \tag{9.83}$$

Leitud paindemomendid (9.83) kanname joonisele 9.23 a).

Kontrollime raami sõlme f tasakaalu. Jooniselt 9.23 a) näeme, et momendid M_{fa} , M_{fk} mõjuvad kellaosutite liikumise suunas ja moment M_{fb} vastupidises suunas. Kui sõlm on tasakaalus,

siis nende momentide summa võrdub nulliga:

$$\sum M_f = 14.459 + 37.191 - 51.650 = 0 \quad (9.84)$$

Avaldisest (9.84) näeme, et sõlm f on tasakaalus.

Põikjõu epüüri ordinaatide arvutamisel kasutame diferentsiaalseid (vt jaotis 1.10). Siin valime koordinaattelje x suuna vasakult paremale nii, et varda positiivsed kiud (joonisel 9.23 a) näidatud punktiirjoonega) jäävad allapoole. Momendi juurdekasvu ΔM arvutamisel parempoolsest momendist $M_{paremal}$ lahutame vasakpoolse momendi $M_{vasakul}$ ($\Delta M = M_{paremal} - M_{vasakul}$).

Raami kaldvarda dc põikjõu Q_{dc} ja Q_{cd} arvutamisel kasutame avaldise (1.34) ja (1.36) (vt jaotis 1.11). Raami kaldvarda pikkus on $l = 6.3246$ m ja $\cos \alpha = 0.94868$ ning $\sin \alpha = 0.31623$ (vt joonis 9.23 c)).

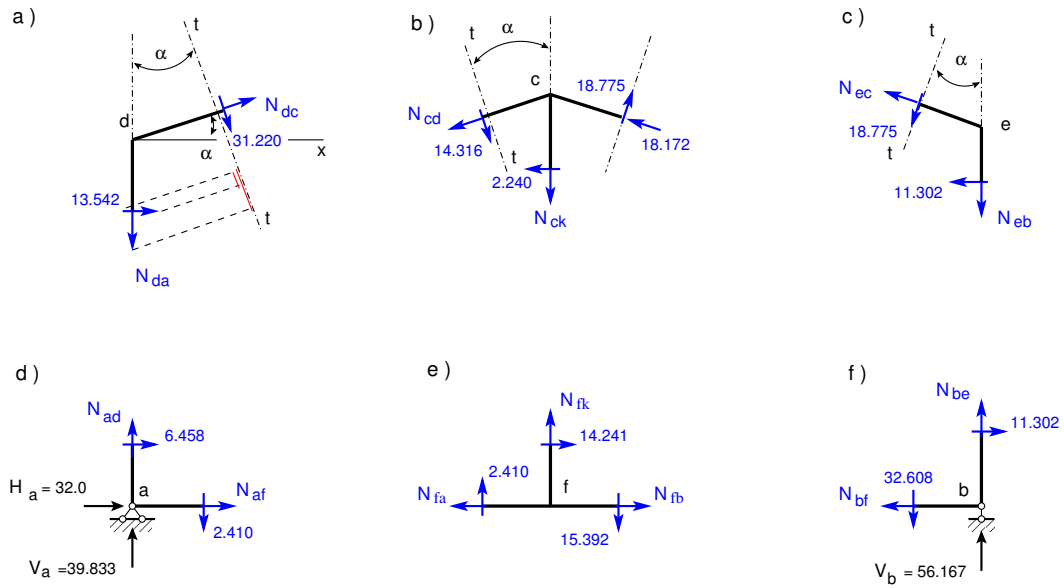
Raami varda af põikjõu Q_{ce} arvutamisel kasutame diferentsiaalset $Q = \frac{\Delta M}{\Delta x}$ (1.31). Saame

$$\begin{aligned} Q_{dc} &= Q_{dc}^o \cos \alpha + \frac{M_{cd} - M_{dc}}{6.3246} = \\ &= \frac{8.0 \cdot 6}{2} \cdot 0.94868 + \frac{35.744 - (-17.711)}{6.3246} = 22.77 + 8.45 = 31.22 \text{ kN} \\ Q_{cd} &= Q_{cd}^o \cos \alpha + \frac{M_{cd} - M_{dc}}{6.3246} = \\ &= -\frac{8.0 \cdot 6}{2} \cdot 0.94868 + \frac{35.744 - (-17.711)}{6.3246} = -22.77 + 8.45 = -14.32 \text{ kN} \\ Q_{ce} &= Q_{ec} = \frac{M_{ec} - M_{ce}}{6.3246} = -\frac{56.510 - 62.336}{6.3246} = -18.775 \text{ kN} \\ Q_{ad} &= Q_{ad}^o + \frac{M_{da} - M_{ad}}{5.0} = \frac{4.0 \cdot 5}{2} + \frac{-17.711 - 0}{5.0} = 10.0 - 3.54 = 6.46 \text{ kN} \\ Q_{da} &= Q_{da}^o + \frac{M_{da} - M_{ad}}{5.0} = -\frac{4.0 \cdot 5}{2} + \frac{-17.711 - 0}{5.0} = -10.0 - 3.54 = -13.54 \text{ kN} \\ Q_{af} &= Q_{fa} = \frac{M_{fa} - M_{at}}{6.0} = -\frac{0 - (-14.459)}{6.0} = 2.410 \text{ kN} \\ Q_{ck} &= Q_{kc} = \frac{M_{kc} - M_{ck}}{3.0} = \frac{-19.771 - (-26.492)}{3.0} = 2.24 \text{ kN} \\ Q_{fk} &= Q_{kf} = \frac{M_{fk} - M_{kf}}{4.0} = \frac{-19.771 - (-26.492)}{4.0} = 14.24 \text{ kN} \\ Q_{bf} &= Q_{bf}^o + \frac{M_{fb} - M_{bf}}{6.0} = \frac{8.0 \cdot 6}{2} + \frac{-193.0 - 0}{6.0} = -24.0 - 8.61 = -32.61 \text{ kN} \\ Q_{fb} &= Q_{fb}^o + \frac{M_{fb} - M_{bf}}{6.0} = -\frac{8.0 \cdot 8}{2} + \frac{-193.0 - 0}{6.0} = 24.0 - 8.61 = 15.39 \text{ kN} \\ Q_{eb} &= Q_{be} = \frac{M_{be} - M_{eb}}{5.0} = \frac{0 - (-56.510)}{5.0} = 11.30 \text{ kN} \end{aligned} \quad (9.85)$$

Leitud põikjõudude (9.85) põhjal koostame põikjõu epüüri (joonis 9.23 b)). Järgnevaid arvutusi saame korrata, kui kopeerime tekstist Raam4QjaN.txt⁹ küsu/käsu ja asetame GNU Octave'i käsureale.

Raami varrastes mõjuvate normaaljõudude määramiseks lõikame välja raami sõlmed d, c, e, a, f ja a (vt joonis 9.25). Tundmatud normaaljõud N kanname joonisele 9.25 positiivses suunas (I märgikokkuleppe järgi tõmbele). Põikjõu kanname joonisele vastavalt I märgikokkuleppe

⁹ ./octaveProgrammide/Raam4QjaN.txt



Joonis 9.25. Raam 9.1. Raami sõlmede tasakaal

märgile (vt jaotis 1.12).

Kaldvarda pikkus $l = 6.3246$ m ja $\cos \alpha = 0.94868$, $\sin \alpha = 0.31623$ (vt joonis 9.23 c)).

Sõlme d (joonis 9.25 a)) tasakaalust saame

$$\begin{aligned} \Sigma t = 0 : \quad & -N_{da} \cos \alpha - 31.220 - 13.542 \sin \alpha = 0 \\ N_{da} &= (-31.220 - 13.542 \sin \alpha) / \cos \alpha = -37.423 \text{ kN} \\ N_{ad} &= N_{da} \end{aligned} \tag{9.86}$$

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 : \quad & -N_{dc} \cos \alpha - 13.542 - 31.220 \sin \alpha = 0 \\ N_{dc} &= (-13.542 - 31.220 \sin \alpha) / \cos \alpha = -24.681 \text{ kN} \\ N_{cd} &= N_{dc} + 8.0 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = -24.681 + 15.179 = -9.5023 \text{ kN} \end{aligned} \tag{9.87}$$

Sõlme e (joonis 9.25 c)) tasakaalust saame

$$\begin{aligned} \Sigma t = 0 : \quad & -N_{eb} \cos \alpha - 18.775 - 11.302 \sin \alpha = 0 \\ N_{eb} &= (-18.775 - 11.302 \sin \alpha) / \cos \alpha = -23.558 \text{ kN} \\ N_{be} &= N_{eb} \end{aligned} \tag{9.88}$$

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 : \quad & -N_{ec} \cos \alpha - 11.302 - 18.775 \sin \alpha = 0 \\ N_{ec} &= (-11.302 - 18.775 \sin \alpha) / \cos \alpha = -18.172 \text{ kN} \\ N_{ce} &= N_{ec} \end{aligned} \tag{9.89}$$

Sõlme b (joonis 9.25 f)) tasakaalust saame

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 : \quad & -N_{bf} + 11.302 = 0 \\ N_{bf} &= 11.302 \text{ kN} \\ N_{fb} &= N_{bf} \end{aligned} \tag{9.90}$$

$$\begin{aligned} \Sigma Z = 0 : \quad & -N_{be} + 32.608 - 56.167 = 0 \\ N_{be} &= 32.608 - 56.167 = -23.559 \text{ kN} \\ N_{eb} - N_{be} &= -23.558 + 23.559 = 0.001 \approx 0 \end{aligned} \tag{9.91}$$

Sõlme a (joonis 9.25 d)) tasakaalust saame

$$\begin{aligned}\Sigma X = 0 : & \quad -N_{af} + 32 - 6.45878 = 0 \\ N_{af} & = 32 - 6.45878 = 25.541 \text{ kN} \\ N_{fa} & = N_{af}\end{aligned}\tag{9.92}$$

$$\begin{aligned}\Sigma Z = 0 : & \quad -N_{ad} + 2.410 - 39.833 = 0 \\ N_{ad} & = 2.410 - 39.833 = -37.423 \text{ kN} \\ N_{da} - N_{ad} & = -37.423 + 37.423 = 0\end{aligned}\tag{9.93}$$

Sõlme f (joonis 9.25 e)) tasakaalust saame

$$\begin{aligned}\Sigma Z = 0 : & \quad -N_{fc} + 15.392 - 2.4098 = 0 \\ N_{fc} & = 15.392 - 2.4098 = 12.982 \text{ kN} \\ N_{cf} & = N_{fc}\end{aligned}\tag{9.94}$$

$$\begin{aligned}\Sigma X = 0 : & \quad -N_{fa} + N_{fb} + 14.241 = 0 \\ & -25.541 + 11.302 + 14.341 = 0.002 \simeq 0\end{aligned}\tag{9.95}$$

Sõlme c (joonis 9.25 b)) tasakaalust saame

$$\begin{aligned}\Sigma Z = 0 : & \quad -N_{ck} - 14.316 \cos \alpha + 18.775 \cos \alpha + 9.5023 \sin \alpha + \\ & + 18.172 \sin \alpha = 0 \\ N_{ck} & = (-14.316 \cos \alpha + 18.775 \cos \alpha + 9.5023 \sin \alpha + \\ & + 18.172 \sin \alpha) / \cos \alpha = 12.982 \text{ kN} \\ N_{cf} & = N_{ck}\end{aligned}\tag{9.96}$$

$$\begin{aligned}\Sigma X = 0 : & \quad -N_{cd} \cos \alpha - 2.240 + 14.316 \sin \alpha + 18.775 \sin \alpha - \\ & - 18.17 \cos \alpha = 0 \\ N_{cd} & = (-2.240 + 14.316 \sin \alpha + 18.775 \sin \alpha - \\ & - 18.17 \cos \alpha) / \cos \alpha = -9.5028 \text{ kN}\end{aligned}\tag{9.97}$$

Leitud normaaljõud kanname normaaljõu epüürile (joonis 9.23).

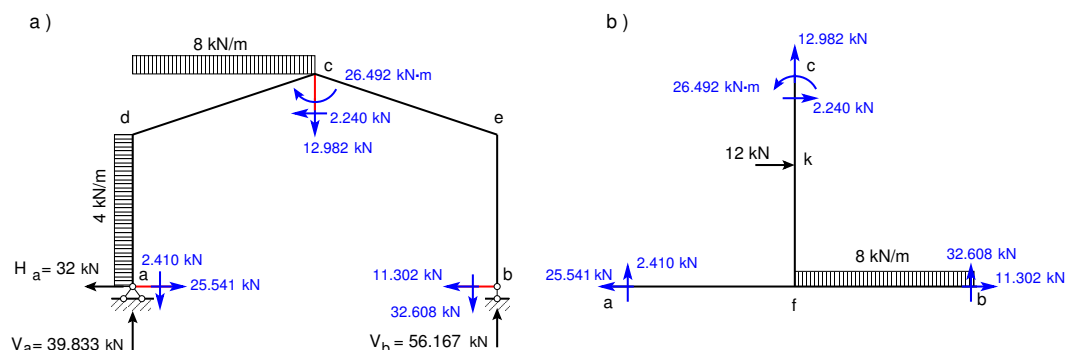
Raami staatiline kontroll.

Raami staatiliseks kontrolliks vaatleme joonist 9.26. Koostame tasakaaluvõrrandid (9.98) vertikaalteljele ja horisontaalteljele, ning momendi võrrandid (9.98) tugede a ja b kohta:

$$\begin{aligned}\Sigma X & = 0; \quad -32.0 + 25.541 + 4 \cdot 5 - 2.240 - 32.608 = -1.0 \cdot 10^{-3} \cong 0 \\ \Sigma Y & = 0; \quad 39.833 - 2.410 - 8 \cdot 6 - 12.982 - 32.608 + 56.167 = 7.1 \cdot 10^{-15} \cong 0 \\ \Sigma M_a & = 0; \quad -4 \cdot 5 \cdot 2.5 - 8 \cdot 6 \cdot 3 - 12.982 \cdot 6 + 2.240 \cdot 7 + \\ & + (-32.608 + 56.167) \cdot 12 - 26.492 = 4.0 \cdot 10^{-3} \cong 0\end{aligned}\tag{9.98}$$

Staatilise kontrolli teeme ka väljalõigatud osa (joonis 9.26 b)) kohta.

$$\begin{aligned}\Sigma X & = 0; \quad -25.541 + 12 + 2.240 + 11.302 = -1.0 \cdot 10^{-3} \cong 0 \\ \Sigma Y & = 0; \quad +2.4103 + 12.982 - 8 \cdot 6 + 32.608 = -7.1 \cdot 10^{-15} \cong 0 \\ \Sigma M_a & = 0; \quad -2.240 \cdot 7 + 12.982 \cdot 6 + 26.492 - 12 \cdot 4 - \\ & - 8 \cdot 6 \cdot 9 + 32.608 \cdot 12 = -5.68 \cdot 10^{-14} \cong 0\end{aligned}\tag{9.99}$$



Joonis 9.26. Raam 9.1. Raami staatiline kontroll

Arvutuste tegemisel kasutame enesekontrolliks arvutiprogrammi *joumNA4q.m*^{10 11} Arvutiprogrammiga arvutamisel kasutame Simpsoni järgi integreerimist. Ühikjõu epüüri kantame väärtused maatriksisse Mx ülevalt alla integreerimispiirkondade järjekorras: moment algul, moment keskel, moment lõpus. Varrast integreerimispiirkonnas vaatleme nii, et positiivsed kiud oleksid alumised (vaata joonist 9.17 c). Samas järjekorras sisestame momendid epüüri M_p^0 (joonis 9.22) arvutiprogrammis *joumNA4q.m* olevasse vektorisse Mp .

Samas järjekorras saame lõpliku paindemomentide ordinaadi varraste integreerimispiirkondades: M -algul, M -keskel ja M -lõpus (vt Päevik 9.3). Põikjõu arvutamiseks on vaja vaadelda varrast nii, et positiivsed kiud oleksid alumised. Vajaliku $\cos \alpha$ saame varda pikkuse projektsiooni ja tema pikkuse jagatisena $\cos \alpha = lm(1, 2) / l(1, 2) = 6.0000 / 6.3246$.

Arvutuspäevik 9.3 octave:1> diary joumNA4q.out

octave:2> diary on

octave:3> joumNA4q

l = 5.0000 6.3246 3.0000 4.0000 6.3246 5.0000 6.0000 6.0000

lm = 5 6 3 4 6 5 6 6

a =

				-17.712
8.2494	-4.5733	-5.4820	4.9000	-56.510
-4.5733	8.2494	4.9000	-5.4820	35.744
-5.4820	4.9000	8.3694	-7.0000	62.236
4.9000	-5.4820	-7.0000	8.3694	

b =

-221.34
551.20
316.30
-493.67

Momendid varraste integreerimispiirkondades.

x =

=====

¹⁰ ./octaveProgrammide/joumNA4q.m

¹¹ ./octaveProgrammide/joumNA4q.Kommentaariid.pdf

Jrk	M-alguses	M-keskel	M-lõpus				
				5	62.2361	2.8631	-56.5099
				6	-56.5099	-28.2549	0.0000
1	0.0000	3.6441	-17.7118	7	-14.4593	-7.2296	0.0000
2	-17.7118	45.0162	35.7442	8	0.0000	-61.8251	-51.6501
3	-26.4919	-23.1313	-19.7707				
4	-19.7707	8.7100	37.1908				

Põikjõud varraste integreerimispiirkondades
(siin DeltaQ = DeltaM/DeltaX).
=====

Jrk	Q _o -algul	Q _o -lõpus	DeltaQ	Q-algul	Q-lõpus
1	10.0000	-10.0000	-3.5424	6.4576	-13.5424
2	22.7684	-22.7684	8.4521	31.2205	-14.3163
3	0.0000	0.0000	2.2404	2.2404	2.2404
4	0.0000	0.0000	14.2404	14.2404	14.2404
5	0.0000	0.0000	-18.7754	-18.7754	-18.7754
6	0.0000	0.0000	11.3020	11.3020	11.3020
7	0.0000	0.0000	2.4099	2.4099	2.4099
8	-24.0000	24.0000	-8.6084	-32.6084	15.3916

octave:4> diary off

Arvutiprogrammiga `joumNA4q.m` leitakse põikjõud varraste integreerimispiirkondades (vt Päevik 9.3) avaldisega

$$\begin{aligned}
Q_{algul} &= Q_{algul}^o + \frac{M_{paremal} - M_{vasakul}}{l} \\
Q_{lõpus} &= Q_{lõpus}^o + \frac{M_{paremal} - M_{vasakul}}{l}
\end{aligned} \tag{9.100}$$

Siin

$$\begin{aligned}
Q_{algul}^o &= + \frac{q \cdot l(1,2)}{2} \cos \alpha = + \frac{q \cdot l(1,2)}{2} \frac{lm(1,2)}{l(1,2)} \\
Q_{lõpus}^o &= - \frac{q \cdot l(1,2)}{2} \cos \alpha = - \frac{q \cdot l(1,2)}{2} \frac{lm(1,2)}{l(1,2)}
\end{aligned} \tag{9.101}$$

Põikjõu arvutamist vaata ka jaotisest 1.10 ja 1.11.

Arvutiprogrammi `joumNA4q.m` abil leitud momendid varraste integreerimispiirkondades on toodud arvutuspäevikus 9.3.

Leitud momentide põhjal koostame paindemomentide epüüri (vt joonist 9.23). Kasutades diferentsiaalseid ja põikjõu arvutust kaldvardas (vt lõik 1.11), koostame põikjõu epüüri (joonis 9.25). Normaaljõu arvutusi saame korrata, kui kopeerime tekstist `Raam4QjaN.txt`¹² käsu/käsud ja asetame GNU Octave'i käsureale.

¹² `./octaveProgrammid/Raam4QjaN.txt`

10. Jätkuvtalad

Loeng 1¹: Kolme momendi võrrand. Näide 10.1. Loeng 2²: Fookussuhted. Näide 10.2.
Loeng 3³: Näide 10.3. Arvutiprogramm.

Jätkuvtalaks nimetatakse liigenditeta mitmesildelist tala. Tasapinnalise geomeetriselt muutumatu kujundi kinnitamiseks on vaja kolme toesidet. Jätkuvtalal on toesideid rohkem kui kolm, seepärast on ta staatikaga määramatu. *Staatilise määramatuse aste* leitakse valemiga

$$n = t - 3 \quad (10.1)$$

kus t on toesidemete arv

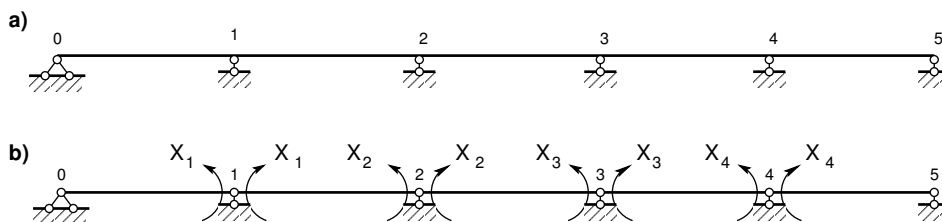
10.1 Põhiskeem ja lisatundmatud

Põhiskeem ja lisatundmatud tuleb valida nii, et jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi

$$\delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (10.2)$$

kordajaid oleks lihtne arvutada.

Joonisel 10.1 on lisatundmatuteks valitud toemomendid.



Joonis 10.1. Jätkuvtala põhiskeem

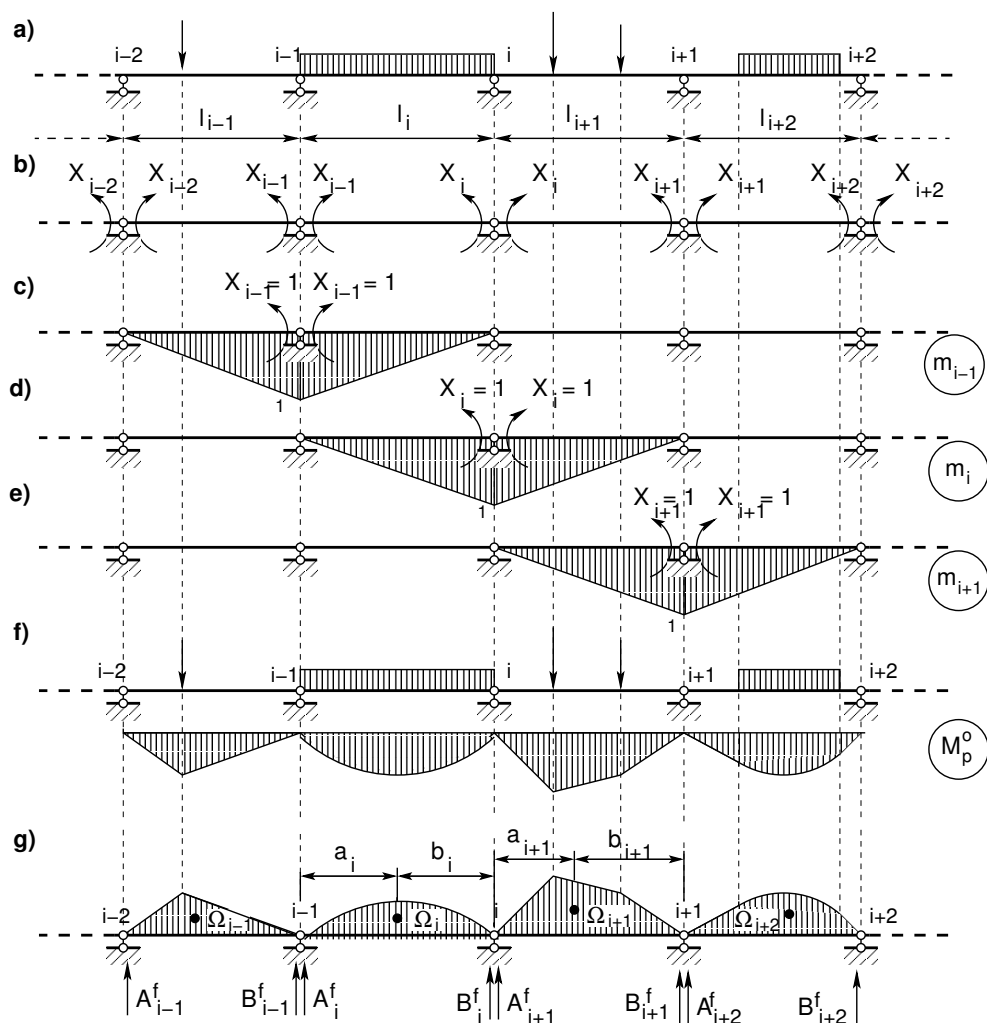
10.2 Kanoonilised võrrandid

Valime jätkuvtala (joonis 10.2 a)) põhiskeemi nii, et tundmatuteks on toemomendid X_i (joonis 10.2 b)).

¹ [./videod/jatkvTaladLoeng1.html](#)

² [./videod/jatkvTaladLoeng2.html](#)

³ [./videod/jatkvTaladLoeng3.html](#)



Joonis 10.2. Jätkuvtala põhiskeemi epüürid

Võrrandisüsteemi (10.2) kordajad leiame avaldisega

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{m_i m_j}{EI} ds \quad (10.3)$$

siin on n varraste arv ja EI ristlõike jäikus.

Vabaliikmed arvutame valemiga

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{m_i M_p^o}{EI} ds \quad (10.4)$$

Ühikepüüride (joonis 10.2 c), d), e)) korrutamisel ja integreerimisel saame järgmised nullist erinevad kordajad δ_{ij} :

$$EI_o \delta_{ii-1} = \frac{1 \cdot 1 \cdot l_i I_o}{6I_i} \quad (10.5)$$

$$EI_o\delta_{ii} = \frac{1 \cdot 1 \cdot l_i I_o}{3I_i} + \frac{1 \cdot 1 \cdot l_{i+1}}{3I_{i+1}} \quad (10.6)$$

$$EI_o\delta_{i+1} = \frac{1 \cdot 1 \cdot l_{i+1} I_o}{6I_{i+1}} \quad (10.7)$$

Koormusliikme Δ_{ip} integreerimisel kasutame Vereštšagini võtet [D.2.3](#) lk 666.

$$EI_o\Delta_{ip} = \Omega_i \frac{1 \cdot a_i I_o}{l_i I_i} + \Omega_{i+1} \frac{1 \cdot b_{i+1} I_o}{l_{i+1} I_{i+1}} \quad (10.8)$$

Toe i kohta koostatud pidevusvõrrand on

$$\dots + \delta_{i-1} X_{i-1} + \delta_{ii} X_i + \delta_{i+1} X_{i+1} + \dots + \Delta_{ip} = 0 \quad (10.9)$$

Avaldistes (10.5), (10.6), (10.7) ja (10.8) võtame kasutusele järgmised tähistused:

$$l'_i = l_i \frac{I_0}{I_i} \quad (10.10)$$

$$B_i^f = \Omega_i \frac{a_i}{l_i} \quad (10.11)$$

$$A_{i+1}^f = \Omega_{i+1} \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}} \quad (10.12)$$

ning asetame võrrandisse (10.9). Saame kolme momendi võrrandi

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} - 6A_{i+1}^f \frac{I_0}{I_{i+1}} \quad (10.13)$$

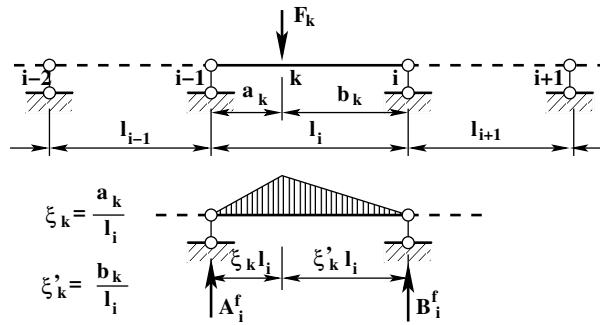
kus $l'_i = l_i \frac{I_0}{I_i}$ ning A_{i+1}^f , B_i^f on fiktiivsed koormused. Fiktiivsed koormused A_i^f , B_i^f on toodud tabelis 10.1. Ühtlaselt jaotatud koormuse q , ühtlase ristlõike jääkuse ($I_i = I_0$) puhul ning koondatud jõu F_k puhul kehtivad avaldised:

$$6A_i^f = 6B_i^f = \frac{ql_i^3}{4} \quad (10.14)$$

$$6A_i^f = F_k l_i^2 \cdot \xi_k \cdot \xi'_k (1 + \xi'_k) \quad (10.15)$$

$$6B_i^f = F_k l_i^2 \cdot \xi_k \cdot \xi'_k (1 + \xi_k) \quad (10.16)$$

Siin $\xi_k = \frac{a_k}{l_i}$ ja $\xi'_k = \frac{b_k}{l_i}$ (vt joonis 10.3).



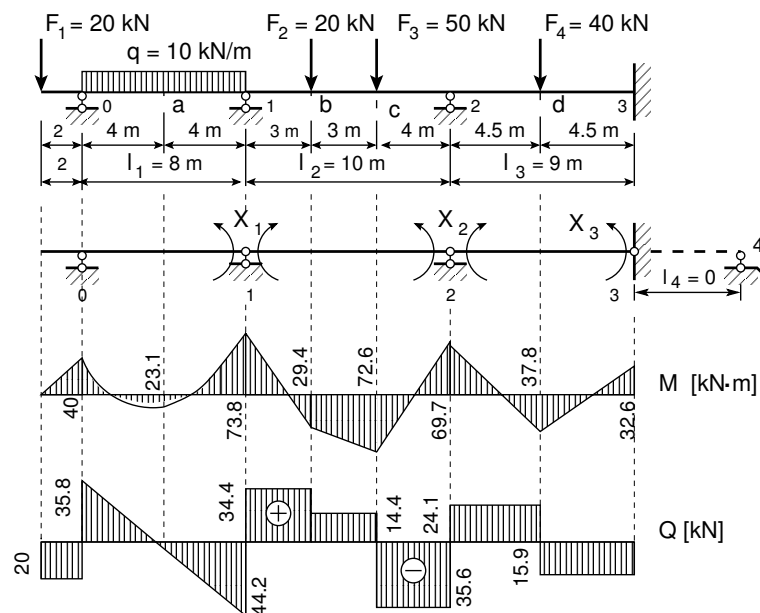
Joonis 10.3. Jätkuvtala tähised

10.3 Kolme momendi võrrandiga jätkuvtala arvutus

10.3.1 Kolme momendi võrrand. Näide 10.1

Näide 10.1 Arvutada joonisel 10.4 a) esitatud jätkuvtala toemomendid kolme momendi võrrandiga ning koostada paindemomendi ja põikjõu epüürid. Andmed: $l_1 = 8$ m, $l_2 = 10$ m, $l_3 = 9$ m; $F_1 = 20$ kN, $F_2 = 20$ kN, $F_3 = 50$ kN, $F_4 = 40$ kN, $q = 10$ kN/m; $EI = \text{const}$. Staatikaga määramatuse aste $n = 3$. Lisatundmatuteks on toemomendid X_1 , X_2 ja X_3 (joonis 10.4 b)).

Kolme momendi võrrandi (10.13) vabaliikmed koondatud jõu puhul leiame avaldistega (10.15) ja (10.16). Ühtlasest koormusest põhjustatud vabaliikmed leiame avaldisega (10.14).



Joonis 10.4. Jätkuvtala epüürid


```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järgehoidjad Seadistused Abi

octave-3.0.1:1> ABF1=afbfikt1(8,0,8,0,8,10,0,8,1,1)
Vb = 40
Va = 40
ABF1 =

    1280    1280

octave-3.0.1:2> ABF2=afbfikt1(10,20,3,50,6,0,0,10,1,1)
Vb = 36
Va = 34
ABF2 =

    2394    2466

octave-3.0.1:3> ABF3=afbfikt1(9,40,4.5,0,9,0,0,10,1,1)
Vb = 20
Va = 20
ABF3 =

    1215    1215

octave-3.0.1:4>

```

Joonis 10.5. Fiktiivsete koormuste leidmine

Tugede 1, 2 ja 3 kohta koostatud kolme momendi võrrandid on järgmised:

$$\begin{aligned}
 l_1 X_0 + 2(l_1 + l_2) X_1 + l_2 X_2 &= -6B_1^f - 6A_2^f \\
 l_2 X_1 + 2(l_2 + l_3) X_2 + l_3 X_3 &= -6B_2^f - 6A_3^f \\
 + l_3 X_2 + 2l_3 X_3 &= -6B_3^f
 \end{aligned} \tag{10.17}$$

kus toemoment X_0 ja koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on

$$\begin{aligned}
 X_0 &= -F_1 \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 6B_1^f &= \frac{ql_1^3}{4} = \frac{10 \cdot 8^3}{4} = 1280 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\
 6A_2^f &= F_2 l_2^2 \cdot \xi_2 \cdot \xi_2' (1 + \xi_2') + F_3 l_2^2 \cdot \xi_3 \cdot \xi_3' (1 + \xi_3') = \\
 &= 20 \cdot 10^2 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot (1 + 0.7) + 50 \cdot 10^2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot (1 + 0.4) = \\
 &= 2394 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\
 6B_2^f &= F_2 l_2^2 \cdot \xi_2 \cdot \xi_2' (1 + \xi_2) + F_3 l_2^2 \cdot \xi_3 \cdot \xi_3' (1 + \xi_3) = \\
 &= 20 \cdot 10^2 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot (1 + 0.3) + 50 \cdot 10^2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot (1 + 0.6) = \\
 &= 2466 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\
 6A_3^f &= 6B_3^f = 40 \cdot 9^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot (1 + 0.5) = 1215 \text{ kN} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned} \tag{10.18}$$

Vabaliikmete arvutamiseks võib kasutada GNU Octave'i funktsiooni *afbfikt1.m* lk 734. Funktsiooni *afbfikt1.m* kasutamist jälgi joonisel 10.5.

Pärast toemomendi X_0 ja vabaliikmete $6A_i^f$, $6B_i^f$ arvvaärtuste (10.18) asetamist võrrandisse (10.13) saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3354 \\ 3681 \\ 1215 \end{bmatrix} \quad (10.19)$$

ehk

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (10.20)$$

kus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = - \begin{bmatrix} 3354 \\ 3681 \\ 1215 \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

Võrrandisüsteemi lahendamist vaata jaotisest A.10 lk 635.

Võrrandisüsteemi (10.19) lahend on

$$X_1 = -73.801 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad X_2 = -69.716 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad X_3 = -32.642 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.22)$$

Paindemomendi ja põikjõu epüüri (joonis 10.4) lõigetes a, b, c ja d leiame järgmiste avaldisetega:

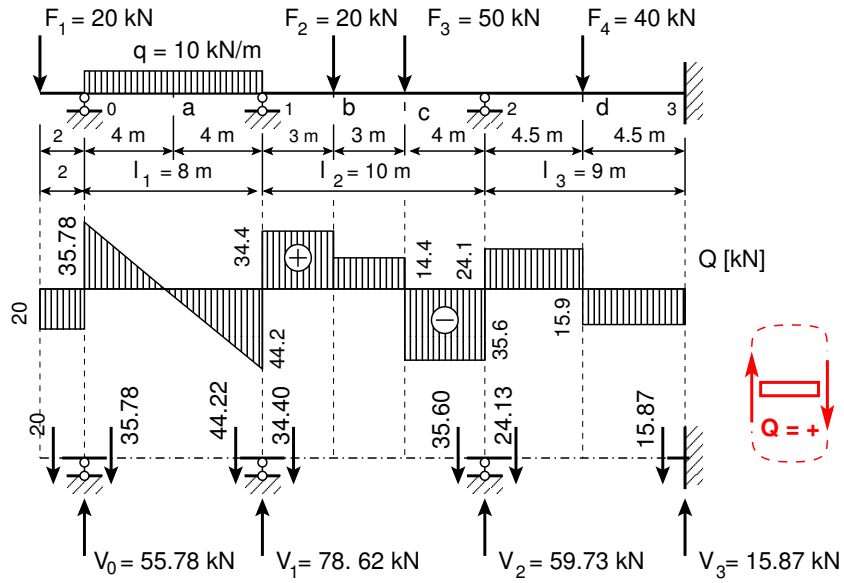
$$M_k = M_k^0 + X_{i-1} \cdot \xi'_k + X_i \cdot \xi_k \quad (10.23)$$

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{\Delta M}{\Delta x} = Q_k^0 + \frac{M_{\text{paremal}} - M_{\text{vasakul}}}{l} \quad (10.24)$$

kus ξ_k ja ξ'_k on ristlõike k mööduta kaugused vasakust ja paremast toest (vt joonis 10.3 lk 254). Põikjõu Q_k ja $\Delta M/\Delta x$ kohta on selgitus joonisel 1.17 (vt lk 47). Saame

$$\begin{aligned} M_a &= M_a^0 + M_{\text{konsool}} \xi'_a + X_1 \xi_a = \frac{10 \cdot 8^2}{8} - 40 \cdot 0.5 - 73.80 \cdot 0.5 = 23.100 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_b &= A_2 \xi_b l_2 + X_2 \xi'_b + X_1 \xi_b = (20 \cdot 0.7 + 50 \cdot 0.4) \cdot 0.3 \cdot 10 - 0.7 \cdot 73.80 - 0.3 \cdot 69.72 = \\ &= 29.424 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_c &= B_2 \xi'_c l_2 + X_2 \xi'_c + X_1 \xi_c = (20 \cdot 0.3 + 50 \cdot 0.6) \cdot 0.4 \cdot 10 - 0.4 \cdot 73.80 - 0.6 \cdot 69.72 = \\ &= 72.648 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_d &= M_d^0 + X_2 \xi'_d + X_3 \xi_d = 20 \cdot 4.5 - 0.5 \cdot 69.72 - 0.5 \cdot 32.64 = 37.82 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned} Q_{01} &= 40 + \frac{-73.78 + 40}{8} = 35.78 \text{ kN} \\ Q_{10} &= -40 + \frac{-73.78 + 40}{8} = 44.225 \text{ kN} \\ Q_{12} &= 20 \cdot 0.7 + 50 \cdot 0.4 + \frac{-69.78 + 73.78}{10} = 34.41 \text{ kN} \\ Q_{21} &= -20 \cdot 0.3 - 50 \cdot 0.6 + \frac{-69.78 + 73.78}{10} = -35.59 \text{ kN} \\ Q_{23} &= 20 + \frac{-32.61 + 69.78}{9} = 24.12 \text{ kN} \\ Q_{32} &= -20 + \frac{-32.61 + 69.78}{9} = -15.88 \text{ kN} \end{aligned} \quad (10.26)$$



Joonis 10.6. Jätkuvtala põikjõu epüür ja toereaktsioonid

Tabel 10.1. Valemid vabaliikmete arvutamiseks

Jrk	<i>Skeem</i>	$6 \frac{I_0}{I_i} A_i^f$	$6 \frac{I_0}{I_i} B_i^f$
1		$Fl_i l_i' \xi \xi' (1 + \xi')$	$Fl_i l_i' \xi \xi' (1 + \xi)$
2		$\frac{1}{4} q l_i^2 l_i'$	$\frac{1}{4} q l_i^2 l_i'$
3		$\frac{5}{32} q l_i^2 l_i'$	$\frac{5}{32} q l_i^2 l_i'$
4		$\frac{7}{60} q l_i^2 l_i'$	$\frac{2}{15} q l_i^2 l_i'$
5		$\frac{1}{4} q l_i^2 l_i' \xi'^2 (2 - \xi'^2)$	$\frac{1}{4} q l_i^2 l_i' \xi'^2 (2 - \xi')^2$
6		$-M l_i' (1 - 3\xi'^2)$	$M l_i' (1 - 3\xi^2)$

Konsoolis on põikjõud $Q_a^{(v)} = -20$ kN.

Jätukvtala vertikaalsed toereaktsioonid V_i (vt joonis 10.6) leiame põikjõu epüüri abil:

$$\begin{aligned} V_0 &= 20 + 35.78 = 55.78 \text{ kN} \\ V_1 &= 44.25 + 34.41 = 78.66 \text{ kN} \\ V_2 &= 35.59 + 24.12 = 59.71 \text{ kN} \\ V_3 &= 15.88 \text{ kN} \end{aligned} \quad (10.27)$$

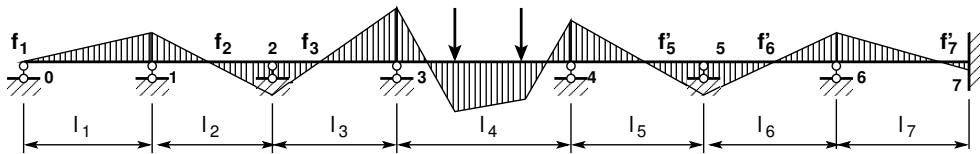
Staatilise kontrolliga kontrollime jätukvtala tasakaalu:

$$\Sigma Z = 0: \quad 20 + 10 \cdot 8 + 20 + 50 + 40 - 55.78 - 78.66 - 59.71 - 15.88 = -0.03 \approx 0 \quad (10.28)$$

10.4 Jätukvtalade arvutus fookussuhtega

10.4.1 Fookussuhted

Jätukvtala arvutamisel *fookussuhtega* koormatakse ainult ühte sillet (joonis 10.7). Koormatud sildest kaugemal asetseval toel on toemoment väiksem kui koormatud sildele lähemal asetseval toel. Kuna koormamata silde paindemomendid on erinevate märkidega, siis on igas koormamata sildes paindemomendi epüüris üks nullpunkt. Seda nullpunkti nimetatakse *fookuseks*. Fookus asub koormatud sildest kaugemal asetsevale



Joonis 10.7. Jätukvtala fookused

toele lähemal. Koormatud sildest vasakul asetsevad nullpunkte (joonisel 10.7 f_1 , f_2 ja f_3) nimetatakse *vasakpoolseteks fookusteks*. Koormatud sildest paremal asetsevad nullpunkte (joonisel 10.7 f'_5 , f'_6 ja f'_7) nimetatakse *parempoolseteks fookusteks*.

Fookuste asukohad ei olene koormusest. Koormatud silde paindemomendi epüüri nullpunktid olenevad koormusest ega ole seepärast fookused.

Sildes on kaks fookust: *vasakpoolne fookus* f_i ja *parempoolne fookus* f'_i .

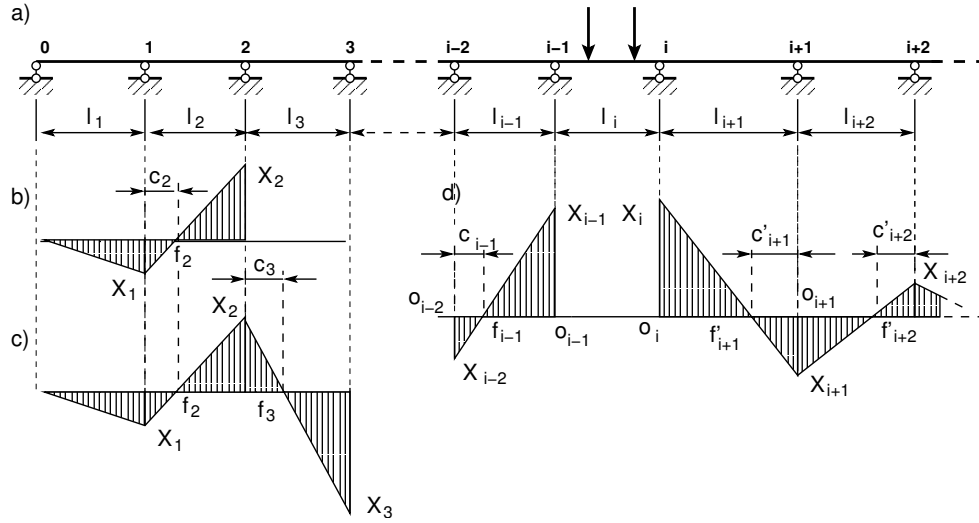
Vasakpoolseks fookussuhteks nimetatakse vasakpoolse fookuse kauguste suhet parem- ja vasakpoolsest toest (vt joonis 10.8 d)),

$$k_{i-1} = \frac{l_{i-1} - c_{i-1}}{c_{i-1}} \quad (10.29)$$

kus vasakpoolne kaugus on c_{i-1} ja parempoolne kaugus ($l_{i-1} - c_{i-1}$).

Parempoolseks fookussuhteks nimetatakse parempoolse fookuse kauguste suhet vasak- ja parempoolsest toest (vt joonist 10.8 d)),

$$k'_{i+1} = \frac{l_{i+1} - c'_{i+1}}{c'_{i+1}} \quad (10.30)$$



Joonis 10.8. Jätukvtala fookussuhted

kus vasakpoolne kaugus on $(l_{i+1} - c'_{i+1})$ ja parempoolne kaugus c'_{i+1} .

Kuna koormatud sildest kaugemal asetseval toel on toemoment väiksem kui koormatud sildele lähemal asetseval toel, siis vasak- ja parempoolse fookussuhte k_{i-1} ja k'_{i+1} arväärtus on suurem kui üks.

Joonise 10.8 sarnastest kolmnurkadest $\triangle X_{i-1}o_{i-1}f_{i-1}$ ja $\triangle X_{i-2}o_{i-2}f_{i-1}$ saame

$$\frac{X_{i-1}}{X_{i-2}} = -\frac{l_{i-1} - c_{i-1}}{c_{i-1}} = -k_{i-1} \quad (10.31)$$

ja kolmnurkadest $\triangle X_{i1}o_i f'_{i-1}$ ja $\triangle X_{i+1}o_{i+1} f'_{i-1}$

$$\frac{X_i}{X_{i+1}} = -\frac{l_{i+1} - c'_{i+1}}{c'_{i+1}} = -k'_{i+1} \quad (10.32)$$

Fookussuhete avaldiste saamiseks vaatleme joonist 10.8 b) ja sõlm 1 kohta kirjutame välja kolme momendi võrrandi (10.13), arvestades, et avad on koormamata. Saame

$$l'_1 X_0 + 2(l'_1 + l'_2) X_1 + l'_2 X_2 = 0 \quad (10.33)$$

siin $X_0 = 0$ ja

$$2(l'_1 + l'_2) X_1 + l'_2 X_2 = 0 \quad (10.34)$$

ning

$$\frac{X_2}{X_1} = -\frac{2(l'_1 + l'_2)}{l'_2} = -k_2 \quad (10.35)$$

Sõlme 2 kohta on kolme momendi võrrand

$$l'_2 X_1 + 2(l'_2 + l'_3) X_2 + l'_3 X_3 = 0 \quad (10.36)$$

Võrrandist (10.35) avaldame $X_1 = -\frac{X_2}{k_2}$ ja asetame võrrandisse (10.36):

$$-l'_2 \frac{X_2}{k_2} + 2(l'_2 + l'_3) X_2 + l'_3 X_3 = 0 \quad (10.37)$$

Siit saame

$$\frac{X_3}{X_2} = - \left[2 + \frac{l'_2}{l'_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) \right] = -k_3 \quad (10.38)$$

Sõlme 3 kohta saame

$$l'_3 X_2 + 2(l'_3 + l'_4) X_3 + l'_4 X_4 = 0 \quad (10.39)$$

Võrrandist (10.38) avaldame $X_2 = -\frac{X_3}{k_3}$ ja asetame võrrandisse (10.39):

$$-l'_3 \frac{X_3}{k_3} + 2(l'_3 + l'_4) X_3 + l'_4 X_4 = 0 \quad (10.40)$$

Siit saame

$$\frac{X_4}{X_3} = - \left[2 + \frac{l'_3}{l'_4} \left(2 - \frac{1}{k_3} \right) \right] = -k_4 \quad (10.41)$$

Üldistame saadud avaldised (10.35), (10.38) ja (10.41). Vasakpoolseteks fookussuheteks on avaldis

$$k_j = 2 + \frac{l'_{j-1}}{l'_j} \left(2 - \frac{1}{k_{j-1}} \right), \quad X_{j-1} = -\frac{X_j}{k_j} \quad (10.42)$$

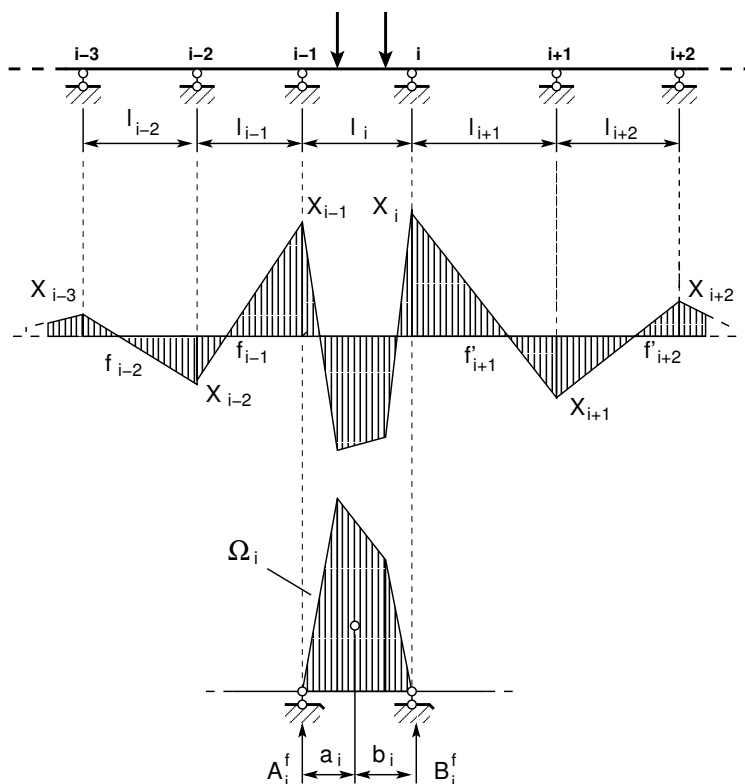
Samamoodi saadakse valem ka parempoolsete fookussuhete arvutamiseks

$$k'_j = 2 + \frac{l'_{j+1}}{l'_j} \left(2 - \frac{1}{k'_{j+1}} \right), \quad X_j = -\frac{X_{j-1}}{k'_j} \quad (10.43)$$

10.4.2 Koormatud silde toemomendid

Joonisel 10.9 esitatud tala tugede $i-1$ ja i kohta kirjutame kolme momendi võrrandi (10.13):

$$\begin{aligned} l'_{i-1} X_{i-2} + 2(l'_{i-1} + l'_i) X_{i-1} + l'_i X_i &= -6A_i^f \frac{I_0}{I_i} \\ l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} &= -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} \end{aligned} \quad (10.44)$$



Joonis 10.9. Jätkuvtala toemomendid

Võrranditest (10.44) elimineerime valemite (10.42) ja (10.43) abil momendid X_{i-2} ja X_{i+1} :

$$X_{i-2} = -\frac{X_{i-1}}{k_{i-1}}, \quad X_{i+1} = -\frac{X_i}{k'_{i+1}} \quad (10.45)$$

Arvestades seoseid (10.45), esitame võrrandisüsteemi (10.44) järgmisel kujul:

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right) & 1 \\ 1 & 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i-1} \\ X_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6A_i^f \frac{I_0}{l_i l'_i} \\ 6B_i^f \frac{I_0}{l_i l'_i} \end{bmatrix} \quad (10.46)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} k_i & 1 \\ 1 & k'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i-1} \\ X_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{6A_i^f}{l_i} \\ \frac{6B_i^f}{l_i} \end{bmatrix} \quad (10.47)$$

siin

$$\frac{1}{l_i} = \frac{I_0}{I_i l'_i} \quad (10.48)$$

s.t koormusliikmetes ei ole redutseeritud pikkused.

Võrrandisüsteemi (10.47) lahend ja toemomendid on

$$X_{i-1} = -\frac{6A_i^f k'_i - 6B_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)} \quad (10.49)$$

$$X_i = -\frac{6B_i^f k_i - 6A_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)} \quad (10.50)$$

Kui äärmised toed on liigendtoed (s.t $k_i = \infty$, $k'_i = \infty$), siis avaldiste (10.49), (10.50) kasutamisel tekib määramatus $\frac{\infty}{\infty}$ ning see tuleb avada

$$\begin{aligned} k'_n = \infty; \quad X_n = 0; \quad X_{n-1} &= -\frac{6A_n^f k'_n - 6B_n^f}{l_n (k_n k'_n - 1)} \cdot \frac{\frac{1}{k'_n}}{\frac{1}{k'_n}} = \\ &= -\frac{6A_n^f - \frac{6B_n^f}{k'_n}}{l_n \left(k_n - \frac{1}{k'_n}\right)} = -\frac{6A_n^f}{l_n k_n} \end{aligned} \quad (10.51)$$

$$\begin{aligned} k_1 = \infty; \quad X_0 = 0; \quad X_1 &= -\frac{6B_1^f k_1 - 6A_1^f}{l_1 (k_1 k'_1 - 1)} \cdot \frac{\frac{1}{k_1}}{\frac{1}{k_1}} = \\ &= -\frac{6B_1^f - \frac{6A_1^f}{k_1}}{l_1 \left(k'_1 - \frac{1}{k_1}\right)} = -\frac{6B_1^f}{l_1 k'_1} \end{aligned} \quad (10.52)$$

10.4.3 Jätukvtala fookussuhetega. Näide 10.2 [slaidid]

Näide 10.2 Arvutada joonisel 10.10 c) esitatud jätukvtala toemomendid fookussuhetega ning kujutada pändemomendi ja põikjõu epüürid. Andmed: $l_1 = 8$ m, $l_2 = 10$ m, $l_3 = 9$ m. Tala on koormatud ajutise koormusega sillete kaupa:

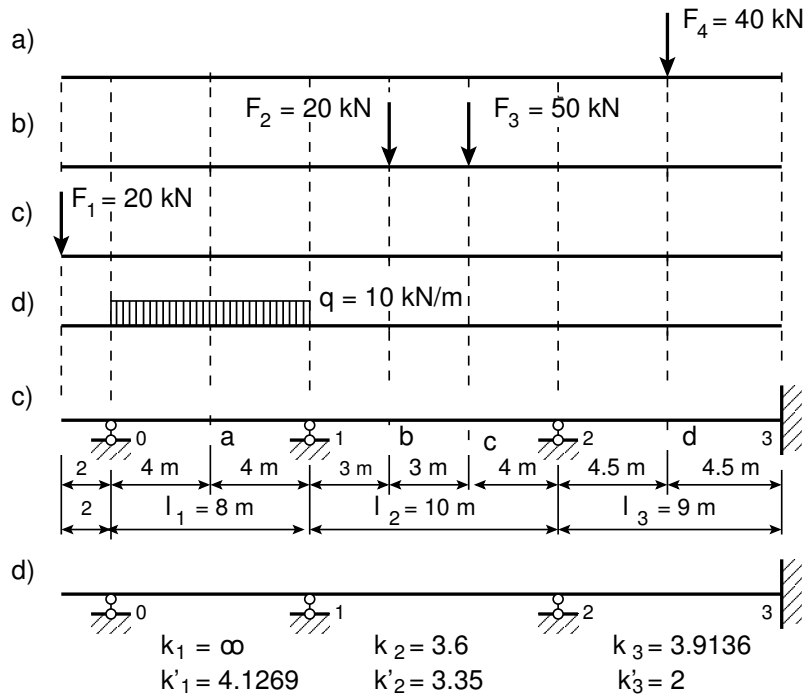
1. Koormusvariant: koormatud on kolmas sille $F_4 = 40$ kN (joonis 10.10 a)).
2. Koormusvariant: koormatud on teine sille $F_2 = 20$ kN ja $F_3 = 50$ kN (joonis 10.10 b)).
3. Koormusvariant: koormatud on konsool $F_1 = 20$ kN (joonis 10.10 c)).
4. Koormusvariant: koormatud on esimene sille $q = 10$ kN/m (joonis 10.10 d)).

Sillete ristlõikejäikused $EI = \text{const}$.

Näites 10.1 lk 254 oli kasutatud kolme momendi võrrandit.

Fookussuhted joonisel 10.10 c) esitatud tala jaoks arvutame valemitega (10.42) ja (10.43):

$$\begin{aligned} k_1 &= \infty \\ k_2 &= 2 + \frac{l_1}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k_1}\right) = 2 + \frac{8}{10} \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 3.6 \\ k_3 &= 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2}\right) = 2 + \frac{10}{9} \left(2 - \frac{1}{3.6}\right) = 3.9136 \end{aligned} \quad (10.53)$$



Joonis 10.10. Jätkuvtala. Fookussuhted

Samamoodi arvutame ka parempoolsed fookussuhted:

$$\begin{aligned}
 k'_3 &= 2 \\
 k'_2 &= 2 + \frac{l_3}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k'_3} \right) = 2 + \frac{9}{10} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3.35 \\
 k'_1 &= 2 + \frac{l_2}{l_1} \left(2 - \frac{1}{k'_2} \right) = 2 + \frac{10}{8} \left(2 - \frac{1}{3.35} \right) = 4.1269
 \end{aligned}
 \tag{10.54}$$

Fookussuhteid võib arvutada GNU Octave'i funktsiooni *fooksuhe.m* (vt 734) abil. Arvutamise näide on joonisel 10.11, kus esimese ava fookussuhe $k_1 = \infty \sim \frac{1}{\text{eps}}$. Siin on eps arvutil



Joonis 10.11. Fookussuhete arvutamine

```

Shell - GNU Octave
Seanss Redigeerimine Vaade Järjehoidjad Seadistused Abi

octave-3.0.1:1> TM1=toemom1(8,1/eps,4.1269,0,8,0,8,10,0,8,1,1)
Vb = 40
Va = 40
A6f = 1280
B6f = 1280
TM1 =
      0.00000  -38.77002

octave-3.0.1:2> TM2=toemom1(10,3.6,3.35,20,3,50,6,0,0,10,1,1)
Vb = 36
Va = 34
A6f = 2394
B6f = 2466
TM2 =
     -50.216  -58.622

octave-3.0.1:3> TM3=toemom1(9,3.9136,2,40,4.5,0,9,0,0,9,1,1)
Vb = 20
Va = 20
A6f = 1215
B6f = 1215
TM3 =
     -19.774  -57.613

octave-3.0.1:4> █
  
```

Joonis 10.12. Toemomentide arvutamine

lõpmatult väike suurus (arvutinull). Tema pöördväärtus on lõpmatult suur arv (arvutilõpmatus).

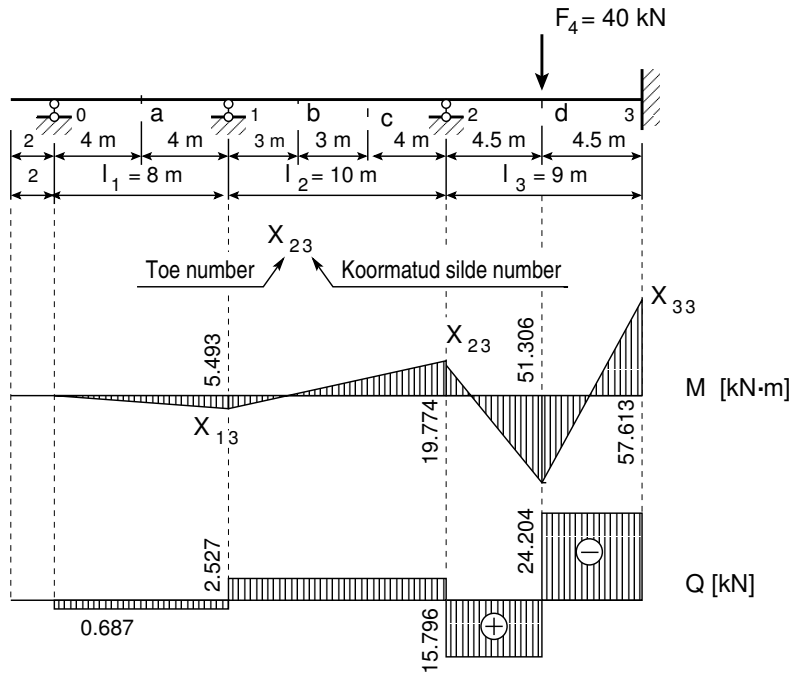
Tulemused näitame joonisel 10.10 d).

Fookussuhetega leiame toemomendid eraldi iga silde koormusest. Alustame kolmandast sildest (vt joonis 10.10 a) ja 10.13). Kolmanda silde koormamisel tekkinud toemomendid arvutame valemitega (10.49) ja (10.50). Nendes esinevad koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on juba leitud näites 10.1 lk 254 (vt avaldis 10.18 lk 255). Saame

$$X_{23} = -\frac{6A_3^f k_3' - 6B_3^f}{l_3 (k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1215 \cdot 2 - 1215}{9 \cdot (3.9136 \cdot 2 - 1)} = -19.774 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.55)$$

$$X_{33} = -\frac{6B_3^f k_3 - 6A_3^f}{l_3 (k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1215 \cdot 3.9136 - 1215}{9 \cdot (3.9136 \cdot 2 - 1)} = -57.613 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.56)$$

Toemomente võib arvutada GNU Octave'i funktsiooni *toemom1.m* (vt 734) abil. Arvutamise näide on joonisel 10.12, kus esimese ava fookussuhe $k_1 = \infty \sim \frac{1}{\text{eps}}$. Siin on eps arvutil lõpmatult väike suurus (arvutinull). Tema pöördväärtus on lõpmatult suur arv (arvuti lõpmatus).



Joonis 10.13. Fookussuhted. Koormus kolmandal sildel

Toemomendi X_{13} leiame vasakpoolse fookussuhtega (10.42):

$$X_{13} = -\frac{X_{23}}{k_2} = \frac{19.774}{3.6} = 5.493 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.57)$$

Leitud toemomendid X_{i3} kanname epüürile (joonis 10.13).

Kolmanda ava keskel oleva paindemomendi epüüri ordinaadi arvutamiseks kasutame valemit (10.23):

$$\begin{aligned} M_d &= M_d^o + X_2 \cdot \xi'_d + X_3 \cdot \xi_d = 20 \cdot 4.5 - 19.774 \cdot 0.5 - 57.613 \cdot 0.5 = \\ &= 51.306 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (10.58)$$

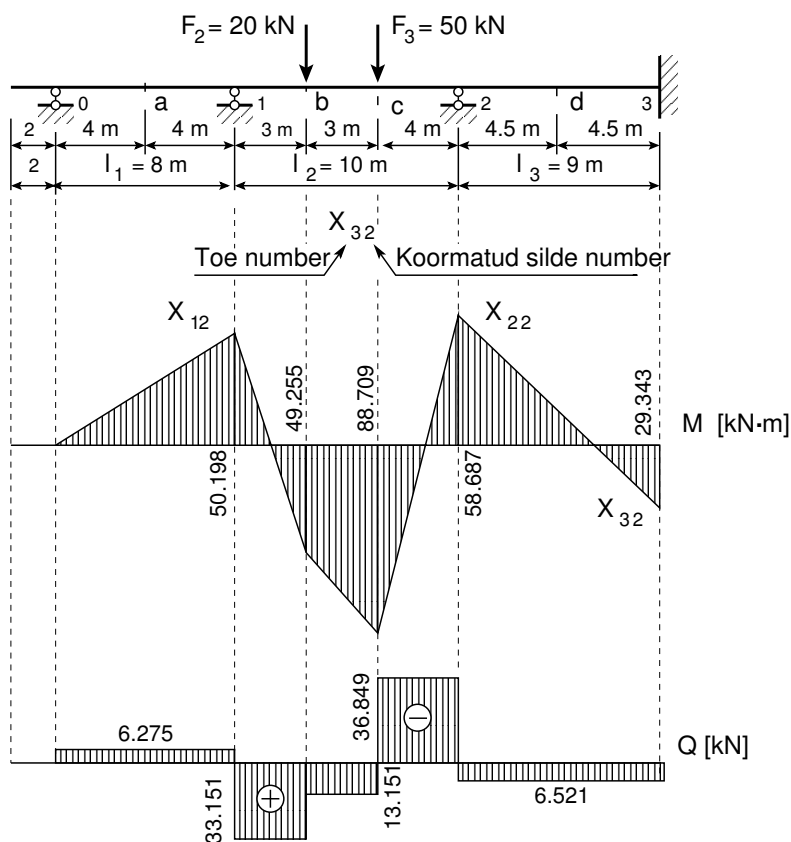
Teise silde koormamisel tekkinud toemomendid arvutame valemitega (10.49) ja (10.50). Nendes esinevad koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on juba leitud näites 10.1 lk 254 (vt avaldis 10.18 lk 255):

$$X_{12} = -\frac{6A_2^f k_2' - 6B_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2394 \cdot 3.35 - 2468}{10 \cdot (3.6 \cdot 3.35 - 1)} = -50.198 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.59)$$

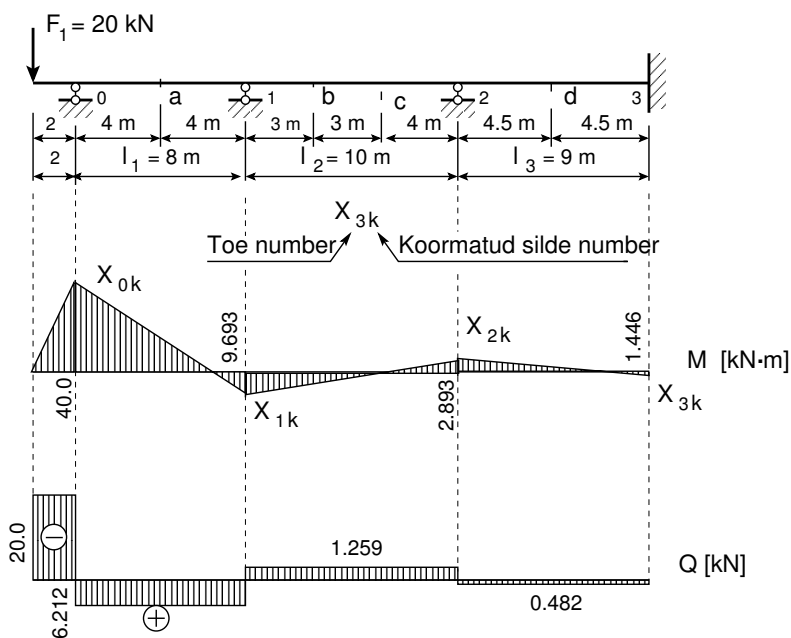
$$X_{22} = -\frac{6B_2^f k_2 - 6A_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2468 \cdot 3.6 - 2394}{10 \cdot (3.6 \cdot 3.35 - 1)} = -58.687 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.60)$$

Parempoolse toemomendi X_{32} leiame parempoolse fookussuhtega (10.43):

$$X_{32} = -\frac{X_{22}}{k_3'} = \frac{58.687}{2} = 29.343 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.61)$$



Joonis 10.14. Fookussuhted. Koormus teisel silde



Joonis 10.15. Fookussuhted. Koormus konsoolil

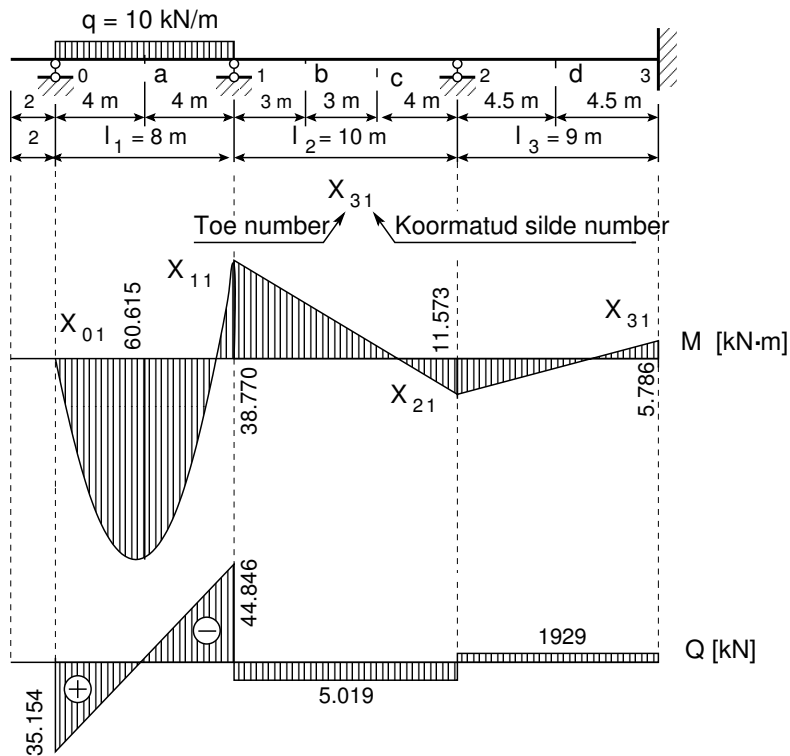
Arvutame teise ava lihttala toereaktsioonid V_1 ja V_2 koormusest F_2 ja F_3 . Kasutame toereaktsioonide mõjujooni (vt avaldist (2.12)), siin on toereaktsiooni A_i jaoks $\eta_i = \xi'_i$ ja toereaktsiooni B_i jaoks $-\eta_i = \xi_i$. Saame

$$\begin{aligned} V_1 &= F_2 \cdot \xi'_b + F_3 \cdot \xi'_c = 20 \cdot 0.7 + 50 \cdot 0.4 = 34 \text{ kN} \\ V_2 &= F_2 \cdot \xi_b + F_3 \cdot \xi_c = 20 \cdot 0.3 + 50 \cdot 0.6 = 36 \text{ kN} \end{aligned} \quad (10.62)$$

Teise ava ristlõigetes b ja c olevate paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamiseks kasutame valemit (10.23):

$$\begin{aligned} M_b &= M_b^o + X_1 \cdot \xi'_b + X_2 \cdot \xi_b = 34 \cdot 0.3 \cdot 10 - 50.198 \cdot 0.7 - 58.687 \cdot 0.3 = \\ &= 49.255 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_c &= M_c^o + X_1 \cdot \xi'_c + X_2 \cdot \xi_c = 36 \cdot 0.4 \cdot 10 - 50.198 \cdot 0.7 - 58.687 \cdot 0.3 = \\ &= 88.709 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (10.63)$$

Konsoolil mõjuv koormus tekitab toel 0 momendi $X_{0k} = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (joonis 10.15)



Joonis 10.16. Fookussuhted. Koormus esimesel sildel

Parempoolsed toemomendid X_{ik} leiame parempoolse fookussuhtega (10.43):

$$\begin{aligned} X_{1k} &= -\frac{X_{0k}}{k'_1} = -\frac{-40.0}{4.1269} = 9.693 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ X_{2k} &= -\frac{X_{1k}}{k'_2} = -\frac{9.693}{3.35} = -2.893 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ X_{3k} &= -\frac{X_{2k}}{k'_3} = -\frac{-2.893}{2} = 1.446 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (10.64)$$

Esimese ava koormamisel leiame momendi toel 1 X_{11} . Toel 0 on moment $X_{01} = 0$ ja vasakpoolne fookussuhe $k_1 = \infty$. Toereaktsiooni X_{11} määramiseks kasutame valemit (10.52). Fiktiivne toereaktsioon $6B_1^f = 1280 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ on leitud varem (vt avaldisi (10.18) lk 255). Saame

$$X_{11} = -\frac{6B_1^f}{l_1 k_1'} = -\frac{1280}{8 \cdot 4.1269} = -38.770 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.65)$$

Parempoolsed toemomendid leiame parempoolsete fookussuhetega (10.43):

$$\begin{aligned} X_{21} &= -\frac{X_{11}}{k_2'} = -\frac{-38.770}{3.35} = 11.573 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ X_{31} &= -\frac{X_{21}}{k_3'} = -\frac{11.573}{2} = -5.786 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (10.66)$$

Esimese ava ristlõikes a oleva paindemomendi epüüri ordinaadi leidmiseks kasutame valemit (10.23):

$$\begin{aligned} M_a &= M_a^o + X_0 \cdot \xi_a' + X_1 \cdot \xi_a = \frac{10 \cdot 8^2}{8} - 0.0 \cdot 0.5 - 38.770 \cdot 0.5 = \\ &= 60.515 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (10.67)$$

Saadud tulemused kanname joonisele 10.16.

Järgnevalt liidame toemomendid, mis on tekkinud sillete koormamisel (10.65), (10.66), (10.59), (10.60), (10.61), (10.55), (10.56), (10.57) ja konsooli koormamisel (10.64). Võrdleme saadud tulemust kolme momendi võrrandiga leituga (näide 10.1 lk 254).

Võrdleme GNU Octave'iga, sisestades järgmised käsud⁴:

```
% Toemomendid silde kaupa koormamisel
TM1(1,1)=0.0;      TM1(1,2)=-38.770;
TM2(1,1)=-50.198; TM2(1,2)=-58.687;
TM3(1,1)=-19.774; TM3(1,2)=-57.613;
knsM=-40.0;
% Fookussuhted
k1v=1/eps; k2v=3.6; k3v=3.9136;
k1p=4.1269; k2p=3.35; k3p=2.0;
% Toemomendid
momT1= [TM1(1,1) TM1(1,2) -TM1(1,2)/k2p -(-TM1(1,2)/k2p)/k3p]
momT2= [-TM2(1,1)/k1v TM2(1,1) TM2(1,2) -TM2(1,2)/k3p]
momT3= [-(-TM3(1,1)/k2v)/k1v -TM3(1,1)/k2v TM3(1,1) TM3(1,2)]
momTk=[knsM -knsM/k1p -(-knsM/k1p)/k2p -(-(-knsM/k1p)/k2p)/k3p]
% Toemomentide summad
TMS=momT1+momT2+momT3+momTk
% Kolme momendi võrrandiga leitud toemomendid
ToeM=[-40.0 -73.801 -69.716 -32.642]
```

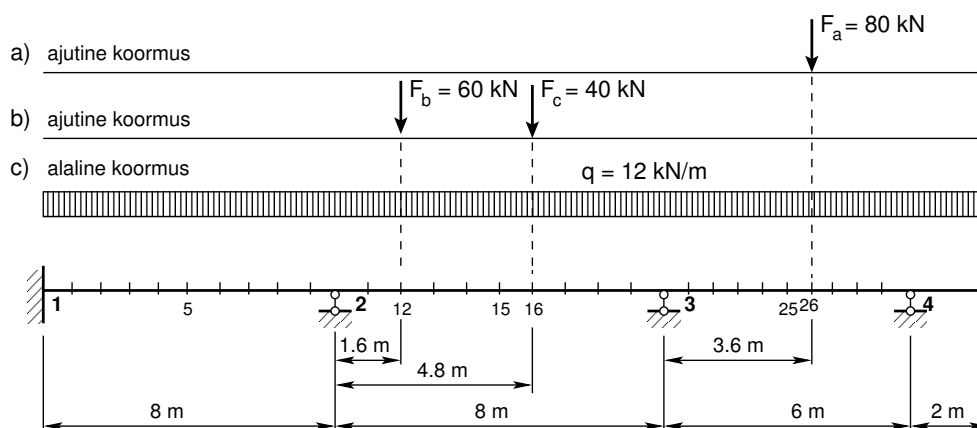
Sillete koormamisel fookussuhetega ja siis liidetud toemomendid langevad kokku kolme momendi võrrandiga leitud toemomentidega.

⁴./octaveProgrammide/Toemomendid.txt

10.5 Jätkuvtala arvutus. Näide 10.3

Näide 10.3 Koostada jätkuvtala (joonis 10.17) paindemomendi M ja põikjõu Q epüürid ning suurimate paindemomentide epüür.

Andmed. Tala jäikus on konstantne. Tala omakaal $q = 12 \text{ kN/m}$ ja ajutise koormuse koon-datud jõudude $F_a = 80 \text{ kN}$, $F_b = 60 \text{ kN}$, $F_c = 40 \text{ kN}$ asukohad (löiked $a = 26$, $b = 12$ ja $c = 16$) on näidatud joonisel. Tala silded on jagatud kümneks võrdseks osaks. Ühel sildel asuvad jõud F_b ja F_c mõjuvad samal ajal.



Joonis 10.17. Jätkuvtala näide 10.3

Leida

1. Tala staatikaga määramatuse aste.
2. Omakaalust põhjustatud toemomendid kolme momendi võrrandiga.
3. Sisejõudude epüürid omakaalust.
4. Sisejõudude epüürid sillete kaupa mõjuvast ajutisest koormusest. Toemomendid arvutada fookussuhetega.
5. Suurimate paindemomentide epüür sillele, kus on löige a .

Jätkuvtala staatikaga määramatuse astme leiame valemiga (10.1):

$$n = t - 3 = 6 - 3 = 3 \quad (10.68)$$

kus $t = 6$ on toesidemete arv.

Sisejõudude leidmisel vaatleme kolme (arvutiprogrammis *jtalaNBA.m* lk 734 nelja) koormus-varianti:

- omakaalust põhjustatud toemomendid arvutame kolme momendi võrrandiga (vt joonist 10.17 c))
- ajutisest koormusest teises sildes, kus jõud F_b ja F_c mõjuvad samal ajal (vt joonist 10.17 b))

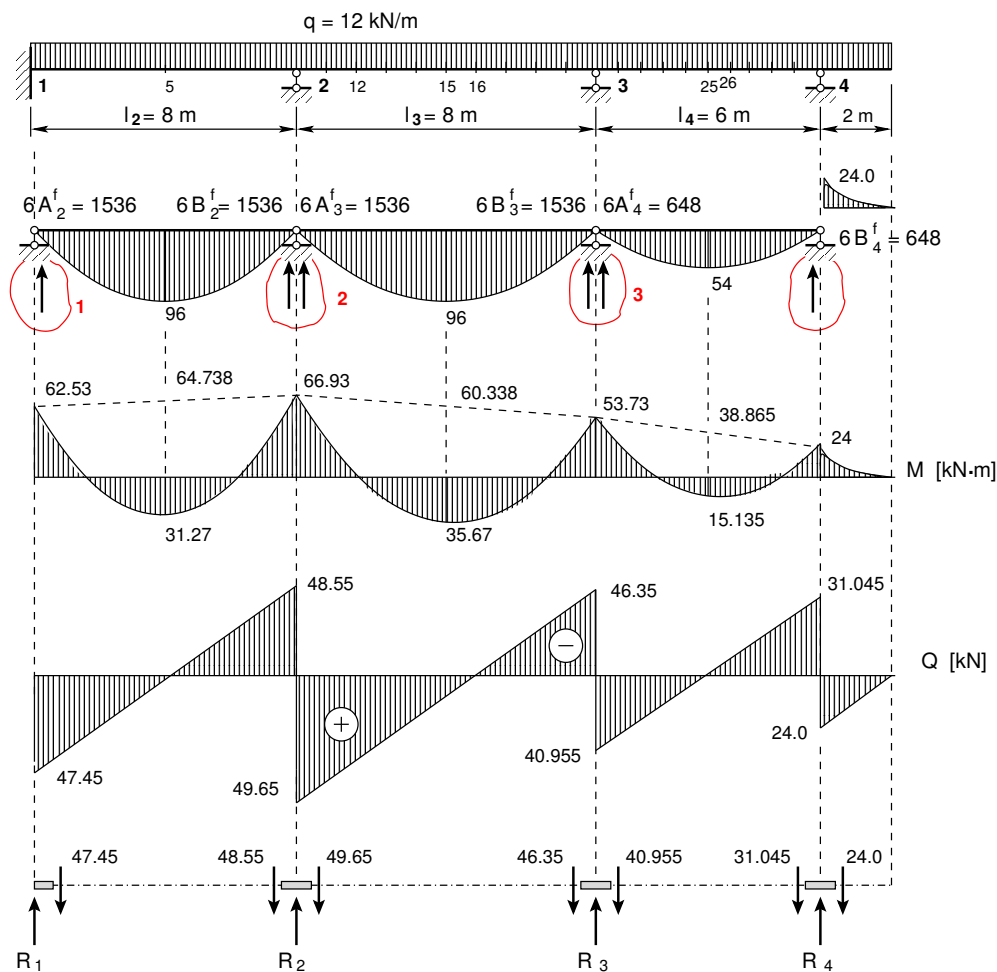
- ajutisest koormusest F_a kolmandas sildes (vt joonist 10.17 a))
- arvutiprogrammis jTalaNBA on esimeses sildes võimalik lisada ajutine koormus.

Nii nagu näites 10.1 oli lisatud sille $l_4 = 0$ ja moment $X_4 = 0$, lisame käesolevas näites silde $l_1 = 0$ ja momendi $X_0 = 0$. Konsooli moment on $X_4 = -12 \cdot 2 \cdot 1 = -24.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Nüüd kasutame kolme momendi võrrandit (10.13) tuge 1, 2 ja 3 (vt joonist 10.18) kohta:

$$\begin{aligned} 2(0 + l_2) \cdot X_1 + l_2 \cdot X_2 &= -6A_2^f \\ l_2 \cdot X_1 + 2(l_2 + l_3) \cdot X_2 + l_3 \cdot X_3 &= -6B_2^f - 6A_3^f \\ l_3 \cdot X_2 + 2(l_3 + l_4) \cdot X_3 &= -l_4 \cdot (-24.0) - 6B_3^f - 6A_4^f \end{aligned} \quad (10.69)$$

kus koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on

$$6A_2^f = 6B_2^f = \frac{ql_2^3}{4} = \frac{12 \cdot 8^3}{4} = 1536 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$



Joonis 10.18. Jätukvtala omakaalust põhjustatud M , Q epüürid ja toereaktsioonid

$$6A_3^f = 6B_3^f = 6A_2^f = 6A_1^f = 1536 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (10.70)$$

$$6A_4^f = 6B_4^f = \frac{ql_4^3}{4} = \frac{12 \cdot 6^3}{4} = 648 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Vabaliikmete arvutamiseks võib kasutada GNU Octave'i funktsiooni `afbikt1.m` lk 734. Pärast toemomendi X_0 ja vabaliikmete $6A_i^f$, $6B_i^f$ arväärtuste (10.70) asetamist võrrandisse (10.17) saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{bmatrix} 16 & 8 & 0 \\ 8 & 32 & 8 \\ 0 & 8 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1536 \\ 3072 \\ 2040 \end{bmatrix} \quad (10.71)$$

ehk

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (10.72)$$

kus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 0 \\ 8 & 32 & 8 \\ 0 & 8 & 28 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = - \begin{bmatrix} 1536 \\ 3072 \\ 2040 \end{bmatrix} \quad (10.73)$$

Võrrandisüsteemi lahendamist vaata lisast A.10 lk 635.

Võrrandisüsteemi (10.71) lahend on

$$X_1 = -62.533 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad X_2 = -66.933 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad X_3 = -53.733 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.74)$$

Paindemomendi ja põikjõu epüüri (joonis 10.18) lõigetes 5, 15 ja 25 leiame järgmiste avaldistega:

$$M_k = M_k^0 + X_{i-1} \cdot \xi'_k + X_i \cdot \xi_k \quad (10.75)$$

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{\Delta M}{\Delta x} = Q_k^0 + \frac{M_{\text{paremal}} - M_{\text{vasakul}}}{l} \quad (10.76)$$

kus ξ_k ja ξ'_k on ristlõike k mõõduta kaugused vasakust ja paremast toest (vt joonis 10.3 lk 254). Põikjõu Q_k ja $\Delta M / \Delta x$ kohta on selgitus joonisel 1.17 (vt lk 47). Saame

$$\begin{aligned} M_5 &= \frac{12 \cdot 8^2}{8} - 62.53 \cdot 0.5 - 66.93 \cdot 0.5 = 31.27 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_{15} &= \frac{12 \cdot 8^2}{8} - 66.93 \cdot 0.5 - 53.73 \cdot 0.5 = 35.67 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_{25} &= \frac{12 \cdot 6^2}{8} - 53.73 \cdot 0.5 - 24.0 \cdot 0.5 = 15.135 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (10.77)$$

Toel 4 on konsooli moment $M_4 = -12 \cdot 2 \cdot 1 = -24 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Põikjõud arvutame valemiga (10.76):

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{12 \cdot 8}{2} + \frac{-66.93 - (-62.53)}{8} = 48.0 - 0.55 = 47.45 \text{ kN} \\ Q_{21} &= -\frac{12 \cdot 8}{2} + \frac{-66.93 - (-62.53)}{8} = -48.0 - 0.55 = -48.55 \text{ kN} \\ Q_{23} &= \frac{12 \cdot 8}{2} + \frac{-53.73 - (-66.93)}{8} = 48.0 + 1.65 = 49.65 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{32} &= -\frac{12 \cdot 8}{2} + \frac{-53.73 - (-66.93)}{8} = -48.0 + 1.65 = -46.35 \text{ kN} \\
Q_{34} &= \frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{-24.0 - (-53.73)}{6} = 36.0 + 4.955 = 40.955 \text{ kN} \\
Q_{43} &= -\frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{-24.0 - (-53.73)}{6} = -36.0 + 4.955 = -31.045 \text{ kN} \quad (10.78)
\end{aligned}$$

Konsoolis on põikjõud $Q_4^{(p)} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ kN}$.

Jätkuvtala vertikaalsed toereaktsioonid V_i (vt joonis 10.18) leiame põikjõu epüüri abil:

$$\begin{aligned}
R_1 &= 47.45 = 47.45 \text{ kN} \\
R_2 &= 48.55 + 49.65 = 98.20 \text{ kN} \\
R_3 &= 46.35 + 40.955 = 87.305 \text{ kN} \\
R_4 &= 31.045 + 24.0 = 55.045 \text{ kN} \quad (10.79)
\end{aligned}$$

Staatilise kontrolliga kontrollime jätkuvtala tasakaalu:

$$\Sigma Z = 0; \quad 12 \cdot 24 - 47.451 - 98.20 - 87.305 - 55.045 = 0 \quad (10.80)$$

Järgnevalt vaatleme jätkuvtala (joonis 10.19), kus teine sille on koormatud ajutise koormusega. Sille on koormatud jõududega F_b ja F_c , mis mõjuvad samaaegselt. Arvutame jätkuvtala (joonis 10.19) vasakpoolsed fookussuhted (10.81), kasutades avaldist (10.42). Saame

$$\begin{aligned}
k_2 &= 2 \\
k_3 &= 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) = 2 + \frac{8}{8} \left(2 - \frac{1}{2.0} \right) = 3.5 \\
k_4 &= 2 + \frac{l_3}{l_4} \left(2 - \frac{1}{k_3} \right) = 2 + \frac{8}{6} \left(2 - \frac{1}{3.5} \right) = 4.2857 \quad (10.81)
\end{aligned}$$

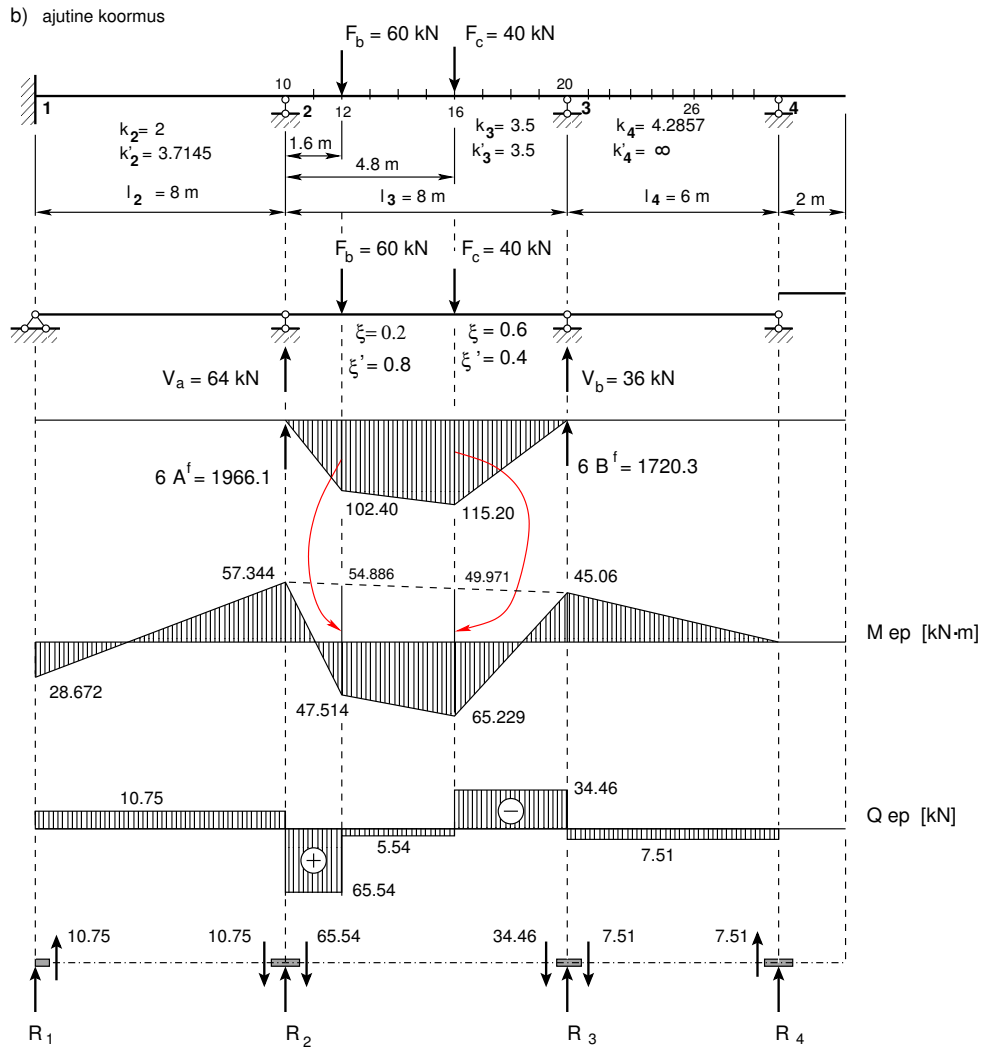
Parempoolsete fookussuhte arvutamiseks kasutame avaldist (10.43). Saame

$$\begin{aligned}
k'_4 &= \infty \\
k'_3 &= 2 + \frac{l_4}{l_3} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2 + \frac{6}{8} (2 - 0.0) = 3.5 \\
k'_2 &= 2 + \frac{l_3}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k'_3} \right) = 2 + \frac{8}{8} \left(2 - \frac{1}{3.5} \right) = 3.7143 \quad (10.82)
\end{aligned}$$

Koormusliikmete $6A_3^f$, $6B_3^f$ arvutamisel kasutame avaldise (10.15) ja (10.16), mis on ka tabelis 10.1. Leiame

$$\begin{aligned}
6A_3^f &= F_b l_3^2 \cdot \xi_b \cdot \xi'_b (1 + \xi'_b) + F_c l_3^2 \cdot \xi_c \cdot \xi'_c (1 + \xi'_c) = \\
&= 60 \cdot 8.0^2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot (1 + 0.8) + 40 \cdot 8.0^2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot (1 + 0.4) = \\
&= 1966.1 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (10.83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6B_3^f &= F_b l_3^2 \cdot \xi_b \cdot \xi'_b (1 + \xi_b) + F_c l_3^2 \cdot \xi_c \cdot \xi'_c (1 + \xi_c) = \\
&= 60 \cdot 8.0^2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot (1 + 0.2) + 40 \cdot 8.0^2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot (1 + 0.6) = \\
&= 1720.3 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (10.84)
\end{aligned}$$



Joonis 10.19. Jätkuvtala ajutine koormus teises avas

Teise silde koormamisel tekkinud toemomendid arvutame valemitega (10.49) ja (10.50). Nendes esinevad koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on juba leitud (vt avaldised (10.83) ja (10.84)). Saame

$$X_{22} = -\frac{6A_3^f k_3' - 6B_3^f}{l_3 (k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1966.1 \cdot 3.5 - 1720.3}{8 \cdot (3.5 \cdot 3.5 - 1)} = -57.344 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.85)$$

$$X_{32} = -\frac{6B_3^f k_3 - 6A_3^f}{l_3 (k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1720.3 \cdot 3.5 - 1966.1}{8 \cdot (3.5 \cdot 3.5 - 1)} = -45.056 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.86)$$

siin toemomentide X_{i2} esimene indeks i näitab toe numbrit, teine indeks 2 näitab, et koormus on teises sildes.

Toemomendi X_{12} saame vasakpoolse fookussuhte k_2 (10.81), (10.42) abil

$$X_{12} = -\frac{X_{22}}{k_2} = -\frac{-57.344}{2.0} = 28.672 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.87)$$

Toemomendi X_{42} pole vaja parempoolse fookussuhtega arvutada, sest tugi 4 on liikuv liigendtugi (3.2), milles moment on null $X_{42} = 0.0$.

Leitud toemomendid kanname joonisele 10.19.

Paindemomendi ja põikjõu epüüri (joonis 10.19) löigetes b ja c leiame järgmiste avaldis- tega:

$$M_k = M_k^0 + X_{i-1} \cdot \xi'_k + X_i \cdot \xi_k \quad (10.88)$$

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{\Delta M}{\Delta x} = Q_k^0 + \frac{M_{\text{paremal}} - M_{\text{vasakul}}}{l} \quad (10.89)$$

kus ξ_k ja ξ'_k on ristlõike k mõõduta kaugused vasakust ja paremast toest (vt joonis 10.3 lk 254). Põikjõu Q_k ja $\Delta M/\Delta x$ kohta on selgitus joonisel 1.17 (vt lk 47). Leiame:

$$\begin{aligned} M_b &= M_b^0 + X_{22} \cdot \xi'_b + X_{32} \cdot \xi_b = \\ &= 102.40 - 57.344 \cdot 0.8 - 45.06 \cdot 0.2 = 47.514 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_c &= M_c^0 + X_{22} \cdot \xi'_c + X_{32} \cdot \xi_c = \\ &= 115.20 - 57.344 \cdot 0.4 - 45.06 \cdot 0.6 = 65.229 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (10.90)$$

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{-57.44 - 28.672}{8} = -10.75 \text{ kN} \\ Q_{21} &= Q_{12} = -10.75 \text{ kN} \\ Q_{2b} &= \frac{47.514 - (-57.44)}{1.6} = 65.54 \text{ kN} \\ Q_{b2} &= Q_{2b} = 65.54 \text{ kN} \\ Q_{bc} &= \frac{65.229 - 47.514}{3.2} = 5.54 \text{ kN} \\ Q_{cb} &= Q_{bc} = 5.54 \text{ kN} \\ Q_{c3} &= \frac{-45.06 - 65.229}{3.2} = -34.46 \text{ kN} \\ Q_{3c} &= Q_{c3} = -34.46 \text{ kN} \\ Q_{34} &= \frac{0.0 - (-45.06)}{6} = 7.51 \\ Q_{43} &= Q_{34} = 7.51 \text{ kN} \end{aligned} \quad (10.91)$$

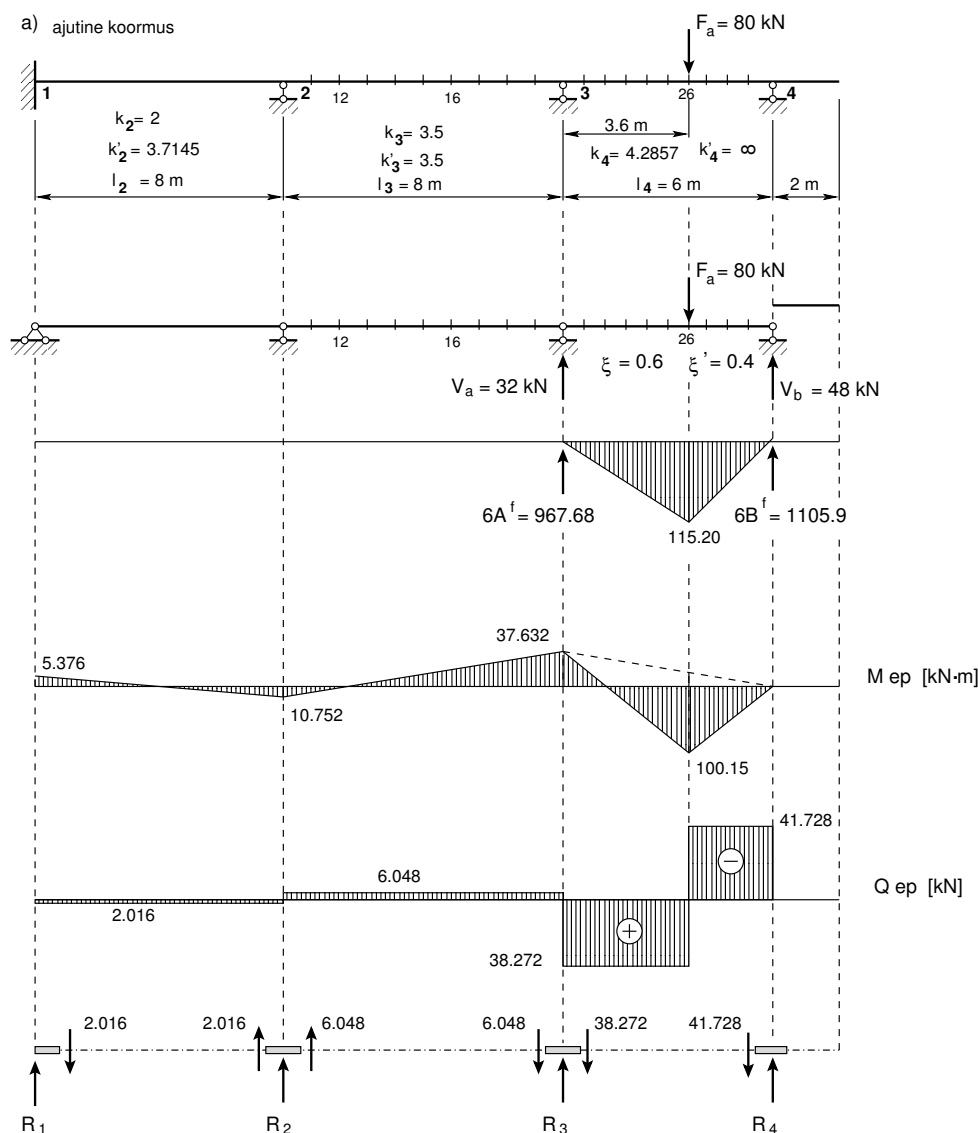
Jätkuvtala vertikaalsed toereaktsioonid R_i (vt joonis 10.19) leiame põikjõu epüüri abil:

$$\begin{aligned} R_1 &= -10.75 \text{ kN} \\ R_2 &= 10.75 + 65.54 = 76.29 \text{ kN} \\ R_3 &= 34.46 + 7.51 = 41.97 \text{ kN} \\ R_4 &= -7.51 \text{ kN} \end{aligned} \quad (10.92)$$

Staatilise kontrolliga kontrollime jätkuvtala tasakaalu:

$$\Sigma Z = 0; \quad \Sigma Z = 60.0 + 40.0 + 10.75 - 76.29 - 41.97 + 7.51 = 0 \quad (10.93)$$

Järgnevalt vaatleme jätkuvtala (joonis 10.20), kus kolmas sille on koormatud ajutise koormusega. Sille on koormatud jõuga F_a .



Joonis 10.20. Jätkuvtala ajutine koormus kolmandas avas

Koormusliikmete $6A_4^f$, $6B_4^f$ arvutamisel kasutame avaldisi (10.15) ja (10.16), mis on toodud ka tabelis 10.1. Saame:

$$6A_4^f = F_a l_4^2 \cdot \xi_a \cdot \xi'_a (1 + \xi'_a) = 80 \cdot 6.0^2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot (1 + 0.4) = 967.68 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (10.94)$$

$$6B_4^f = F_a l_4^2 \cdot \xi_a \cdot \xi'_a (1 + \xi_a) = 80 \cdot 6.0^2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot (1 + 0.6) = 1105.9 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (10.95)$$

Kolmanda silde koormamisel tekkinud vasakpoolse toemomendi arvutame valemiga (10.51), sest selle ava parempoolne fookussuhe on lõpmatus ($k'_4 = \infty$). Parempoolne toemoment on null ($X_{33} = 0$). Koormusliige $6A_4^f$ on juba leitud (vt avaldis (10.94)). Leiame:

$$X_{33} = -\frac{6A_4^f}{l_4 \cdot k_4} = -\frac{967.68}{6 \cdot 4.2857} = -37.632 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.96)$$

siin toemomentide X_{i2} esimene indeks i näitab toe numbrit, teine indeks 3 näitab, et koormus on kolmandas sildes.

Toemomendid X_{23} ja X_{13} saame vasakpoolse fookussuhte k_2 (10.81) abil

$$X_{23} = -\frac{X_{33}}{k_3} = -\frac{-37.632}{3.5} = 10.752 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.97)$$

$$X_{13} = -\frac{X_{23}}{k_2} = -\frac{10.752}{2.0} = -5.376 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.98)$$

Leitud toemomendid kanname joonisele 10.20.

Paindemomendi ja põikjõu epüüri (joonis 10.20) lõikes 26 leiame järgmiste avaldistega:

$$M_{26} = M_{26}^0 + X_3 \cdot \xi'_{26} + X_4 \cdot \xi_{26} \quad (10.99)$$

$$Q_k = \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{M_{\text{paremal}} - M_{\text{vasakul}}}{l} \quad (10.100)$$

kus ξ_{26} ja ξ'_{26} on ristlõike 26 mõõduta kaugused vasakust ja paremast toest (vt joonis 10.3 lk 254). Põikjõu Q_k ja $\Delta M/\Delta x$ kohta on selgitus joonisel 1.32 (vt lk 46). Saame

$$M_{26} = M_{26}^0 + X_{33} \cdot \xi'_{26} = 115.20 - 37.632 \cdot 0.4 = 100.15 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10.101)$$

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{10.752 - (-5.376)}{8.0} = 2.016 \text{ kN} \\ Q_{21} &= Q_{12} = 2.016 \text{ kN} \\ Q_{23} &= \frac{-37.632 - 10.752}{8.0} = -6.048 \text{ kN} \\ Q_{32} &= Q_{23} = -6.048 \text{ kN} \\ Q_{326} &= \frac{100.15 - (-37.632)}{3.6} = 38.273 \text{ kN} \\ Q_{263} &= Q_{326} = 38.273 \text{ kN} \\ Q_{264} &= \frac{0.0 - 100.15}{2.4} = -41.279 \text{ kN} \\ Q_{426} &= Q_{264} = -41.279 \text{ kN} \end{aligned} \quad (10.102)$$

Jätkuvtala vertikaalsed toereaktsioonid R_i (vt joonis 10.20) leiame põikjõu epüüri abil:

$$\begin{aligned} R_1 &= 2.016 \text{ kN} \\ R_2 &= -2.016 - 6.048 = -8.0640 \text{ kN} \\ R_3 &= 6.048 + 38.272 = 44.320 \text{ kN} \\ R_4 &= 41.278 \text{ kN} \end{aligned} \quad (10.103)$$

Staatilise kontrolliga kontrollime jätkuvtala tasakaalu:

$$\Sigma Z = 0; \quad \Sigma Z = 80 - 2.016 + 8.0640 - 44.320 - 41.728 = 0 \quad (10.104)$$

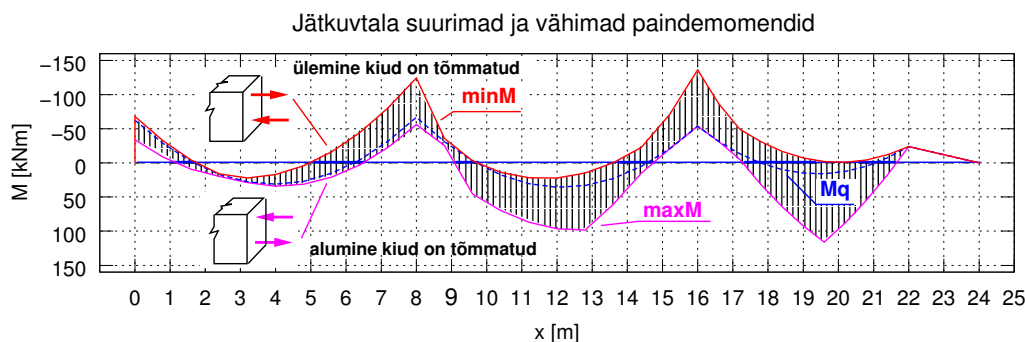
Tehtud arvutusi saab kontrollida arvutiprogrammiga *jatalaNBA.m*⁵ lk 734.

⁵ ./octaveProgrammide/jatalaNBA.Kommentaariid.pdf

Järgnevates tabelites on programmiga *jtalaNBA.m* arvutatud sisejõud alalisest koormusest („Sisejõud talas jaotatud koormusest”), sisejõud ajutisest koormusest kolmandas sildes („Sisejõud talas jõust Fa”) ja sisejõud ajutisest koormusest teises sildes („Sisejõud talas jõududest Fb ja Fc”). Nendes tabelites toodud paindemomendi väärtuste põhjal on koostatud suurimate ja vähimate paindemomentide tabel („Suurimad ja vähimad paindemomendid”).

=====				17	12.00	1.650	35.667
Sisejõud talas jaotatud koormusest				18	12.80	-7.950	33.147
=====				19	13.60	-17.550	22.947
Jrk	x	Q	M	20	14.40	-27.150	5.067
-----				21	15.20	-36.750	-20.493
1	0.00	47.450	-62.533	22	16.00	-46.350	-53.733
2	0.80	37.850	-28.413	23	16.00	40.956	-53.733
3	1.60	28.250	-1.973	24	16.60	33.756	-31.320
4	2.40	18.650	16.787	25	17.20	26.556	-13.227
5	3.20	9.050	27.867	26	17.80	19.356	0.547
6	4.00	-0.550	31.267	27	18.40	12.156	10.000
7	4.80	-10.150	26.987	28	19.00	4.956	15.133
8	5.60	-19.750	15.027	29	19.60	-2.244	15.947
9	6.40	-29.350	-4.613	30	20.20	-9.444	12.440
10	7.20	-38.950	-31.933	31	20.80	-16.644	4.613
11	8.00	-48.550	-66.933	32	21.40	-23.844	-7.533
12	8.00	49.650	-66.933	33	22.00	-31.044	-24.000
13	8.80	40.050	-31.053	34	22.00	24.000	-24.000
14	9.60	30.450	-2.853	35	24.00	0.000	0.000
15	10.40	20.850	17.667	-----			
16	11.20	11.250	30.507	-----			

				14	9.60	-6.048	1.075
				15	10.40	-6.048	-3.763
=====				16	11.20	-6.048	-8.602
Sisejõud talas jõust Fa				17	12.00	-6.048	-13.440
=====				18	12.80	-6.048	-18.278
Jrk	x	Q	M	19	13.60	-6.048	-23.117
-----				20	14.40	-6.048	-27.955
1	0.00	2.016	-5.376	21	15.20	-6.048	-32.794
2	0.80	2.016	-3.763	22	16.00	-6.048	-37.632
3	1.60	2.016	-2.150	23	16.00	38.272	-37.632
4	2.40	2.016	-0.538	24	16.60	38.272	-14.669
5	3.20	2.016	1.075	25	17.20	38.272	8.294
6	4.00	2.016	2.688	26	17.80	38.272	31.258
7	4.80	2.016	4.301	27	18.40	38.272	54.221
8	5.60	2.016	5.914	28	19.00	38.272	77.184
9	6.40	2.016	7.526	29	19.60	38.272	100.147
10	7.20	2.016	9.139	30	19.60	-41.728	100.147
11	8.00	2.016	10.752	31	20.20	-41.728	75.110
12	8.00	-6.048	10.752	32	20.80	-41.728	50.074
13	8.80	-6.048	5.914				



Joonis 10.21. Jätkuvtala suurimad ja vähimad paindemomendid

33	21.40	-41.728	25.037	14	9.60	65.536	47.514
34	22.00	-41.728	0.000	15	9.60	5.536	47.514
35	22.00	0.000	0.000	16	10.40	5.536	51.942
36	24.00	0.000	0.000	17	11.20	5.536	56.371
-----				18	12.00	5.536	60.800
=====				19	12.80	5.536	65.229
Sisejõud talas jõududest F _b ja F _c				20	12.80	-34.464	65.229
=====				21	13.60	-34.464	37.658
Jrk	x	Q	M	22	14.40	-34.464	10.086
-----				23	15.20	-34.464	-17.485
1	0.00	-10.752	28.672	24	16.00	-34.464	-45.056
2	0.80	-10.752	20.070	25	16.00	7.509	-45.056
3	1.60	-10.752	11.469	26	16.60	7.509	-40.550
4	2.40	-10.752	2.867	27	17.20	7.509	-36.045
5	3.20	-10.752	-5.734	28	17.80	7.509	-31.539
6	4.00	-10.752	-14.336	29	18.40	7.509	-27.034
7	4.80	-10.752	-22.938	30	19.00	7.509	-22.528
8	5.60	-10.752	-31.539	31	19.60	7.509	-18.022
9	6.40	-10.752	-40.141	32	20.20	7.509	-13.517
10	7.20	-10.752	-48.742	33	20.80	7.509	-9.011
11	8.00	-10.752	-57.344	34	21.40	7.509	-4.506
12	8.00	65.536	-57.344	35	22.00	7.509	-0.000
13	8.80	65.536	-4.915	36	22.00	0.000	0.000
-----				37	24.00	0.000	0.000
=====				-----			

Suurimate ja vähimate paindemomentide tabelis („Suurimad ja vähimad paindemomendid”) on alalise koormuse paindemomentidele M_q lisatud või lisamata jäetud paindemomendid ajutisest koormusest F_a ja F_b , F_c .

Tabeli „Suurimad ja vähimad paindemomendid” andmete põhjal on koostatud suurimate ja vähimate paindemomentide epüür (joonis 10.21). Epüüril miinusemärgi puhul on tõmmatud tala ülemised kiud ja plussmärgi puhul tala alumised kiud. Tala mõnes ristlõikes on võimalik, et tõmmatud on nii ülemised kiud kui ka alumised kiud.

Suurimad ja vähimad paindemomendid

Jrk	x	Mq	Mmax	Min
1	0.00	-62.53	-33.86	-67.91
2	0.80	-28.41	-8.34	-32.18
3	1.60	-1.97	9.50	-4.12
4	2.40	16.79	19.65	16.25
5	3.20	27.87	28.94	22.13
6	4.00	31.27	33.95	16.93
7	4.80	26.99	31.29	4.05
8	5.60	15.03	20.94	-16.51
9	6.40	-4.61	2.91	-44.75
10	7.20	-31.93	-22.79	-80.68
11	8.00	-66.93	-56.18	-124.28
12	8.80	-31.05	-25.14	-35.97
13	9.60	-2.85	45.74	-2.85
14	10.40	17.67	69.61	13.90
15	11.20	30.51	86.88	21.91
16	12.00	35.67	96.47	22.23
17	12.80	33.15	98.38	14.87
18	13.60	22.95	60.60	-0.17
19	14.40	5.07	15.15	-22.89
20	15.20	-20.49	-20.49	-70.77
21	16.00	-53.73	-53.73	-136.42
22	16.60	-31.32	-31.32	-86.54
23	17.20	-13.23	-4.93	-49.27
24	17.80	0.55	31.80	-30.99
25	18.40	10.00	64.22	-17.03
26	19.00	15.13	92.32	-7.39
27	19.60	15.95	116.09	-2.08
28	20.20	12.44	87.55	-1.08
29	20.80	4.61	54.69	-4.40
30	21.40	-7.53	17.50	-12.04
31	22.00	-24.00	-24.00	-24.00
32	24.00	0.00	0.00	0.00

11. Deformatsioonimeetod

Loeng 1¹: Kinnitusmomendid. Deformatsioonimeetodi võrrandid. Loeng 2²: Sisejõudude epüürid. Näide 11.1. Loeng 3³: Näide. Arvutiprogramm lk 308.

Arvutusskeeme, kus sisejõudude leidmiseks ei piisa tasakaaluvõrranditest, nimetatakse staatikaga määramatuteks. Sisejõudude jaotus staatiliselt määramatus varrassüsteemis sõltub süsteemi elementide (varraste) elastsetest omadustest. Sisejõudude määramiseks valitakse põhiskeem, kus näidatakse põhiskeemi muutujad. *Jõumeetodi* puhul olid põhiskeemi muutujateks lisatundmatud (sisejõud kindlates ristlõigetes). Nende lisatundmatute leidmiseks koostati pidevustingimused. *Deformatsioonimeetodi* puhul on põhiskeemi muutujateks sõlmede pöörded, siirded ja varraste pöörded. *Geomeetriliselt määratud põhiskeemi sõltumatute muutujate arvu nimetatakse geomeetrilise määramatuse astmeks*. Põhiskeemi sõltumatud muutujad leitakse nende sõlmede ja varraste kohta koostatud tasakaaluvõrranditest.

Eelmise sajandi 20-ndatel aastatel arendas Asger Skovgaard Ostenfeld⁴ deformatsioonimeetodi staatikaga määramatute raamide arvutamiseks. Deformatsioonimeetodit arendas edasi Ludwig Mann⁵ ruumiliste raamide arvutamiseks. L. Mann võttis kasutusele *pöördenurgameetodi* (sks *Drehwinkelverfahren*), kus tundmatuteks on *jäikade sõlmede pöörded* ja *varraste pöörded*. Pöördenurgameetodina käsitletakse deformatsioonimeetodit õpikus [Rää75]. Hiljem arendasid deformatsioonimeetodit Hardy Crossi ja Gaspar Kani. Crossi ja Kani nime all tuntud meetod on iteratiivne meetod ja on seoses arvutustehnika arenguga vananenud.

Järgnevas peatükis vaatleme deformatsioonimeetodit, kus tundmatuteks on jäikade sõlmede pöörded ja siirded. Vaatleme ka pöördenurgameetodit, kus tundmatuteks on jäikade sõlmede ja varraste pöörded. Erinevalt õpikus [Rää75] käsitletust võtame kasutusele *teise märgikokkuleppe* (1.19).

Teise märgikokkuleppe puhul

- jäikade sõlmede pöörded φ_j, φ_k (joonis 11.2) on positiivsed kellaosutite liikumissuunale vastassuunas
- varda pöörde (sks *der Stabdrehwinkel*) ϑ_{jk} (joonis 11.2) positiivne suund on kellaosutite liikumissuunas [KM04] lk 199, [ME09].

¹./videod/defMetLoeng1.html

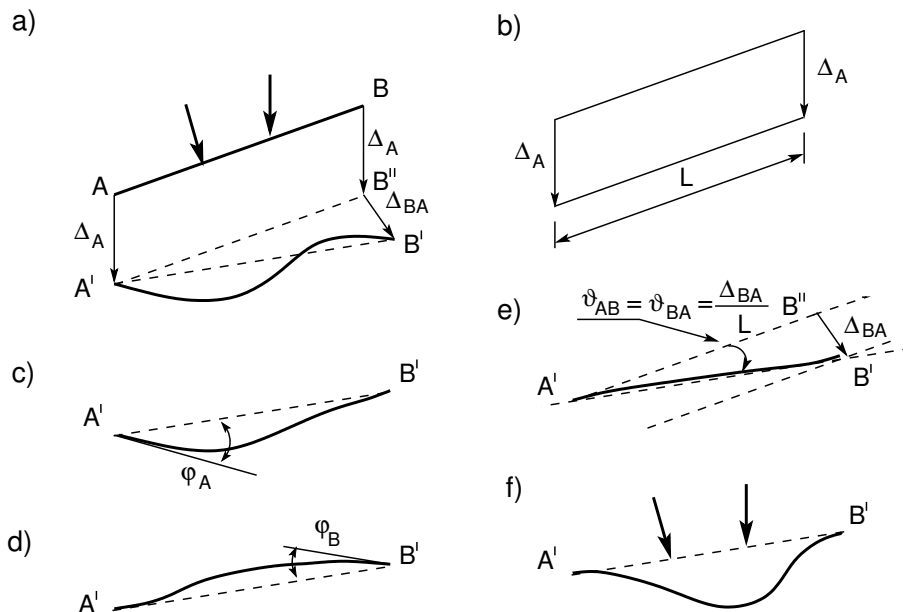
²./videod/defMetLoeng2.html

³./videod/defMetLoeng3.html

⁴Asger Skovgaard Ostenfeld, taani ehitusinsener ja Kopenhaageni (Lyngby) Tehnikaülikooli professor, 1866–1931.

⁵Ludwig Mann, mehaanika ja ehituskonstruksioonide staatika professor Breslau Tehnikakõrgkoolis, 1871–1959.

Vaatleme konstruktsiooni varrast AB (joonis 11.1 a)). Sellele mõjuvate jõudude mõjul liigub varras uude asendisse $A'B'$. Varda asendi $A'B'$ saame järgmiste sõltumatute



Joonis 11.1. Varda deformatsioon

liikumiste tulemusena:

- varda mõlemad otsad siirduvad ühe ja sama suuruse võrra Δ_A (joonis 11.1 b))
- ühe varda otsa siire on risti varda teljega, näiteks varda otsa B'' siirdumine punkti B' (joonis 11.1 e)). Varda otsa siire on Δ_{BA} ja pööre ϑ_{AB}
- varda otsa A' pööre nurga φ_A võrra. Varda elastse joone kuju on joonisel (joonis 11.1 c))
- varda otsa B' pööre nurga φ_B võrra. Varda elastse joone kuju on joonisel (joonis 11.1 d))
- varda telje punktide siirded. Varda otsad ei siirdu ega pöördu (joonis 11.1 f)).

Paindemomendid M_{jk} ja M_{kj} arvutatakse varda otste ristlõigetel koormusest tekkiva paindemomendi $M_{jk}^{(p)}$, $M_{kj}^{(p)}$ ja sõlmede j , k pöörete φ_j , φ_k ning varda pöördest ϑ_{jk} tekkivate paindemomentide summeerimisega.

Varda mõlemad otsad j ja k on jäigalt kinnitatud:

$$\begin{aligned} M_{jk} &= 4 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_j + 2 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_k + 6 \cdot i_{jk} \cdot \vartheta_{jk} + M_{jk}^{(p)} \\ M_{kj} &= 2 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_j + 4 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_k + 6 \cdot i_{jk} \cdot \vartheta_{jk} + M_{kj}^{(p)} \end{aligned} \quad (11.1)$$

siin i_{jk} on varda j - k jäikus

$$i_{jk} = \frac{EI}{l_{jk}} \quad (11.2)$$

kus EI on ristlõikejäikus,

l_{jk} – varda pikkus.

Siin ei ole summeerimist indekseid j ja k järgi.

Kinnitussmomentid on toodud tabelites H.1, 11.2 (II märgikokkulepe).

Varda ots j on jäigalt kinnitatud, otsas k on liigend:

$$\begin{aligned} M_{jk} &= 3 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_j + 3 \cdot i_{jk} \cdot \vartheta_{jk} + M_{jk}^{(p)} \\ M_{kj} &= 0 \end{aligned} \tag{11.3}$$

Siin ei ole summeerimist indekseid j ja k järgi.

Kinnitussmomentid on toodud tabelites H.1, 11.2

Varda jäikade sõlmede pöörded τ_j ja τ_k avaldame pöörete φ_j , φ_k ning ϑ_{jk} kaudu (vt joonis 11.2):

$$\begin{bmatrix} \tau_j \\ \tau_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_j \\ \varphi_k \\ \vartheta_{jk} \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

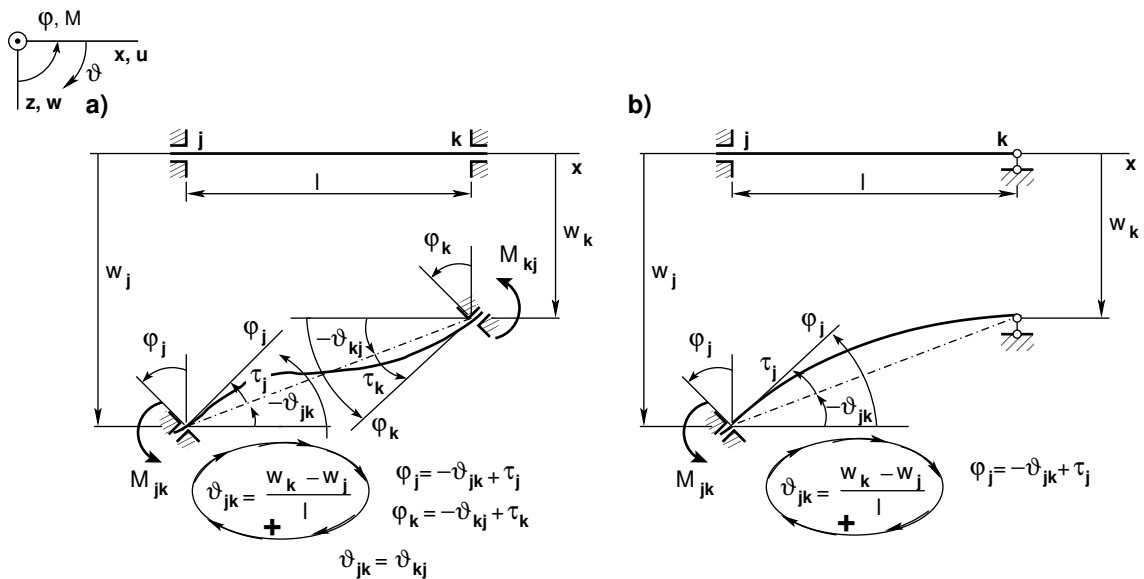
kus varda j - k pöördenurk ϑ_{jk} avaldub varda otste siirete w_k ja w_j kaudu:

$$\vartheta_{jk} = \frac{w_k - w_j}{l} \tag{11.5}$$

11.1 Kinnitussmoment sõlme ja varda pöördest

Kinnitussmomentide leidmiseks lähtume tala diferentsiaalvõrrandist (11.6)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{EI} \tag{11.6}$$



Joonis 11.2. Momentide ja varraste pöördesuunad

Sõlmede ja varraste pööretest tekkinud kinnitusemomentide leidmiseks integreerime homogeenset diferentsiaalvõrrandit ($q/EI = 0$):

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (11.7)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = C_1 \quad (11.8)$$

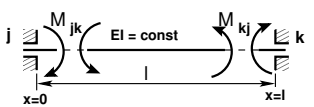
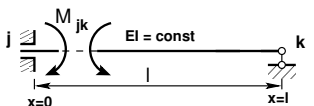
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = C_1 x + C_2 \quad (11.9)$$

$$\frac{dw}{dx} = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (11.10)$$

$$w = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (11.11)$$

Meid huvitavad **rajatingimused** on toodud tabelis 11.1. Neli konstanti ($C_i, i = 1, 2, 3, 4$) määrame neljast rajatingimusest.

Tabel 11.1. Rajatingimused sõlme ja varda pööretest

Skeem	$x = 0$	$x = l$
	$w = w_j$	$w = w_k$
	$\frac{dw}{dx} = -\varphi_j$	$\frac{dw}{dx} = -\varphi_k$
	$w = w_j$	$w = w_k$
	$\frac{dw}{dx} = -\varphi_j$	$M_{kj} = 0$

11.1.1 Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras

Tala, mille mõlemad otsad on jäigalt kinnitatud, rajatingimused on tabelis 11.1. Homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendeid (11.7) – (11.11) kasutades saame konstantide ($C_i, i = 1, 2, 3, 4$) määramiseks järgmised võrrandid:

$$w_j = C_4 \quad (11.12)$$

$$-\varphi_j = C_3 \quad (11.13)$$

$$w_k = C_1 \frac{l^3}{6} + C_2 \frac{l^2}{2} + C_3 l + C_4 \quad (11.14)$$

$$-\varphi_k = C_1 \frac{l^2}{2} + C_2 l + C_3 \quad (11.15)$$

Võrrandid (11.12) – (11.15) esitame võrrandisüsteemina

$$\begin{bmatrix} \frac{l^3}{6} & \frac{l^2}{2} & l & 1 \\ \frac{l^2}{2} & l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_k \\ -\varphi_k \\ -\varphi_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

Võrrandisüsteemi saame teisendada kujule

$$\begin{bmatrix} -\frac{l^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_k - w_j + \frac{l}{2}\varphi_j + \frac{l}{2}\varphi_k \\ 6\frac{w_k - w_j}{l} + 4\varphi_j + 2\varphi_k \\ -\varphi_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

Nüüd avaldame konstandid C_i

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{l^2} \left(\frac{w_k - w_j}{l} + \frac{1}{2}\varphi_j + \frac{1}{2}\varphi_k \right) \\ \frac{1}{l} \left(6\frac{w_k - w_j}{l} + 4\varphi_j + 2\varphi_k \right) \\ -\varphi_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

Arvestades seost (11.5), saame

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{l^2} \left(\vartheta_{jk} + \frac{1}{2}\varphi_j + \frac{1}{2}\varphi_k \right) \\ \frac{1}{l} \left(6\vartheta_{jk} + 4\varphi_j + 2\varphi_k \right) \\ -\varphi_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

Paindemomendi avaldisest (1.53) saame

$$\begin{aligned} M_y(x) &= -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -EI_y (C_1 x + C_2) = \\ &= \frac{12EI_y}{l^2} \left(\vartheta_{jk} + \frac{1}{2}\varphi_j + \frac{1}{2}\varphi_k \right) x - \frac{EI_y}{l} (6\vartheta_{jk} + 4\varphi_j + 2\varphi_k) \end{aligned} \quad (11.20)$$

Kinnitusemomendi M_{jk} avaldamisel kohal $x = 0$ arvestame **II märgikokkuleppega**

$$M_{jk} = -M_y(x=0) = \frac{EI_y}{l} (4\varphi_j + 2\varphi_k + 6\vartheta_{jk}) \quad (11.21)$$

$$M_{kj} = M_y(x=l) = \frac{EI_y}{l} (2\varphi_j + 4\varphi_k + 6\vartheta_{jk}) \quad (11.22)$$

Tabelis 11.2 „Kinnitusemomentid ja põikjõud. **II märgikokkulepe**” on need momentid esitatud kinnitusemomentidena M_{jk} ja M_{kj} .

11.1.2 Ühest otsast jäigalt kinnitatud varras

Tala, mille vasak ots on jäigalt kinnitatud ja paremal pool otsas on liigend, rajatingimused on toodud tabelis 11.1. Homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendeid (11.7) – (11.11) kasutades saame konstantide ($C_i, i = 1, 2, 3, 4$) määramiseks järgmised võrrandid

$$w_j = C_4 \quad (11.23)$$

$$-\varphi_j = C_3 \quad (11.24)$$

$$w_k = C_1 \frac{l^3}{6} + C_2 \frac{l^2}{2} + C_3 l + C_4 \quad (11.25)$$

$$M_{kj} = EI_y (C_1 l + C_2) = 0 \quad (11.26)$$

Võrrandid (11.23) – (11.26) esitame võrrandisüsteemina

$$\begin{bmatrix} \frac{l^3}{6} & \frac{l^2}{2} & l & 1 \\ l & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_k \\ 0 \\ -\varphi_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

Võrrandisüsteemi saame teisendada kujule

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \frac{w_j - w_k}{l^3} + 3 \frac{1}{l^2} \varphi_j \\ -3 \frac{w_j - w_k}{l^2} - 3 \frac{1}{l} \varphi_j \\ -\varphi_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.28)$$

Konstandid C_i on järgmised

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \frac{w_j - w_k}{l^3} + 3 \frac{1}{l^2} \varphi_j \\ -3 \frac{w_j - w_k}{l^2} - 3 \frac{1}{l} \varphi_j \\ -\varphi_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.29)$$

Arvestades seost (11.5), saame

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \frac{\vartheta_{jk}}{l^2} + 3 \frac{1}{l^2} \varphi_j \\ -3 \frac{\vartheta_{jk}}{l} - 3 \frac{1}{l} \varphi_j \\ -\varphi_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.30)$$

Paindemomendi avaldisest (1.53) saame

$$\begin{aligned} M_y(x) &= -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -EI_y (C_1 x + C_2) = \\ &= -\frac{3EI_y}{l^2} (\vartheta_{jk} + \varphi_j) x + \frac{3EI_y}{l} (\vartheta_{jk} + \varphi_j) \end{aligned} \quad (11.31)$$

Kinnitusemomendi M_{jk} avaldamisel kohal $x = 0$ arvestame **II märgikokkuleppega**

$$M_{jk} = -M_y(x = 0) = \frac{EI_y}{l} (3\varphi_j + 3\vartheta_{jk}) \quad (11.32)$$

$$M_{kj} = M_y(x = l) = 0 \quad (11.33)$$

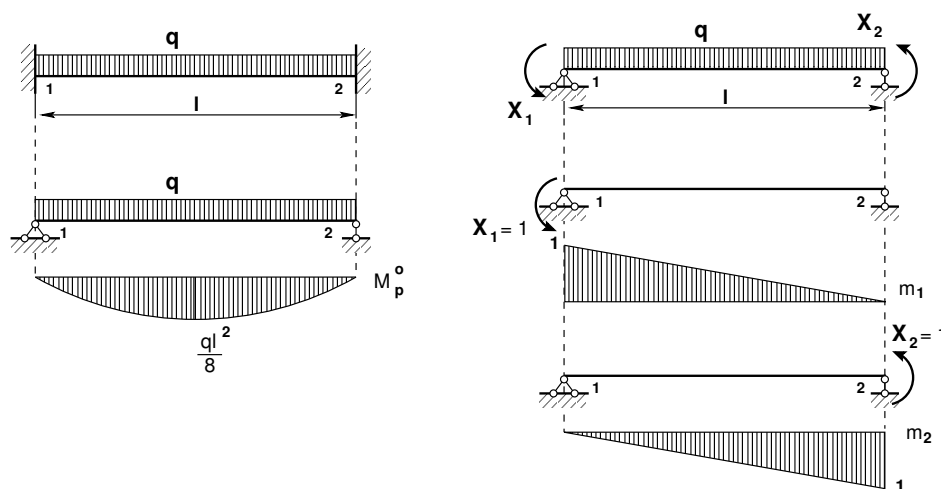
Tabelis 11.2 „Kinnitusemomendid ja põikjõud. **II märgikokkulepe**” on need momendid esitatud kinnitusemomentidena M_{jk} ja M_{kj} .

11.2 Varda kinnitusemomendid koormustest

Varda kinnitusemomentide arvutamiseks koormustest kasutame jõumeetodit.

11.2.1 Ühtlane koormus q . Jäigad sõlmed

Joonisel 11.3 on mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala, mis on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega q . Tala ristlõikejäikus EI on konstantne. Valime põhiskeemi, kus tundmatuteks on toemomendid X_1 ja X_2 .



Joonis 11.3. Ühtlane koormus q . Jäigad sõlmed

Arvutame jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.34)$$

kordajad:

$$EI\delta_{11} = \int_0^l m_1 m_1 ds = \frac{l}{3}$$

$$\begin{aligned}
 EI\delta_{22} &= \int_0^l m_2 m_2 ds = \frac{l}{3} \\
 EI\delta_{12} &= \int_0^l m_1 m_2 ds = -\frac{l}{6} \\
 EI\delta_{21} &= EI\delta_{12} \\
 EI\Delta_{1p} &= \int_0^l m_1 M_p^0 ds = -\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \frac{1}{2} = -\frac{ql^3}{24} \\
 EI\Delta_{2p} &= \int_0^l m_2 M_p^0 ds = \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24}
 \end{aligned} \tag{11.35}$$

Võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{3} & -\frac{l}{6} \\ -\frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ql^3}{24} \\ -\frac{ql^3}{24} \end{bmatrix} \tag{11.36}$$

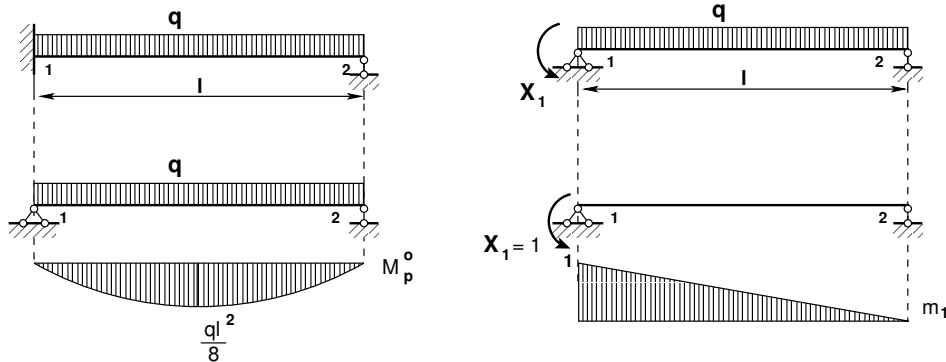
lahend on

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} \tag{11.37}$$

Kinnitusmomendi kanname tabelitesse [H.2](#), [11.2](#).

11.2.2 Ühtlane koormus q . Jäik sõlm vasakul

Joonisel [11.4](#) on vasakust otsast jäigalt kinnitatud tala, mis on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega q . Tala ristlõikejäikus EI on konstantne. Valime põhiskeemi, kus tundmatuks on toemoment X_1 .



Joonis 11.4. Ühtlane koormus q . Jäik sõlm vasakul

Jõumeetodi kanoonilise võrrandi

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0 \tag{11.38}$$

kordajad on

$$EI\delta_{11} = \int_0^l m_1 m_1 ds = \frac{l}{3} \tag{11.39}$$

$$EI\Delta_{1p} = \int_0^l m_1 M_p^0 ds = -\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \frac{1}{2} = -\frac{ql^3}{24} \tag{11.40}$$

Võrrandi

$$\frac{l}{3}X_1 = \frac{ql^3}{24} \quad (11.41)$$

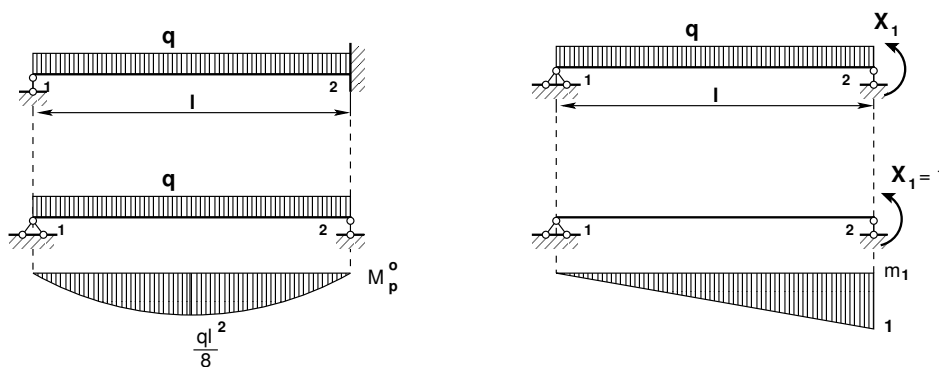
lahend on

$$X_1 = \frac{ql^2}{8} \quad (11.42)$$

Kinnituumomendi kanname tabelitesse [H.3](#), [11.2](#).

11.2.3 Ühtlane koormus q . Jäik sõlm paremal

Joonisel [11.5](#) on paremast otsast jäigalt kinnitatud tala, mis on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega q . Tala ristlõikejäikus EI on konstantne. Valime põhiskeemi, kus tundmatuks on toemoment X_1 .



Joonis 11.5. Ühtlane koormus q . Jäik sõlm paremal

Jõumeetodi kanoonilise võrrandi

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 \quad (11.43)$$

kordajad on

$$EI\delta_{11} = \int_0^l m_1 m_1 ds = \frac{l}{3} \quad (11.44)$$

$$EI\Delta_{1p} = \int_0^l m_1 M_p^o ds = \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24} \quad (11.45)$$

Võrrandi

$$\frac{l}{3}X_1 = -\frac{ql^3}{24} \quad (11.46)$$

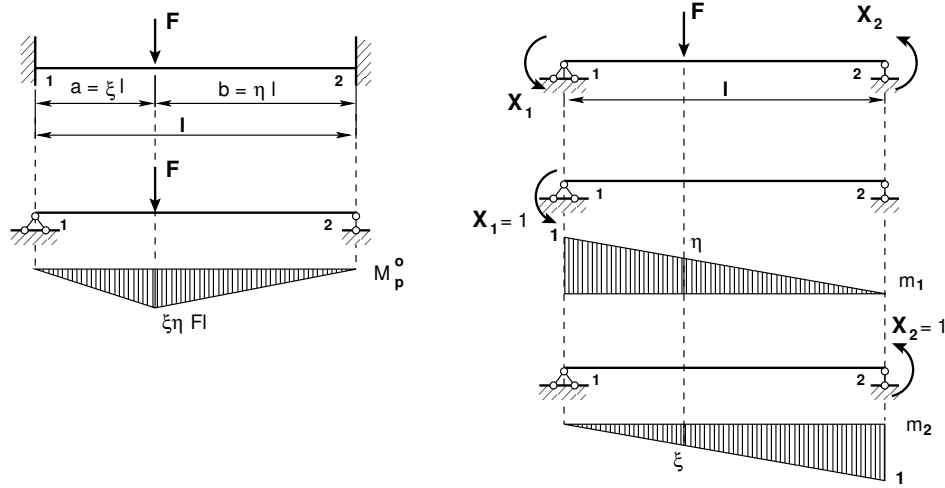
lahend on

$$X_1 = -\frac{ql^2}{8} \quad (11.47)$$

Kinnituumomendi kanname tabelitesse [H.4](#), [11.2](#).

11.2.4 Koondatud jõud F . Jäigad sõlmed

Joonisel 11.6 on mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala, mis on koormatud jõuga F . Tala ristlõikejäikus EI on konstantne. Valime põhiskeemi, kus tundmatuteks on toemomendid X_1 ja X_2 .



Joonis 11.6. Koondatud jõud F . Jäigad sõlmed

Arvutame jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.48)$$

kordajad:

$$\begin{aligned} EI\delta_{11} &= \int_0^l m_1 m_1 ds = \frac{l}{3} \\ EI\delta_{22} &= \int_0^l m_2 m_2 ds = \frac{l}{3} \\ EI\delta_{12} &= \int_0^l m_1 m_2 ds = -\frac{l}{6} \\ EI\delta_{21} &= EI\delta_{12} \\ EI\Delta_{1p} &= \int_0^l m_1 M_p^o ds = \\ &= -\frac{\xi l}{6} \left(0 \cdot 1 + 4 \frac{\xi \eta F l}{2} \frac{1+\eta}{2} + \xi \eta F l \eta \right) - \eta l \frac{\xi \eta F l}{3} \eta = \\ &= -\frac{1}{3} \xi \eta F l^2 \left(\frac{1}{2} \xi + \eta \underbrace{(\xi + \eta)}_{=1} \right) \end{aligned} \quad (11.49)$$

$$\begin{aligned}
 EI\Delta_{2p} &= \int_0^l m_2 M_p^o ds = \\
 &= \xi l \frac{\xi \eta Fl}{3} \xi + \frac{\eta l}{6} \left(\xi \eta Fl \xi + 4 \frac{\xi \eta Fl}{2} \frac{1+\xi}{2} + 0 \cdot 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \xi \eta Fl^2 \left(\underbrace{\xi \left(\xi + \frac{1}{2} \eta \right)}_{=1} + \frac{1}{2} \eta \right)
 \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{3} & -\frac{l}{6} \\ -\frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \xi \eta Fl^2 \left(\frac{1}{2} \xi + \eta \right) \\ -\frac{1}{3} \xi \eta Fl^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \eta \right) \end{bmatrix} \tag{11.50}$$

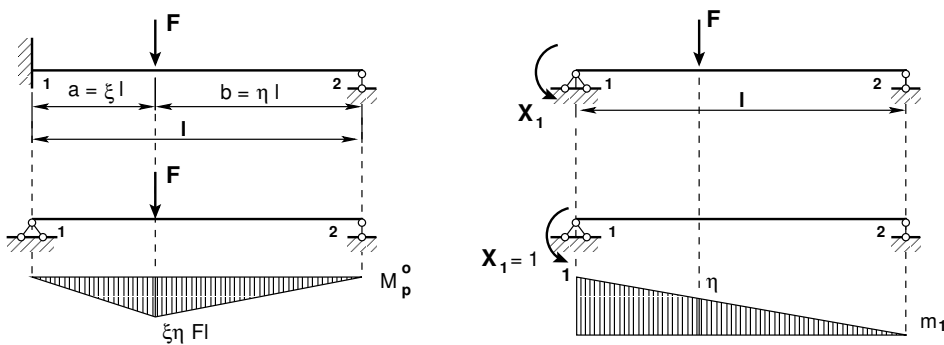
lahend on

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \xi \eta^2 Fl \\
 X_2 &= -\xi^2 \eta Fl
 \end{aligned} \tag{11.51}$$

Kinnitusedmomendi kanname tabelitesse [H.2](#), [11.2](#).

11.2.5 Koondatud jõud F. Jäik sõlm vasakul

Joonisel [11.7](#) on vasakult otsast jäigalt kinnitatud tala, mis on koormatud jõuga F . Tala ristlõikejäikus EI on konstantne. Valime põhiskeemi, kus tundmatuks on toemoment X_1 .



Joonis 11.7. Koondatud jõud F. Jäik sõlm vasakul

Jõumeetodi kanoonilise võrrandi

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0 \tag{11.52}$$

kordajad:

$$\begin{aligned}
 EI\delta_{11} &= \int_0^l m_1 m_1 ds = \frac{l}{3} \\
 EI\Delta_{1p} &= \int_0^l m_1 M_p^o ds = \\
 &= -\frac{\xi l}{6} \left(0 \cdot 1 + 4 \frac{\xi \eta Fl}{2} \frac{1+\eta}{2} + \xi \eta Fl \eta \right) - \eta l \frac{\xi \eta Fl}{3} \eta = \\
 &= -\frac{1}{3} \xi \eta Fl^2 \left(\frac{1}{2} \xi + \eta \underbrace{(\xi + \eta)}_{=1} \right)
 \end{aligned} \tag{11.53}$$

Võrrandis

$$\frac{l}{3} X_1 = \frac{1}{3} \xi \eta Fl^2 \left(\frac{1}{2} \xi + \eta \right) \tag{11.54}$$

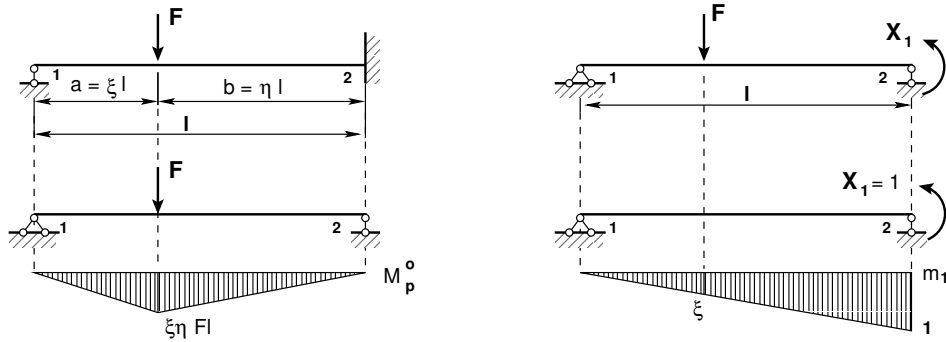
teeme asenduse $\xi = 1 - \eta$. Nüüd saame lahendiks

$$X_1 = \frac{1}{2} \eta (1 - \eta^2) Fl \tag{11.55}$$

Kinnitusemomendi kanname tabelitesse [H.3](#), [11.2](#).

11.2.6 Koondatud jõud F . Jäik sõlm paremal

Joonisel [11.8](#) on paremalt otsast jäigalt kinnitatud tala, mis on koormatud jõuga F . Tala ristlõikejäikus EI on konstantne. Valime põhiskeemi, kus tundmatuks on toemoment X_1 .



Joonis 11.8. Koondatud jõud F . Jäik sõlm paremal

Jõumeetodi kanoonilise võrrandi

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0 \tag{11.56}$$

kordajad:

$$\begin{aligned}
 EI\delta_{11} &= \int_0^l m_1 m_1 ds = \frac{l}{3} \\
 EI\Delta_{1p} &= \int_0^l m_2 M_p^o ds = \\
 &= \xi l \frac{\xi \eta Fl}{3} \xi + \frac{\eta l}{6} \left(\xi \eta Fl \xi + 4 \frac{\xi \eta Fl}{2} \frac{1+\xi}{2} + 0 \cdot 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \xi \eta Fl^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \eta \right)
 \end{aligned} \tag{11.57}$$

Võrrandis

$$\frac{l}{3}X_1 = -\frac{1}{3}\xi\eta Fl^2 \left(\xi \underbrace{\left(\xi + \frac{1}{2}\eta \right)}_{=1} + \frac{1}{2}\eta \right) \quad (11.58)$$

teeme asenduse $\eta = 1 - \xi$. Nüüd saame lahendiks

$$X_1 = -\frac{1}{2}\xi (1 - \xi^2) Fl \quad (11.59)$$

Kinnitusmomendi kanname tabelitesse [H.4](#), [11.2](#).

11.3 Geomeetrilise määramatuse aste

Sirgetest varrastest moodustatud raami *geomeetrilise määramatuse aste*, st lisatundmatute arv, leitakse valemiga

$$n = n_s + n_v \quad (11.60)$$

kus n_s on arvutusskeemi vabade jääkade sõlmede (need ei ole toesõlmed) arv, n_v – varraste pööret takistavate sidemete arv (üksteisest sõltumatud, pööret takistavad sidemed) **varrasahelas**. Geomeetrilise määramatuse aste (11.60) võrdub **jääkade sõlmede** (ilma toesõlmedeta) arvuga, kui raami vabadusaste n_v on null või negatiivne.

Raamide varrasahela pöörded leitakse poolusplaanist (joonis [3.12](#)). Näites [3.1](#) (lk [89](#)) on leitud raami varrasahela varraste pöördeturkade vahelised seosed.

11.4 Geomeetriliselt määratud põhiskeem

Geomeetriliselt määratud **põhiskeem** saadakse lisasidemete asetamisega arvutusskeemile. Näiteks asetatakse raami jääka sõlme, mis ei ole toesõlm, pööret takistav side. See side ei takista sõlme siiret, st on nn ujuvside. Raami varraste pöördumist takistav side pannakse **varrasahela** ühele vardale.

11.5 Deformatsioonimeetodi võrrandid

Lähtume teisest **märgikokkuleppest**, kus

- jääkade sõlmede pöörded φ_j, φ_k (joonis [11.2](#)) on positiivsed vastupidi kellaosutite liikumissuunale
- varda pöörde (sks *der Stabdrehwinkel*) ϑ_{jk} (joonis [11.2](#)) positiivne suund on kellaosutite liikumissuunas ⁶ [[KM04](#)] lk 199, [[ME09](#)].

⁶http://www.uni-siegen.de/fb10/subdomains/baustatik/lehre/bst/unterlagen_unvertieft/wgv/wgv_stabendkraftgroessen_062009.pdf

Ühe vabadusastmega varrasahelas (joonis 11.10) avaldame varraste pöörded ϑ_{jk} ühe varda pöörde kaudu (näit varda $a-c$ pööre ϑ_{a-c} kaudu). Nimetame selle varda pööret *baasvarda pöördeks*.

Võrrandisüsteemis tundmatu pöörde ψ_1 positiivse suuna võtame kellaosutite liikumissuunas (joonis 11.10). Varrasahela varraste pöörded avaldame baasvarda pöörde $\vartheta_{ac} = \psi_1$ kaudu:

$$\vartheta_{ac} = \psi_1, \quad \vartheta_{ab} = -0.5\vartheta_{ac} = -0.5\psi_1, \quad \vartheta_{bd} = \vartheta_{ac} = \psi_1 \quad (11.61)$$

Virtuaaltöö δW koosneb sisejõudude virtuaaltööst δW_s , välisjõudude virtuaaltööst δW_v ja rajajõudude virtuaaltööst δW_r . Energia teoreemi põhjal (vt 7.1) on nende tööde summa võrdne nulliga:

$$\delta W = \delta W_s + \delta W_v + \delta W_r = 0 \quad (11.62)$$

Piirdume juhuga, kui rajajõudude virtuaaltöö $\delta W_r = 0$, st puudub toe vajumine:

$$\delta \mathbf{v}_i^T \mathbf{s}_i + \delta \mathbf{v}_i^T \mathbf{S}_i = 0 \quad (11.63)$$

siin \mathbf{v}_i on geomeetriliselt määratud põhiskeemi (joonis 11.9) sidemete siirded φ_j ja pöörded ϑ_k . Näiteks

$$\mathbf{v}_i^T = [\varphi_a \quad \varphi_b \quad \psi_1] \quad (11.64)$$

\mathbf{s}_i on sidemes i mõjuv reaktsioonimoment. Näiteks

$$\mathbf{s}_i = r_{ia}\varphi_a + r_{ib}\varphi_b + r_{i1}\psi_1 \quad (11.65)$$

\mathbf{S}_i on sidemes i mõjuv moment väliskoormusesest. Näiteks

$$\mathbf{S}_i = r_{ip} \quad (11.66)$$

Avaldis (11.63) kehtib ka sel juhul, kui $\delta \mathbf{v}_i \neq 0$. Seega,

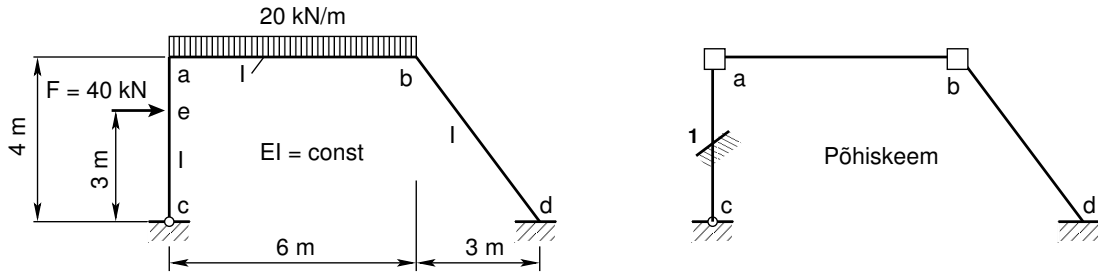
$$\mathbf{s}_i + \mathbf{S}_i = 0 \quad (11.67)$$

Võrrand (11.67) lahtikirjutatult on

$$\begin{array}{l} (a) \quad r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + \dots + r_{a1}\psi_1 + \dots + r_{ap} = 0 \\ (b) \quad r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + \dots + r_{b1}\psi_1 + \dots + r_{bp} = 0 \\ (i) \quad \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = 0 \\ (1) \quad r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + \dots + r_{11}\psi_1 + \dots + r_{1p} = 0 \\ (2) \quad \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = 0 \end{array} \quad (11.68)$$

Vaatleme joonisel 11.11 sideme (a) reaktsioonijõudude virtuaaltööd δW (a) virtuaalpöördel $\delta\varphi_a$

$$\delta W(a) = (r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{a1}\psi_1 + r_{ap}) \delta\varphi_a = 0 \quad (11.69)$$



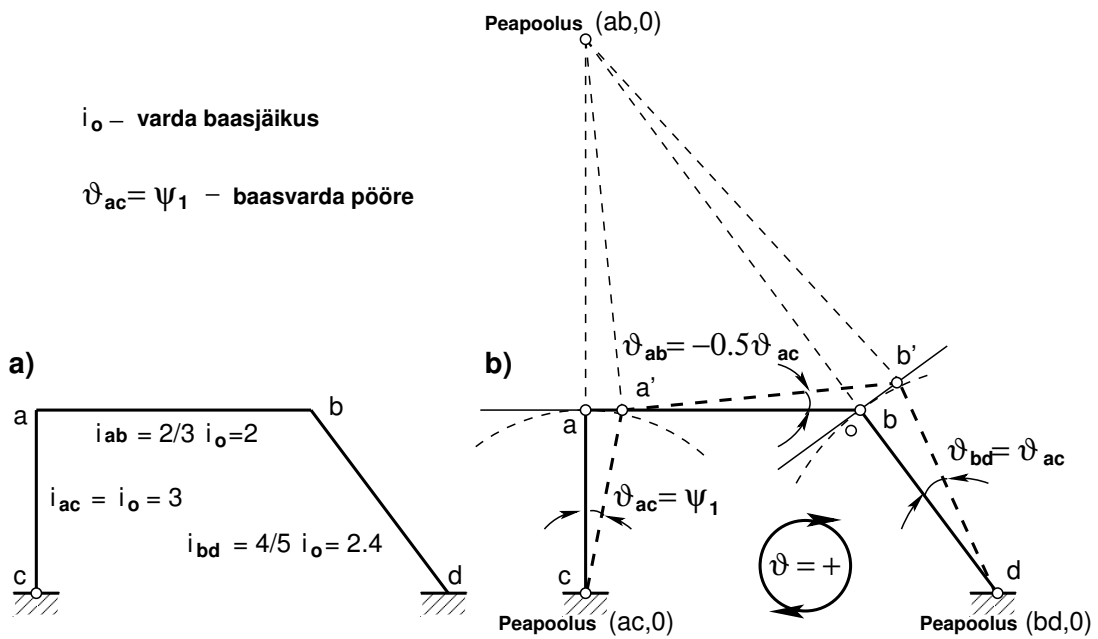
Joonis 11.9. Kaldpostiga raami põhiskeem

Võtame raami varda $a-c$ jäikuse i_{ac} baasjäikuseks i_0 , mille kaudu avaldame teiste varraste jäikused. Raami varda baaspöördenurgaks ϑ_0 võtame varda pöördenurga $\vartheta_{ac} = \psi_1$, mille kaudu avaldame teiste varraste pöördenurgad varrasahelas:

$$\begin{aligned} i_{ac} &= i_0 = 3.0 \\ \vartheta_{ac} &= \vartheta_0 = \psi_1 \end{aligned} \tag{11.70}$$

Arvestades seoseid (11.70) ja joonist 11.11, leiame võrrandi (11.69) kordajate r_{aa} , r_{ab} , r_{a1} ja r_{ap} väärtused:

$$\begin{aligned} r_{aa} &= M_{ac}^a + M_{ab}^a = 3i_{ac} + 4i_{ab} = 3 \cdot 3.0 + 4 \cdot 2.0 = 17.000 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ r_{ab} &= M_{ab}^b = 2i_{ab} = 3 \cdot 2.0 = 4.000 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \tag{11.71}$$



Joonis 11.10. Kaldpostiga raami varrasahel

$$\begin{aligned}
r_{a1} &= M_{ac}^1 + M_{ab}^1 = 3i_{ac}\vartheta_{ac} + 6i_{ab}\vartheta_{ab} = \\
&= 3 \cdot 3.0 \cdot 1.0 - 6.0 \cdot 2.0 \cdot 0.5 = 3.000 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
r_{ap} &= M_{ac}^o + M_{ab}^o = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi^2)Fh + \frac{ql^2}{12} = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot 0.75(1-0.75^2)40 \cdot 4.0 + \frac{20.0 \cdot 6^2}{12} = 33.750 \text{ kN}\cdot\text{m}
\end{aligned} \tag{11.72}$$

Sideme (b) reaktsioonijõudude (joonis 11.11) virtuaaltöö δW (b) virtuaalpöördel $\delta\varphi_b$

$$\delta W(b) = (r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{b1}\psi_1 + r_{bp})\delta\varphi_b = 0 \tag{11.73}$$

Arvestades seoseid (11.70) ja joonist 11.11, leiame võrrandi (11.69) kordajate r_{ba} , r_{bb} , r_{b1} ja r_{bp} väärtused:

$$\begin{aligned}
r_{ba} &= M_{ba}^a = 2i_{ab} = 3 \cdot 2.0 = r_{ab} = 4.000 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
r_{bb} &= M_{ba}^a + M_{ad}^b = 4i_{ab} + 4i_{ad} = \\
&= 4 \cdot 2.0 + 4 \cdot 2.4 = 17.600 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
r_{b1} &= M_{ba}^1 + M_{ad}^1 = 6i_{ab}\vartheta_{ab} + 6i_{ad}\vartheta_{ad} = \\
&= -6 \cdot 2.0 \cdot 0.5 + 6.0 \cdot 2.4 \cdot 1.0 = 8.400 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
r_{bp} &= M_{ba}^o + M_{bd}^o = -\frac{20.0 \cdot 6^2}{12} + 0 = -60.000 \text{ kN}\cdot\text{m}
\end{aligned} \tag{11.74}$$

Sideme (1) reaktsioonijõudude (joonis 11.11) virtuaaltöö δW (1) virtuaalpöördel $\delta\psi_1$

$$\delta W(1) = (r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + r_{11}\psi_1 + r_{1p})\delta\psi_1 = 0 \tag{11.75}$$

Arvestades seoseid (11.70) ja joonist 11.11, leiame võrrandi (11.69) kordajate r_{1a} , r_{1b} , r_{11} ja r_{1p} väärtused:

$$\begin{aligned}
r_{1a} &= M_{ac}^a\vartheta_{ac} + M_{ab}^a\vartheta_{ab} = 3i_{ac}\vartheta_{ac} + 6i_{ab}\vartheta_{ab} = \\
&= 3 \cdot 3.0 \cdot 1.0 - 6.0 \cdot 2.0 \cdot 0.5 = 3.000 \text{ kN}\cdot\text{m}
\end{aligned} \tag{11.76}$$

$$\begin{aligned}
r_{1b} &= M_{ba}^b\vartheta_{ab} + M_{ad}^b\vartheta_{ad} = 6i_{ab}\vartheta_{ab} + 6i_{ad}\vartheta_{ad} = \\
&= -6 \cdot 2.0 \cdot 0.5 + 6.0 \cdot 2.4 \cdot 1.0 = 8.400 \text{ kN}\cdot\text{m}
\end{aligned} \tag{11.77}$$

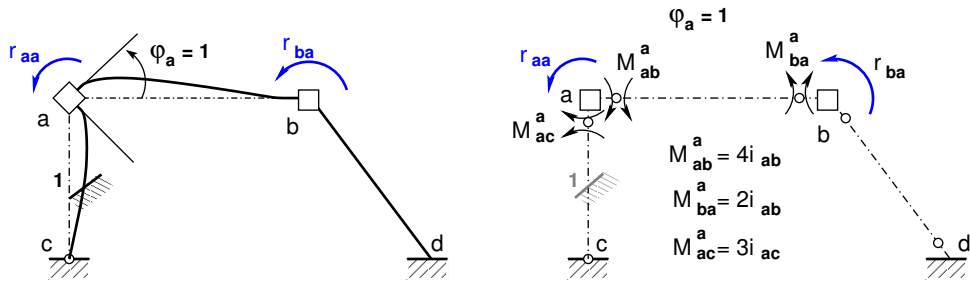
$$\begin{aligned}
r_{11} &= 3i_{ac}\vartheta_{ac}^2 + 12i_{ab}\vartheta_{ab}^2 + 12i_{bd}\vartheta_{bd}^2 = \\
&= 3 \cdot 3.0 \cdot 1.0^2 + 12 \cdot 2.0 \cdot (-0.5)^2 + 12 \cdot 2.4 \cdot 1.0^2 = 43.800 \text{ kN}\cdot\text{m}
\end{aligned} \tag{11.78}$$

$$\begin{aligned}
r_{1p} &= (M_{ac}^o + M_{ca}^o - Fa)\vartheta_{ac} + (M_{ab}^o + M_{ba}^o - \frac{1}{2}ql^2)\vartheta_{ab} = \\
&= \left(-\frac{1}{2}\xi(1-\xi^2)Fh + 0 - Fa\right)\vartheta_{ac} + \left(\frac{ql^2}{12} - \frac{ql^2}{12} - \frac{1}{2}ql^2\right)\vartheta_{ab} = \\
&= \left(-\frac{1}{2} \cdot 0.75(1-0.75^2)40 \cdot 4.0 + 0 - 40.0 \cdot 3.0\right) \cdot 1.0 + \\
&\quad + \left(\frac{20.0 \cdot 6^2}{12} - \frac{20.0 \cdot 6^2}{12} - \frac{1}{2}20 \cdot 6.0^2\right) \cdot (-0.5) = 33.750 \text{ kN}\cdot\text{m}
\end{aligned} \tag{11.79}$$

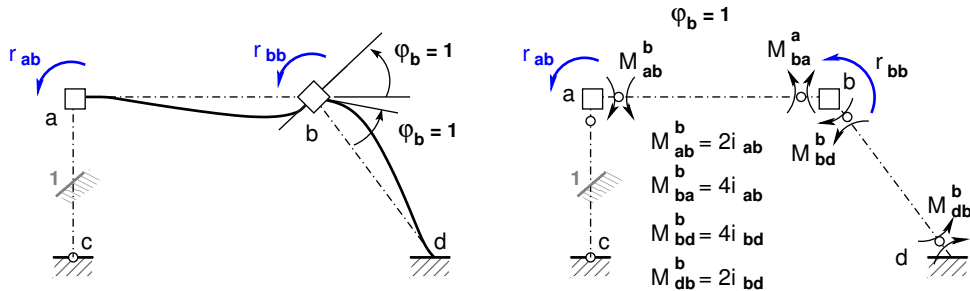
Võrrandisüsteemi kordaja r_{11} leidmiseks kasutasime avaldist

$$r_{11} = \sum_{jk=1}^n 3i_{jk}\vartheta_{jk}^2 + \sum_{jk=1}^m 12i_{jk}\vartheta_{jk}^2 \tag{11.80}$$

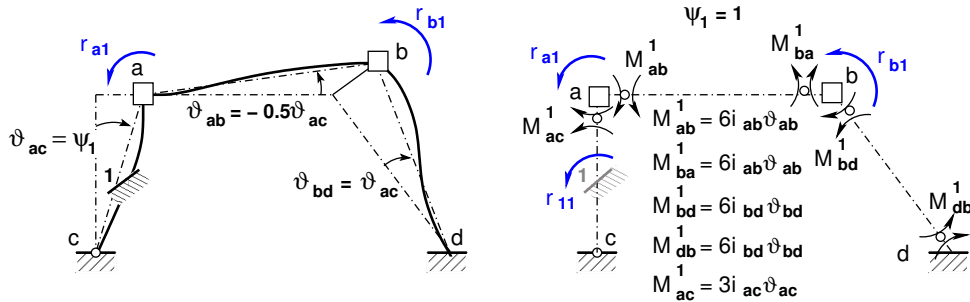
kus n on pöördunud varraste arv, mille ühes otsas on liigend (kordaja on 3),
 m – varraste arv, mille mõlemad otsad on jäigalt kinnitatud (kordaja on 12).
 Avaldises 11.80 varraste pöördenurgad ϑ_{jk} avaldatakse baasvarda pöördenurga (vt avaldist (11.61)) kaudu.



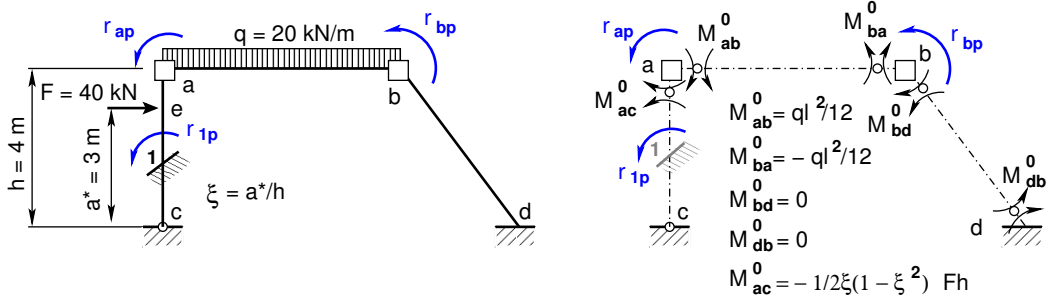
(a) Sõlme a pööre



(b) Sõlme b pööre



(c) Varda a-c pööre



(d) Nullolukord

Joonis 11.11. Kaldpostiga raami koormusolukorrad

Võrrandisüsteemi kordaja r_{1p} leiame avaldisest

$$r_{1p} = \sum_{jk}^n (M_{jk}^0 + M_{kj}^0 + S_{kj}) \vartheta_{jk} \quad (11.81)$$

siin on n koormatud (jõuga F , koormusega q) ja pöördunud varraste arv,

M_{jk}^0 ja M_{kj}^0 – varda j – k otstes olevad kontaktjõud,

ϑ_{jk} – varraste pöördenurgad, mis avaldatakse *baasvarda pöördenurga* (vt avaldi (11.61)) kaudu,

S_{kj} – staatiline moment, mis on vardale j – k mõjuva koormuse (jõud F , koormus q) moment *varda peapooluse* (joonis 11.10) suhtes. *Staatilise momendi positiivne suund on vastupidine kellaosutite liikumissuunale.*

Joonisel 11.9 näidatud raami deformatsioonimeetodi kanooniline võrrandisüsteem on toodud avaldisega:

$$\begin{bmatrix} r_{aa} & r_{ab} & r_{a1} \\ r_{ba} & r_{bb} & r_{b1} \\ r_{1a} & r_{1b} & r_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \psi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{ap} \\ r_{bp} \\ r_{1p} \end{bmatrix} = 0 \quad (11.82)$$

Võrrandisüsteemi (11.82) esimese võrrandi kordajate arvulised väärtused on leitud avaldisega (11.71), teise võrrandi kordajate arvulised väärtused on leitud avaldisega (11.74), kolmanda võrrandi kordajate arvulised väärtused on leitud avaldistega (11.76), (11.77), (11.78) ja (11.79). Need arvulised väärtused kanname võrrandisüsteemi (11.82):

$$\begin{bmatrix} 17.000 & 4.000 & 3.000 \\ 4.000 & 17.600 & 8.400 \\ 3.000 & 8.400 & 43.800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \psi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 33.750 \\ -60.000 \\ 33.750 \end{bmatrix} = 0 \quad (11.83)$$

Võrrandisüsteemi (11.83) vabaliikmete kordajad moodustavad sümmeetrilise maatriksi. Võrrandisüsteemi (11.83) lahend (vt lisa A.10) on toodud avaldisega

$$\begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.8439 \\ 4.7665 \\ -1.4899 \end{bmatrix} \quad (11.84)$$

Koostatud võrrandisüsteemi kontrollimiseks kasutame GNU Octave'i programmi `defRaamN.m`^{7 8}.

⁷ ./octaveProgrammide/defRaamN.m

⁸ ./octaveProgrammide/defRaamN.Kommentaariid.pdf

11.6 Sisejõudude epüüride konstrueerimine

Pärast lisatundmatute φ_a , φ_b ja ψ_1 leidmist arvutatakse varda mõlemas otsas paindemomendid. Näiteks joonisel 11.9 toodud raami paindemomendid varraste otstes arvutatakse järgmiselt:

$$\begin{aligned} M_{ac} &= M_{ac}^a \varphi_a + M_{ac}^b \varphi_b + M_{ac}^1 \psi_1 + M_{ac}^o = \\ &= 3 \cdot i_{ac} \cdot \varphi_a + 0 \cdot \varphi_b + 3 \cdot i_{ac} \cdot \vartheta_{ac} \cdot \psi_1 - \frac{1}{2} \cdot 0.75 (1 - 0.75^2) \cdot 40 \cdot 4.0 = \\ &= 3 \cdot 3.0 \cdot (-2.8439) + 0 \cdot 4.7665 + 3 \cdot 3.0 \cdot 1.0 \cdot (-1.4899) - 26.250 = \\ &= -65.254 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (11.85)$$

$$\begin{aligned} M_{ab} &= M_{ab}^a \varphi_a + M_{ab}^b \varphi_b + M_{ab}^1 \psi_1 + M_{ab}^o = \\ &= 4 \cdot i_{ab} \cdot \varphi_a + 2 \cdot i_{ab} \cdot \varphi_b + 6 \cdot i_{ab} \cdot \vartheta_{ab} \cdot \psi_1 + \frac{1}{12} 20 \cdot 6.0^2 = \\ &= 4 \cdot 2.0 \cdot (-2.8439) + 2 \cdot 2.0 \cdot 4.7665 + 6 \cdot 2.0 \cdot (-0.5) \cdot (-1.4899) + 60.0 = \\ &= 65.254 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (11.86)$$

$$\begin{aligned} M_{ba} &= M_{ba}^a \varphi_a + M_{ba}^b \varphi_b + M_{ba}^1 \psi_1 + M_{ba}^o = \\ &= 2 \cdot i_{ab} \cdot \varphi_a + 4 \cdot i_{ab} \cdot \varphi_b + 6 \cdot i_{ab} \cdot \vartheta_{ab} \cdot \psi_1 - \frac{1}{12} 20 \cdot 6.0^2 = \\ &= 2 \cdot 2.0 \cdot (-2.8439) + 4 \cdot 2.0 \cdot 4.7665 + 6 \cdot 2.0 \cdot (-0.5) \cdot (-1.4899) - 60.0 = \\ &= -24.304 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (11.87)$$

$$\begin{aligned} M_{bd} &= M_{bd}^a \varphi_a + M_{bd}^b \varphi_b + M_{bd}^1 \psi_1 + M_{bd}^o = \\ &= 0 \cdot \varphi_a + 4 \cdot i_{bd} \cdot \varphi_b + 6 \cdot i_{bd} \cdot \vartheta_{bd} \cdot \psi_1 + 0.0 = \\ &= 0 \cdot (-2.8439) + 4 \cdot 2.4 \cdot 4.7665 + 6 \cdot 2.4 \cdot 1.0 \cdot (-1.4899) + 0.0 = \\ &= 24.304 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (11.88)$$

$$\begin{aligned} M_{db} &= M_{db}^a \varphi_a + M_{db}^b \varphi_b + M_{db}^1 \psi_1 + M_{db}^o = \\ &= 0 \cdot \varphi_a + 2 \cdot i_{bd} \cdot \varphi_b + 6 \cdot i_{bd} \cdot \vartheta_{bd} \cdot \psi_1 + 0.0 = \\ &= 0 \cdot (-2.8439) + 2 \cdot 2.4 \cdot 4.7665 + 6 \cdot 2.4 \cdot 1.0 \cdot (-1.4899) + 0.0 = \\ &= 1.4246 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (11.89)$$

Leitud paindemomendid varraste otstes on vastavuses teise märgikokkuleppega. Esmalt märgime varraste otstes tõmmatud kiud (vt joonis 9.7) ja sellele järgnevalt koostame paindemomentide epüüri M (joonis 9.7).

Varda $a-c$ momendi M_e^f ja varda $a-b$ keskel oleva M_f^f leiame järgmiselt (vt joonis 9.8 ja avaldis (9.32)):

$$\begin{aligned} M_e^f &= \xi_e \cdot M_{ac} + \eta_e \cdot M_{ca} = 0.75 \cdot (-65.254) + 0.25 \cdot 0.0 = \\ &= -48.941 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_f^f &= \xi_f \cdot M_{ba} + \eta_f \cdot M_{ab} = 0.5 \cdot (-24.304) + 0.5 \cdot (-65.254) = \\ &= -44.779 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (11.90)$$

Liidame varda $a-c$ momendid M_e^o ja M_e^f ning varda $a-b$ keskel oleva momendi momendid M_f^o ja M_f^f (vt joonis 9.8):

$$M_e = M_e^o + M_e^f = 30.0 - 48.941 = -18.941 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (11.91)$$

$$M_f = M_f^o + M_f^f = 90.0 - 44.779 = 45.221 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (11.92)$$

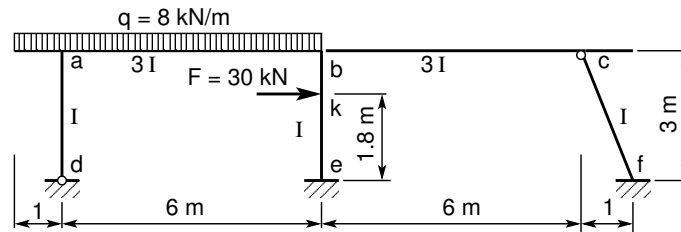
Põikjõu ja normaaljõudude epüüri koostamine on toodud näites 9.1 lk 223.

Staatiline kontroll (joonis 9.10) on samas näites tehtud avaldistega (9.40), (9.41), (9.42).

11.7 Deformatsioonimeetodiga arvutamise näited

11.7.1 Raami arvutamine pöördenurgameetodiga. Näide 11.1

Näide 11.1 Leiame joonisel 11.12 näidatud kolmekordselt geomeetriselt määramatu raami sisejõudude jaotuse deformatsioonimeetodiga. Raami riivide ristlõike jäikus EI_r on kolm korda suurem kui postidel $EI_p = 3 \cdot EI_r$. Raami vertikaalne koormus $q = 8 \text{ kN/m}$ ja horisontaalne koormus keskmisele postile $F = 30 \text{ kN}$.

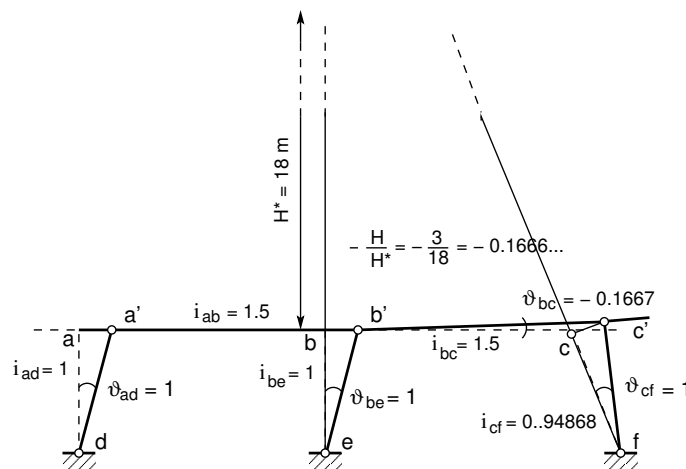


Joonis 11.12. Kolmekordselt geomeetriselt määramatu raam 2

Kõnesolevas näites on kasutusel pöördenurgameetod (sks Drehwinkelverfahren) ja teine märgikokkulepe (vt jaotis lk 281). Joonisel 11.13 on näidatud vaadeldava raami varrasahel. Raami kõigi varraste pöörded ϑ_{ij} avaldame esimese varda a–d pöörde ϑ_{ad} kaudu. Varda b–c pöörde leidmisel (vt pooluste plaan ja varraste pöörded lk 89) kasutame avaldist:

$$\vartheta_{bc} = -\frac{H}{H^*} \cdot \vartheta_{ad} = -\frac{3}{18} \cdot 1 \quad (11.93)$$

Raami varraste jäikuste $i = \frac{EI}{l}$ arvutamisel võtame varda a–d jäikuse $i_{ad} = \frac{EI_{ad}}{l_{ad}}$ aluseks, st

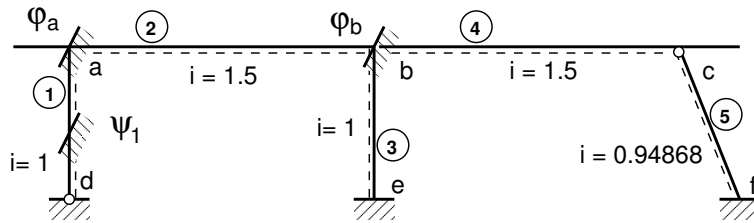


Joonis 11.13. Kolmekordselt geomeetriselt määramatu raami 2 varrasahel

baasjäikuseks. *Baasjäikusega jagame läbi kõikide varraste jäikused:*

$$\begin{aligned}
 i_o &= \frac{EI_{ad}}{l_{ad}} = \frac{1}{3} \\
 i_{ad} &= \frac{EI_{ad}}{l_{ad}} \frac{1}{i_o} = \frac{1}{3} \frac{3}{1} = 1 \\
 i_{ab} &= \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} \frac{1}{i_o} = \frac{3}{6} \frac{3}{1} = 1.5 \\
 i_{bc} &= \frac{EI_{bc}}{l_{bc}} \frac{1}{i_o} = \frac{3}{6} \frac{3}{1} = 1.5 \\
 i_{be} &= \frac{EI_{be}}{l_{be}} \frac{1}{i_o} = \frac{1}{3} \frac{3}{1} = 1 \\
 i_{cf} &= \frac{EI_{cf}}{l_{cf}} \frac{1}{i_o} = \frac{1}{3.1623} \frac{3}{1} = 0.94868
 \end{aligned} \tag{11.94}$$

Raami geomeetriliselt määratud põhiskeem on joonisel 11.14.



Joonis 11.14. Raam 2. Geomeetriliselt määratud põhiskeem

Koostame geomeetriliselt määratud põhiskeemile vastava võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned}
 r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{a1}\psi_1 + r_{ap} &= 0 \\
 r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{b1}\psi_1 + r_{bp} &= 0 \\
 r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + r_{11}\psi_1 + r_{1p} &= 0
 \end{aligned} \tag{11.95}$$

ehk

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r}_p = 0 \tag{11.96}$$

Raami sõlme a pööramisel ühikulise nurga võrra $\varphi_a = 1$ tekkivad momendid on arvatatud tabelis 11.2 toodud valemite alusel. Tulemused on kantud joonisele 11.15(a).

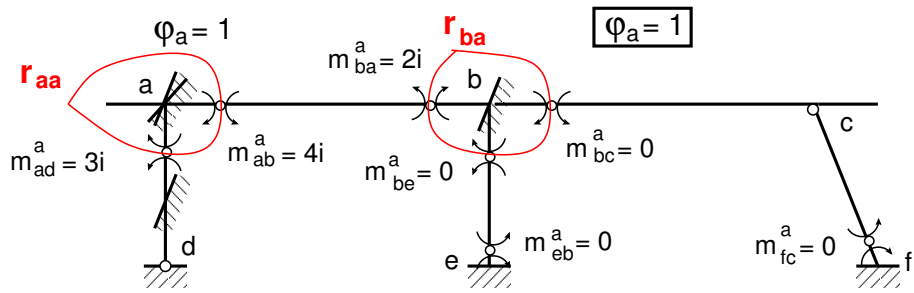
Joonisel 11.15(a) on lisatud momendiliigendid varraste jäikade sõlmede vahetusse lähedusse. Momendiliigendi mõlemale poole on lisatud varda selles ristlõikes mõjunud paindemoment. Joonisel 11.15(a) on näidatud sõlme a ühikpöördest tekkinud reaktsioonimomendid

$$\begin{aligned}
 r_{aa} &= 3i_{ad} + 4i_{ab} \\
 r_{ba} &= 2i_{ab}
 \end{aligned} \tag{11.97}$$

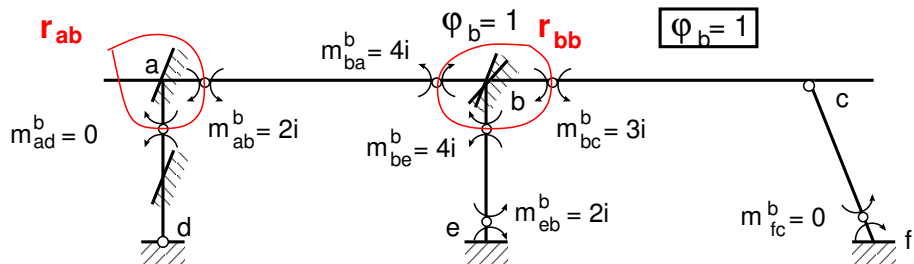
Raami sõlme b pööramisel ühikulise nurga võrra $\varphi_b = 1$ tekkivad momendid on arvatatud tabelis 11.2 toodud valemitega. Tulemused on kantud joonisele 11.15(b).

Joonisel 11.15(b) on lisatud momendiliigendid varraste jäikade sõlmede vahetusse lähedusse. Momendiliigendi mõlemale poole on lisatud varda selles ristlõikes mõjunud paindemoment. Joonisel 11.15(b) on näidatud sõlme b ühikpöördest tekkinud reaktsioonimomendid

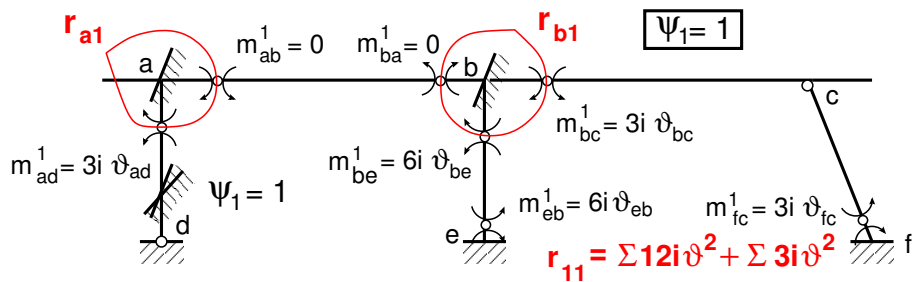
$$\begin{aligned}
 r_{bb} &= 4i_{ab} + 4i_{be} + 3i_{bc} \\
 r_{ab} &= 2i_{ab} \\
 r_{ab} &= r_{ba}
 \end{aligned} \tag{11.98}$$



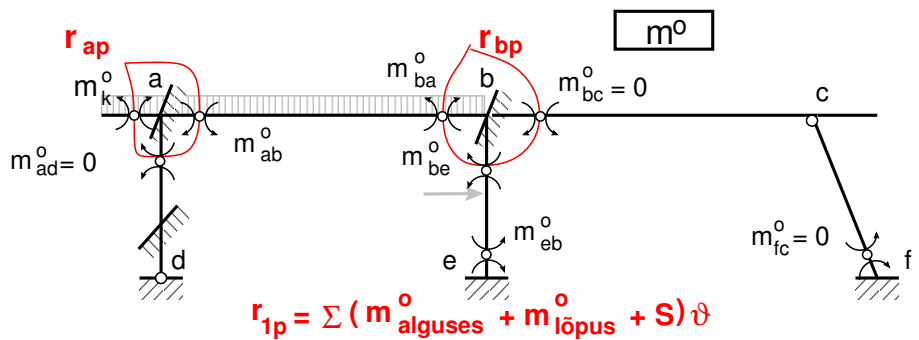
(a) Sõlme a pööre φ_a



(b) Sõlme b pööre φ_b



(c) Varda a–d pööre ψ_1



(d) Nullolukord

Joonis 11.15. Raami 2 koormusolukorrad

Raami varda a–d pöörämisel ühikulise nurga võrra $\psi_1 = 1$ tekkivad momendid on arvatatud tabelis 11.2 toodud valemitega. Tulemused on kantud joonisele 11.15(c).

Joonisel 11.15(c) on lisatud momendiliigendid varraste jäikade sõlmede vahetusse lähedusse. Momendiliigendi mõlemale poole on lisatud varda selles ristlõikes mõjunud paindemoment.

Joonisel 11.15(c) on näidatud varraste a–d, b–e, b–c ja c–f pöördest tekkinud reaktsioonimomendid

$$\begin{aligned}
 r_{a1} &= 3i_{ad}\vartheta_{ad} \\
 r_{1a} &= r_{a1} \\
 r_{b1} &= 6i_{be}\vartheta_{be} + 3i_{bc}\vartheta_{bc} \\
 r_{1b} &= r_{b1} \\
 r_{11} &= 3i_{ad}\vartheta_{ad}^2 + 12i_{be}\vartheta_{be}^2 + 3i_{bc}\vartheta_{bc}^2 + 3i_{cf}\vartheta_{cf}^2
 \end{aligned} \tag{11.99}$$

Jaotatud ja koondatud koormusest tekkivad kinnitusemomendid on arvatatud tabelis 11.2 toodud valemitega. Tulemused on kantud joonisele 11.15(d).

Joonisel 11.15(d) on lisatud momendiliigendid varraste jäikade sõlmede vahetusse lähedusse. Momendiliigendi mõlemale poole on lisatud varda selles ristlõikes mõjunud paindemoment. Joonisel 11.15(d) on näidatud koormusest tekkinud reaktsioonimomendid

$$\begin{aligned}
 r_{ap} &= M_{ab}^o + M_k^o = \frac{ql^2}{12} - \frac{ql_k^2}{2} \\
 r_{bp} &= M_{ba}^o + M_{be}^o = -\frac{ql^2}{12} - \xi^2\eta Fl \\
 r_{1p} &= (M_{eb}^o + M_{be}^o - F1.8)\vartheta_{be} = (\xi\eta^2 Fl - \xi^2\eta Fl - F1.8)\vartheta_{be}
 \end{aligned} \tag{11.100}$$

Arvutame võrrandisüsteemi (11.95) kordajad. Saame

$$\begin{bmatrix} 9.0000 & 3.0000 & 3.0000 \\ 3.0000 & 14.5000 & 5.2499 \\ 3.0000 & 5.2499 & 17.9711 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \psi_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20.000 \\ -36.960 \\ -58.320 \end{bmatrix} \tag{11.101}$$

Võrrandisüsteemi (11.101) lahend on

$$\begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.0482 \\ 2.1995 \\ 3.2785 \end{bmatrix} \tag{11.102}$$

Joonistel 11.15(a) – 11.15(c) kasutatakse järgmisi tähistusi momentide m_{ij}^k märkimiseks: indeks k kirjeldab deformeerunud olukorda ($k = a, b, 1$); i ja j tähistavad varda algust ja lõppu.

Momentide m_{ij}^k avaldised, mis on joonistel 11.15(a)– 11.15(c), kanname veergudena maatriksisse mx:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{da} \\ M_{ad} \\ \dots \\ M_{ab} \\ M_{ba} \\ \dots \\ M_{be} \\ M_{eb} \\ \dots \\ M_{bc} \\ M_{cb} \\ \dots \\ M_{cf} \\ M_{fc} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{mx} = \begin{bmatrix} m_{da}^a & m_{da}^b & m_{da}^1 \\ m_{ad}^a & m_{ad}^b & m_{ad}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{ab}^a & m_{ab}^b & m_{ab}^1 \\ m_{ba}^a & m_{ba}^b & m_{ba}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{be}^a & m_{be}^b & m_{be}^1 \\ m_{eb}^a & m_{eb}^b & m_{eb}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{bc}^a & m_{bc}^b & m_{bc}^1 \\ m_{cb}^a & m_{cb}^b & m_{cb}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{cf}^a & m_{cf}^b & m_{cf}^1 \\ m_{fc}^a & m_{fc}^b & m_{fc}^1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{varras 1 post} \\ \dots \\ \text{varras 2 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 3 post} \\ \dots \\ \text{varras 4 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 5 post} \end{array} \quad \mathbf{mp} = \begin{bmatrix} m_{da}^o \\ m_{ad}^o \\ \dots \\ m_{ab}^o \\ m_{ba}^o \\ \dots \\ m_{be}^o \\ m_{eb}^o \\ \dots \\ m_{bc}^o \\ m_{cb}^o \\ \dots \\ m_{cf}^o \\ m_{fc}^o \end{bmatrix} \tag{11.103}$$

kus

$$\mathbf{mx} = \begin{bmatrix} 0 \cdot i_{ad} & 0 \cdot i_{ad} & 0 \cdot i_{ad} \vartheta_{ad} \\ 3 \cdot i_{ad} & 0 \cdot i_{ad} & 3 \cdot i_{ad} \vartheta_{ad} \\ \dots & \dots & \dots \\ 4 \cdot i_{ab} & 2 \cdot i_{ab} & 0 \cdot i_{ab} \vartheta_{ab} \\ 2 \cdot i_{ab} & 4 \cdot i_{ab} & 0 \cdot i_{ab} \vartheta_{ab} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot i_{be} & 4 \cdot i_{be} & 6 \cdot i_{be} \vartheta_{be} \\ 0 \cdot i_{be} & 2 \cdot i_{be} & 6 \cdot i_{be} \vartheta_{be} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot i_{bc} & 3 \cdot i_{bc} & 3 \cdot i_{bc} \vartheta_{bc} \\ 0 \cdot i_{bc} & 0 \cdot i_{bc} & 0 \cdot i_{bc} \vartheta_{bc} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot i_{cf} & 0 \cdot i_{cf} & 0 \cdot i_{cf} \vartheta_{cf} \\ 0 \cdot i_{cf} & 0 \cdot i_{cf} & 3 \cdot i_{cf} \vartheta_{cf} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{varras 1 post} \\ \dots \\ \text{varras 2 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 3 post} \\ \dots \\ \text{varras 4 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 5 post} \end{array} \quad \mathbf{mp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ Mab \\ Mba \\ \dots \\ Mbe \\ Meb \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.104)$$

Arvutame \mathbf{mx} ja \mathbf{mp} numbrilised suurused, siis saame varraste otstes mõjuvad kontaktjõud \mathbf{M} võrrandist

$$\mathbf{M} = \mathbf{mx} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \psi_1 \end{bmatrix} + \mathbf{mp} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 3.00000 & 0.00000 & 3.00000 \\ 6.00000 & 3.00000 & 0.00000 \\ 3.00000 & 6.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 4.00000 & 6.00000 \\ 0.00000 & 2.00000 & 6.00000 \\ 0.00000 & 4.50000 & -0.75015 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 2.84605 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.0482 \\ 2.1995 \\ 3.2785 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ 24.00000 \\ -24.00000 \\ -12.96000 \\ 8.64000 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00000 \\ -2.30929 \\ 6.30929 \\ -22.94744 \\ 15.50887 \\ 32.70980 \\ 7.43858 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \\ 9.33064 \end{bmatrix} \quad (11.105)$$

Arvutusega saadud momendid varraste otstes (11.105) kanname joonisele 11.16 a) vastavalt II märgikokkuleppele (1.19). Joonise 11.16 a) põhjal joonestame momendi epüüri 11.16 b). Epüüri ordinaadid on tõmmatud kiu poolel. Leitud sisejõudude M kontrollimiseks kasutame GNU Octave'i programmi *defNBA.m*.

Põikjõu epüüri ordinaatide arvutamisel kasutame diferentsiaalseid (joonis 1.17).

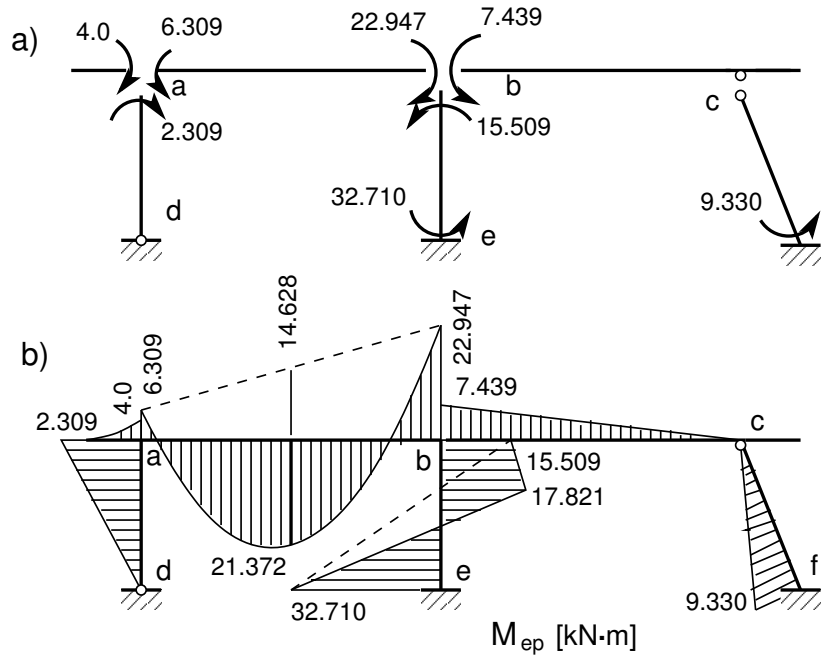
Arvutusteks kasutame GNU Octave'it kui kalkulaatorit (vt jaotis 1.16.1). Käsud võime eelnevalt valmis kirjutada tekstina⁹, siis kopeerida ja asetada GNU Octave'isse. GNU Octave'iga arvutame põikjõu epüüri ordinaadid:

```

octave:2> Qda=Qad=-2.309/3
Qda = -0.76967
octave:3> Qab=8*6/2-(22.947-6.309)/6
Qab = 21.227

```

⁹ ./octaveProgrammide/Raami_II_NjaQ.txt



Joonis 11.16. Raam 2. Momendid varraste otstes

```

octave:4> Qba=-8*6/2-(22.947-6.309)/6
Qba = -26.773
octave:5> Qeb=(17.821+32.710)/1.8
Qeb = 28.073
octave:6> Qbe=-(17.821-15.509)/1.2
Qbe = -1.9267
octave:7> Qbc=Qcb=7.439/6
Qbc = 1.2398
octave:8> lcf=sqrt(1^2+3^2)
lcf = 3.1623
octave:9> Qcf=Qfc=9.330/lcf
Qcf = 2.9504

```

Arvutatud põikjõu väärtused kanname joonisele 11.17.

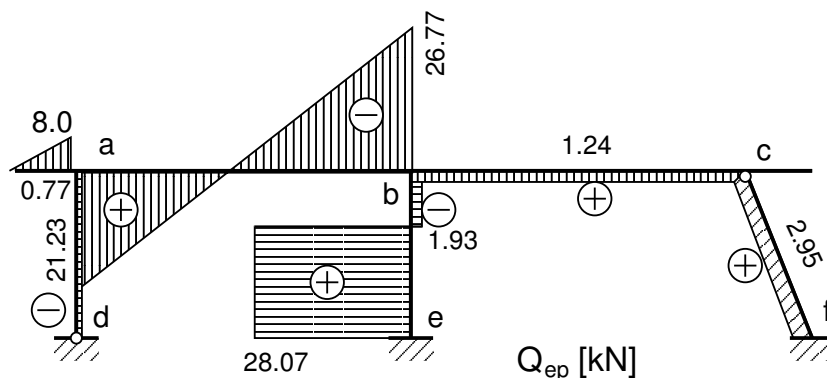
Pikijõu arvutamiseks vaatleme koordinaatteisendust (1.45). Arvestades seost $\cos \beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, võime seosed (1.45) kirjutada kujul

$$\begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (11.106)$$

Raami varraste normaaljõudude leidmiseks vaatleme raami sõlmede tasakaalu (joonis 11.18). Koostame tasakaalvõrrandid sõlmele a vertikaalteljele z ja horisontaalteljele x. Sõlmele c ja teljele t-t ja vertikaalteljele z. Sõlmele b horisontaalteljele x ja vertikaalteljele z.

Arvutusteks kasutame GNU Octave'it kui kalkulaatorit (vt jaotis 1.16.1). Käsud võime eelnevalt valmis kirjutada tekstina ¹⁰, siis kopeerida ja asetada GNU Octave'isse.

¹⁰ ./octaveProgrammid/Raami_II_NjaQ.txt



Joonis 11.17. Raami 2 põikjõu epüür

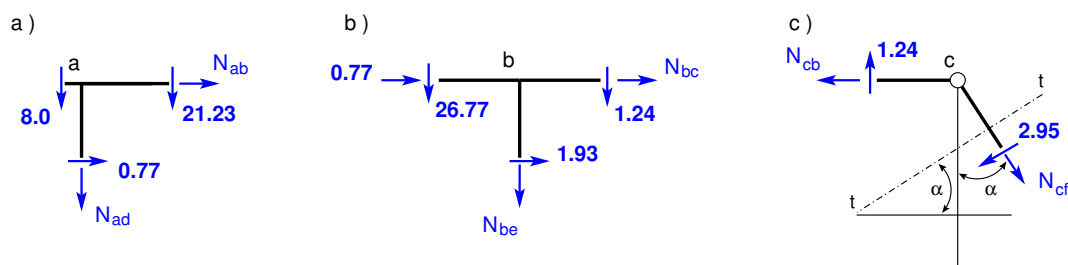
```

octave:1> % Kaldvarda pikkus -lv
octave:1> lv=sqrt(1^2+3^2)
lv = 3.1623
octave:2> sinA=1/lv
sinA = 0.31623
octave:3> sinA = 0.31623
sinA = 0.31623
octave:4> cosA=3/lv
cosA = 0.94868
octave:5> cosA = 0.94868
cosA = 0.94868
octave:6> % Sõlm a sumX=0; -Nab-0.77=0
octave:6> Nab=-0.77
Nab = -0.77000
octave:7> % sumZ=0; -Nad-21.23-8.0=0
octave:7> Nad=-21.23-8.0
Nad = -29.230
octave:8> % Sõlm c sumt-t=0; -Ncb*cosA+(1.24*sinA-2.95)=0
octave:8> Ncb=(1.24*sinA-2.95)/cosA
Ncb = -2.6962
octave:9> %sumZ=0; -Ncf*cosA+(1.24-2.95*sinA)=0
octave:9> Ncf=(1.24-2.95*sinA)/cosA
Ncf = 0.32374
octave:10> % Sõlm b; sumX=0; -Nbc-0.77-1.93=0
octave:10> Nbc=-0.77-1.93
Nbc = -2.7000
octave:11> % sumZ=0; -Nbe-26.77-1.24=0
octave:11> Nbe=-26.77-1.24
Nbe = -28.010

octave:12> % Kontrollime sisejõude sõlmes c
octave:12> % Teisendusmaatriks T
octave:12> T=[cosA -sinA; sinA cosA]
T =

    0.94868   -0.31623
    0.31623    0.94868

```



Joonis 11.18. Raami 2 sõlmede tasakaal

```

octave:13> % Sõlmes c jõud F=[X; Z]=[-Ncb; Qcb]
octave:13> F=[1.24; 2.7]
F =

```

```

1.2400
2.7000

```

```

octave:14> % Fs=[Ncf; Qcf]
octave:14> Fs=T*F
Fs =

```

```

0.32254
2.95356

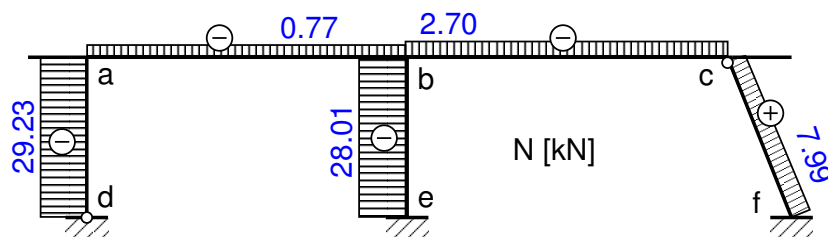
```

```

octave:15> % Kontrollime Nbc-Ncb
octave:15> Nbc-Ncb
ans = -0.0037538
octave:16> % Põikjõu väärtustel oli hoitud kaks kohta peale koma
octave:16>

```

Leitud normaaljõudude väärtused kanname joonisele 11.19.



Joonis 11.19. Raami 2 normaaljõu epüür

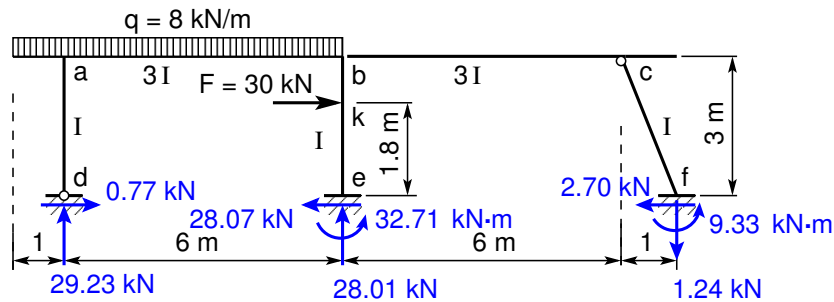
Põikjõu epüürilt (joonis 11.17) ja normaaljõu epüürilt (joonis 11.19) saame toereaktsioonide väärtused, mis kanname joonisele 11.20.

Raami staatiline kontroll.

Jõudude summa x teljele, summa z teljele ja momentide summa toe d kohta. Toereaktsioonid on joonisel 11.20.

Arvutusteks kasutame GNU Octave'it kui kalkulaatorit (vt jaotis 1.16.1). Käsud võime eelnevalt valmis kirjutada tekstina ¹¹, siis kopeerida ja asetada GNU Octave'isse.

¹¹ ./octaveProgrammide/Raami_II_NjaQ.txt



Joonis 11.20. Raami 2 toereaktsioonid

```

octave:1> % Raami staatiline kontroll
octave:1> % sumX=0; sumX=0.77+30-28.07-2.70
octave:1> sumX=0.77+30-28.07-2.70
sumX = -8.8818e-16
octave:2> % sumZ=0; sumZ=7*8.0-29.23-28.01+1.24
octave:2> sumZ=7*8.0-29.23-28.01+1.24
sumZ = -1.9984e-15
octave:3> % sumMd=0; sumMd=(7*8.0)*2.5+30*1.8-32.71-28.01*6.0-9.33+1.24*13.0
octave:3> sumMd=(7*8.0)*2.5+30*1.8-32.71-28.01*6.0-9.33+1.24*13.0
sumMd = 0.020000
octave:4> % Suurendame täpsust (kohtade arvu)
octave:4> % sumMd=0; sumMd_tapsem=(7*8.0)*2.5+30*1.8-32.70980-28.013*6.0-...
          9.3306+1.2398*13.0
octave:4> sumMd_tapsem=(7*8.0)*2.5+30*1.8-32.70980-28.013*6.0-9.3306+ ...
          1.2398*13.0
sumMd_tapsem = -0.0010000
octave:5>

```

Leitud toereaktsioonid läbisid staatilise kontrolli. Kui toereaktsioonid on leitud täpsusega kaks kohta peale koma, siis momentide summa kontrollis korrutame õlaga ~ 10 meetrit ja kontrollis võime hinnata üks koht peale koma. Arvutustes on täiendavalt näidatud momentide summa kontroll suurema täpsusega (*sumMd_tapsem*).

Leitud sisejõudude M ja Q kontrollimiseks kasutame GNU Octave'i programmi *defN-BA.m*^{12 13}. Momentide avaldised, mis on joonistel 11.15(a)–11.15(c), kanname veergudena matriksisse mx , kus vardajäikus i_{ad} on tähistatud eli (1) (varraste tähistuses $k = ad, ab, be, bc, cf \equiv k = 1, 2, 3, 4, 5$).

¹² [./octaveProgrammid/defNBA.m](#)

¹³ [./octaveProgrammid/defNBA.Kommentaarisid.pdf](#)

$$\mathbf{mx} = \begin{bmatrix} 0 \cdot eli(1) & 0 \cdot eli(1) & 0 \cdot eli(1) \cdot deta(1) \\ 3 \cdot eli(1) & 0 \cdot eli(1) & 3 \cdot eli(1) \cdot deta(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 4 \cdot eli(2) & 2 \cdot eli(2) & 0 \cdot eli(2) \cdot deta(2) \\ 2 \cdot eli(2) & 4 \cdot eli(2) & 0 \cdot eli(2) \cdot deta(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot eli(3) & 4 \cdot eli(3) & 6 \cdot eli(3) \cdot deta(1) \\ 0 \cdot eli(3) & 2 \cdot eli(3) & 6 \cdot eli(3) \cdot deta(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot eli(4) & 3 \cdot eli(4) & 3 \cdot eli(4) \cdot deta(4) \\ 0 \cdot eli(4) & 0 \cdot eli(4) & 0 \cdot eli(4) \cdot deta(4) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot eli(5) & 0 \cdot eli(5) & 0 \cdot eli(5) \cdot deta(5) \\ 0 \cdot eli(5) & 0 \cdot eli(5) & 3 \cdot eli(5) \cdot deta(5) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{varras 1 post} \\ \dots \\ \text{varras 2 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 3 post} \\ \mathbf{mp} = \\ \dots \\ \text{varras 4 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 5 post} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ Mab \\ Mba \\ \dots \\ Mbe \\ Meb \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.107)$$

Võrrandisüsteemi vasaku poole kordajad arvutame GNU Octave'iga järgmiselt:

$$\begin{aligned} r(1,1) &= 3 \cdot eli(1) + 4 \cdot eli(2) \\ r(1,2) &= 2 \cdot eli(2) \\ r(2,1) &= r(1,2) \\ r(2,2) &= 4 \cdot eli(2) + 4 \cdot eli(3) + 3 \cdot eli(4) \\ r(1,3) &= 3 \cdot eli(1) \cdot deta(1) \\ r(3,1) &= r(1,3) \\ r(2,3) &= 6 \cdot eli(3) \cdot deta(3) + 3 \cdot eli(4) \cdot deta(4) \\ r(3,2) &= r(2,3) \\ r(3,3) &= 3 \cdot eli(1) \cdot deta(1)^2 + 12 \cdot eli(3) \cdot deta(3)^2 + 3 \cdot eli(4) \cdot deta(4)^2 + \\ &\quad + 3 \cdot eli(5) \cdot deta(5)^2 \end{aligned} \quad (11.108)$$

Võrrandisüsteemi parema poole kordajate leidmiseks võime kasutada GNU Octave'i funktsioone *kinnmom1.m*, *kinnmom2.m*, *kinnmom3.m* lk 736, mis on kirjutatud tabeli 11.2 alusel. Need programmid väljastavad momendid, mille positiivne suund on kellaosutite liikumissuunas. Teise märgikokkuleppe puhul on positiivne suund vastupidi kellaosutite liikumissuunale ja nende funktsioonide poolt väljastatavatele momentidele tuleb ette kirjutada miinusmärk.

$$\begin{aligned} r(1p) &= Mab - 4 \\ r(2p) &= Mba + Mbe \\ r(3p) &= (Meb + Mbe - 30 \cdot 1.8) \cdot deta(3) \end{aligned} \quad (11.109)$$

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \psi_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{1p} \\ r_{2p} \\ r_{3p} \end{bmatrix} \quad (11.110)$$

ehk

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r}_p \quad (11.111)$$

Arvutuste kontrollimiseks GNU Octave'i programmiga *defNBA.m*¹⁴ avame arvutuspäeviku „diary defNBA.out” (vt Päevik 11.1).

Arvutuspäevik 11.1 octave:1> diary defNBA.out

octave:2> diary on

octave:3> defNBA

varraste_pikkused_l =

```
3.0000  6.0000  3.0000  6.0000  3.1623
```

varraste_ristloigete_jaikused_EI =

```
1  3  1  3  1
```

varraste_poordenurgad_deta =

```
1.00000  0.00000  1.00000  -0.16670  1.00000
```

varraste_jaikused_i =

```
1.00000
```

```
1.50000
```

```
1.00000
```

```
1.50000
```

```
0.94868
```

mx =

```
0.00000  0.00000  0.00000
```

```
3.00000  0.00000  3.00000
```

```
6.00000  3.00000  0.00000
```

```
3.00000  6.00000  0.00000
```

```
0.00000  4.00000  6.00000
```

```
0.00000  2.00000  6.00000
```

```
0.00000  4.50000  -0.75015
```

```
0.00000  0.00000  -0.00000
```

```
0.00000  0.00000  0.00000
```

```
0.00000  0.00000  2.84605
```

Aab=kinmmom1(1(2),0,1(2),0,1(2),8) %kinni vasakul ja paremal

Va = 24

Vb = 24

Aab =

```
-24  24
```

Aeb=kinmmom1(1(3),30,1.8,0,1(3),0) %kinni vasakul ja paremal

Va = 12

Vb = 18

Aeb =

```
-8.6400  12.9600
```

¹⁴ [./octaveProgrammid/defNBA.Kommentaariid.pdf](#)


```

Mab = 24
Mba = -24
Meb = 8.6400
Mbe = -12.960
mp =

0.00000
0.00000
24.00000
-24.00000
-12.96000
8.64000
0.00000
0.00000
0.00000
0.00000

r =
9.0000 3.0000 3.0000
3.0000 14.5000 5.2499
3.0000 5.2499 17.9711

rp =
20.000
-36.960
-58.320

x =
-4.0482
2.1995
3.2785

M =
0.00000
-2.30929
6.30929
-22.94744
15.50887
32.70980
7.43858
0.00000
0.00000
9.33064
    
```

```

M1A = -0
M1L = -2.3093
M2A = -6.3093
M2L = -22.947
    
```

Vahetame vardal b--e alguse ja lõpu. Sellega muutus ka momendi plusspool. See on allpool.

```

M3A = -32.710
M3L = 15.509
M4A = -7.4386
M4L = 0
M5A = -0
M5L = 9.3306
NT = 10
    
```

Varda 2 toereaktsioonid

```

lihttala_Va = 24
lihttala_Vb = 24
    
```

Varda 3 toereaktsioonid

```

lihttala_Va = 12
lihttala_Vb = 18
    
```

```

-----
=====
Sisejõudude jaotus 1. vardas.
=====

```

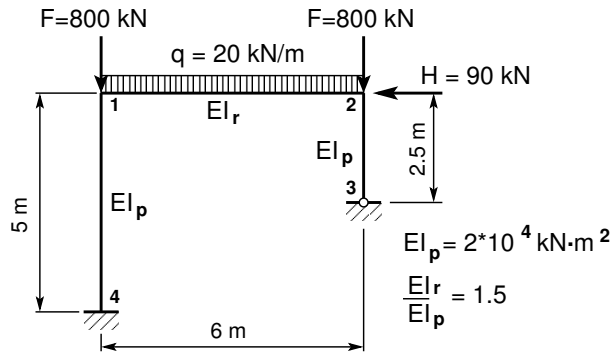
Jrk	x	Q	M		
1	0.00	-0.770	0.000	2	0.30 -0.770 -0.231
				3	0.60 -0.770 -0.462
				4	0.90 -0.770 -0.693
				5	1.20 -0.770 -0.924
				6	1.50 -0.770 -1.155
				7	1.80 -0.770 -1.386

8	2.10	-0.770	-1.617	11	2.70	-1.927	16.087
9	2.40	-0.770	-1.847	12	3.00	-1.927	15.509
10	2.70	-0.770	-2.078	=====			
11	3.00	-0.770	-2.309	Sisejõudude jaotus 4. vardas.			
=====				=====			
Sisejõudude jaotus 2. vardas.				Jrk	x	Q	M
=====				-----			
Jrk	x	Q	M	1	0.00	1.240	-7.439
-----				2	0.60	1.240	-6.695
1	0.00	21.227	-6.309	3	1.20	1.240	-5.951
2	0.60	16.427	4.987	4	1.80	1.240	-5.207
3	1.20	11.627	13.403	5	2.40	1.240	-4.463
4	1.80	6.827	18.939	6	3.00	1.240	-3.719
5	2.40	2.027	21.595	7	3.60	1.240	-2.975
6	3.00	-2.773	21.372	8	4.20	1.240	-2.232
7	3.60	-7.573	18.268	9	4.80	1.240	-1.488
8	4.20	-12.373	12.284	10	5.40	1.240	-0.744
9	4.80	-17.173	3.420	11	6.00	1.240	-0.000
10	5.40	-21.973	-8.324	=====			
11	6.00	-26.773	-22.947	Sisejõudude jaotus 5. vardas.			
=====				=====			
Sisejõudude jaotus 3. vardas.				Jrk	x	Q	M
3. varda momendi plusspool on paremal				-----			
=====				1	0.00	2.951	0.000
Jrk	x	Q	M	2	0.32	2.951	0.933
-----				3	0.63	2.951	1.866
1	0.00	28.073	-32.710	4	0.95	2.951	2.799
2	0.30	28.073	-24.288	5	1.26	2.951	3.732
3	0.60	28.073	-15.866	6	1.58	2.951	4.665
4	0.90	28.073	-7.444	7	1.90	2.951	5.598
5	1.20	28.073	0.978	8	2.21	2.951	6.531
6	1.50	28.073	9.400	9	2.53	2.951	7.465
7	1.80	28.073	17.821	10	2.85	2.951	8.398
8	1.80	-1.927	17.821	11	3.16	2.951	9.331
9	2.10	-1.927	17.243	=====			
10	2.40	-1.927	16.665	octave:4> diary off			

11.7.2 Raami arvutamine deformatsioonimeetodiga. Näide 11.2

Näide 11.2 Leiame joonisel 11.21 näidatud kolmekordselt geomeetriliselt määramatu raami sisejõudude jaotuse deformatsioonimeetodiga. Raam on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega $q_z = 20 \text{ kN/m}$ ning horisontaalse jõuga $H = 90 \text{ kN}$. Raami posti ristlõike jäikus $EI_p = 2 * 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ja raami riivi ristlõike jäikus $EI_r = 1.5EI_p$. Raami ava on 6 m, postide pikkused 5 m ja 2.5 m. Lisaks vaadeldud koormusele on postidele rakendatud kaks vertikaalset jõudu $F = 800 \text{ kN}$.

Kõnesolevas näites on kasutusel teine märgikokkulepe (vt jaotis lk 281).



Joonis 11.21. Raam

Raami geomeetriliselt määratud põhiskeem ja siirdeolukorda määravad sõlmede pöörded ξ^1 , ξ^2 ja varda pööre ξ^3 (φ_1 , φ_2 ja ψ_1) on näidatud joonisel 11.22 a). Joonisel 11.22 b) on takistatud varda pööre asemel takistatud sõlme siire.

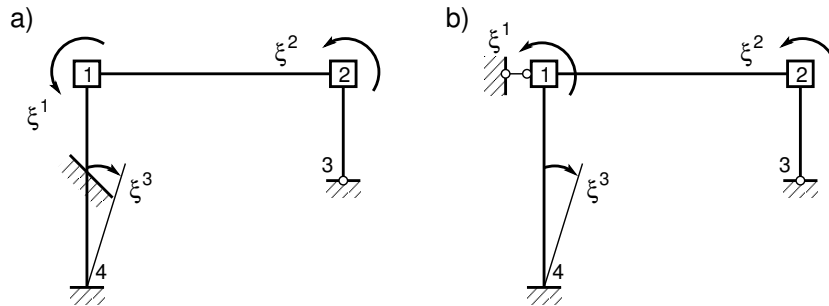
Jäikade sõlmede pöörded ξ^1 , ξ^2 (joonised 11.22, 11.23) on positiivsed vastupidi kellaosutite liikumissuunale. Varda pööre ξ^3 (joonised 11.22, 11.23) positiivne suund on kellaosutite liikumissuunas. Jäikade sõlmede reaktsioonimomendid Z_1^i , Z_2^i (joonised 11.24(a), 11.24(b)) on positiivsed vastupidi kellaosutite liikumissuunale. Varda pööret takistavas sidemes tekkiv reaktsioonimomendi Z_3^i (joonised 11.24(a), 11.24(b)) positiivne suund on kellaosutite liikumissuunas.

Raami virtuaalsiirded (varrasahel) on joonisel 11.23.

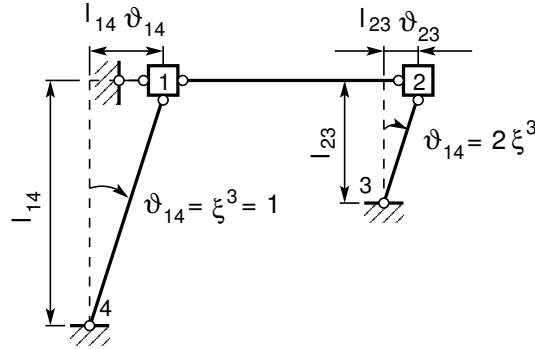
Deformatsioonimeetodi koormusliikmete arvutamiseks vaatleme joonist 11.24(a) ja kasutame tabelit 11.2 lk 324. Saame

$$M_{12}^o = -M_{21}^o = q_z \frac{l^2}{12} = 20 \frac{6^2}{12} = 60 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (11.112)$$

$$M_{14}^o = -M_{41}^o = M_{23}^o = 0 \quad (11.113)$$



Joonis 11.22. Geomeetriliselt määratud põhiskeem



Joonis 11.23. Varrasahel

Esitame varraste kinnitusemomendid veeruvektorina

$$M^o = \begin{bmatrix} M_{12}^o \\ M_{21}^o \\ M_{14}^o \\ M_{41}^o \\ M_{23}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (11.114)$$

Koormusliikme Z_1^0 leiame sõlme $\boxed{1}$ tasakaalust:

$$Z_1^0 = M_{12}^o + M_{14}^o = 60 + 0 = 60 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (11.115)$$

Koormusliikme Z_2^0 leiame sõlme $\boxed{2}$ tasakaalust:

$$Z_2^0 = M_{21}^o + M_{23}^o = -60 + 0 = -60 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (11.116)$$

Koormusliikme Z_3^0 leidmiseks vaatleme jõudude ja momentide virtuaaltööd varrasahela (joonis 11.23) virtuaalsüretel. Posti pööret ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^0 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurus on reaktsioonimoment Z_3^0 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 11.24(a) lk 317).

Varrasahela virtuaaltöö

$$Z_3^0 \delta \vartheta_{14} - H \delta (l_{23} \vartheta_{23}) = 0 \quad (11.117)$$

Kinnitusemomentide M_{12}^o , M_{21}^o virtuaaltöö on null, sest varras 1–2 ei pöördi. Virtuaalpööre $\delta \vartheta_{14}$ ja virtuaalsüire $\delta (l_{23} \vartheta_{23})$ avalduvad virtuaalpöörde $\delta \xi^3$ kaudu

$$\delta \vartheta_{14} = \delta \xi^3, \quad \delta (l_{23} \vartheta_{23}) = 2.5 \cdot 2 \delta \xi^3 \quad (11.118)$$

Arvestades virtuaalsüirete avaldise (11.118), saame varrasahela virtuaaltöö

$$\left[Z_3^0 - H \cdot 5 \right] \delta \xi^3 = 0 \quad (11.119)$$

millest avaldame koormusliikme Z_3^0

$$Z_3^0 = H \cdot 5 = 90 \cdot 5 = 450 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (11.120)$$

Koormusliikmed esitame veeruvektorina Z^0 .

$$\mathbf{Z}^0 = \begin{bmatrix} Z_1^0 \\ Z_2^0 \\ Z_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -60 \\ 450 \end{bmatrix} \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (11.121)$$

Varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ pöördest (joonis 11.24(b)):

$$M_{12}^1 = 4 \frac{EI_r}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{12}^1 = 4 \frac{1.50}{6} = 1.0 \quad (11.122)$$

$$M_{21}^1 = 2 \frac{EI_r}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{21}^1 = 2 \frac{1.50}{6} = 0.5 \quad (11.123)$$

$$M_{14}^1 = 4 \frac{EI_p}{l_{14}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{14}^1 = 4 \frac{1.0}{5} = 0.8 \quad (11.124)$$

$$M_{41}^1 = 2 \frac{EI_p}{l_{14}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{41}^1 = 2 \frac{1.0}{5} = 0.4 \quad (11.125)$$

$$M_{23}^1 = 0 \quad (11.126)$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ pöördest ξ^1 5×3 matriksi M^{123} veeruna

$$M^{123} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & \cdot & \cdot \\ M_{21}^1 & \cdot & \cdot \\ M_{14}^1 & \cdot & \cdot \\ M_{41}^1 & \cdot & \cdot \\ M_{23}^1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} 1.0 & \cdot & \cdot \\ 0.5 & \cdot & \cdot \\ 0.8 & \cdot & \cdot \\ 0.4 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.127)$$

Sõlmede reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ pöördest (joonis 11.24(b)) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme $\boxed{1}$ tasakaalust (joonis 11.24(b)) saame

$$Z_1^1 = M_{12}^1 + M_{14}^1 = EI_p (1.0 + 0.8) = 1.8EI_p \quad (11.128)$$

Sõlme $\boxed{2}$ tasakaalust

$$Z_2^1 = M_{21}^1 + M_{23}^1 = EI_p (0.5 + 0) = 0.5EI_p \quad (11.129)$$

Reaktsioonimomendi Z_3^1 leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide virtuaaltööd varrasahela (joonis 11.23) virtuaalsiiretel. Posti pööret ξ 3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^1 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurus on reaktsioonimoment Z_3^1 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 11.24(b)). Varraste reaktsioonimomentide virtuaaltöö sõlme $\boxed{1}$ pöördest

$$Z_3^1 \delta\vartheta_{14} - (M_{14}^1 + M_{41}^1) \delta\vartheta_{14} = [Z_3^1 - (M_{14}^1 + M_{41}^1)] \delta\vartheta_{14} = 0 \quad (11.130)$$

Võrrandi (11.130) esimese liikme virtuaaltöö on positiivne, sest reaktsioonimomendi ja varda pöördesuunad ühtivad. Võrrandi teise liikme virtuaaltöö on negatiivne, sest momentide suund erineb varda pöördesuunast.

Võrrandist (11.130) saame

$$Z_3^1 = (M_{14}^1 + M_{41}^1) = EI_p (0.8 + 0.4) = 1.2EI_p \quad (11.131)$$

Sõlmede ja varraste pöörete leidmiseks alustame võrrandisüsteemi koostamist. Võrrandisüsteemi tundmatute ees olevatest kordajatest moodustame 3×3 matriksi A , mille esimene veerg on

$$A = \begin{bmatrix} Z_1^1 & \cdot & \cdot \\ Z_2^1 & \cdot & \cdot \\ Z_3^1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} 1.8 & \cdot & \cdot \\ 0.5 & \cdot & \cdot \\ 1.2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.132)$$

Varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ pöördest (joonis 11.24(c))

$$M_{12}^2 = 2 \frac{EI_r}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{12}^2 = 2 \frac{1.5}{6} = 0.5 \quad (11.133)$$

$$M_{21}^2 = 4 \frac{EI_r}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{21}^2 = 4 \frac{1.5}{6} = 1.0 \quad (11.134)$$

$$M_{14}^2 = M_{41}^2 = 0 \quad (11.135)$$

$$M_{23}^2 = 3 \frac{EI_p}{l_{23}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{23}^2 = 3 \frac{1.0}{2.5} = 1.2 \quad (11.136)$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ pöördest ξ^2 5×3 matriksi M^{123} teise veeruna

$$M^{123} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & \cdot \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & \cdot \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & \cdot \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & \cdot \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & \cdot \\ 0.5 & 1 & \cdot \\ 0.8 & 0 & \cdot \\ 0.4 & 0 & \cdot \\ 0 & 1.2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.137)$$

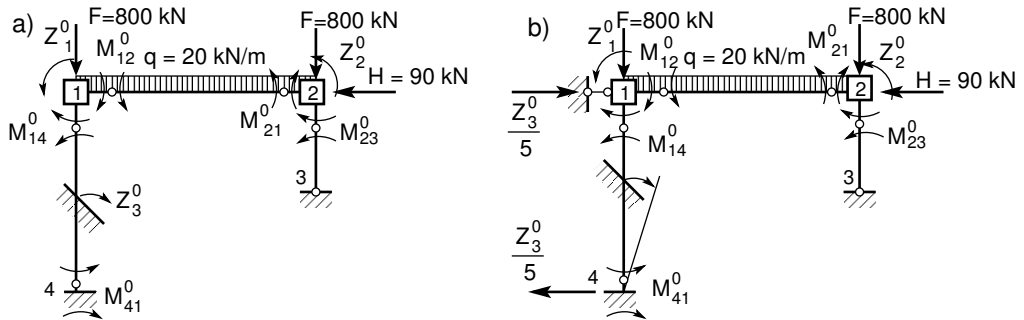
Sõlmede reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ pöördest (joonis 11.24(c)) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme $\boxed{1}$ tasakaalust (joonis 11.24(c)) saame

$$Z_1^2 = M_{12}^2 + M_{14}^2 = EI_p (0.5 + 0) = 0.5EI_p \quad (11.138)$$

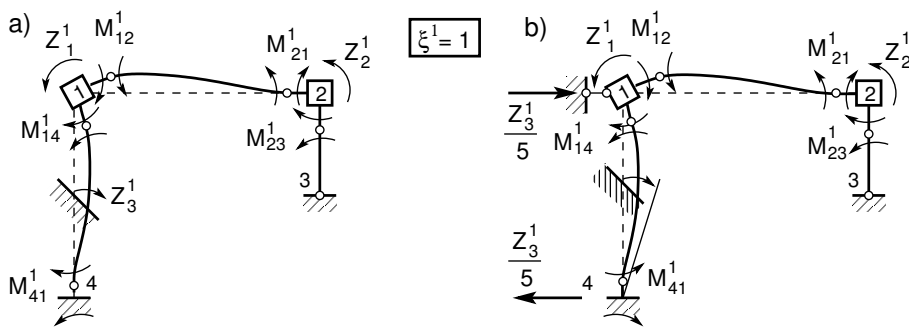
ja sõlme $\boxed{2}$ tasakaalust

$$Z_2^2 = M_{21}^2 + M_{23}^2 = EI_p (1.0 + 1.2) = 2.2EI_p \quad (11.139)$$

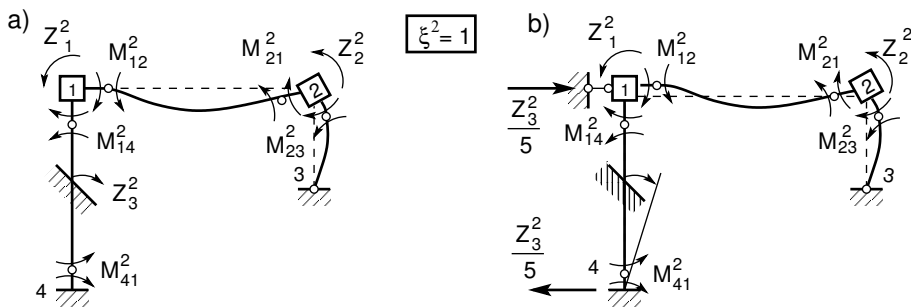
Reaktsioonimomendi Z_2^2 leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide virtuaaltööd varrasahela (joonis 11.23) virtuaalsiiretel. Posti pööret ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^1 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega



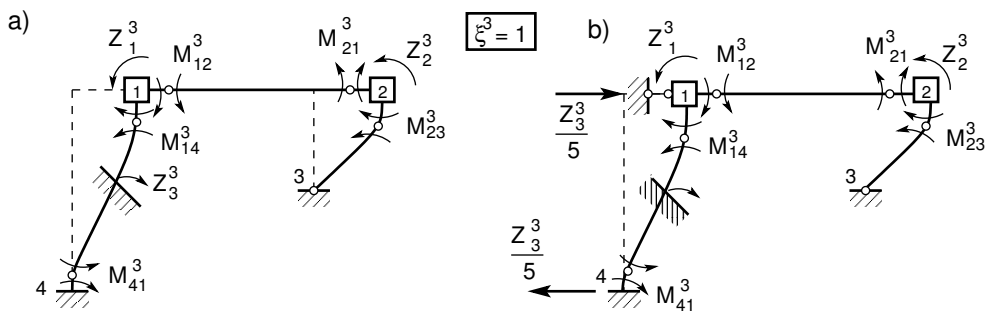
(a) Kinnitusemomendid



(b) Reaktsioonimomendid sõlme 1 pöördest



(c) Reaktsioonimomendid sõlme 2 pöördest



(d) Reaktsioonimomendid varda pöördest

Joonis 11.24. Raami koormusolukorrad

ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment Z_2^2 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 11.23). Varraste reaktsioonimomentide virtuaaltöö sõlme [2] pöördest ($\vartheta_{23} = 2\vartheta_{14}$) (joonis 11.23)

$$Z_3^2 \delta\vartheta_{14} - M_{23}^2 \delta\vartheta_{23} = [Z_3^2 - 2M_{23}^2] \delta\vartheta_{14} = 0 \quad (11.140)$$

Võrrandist(11.130) saame

$$Z_3^2 = M_{23}^2 = EI_p \cdot 2 \cdot 1.2 = 2.4EI_p \quad (11.141)$$

Lisame võrrandisüsteemi tundmatute ees olevate kordajate maatriksile A (11.132) teise veeru

$$A = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & \cdot \\ Z_2^1 & Z_2^2 & \cdot \\ Z_3^1 & Z_3^2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} 1.8 & 0.5 & \cdot \\ 0.5 & 2.2 & \cdot \\ 1.2 & 2.4 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.142)$$

Varraste reaktsioonimomendid varda 1–2 siirdest (joonis 11.24(d))

$$M_{12}^3 = M_{21}^3 = 0 \quad (11.143)$$

$$M_{14}^3 = 6 \frac{EI_p}{l_{14}} \vartheta_{14}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{14}^3 = 6 \frac{1}{5} 1\xi^3 = 1.2\xi^3 \quad (11.144)$$

$$M_{41}^3 = M_{14}^3 = 1.2\xi^3 \quad (11.145)$$

$$M_{23}^3 = 3 \frac{EI_p}{l_{23}} \vartheta_{23}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{23}^3 = 3 \frac{1}{2.5} 2\xi^3 = 2.4\xi^3 \quad (11.146)$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid varda pöördest ξ^3 5×3 maatriksi M^{123} kolmanda veeruna

$$M^{123} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & M_{12}^3 \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & M_{21}^3 \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & M_{14}^3 \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & M_{41}^3 \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & M_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 1.2 \\ 0.4 & 0 & 1.2 \\ 0 & 1.2 & 2.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.147)$$

Sõlmede reaktsioonimomendid varda 1–2 siirdest (joonis 11.24(d)) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme [1] tasakaalust (joonis 11.24(d)) saame

$$Z_1^3 = M_{12}^3 + M_{14}^3 = EI_p (0 + 1.2) = 1.2EI_p \quad (11.148)$$

ja sõlme [2] tasakaalust

$$Z_2^3 = M_{21}^3 + M_{23}^3 = EI_p (0 + 2.4) = 2.4EI_p \quad (11.149)$$

Reaktsioonimomendi Z_2^3 leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide virtuaaltööd varrasahela (joonis 11.23) virtuaalsiiretel. Posti pööret ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_2^3 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega

ja jõudude suuruseks on reaktsioonimoment Z_2^3 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 11.24(d)). Varraste reaktsioonimomentide virtuaaltöö varda [3] pöördest ($\vartheta_{23} = 2\vartheta_{14} = \xi^3$) (joonis 11.23)

$$Z_3^3 \delta\vartheta_{14} - (M_{14}^3 - M_{14}^3) \delta\vartheta_{14} + M_{23}^3 \delta\vartheta_{23} = [Z_3^3 - M_{14}^3 - M_{41}^3 - 2M_{23}^3] \delta\vartheta_{14} = 0 \quad (11.150)$$

Võrrandist (11.150) saame

$$Z_3^3 = (M_{14}^3 + M_{41}^3) + 2M_{23}^3 = EI_p [1.2 \cdot 1 + 1.2 \cdot 1 + 2 \cdot 1.2] = 7.2EI_p \quad (11.151)$$

Lisame võrrandisüsteemi tundmatute ees olevate kordajate maatriksile A (11.130) kolmanda veeru

$$A = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & Z_1^3 \\ Z_2^1 & Z_2^2 & Z_2^3 \\ Z_3^1 & Z_3^2 & Z_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} 1.8 & 0.5 & 1.2 \\ 0.5 & 2.2 & 2.4 \\ 1.2 & 2.4 & 7.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.152)$$

Sõlmede ja varraste pöörete leidmiseks koostasime võrrandisüsteemi

$$\mathbf{A}\xi = \mathbf{Z}^0 \quad (11.153)$$

kus maatriks \mathbf{A} on leitud avaldisega (11.152) ja vektor \mathbf{Z}^0 (11.121) ning vektor ξ

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.154)$$

Võtame kasutusele uue muutuja $\mathbf{X} = EI_p \xi$ ja maatriksi $\mathbf{a} = EI_p \mathbf{A}$ ning esitame võrrandisüsteemi (11.153) järgmisel kujul:

$$\mathbf{aX} = \mathbf{Z}^0 \quad (11.155)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 0.5 & 1.2 \\ 0.5 & 2.2 & 2.4 \\ 1.2 & 2.4 & 7.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 60 \\ -450 \end{bmatrix} \quad (11.156)$$

Arvutiprogrammiga GNU Octave lahendame võrrandisüsteemi (11.156) Gaussi elimineerimis-meetodiga (vt avaldist (A.44)).

$$\mathbf{X} = \mathbf{a} \setminus \mathbf{z} \quad (11.157)$$

kus $\mathbf{z} = \mathbf{Z}^0$.

Võrrandisüsteemi (11.155) lahend

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000 \\ 150.000 \\ -112.500 \end{bmatrix} \quad (11.158)$$

Momendid varraste otstes leiame avaldisega

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^o + \mathbf{M}^{123}\xi \quad (11.159)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12}^o \\ M_{21}^o \\ M_{14}^o \\ M_{41}^o \\ M_{23}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & M_{12}^3 \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & M_{21}^3 \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & M_{14}^3 \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & M_{41}^3 \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & M_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.160)$$

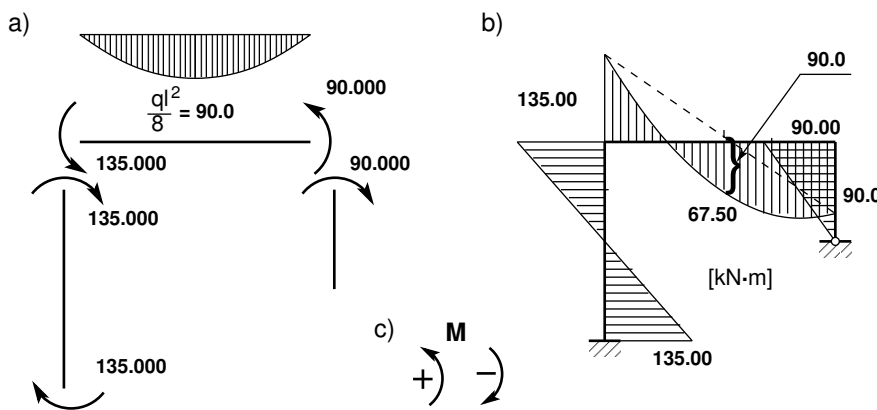
kus maatriks \mathbf{M}^o on toodud avaldisega (11.114) ja maatriks \mathbf{M}^{123} avaldisega (11.147). Momentide avaldise (11.159), (11.160) esitame leitud \mathbf{X} kaudu

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^o + \frac{1}{EI_p} \mathbf{M}^{123} \mathbf{X} \quad (11.161)$$

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 1.2 \\ 0.4 & 0 & 1.2 \\ 0 & 1.2 & 2.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.000 \\ 150.000 \\ -112.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135.000 \\ 90.000 \\ -135.000 \\ -135.000 \\ -90.000 \end{bmatrix} \quad (11.162)$$

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135.000 \\ 90.000 \\ -135.000 \\ -135.000 \\ -90.000 \end{bmatrix} \quad (11.163)$$

Leitud momendid varraste otstes (11.163) kanname joonisele 11.25 b). Momendi positiivne ja negatiivne suund on näidatud joonisel 11.25 c). Joonisel 11.25 a) on varda 1–2 lihttala paindemomendi epüür jaotatud koormusest q_z . Joonisel 11.25 b) on raami paindemomendi epüür. Joonisel 11.25 c) on paindemomendi positiivne ja negatiivne suund. Raami varraste põikjõu märgi määramiseks vaatleme joonist 1.16 lk 46. Paindemomendi tuletise geometriliseks tõlgenduseks punktis on selles punktis paindemomendi epüüri puutuja tõusunurga tangens



Joonis 11.25. Momendid varda otstes ja paindemomendi epüür

($\tan \alpha$). Põikjõu märk oleneb puutuja (joonis 1.16) pööramise suunast (puutujat pöörame nii, et see ühtiks varda teljega, seejuures $\alpha < \frac{\pi}{2}$): vastupäeva pöörates on põikjõud positiivne ja päripäeva pöörates negatiivne.

Raami varda 1–4 paindemomendi epüüri (joonis 11.25) puutuja ühtimiseks varda teljega tuleb seda pöörata päripäeva, st põikjõu märk on miinus (joonis 1.16 lk 46). Kanname põikjõu märgi joonisele 11.26 a). Raami varda 2–3 paindemomendi epüüri (joonis 11.25) puutuja ühtimiseks varda teljega tuleb seda pöörata päripäeva, st põikjõu märk on miinus (joonis 1.16). Raami varda 1–2 paindemomendi epüüri alguses (joonis 11.25) puutuja ühtimiseks varda teljega tuleb seda pöörata vastupäeva, st põikjõu märk on pluss (joonis 1.16).

Põikjõu arvutamiseks vaatleme joonist 11.25 ja 1.17. Varda 1–4 põikjõud, mille märk peab tulema miinus:

$$Q_{14} = Q_{41} = \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{-135.0 - 135.0}{5} = -54.0 \text{ kN} \quad (11.164)$$

Varda 2–3 põikjõud, mille märk peab tulema miinus

$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{-90.0 - 0}{2.5} = -36.04 \text{ kN} \quad (11.165)$$

Varda 1–2 põikjõu arvutamisel leiame vastava lihttala põikjõu Q^0 ja põikjõu momentidest $Q^M = \frac{\Delta M}{\Delta x}$

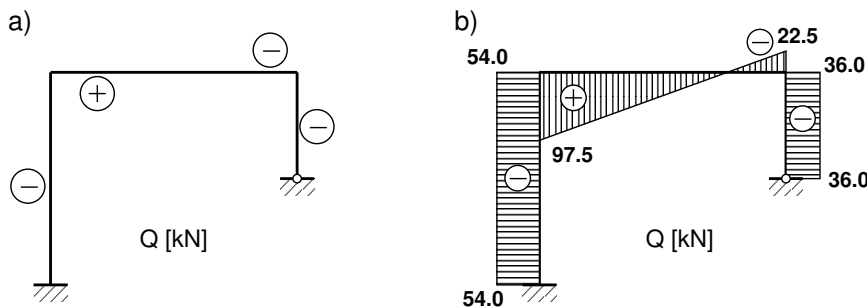
$$Q_{12} = Q^0 + \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{20.6}{2} + \frac{90.0 + 135.0}{6.0} = 60.0 + 37.5 = 97.5 \text{ kN} \quad (11.166)$$

$$Q_{21} = Q^0 + \frac{\Delta M}{\Delta x} = -\frac{20.6}{2} + \frac{90.0 + 135.0}{6.0} = -60 + 37.5 = -22.5 \text{ kN} \quad (11.167)$$

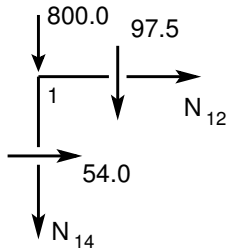
Leitud põikjõud on kantud joonisele 11.26 b).

Raami varrastes mõjuva normaaljõu leidmiseks lõikame välja sõlmed 1 ja 2 (joonis 11.27 ja 11.28). Kanname joonisele kõik sõlmele mõjuvad jõud. Normaaljõud N_{12} , N_{14} , N_{21} , N_{23} , mida me otsime, näitame positiivses suunas. Põikjõud kanname joonisele nende mõjumise suunas. Positiivne põikjõud pöörab vaadeldavat elementi päripäeva (joonised 11.27 ja 11.28).

Leitud normaaljõud kanname joonisele 11.29.



Joonis 11.26. Raami põikjõu märk ja epüür



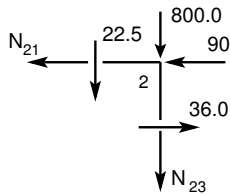
Joonis 11.27. Sõlme 1 tasakaal

Joonisel 11.27 on näidatud sõlme 1 mõjuvad jõud. Tasakaalutingimusest leiame:

$$\sum X = 0, \quad N_{12} = -54.0 \text{ kN} \quad (11.168)$$

$$\sum Z = 0,$$

$$N_{14} = -897.5 \text{ kN} \quad (11.169)$$



Joonis 11.28. Sõlme 2 tasakaal

Joonisel 11.28 on näidatud sõlme 2 mõjuvad jõud. Tasakaalutingimusest leiame:

$$\sum X = 0,$$

$$N_{21} = -90 + 36.0 = -54.0 \text{ kN} \quad (11.170)$$

$$\sum Z = 0,$$

$$N_{23} = -822.5 \text{ kN} \quad (11.171)$$

Raami staatiline kontroll.

Projitseerime kõik jõud horisontaalteljele X (joonis 11.30):

$$\sum X = 0; \quad 54.000 + 36.000 - 90 = 0.0 \quad (11.172)$$

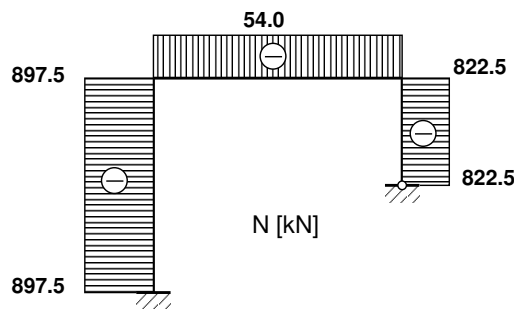
Projitseerime kõik jõud vertikaalteljele Z (joonis 11.30):

$$\sum Z = 0; \quad -897.500 - 822.500 + 6 \cdot 20 + 2 \cdot 800 = 0.0 \quad (11.173)$$

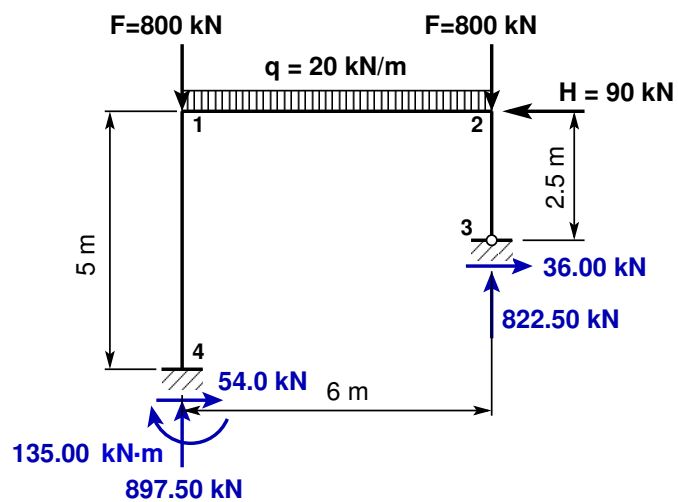
Momentide summaga kontrollimine on väga oluline kontroll. Paljudel juhtudel avastatakse arvutustes tehtud viga alles selle kontrolliga.

Momentide summa toe 3 suhtes:

$$\sum M_3 = 0; \quad -135.0 - 897.500 \cdot 6.0 + 54.000 \cdot 2.5 + 800 \cdot 6.0 + 20 \cdot 6.0 \cdot 3.0 + 90 \cdot 2.5 = 0.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (11.174)$$



Joonis 11.29. Raami normaaljõu epüür



Joonis 11.30. Raami toereaktsioonid

Staatiline kontroll näitab, et raam on temale mõjuvate jõudude toimel tasakaalus.

Tabel 11.2. Kinnitusemomendid ja põikjõud. II märgikokkulepe

<i>Jrk nr</i>	<i>Skeem</i>	M_{JK}	M_{KJ}	Q_{JK}	Q_{KJ}
A		$4i\varphi_j$	$2i\varphi_j$	$-\frac{6i}{l}\varphi_j$	$\frac{6i}{l}\varphi_j$
B		$2i\varphi_k$	$4i\varphi_k$	$-\frac{6i}{l}\varphi_k$	$\frac{6i}{l}\varphi_k$
C		$6i\vartheta_{jk}$	$6i\vartheta_{jk}$	$-\frac{12i}{l}\vartheta_{jk}$	$\frac{12i}{l}\vartheta_{jk}$
D		$3i\varphi_j$	—	$-\frac{3i}{l}\varphi_j$	$\frac{3i}{l}\varphi_j$
E		$3i\vartheta_{jk}$	—	$-\frac{3i\vartheta_{jk}}{l}$	$\frac{3i\vartheta_{jk}}{l}$
1		$\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
2		$\xi\eta^2Fl$	$-\xi^2\eta Fl$	$(2\xi - 1)\eta^2F$	$\xi^2(2\eta - 1)F$
3		$\eta(3\xi - 1)\mathcal{M}$	$\xi(3\eta - 1)\mathcal{M}$	$-\frac{6}{l}\xi\eta\mathcal{M}$	$\frac{6}{l}\xi\eta\mathcal{M}$
4		$\frac{ql^2}{8}$	—	$-\frac{5ql}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$
5		$\eta(1 - \eta^2)\frac{Fl}{2}$	—	$\frac{\eta}{2}(\eta^2 - 3)F$	$\frac{\xi^2}{2}(\xi - 3)F$
6		$(1 - 3\eta^2)\frac{\mathcal{M}}{2}$	—	$(\eta^2 - 1)\frac{3\mathcal{M}}{2l}$	$(1 - \eta^2)\frac{3\mathcal{M}}{2l}$
7		—	$-\frac{ql^2}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$	$-\frac{5ql}{8}$
8		—	$\xi(\xi^2 - 1)\frac{Fl}{2}$	$\frac{\eta^2}{2}(\eta - 3)F$	$\frac{\xi}{2}(\xi^2 - 3)F$
9		—	$(1 - 3\xi^2)\frac{\mathcal{M}}{2}$	$(\xi^2 - 1)\frac{3\mathcal{M}}{2l}$	$(1 - \xi^2)\frac{3\mathcal{M}}{2l}$
$\xi = \frac{a}{l}, \quad \eta = \frac{b}{l}, \quad i = \frac{EI}{l}$					

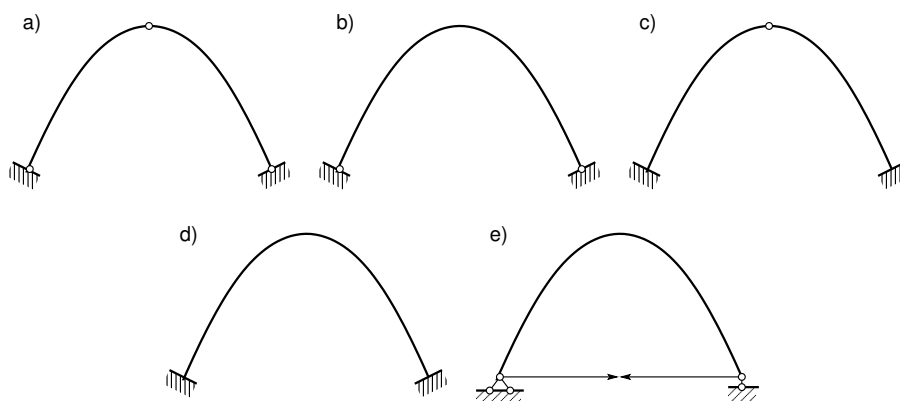
12. Kaared ja võlvid

Loeng 1¹: Vedrusüsteem. Näide 12.1. Näide 12.2.

12.1 Kaarkonstruktsioonid

Olenevalt liigendite arvust nimetatakse kaarkonstruktsioone kolme, kahe, ühe liigendiga või liigenditeta kaarteks (joonis 12.1). Kolme liigendiga kaar on staatikaga määratav, teised kaared on staatikaga määramatud.

Kaarkonstruktsiooni, mille laius on tunduvalt suurem kui sille, nimetatakse *võlviks*.



Joonis 12.1. Kaared

Staatikaga määramatu kaare sisejõud olenevad kaare telje kujust ja ka ristlõike mõõtmetest. Kaare ristlõike esialgsed mõõtmed valitakse ligikaudsete valemitega või kogemuste põhjal. Lõplikud ristlõike mõõtmed ja telje kuju peavad vastama arvutuslike sisejõudude jaotusele (insener valib ja siis kontrollib arvutustega).

Sümmeetriliste kaarte puhul võib ristlõike inertsimomendi muutuse piki kaare telge avaldada järgmiste avaldistega [Rää75], [DK62]:

- liigenditeta kaare jaoks

$$\frac{I_c}{I} = 1 - (1 - n) \left(\frac{x}{l_1} \right)^r \quad (12.1)$$

- kahe liigendiga kaare jaoks

$$\frac{I_c}{I} = 1 + (1 - n) \left(\frac{x}{l_1} \right)^r \quad (12.2)$$

¹. /videod/STmtuKaarLoeng1.html

kus

$$I = I_c \cos \varphi \quad (12.3)$$

$$n = \frac{I_c}{I_k \cos \varphi_k} \quad (12.4)$$

x – kaare telje abstsiss (koordinaatide alguspunkt lukuristolõike raskuskeskmes);

φ – nurk kaare telje puutuja ja horisontaali vahel;

I_c – lukuristolõike inertsimoment;

I – ristlõike, mille abstsiss on x , inertsimoment;

l_1 – pool sillet;

I_k – kaare kannaristolõike inertsimoment;

φ_k – nurk telje puutuja ja horisontaali vahel kaare kannas.

Enamikul juhtudel võetakse valemities (12.1), (12.2), $r = 1$ ja valemis (12.2) sageli ka $n = 1$.

Lamedate kaarte puhul, kus kaare tõus (kaare kõrguse f ja silde l suhe) $f/l \leq 1/8$, võib võtta $\cos \varphi_k \cong 1.0$ ja arvutused lihtsustuvad.

Väikese kõverusega kaarkonstruktsioonides ($\frac{g}{h} > 5$, milles g on kõverusraadius ja h kaare ristlõike kõrgus) arvutatakse siirded järgmise avaldisega:

$$\Delta_{ip} = \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p}{EI} + \frac{n_i N_p}{EA} - \frac{m_i N_p}{EA g} - \frac{n_i M_p}{EA g} + k_j \frac{q_i Q_p}{GA} \right) ds \quad (12.5)$$

Avaldises (12.5) on kolmanda ja neljanda liikme ees miinus, sest *kaarskeemis võetakse tõmbejõud negatiivsena*.

Suure kõverusega kaare siirded arvutatakse avaldisega [Kis86]

$$\Delta_{ip} = \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p}{EI} + \frac{n_i N_p}{EA} - \frac{m_i N_p}{EA g} - \frac{n_i M_p}{EA g} + k_j \frac{q_i Q_p}{GA} + \frac{m_i M_p}{EA g^2} \right) ds \quad (12.6)$$

12.2 Kahe liigendiga kaar

Kahe liigendiga kaar (joonis 12.2 a) on staatikaga ühekordselt määratu. Põhiskeemiks võetakse kõver tala (joonis 12.2 b). Lisatundmatuks võetakse toe b toereaktsiooni horisontaalne komponent $X_1 = H$.

Ühiktundmatust X_1 tekivad sisejõud

$$m_1 = -y \quad (12.7)$$

$$q_1 = -\sin \varphi \quad (12.8)$$

$$n_1 = \cos \varphi \quad (12.9)$$

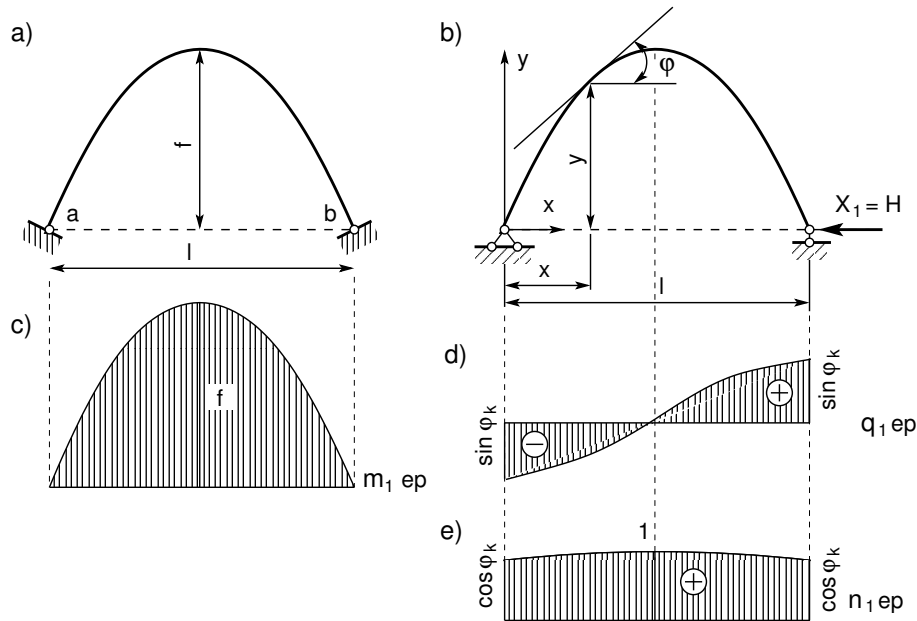
mille epüürid on joonistel 12.2 c), 12.2 d), 12.2 e).

Vertikaalsest koormusest põhjustatud sisejõud põhiskeemis arvutatakse valemitega

$$M_p^0 = M^0 \quad (12.10)$$

$$Q_p^0 = Q^0 \cos \varphi \quad (12.11)$$

$$N_p^0 = Q^0 \sin \varphi \quad (12.12)$$



Joonis 12.2. Kahe liigendiga kaar

kus M^0 ja Q^0 on paindemoment ja põikjõud kaarele vastavas lihttalas. Jõumeetodi kanooniline võrrand

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_{1r} = 0 \tag{12.13}$$

kus δ_{11} ja Δ_{1p} leidmisel arvestatakse pikijõu ja põikjõu mõju:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{m_1 \cdot m_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{n_1 \cdot n_1}{EA} ds + k \int_0^l \frac{q_1 \cdot q_1}{GA} ds \tag{12.14}$$

$$\Delta_{1p} = \int_0^l \frac{m_1 \cdot M_p^0}{EI} ds + \int_0^l \frac{n_1 \cdot N_p^0}{EA} ds + k \int_0^l \frac{q_1 \cdot Q_p^0}{GA} ds \tag{12.15}$$

Siirded temperatuuri muutusest arvutatakse valemiga (7.68)

$$\Delta_{it} = \int_a^b n_i \alpha_T \cdot T_0 dx + \int_a^b m_i \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T dx \tag{12.16}$$

Kaare silde suurenemisest Δl võrra on $\Delta_{1r} = \Delta l$.

Avaldistes (12.14) ja (12.15) ei ole arvestatud kõveruse $\frac{1}{\rho}$ mõju.

Arvutuste lihtsustamiseks avaldatakse kõik integreeritavad funktsioonid abstsissi x kaudu, kusjuures $ds = dx / \cos \varphi$. Kui avaldiste (12.14), (12.15) analüütiline integreerimine osutub tülikaks, kasutatakse numbrilist integreerimist.

Pärast lisatundmatu X_1 leidmist arvutatakse sisejõud järgmiste avaldistega:

- koormusest

$$M_p = M_p^0 - y \cdot X_{1p} \tag{12.17}$$

$$Q_p = Q_p^0 - \sin \varphi \cdot X_{1p} \tag{12.18}$$

$$N_p = Q_p^0 + \cos \varphi \cdot X_{1p} \tag{12.19}$$

- temperatuuri muutusest

$$M_t = -y \cdot X_{1t} \quad (12.20)$$

$$Q_t = -\sin \varphi \cdot X_{1t} \quad (12.21)$$

$$N_t = \cos \varphi \cdot X_{1t} \quad (12.22)$$

- tugede siiretest

$$M_r = -y \cdot X_{1r} \quad (12.23)$$

$$Q_r = -\sin \varphi \cdot X_{1r} \quad (12.24)$$

$$N_r = \cos \varphi \cdot X_{1r} \quad (12.25)$$

Tõmbiga kahe liigendiga kaare (vt joonis 12.2 e) arvutamisel võib võtta tundmatuks tõmbis tekkiva tõmbejõu X_1 . Võrreldes kahe liigendiga kaare arvutamisega on erinevus siirete δ_{11} ja Δ_{1t} arvutamisel. Arvesse tuleb võtta temperatuuri muutus:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{m_1 \cdot m_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{n_1 \cdot n_1}{EA} ds + k \int_0^l \frac{q_1 \cdot q_1}{GA} ds + \frac{1 \cdot l}{E_t A_t} \quad (12.26)$$

$$\Delta_{1t} = -(\alpha - \alpha_t) t_0 l - \alpha \Delta_t \int_0^l \left(\frac{y}{h \cos \varphi} \right) dx \quad (12.27)$$

siin $E_t A_t$ on tõmbi jäikus.

Avaldistes (12.26) ja (12.27) ei ole arvestatud kõveruse $\frac{1}{\rho}$ mõju.

12.3 Kahe liigendiga kaare arvutamise näited

12.3.1 Kahe liigendiga kaar. Näide 12.1

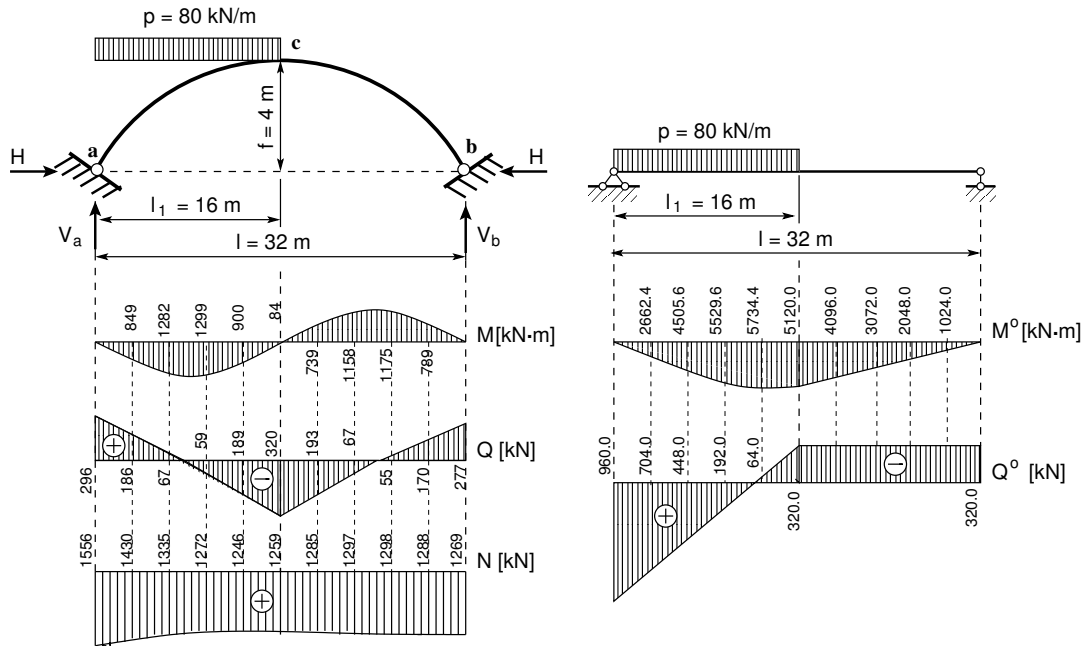
Näide 12.1 Arvutada kahe liigendiga kaare (joonis 12.3), mille telgjooneks on parabool ja mille pool sillet on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega p , horisontaalreaktsioon H ja sisejõudude M , Q ja N ordinaadid. Andmed: $l = 32$ m; $l_1 = 16$ m; $f = 4$ m; $A_c = 0.845$ m² ($h_c = 1.3$ m; $b_c = 0.65$ m); $I_c = 0.12$ m⁴; $\frac{I_c}{I \cos \varphi} = 1$; $y = 4f\xi\xi'$; $\xi = \frac{x}{l}$; $p = 80$ kN/m (Ülesanne on võetud raamatust [Rää75] lk 521 ja 524 ja lahendatud GNU Octave'i programmiga *kaarSjPr1.m* lk 737).

Kaare ristlõike muutus

$$\frac{I_c}{I} = \cos \varphi ; \quad \frac{A_c}{A} = \sqrt[3]{\cos \varphi} \quad (12.28)$$

Jõumeetodi kanoonilise võrrandi (12.29)

$$EI_c \delta_{11} X_1 + EI_c \Delta_{1p} = 0 \quad (12.29)$$



Joonis 12.3. Kahe liigendiga kaare M, Q, N epüürid

kordajad $EI_c \delta_{11}$ ja $EI_c \Delta_{1p}$ arvutatakse järgmiste integraalidega:

$$\begin{aligned}
 EI_c \delta_{11} &= \int_0^s y^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{I} \int_0^l \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds = \\
 &= \int_0^s y^2 dx + \frac{I_c}{I} \int_0^l \cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \quad (12.30)
 \end{aligned}$$

$$EI_c \Delta_{1p} = - \int_0^s y M_p^0 \frac{I_c}{I} ds = - \int_0^s y M_p^0 \cos \varphi ds = - \int_0^l y M_p^0 dx \quad (12.31)$$

siin $ds = dx / \cos \varphi$.

Simpsoni valemiga (D.16 lk 665) numbriliseks integreerimiseks vajalikud suurused on näidatud GNU Octave'iga lahendamise päevikus 12.1, kus $EI_c \delta_{11} = 277.39$ ja $EI_c \Delta_{1p} = -3.4953e+05$.

$$H = X_1 = - \frac{EI_c \Delta_{1p}}{EI_c \delta_{11}} = \frac{3.4953e+05}{277.39} = 1260.1 \text{ kN} \quad (12.32)$$

Numbriliselt leitud lahend $H = 1260.1 \text{ kN}$ (vt programm I.73) langeb kokku analüütiliselt leitud toereaktsiooniga $H = 1259 \text{ kN}$

Lahendamisel saadud tulemused on toodud arvutuspäevikus „diary kaarSjPr1.out” (vt Päevik 12.1).

Arvutuspäevik 12.1 octave:27> diary kaarSjPr1.out

octave:28> diary on

octave:29> kaarSjPr1

```
l = 32          aF1 = 32          NN = 22
f = 4          aF2 = 32          Ic = 0.12000
F1 = 0        aqA = 0          Ac = 0.84500
F2 = 0        aqL = 16         Vb = 320
qz = 80       NT = 20         Va = 960
```

```
EIcDelta=-(samm/3)*(yMo(1,1)+4*yMo4+2*yMo2+yMo(1,NN))
EIcDelta = -3.4953e+05
EIcdelta=(samm/3)*(y2(1,1)+4*dy14+2*dy12+y2(1,1))+...
Ic/Ac)*(samm/3)*(cj3csFi(1,1)+4*dy24+2*dy22+cj3csFi(1,1))
EIcDelta = 277.39
H=-EIcDelta/EIcdelta
H = 1260.
```

Kahe liigendiga kaar

x	y	y ²	cosFi	cosFi ^(1/3)	cosFi*cosFi ^(1/3)
0.00000	0.00000	0.00000	0.89443	0.96349	0.86177
1.60000	0.76000	0.57760	0.91192	0.96973	0.88432
3.20000	1.44000	2.07360	0.92848	0.97557	0.90579
4.80000	2.04000	4.16160	0.94386	0.98092	0.92585
6.40000	2.56000	6.55360	0.95783	0.98574	0.94417
8.00000	3.00000	9.00000	0.97014	0.98995	0.96039
9.60000	3.36000	11.28960	0.98058	0.99348	0.97419
11.20000	3.64000	13.24960	0.98894	0.99630	0.98528
12.80000	3.84000	14.74560	0.99504	0.99834	0.99339
14.40000	3.96000	15.68160	0.99875	0.99958	0.99834
16.00000	4.00000	16.00000	1.00000	1.00000	1.00000
17.60000	3.96000	15.68160	0.99875	0.99958	0.99834
19.20000	3.84000	14.74560	0.99504	0.99834	0.99339
20.80000	3.64000	13.24960	0.98894	0.99630	0.98528
22.40000	3.36000	11.28960	0.98058	0.99348	0.97419
24.00000	3.00000	9.00000	0.97014	0.98995	0.96039
25.60000	2.56000	6.55360	0.95783	0.98574	0.94417
27.20000	2.04000	4.16160	0.94386	0.98092	0.92585
28.80000	1.44000	2.07360	0.92848	0.97557	0.90579
30.40000	0.76000	0.57760	0.91192	0.96973	0.88432
32.00000	-0.00000	0.00000	0.89443	0.96349	0.86177
32.00000	-0.00000	0.00000	0.89443	0.96349	0.86177

Lihttala sisejõud ja kahe liigendiga kaar

x	y	Qo	Mo	y*Mo
0.0000e+00	0.0000e+00	9.6000e+02	0.0000e+00	0.0000e+00
1.6000e+00	7.6000e-01	8.3200e+02	1.4336e+03	1.0895e+03

3.2000e+00	1.4400e+00	7.0400e+02	2.6624e+03	3.8339e+03
4.8000e+00	2.0400e+00	5.7600e+02	3.6864e+03	7.5203e+03
6.4000e+00	2.5600e+00	4.4800e+02	4.5056e+03	1.1534e+04
8.0000e+00	3.0000e+00	3.2000e+02	5.1200e+03	1.5360e+04
9.6000e+00	3.3600e+00	1.9200e+02	5.5296e+03	1.8579e+04
1.1200e+01	3.6400e+00	6.4000e+01	5.7344e+03	2.0873e+04
1.2800e+01	3.8400e+00	-6.4000e+01	5.7344e+03	2.2020e+04
1.4400e+01	3.9600e+00	-1.9200e+02	5.5296e+03	2.1897e+04
1.6000e+01	4.0000e+00	-3.2000e+02	5.1200e+03	2.0480e+04
1.7600e+01	3.9600e+00	-3.2000e+02	4.6080e+03	1.8248e+04
1.9200e+01	3.8400e+00	-3.2000e+02	4.0960e+03	1.5729e+04
2.0800e+01	3.6400e+00	-3.2000e+02	3.5840e+03	1.3046e+04
2.2400e+01	3.3600e+00	-3.2000e+02	3.0720e+03	1.0322e+04
2.4000e+01	3.0000e+00	-3.2000e+02	2.5600e+03	7.6800e+03
2.5600e+01	2.5600e+00	-3.2000e+02	2.0480e+03	5.2429e+03
2.7200e+01	2.0400e+00	-3.2000e+02	1.5360e+03	3.1334e+03
2.8800e+01	1.4400e+00	-3.2000e+02	1.0240e+03	1.4746e+03
3.0400e+01	7.6000e-01	-3.2000e+02	5.1200e+02	3.8912e+02
3.2000e+01	-3.5527e-15	-3.2000e+02	0.0000e+00	0.0000e+00
3.2000e+01	-3.5527e-15	-3.2000e+02	0.0000e+00	0.0000e+00

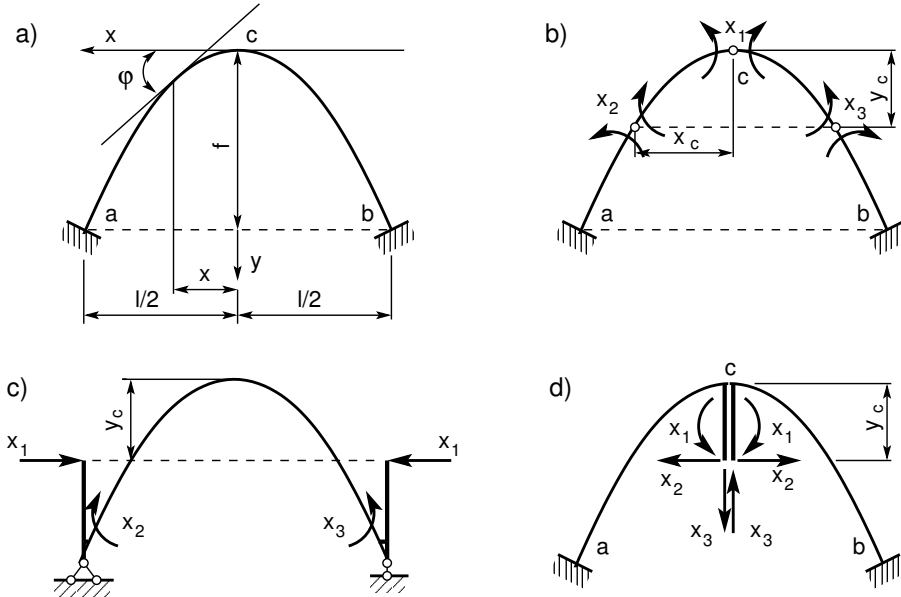
Kaare sisejõud

N	Q	M	x
1.5564e+03	2.9513e+02	0.0000e+00	0.0000e+00
1.4905e+03	2.4163e+02	4.7595e+02	1.6000e+00
1.4314e+03	1.8567e+02	8.4790e+02	3.2000e+00
1.3796e+03	1.2740e+02	1.1159e+03	4.8000e+00
1.3357e+03	6.7028e+01	1.2798e+03	6.4000e+00
1.3001e+03	4.8339e+00	1.3398e+03	8.0000e+00
1.2733e+03	-5.8848e+01	1.2958e+03	9.6000e+00
1.2556e+03	-1.2363e+02	1.1477e+03	1.1200e+01
1.2474e+03	-1.8906e+02	8.9573e+02	1.2800e+01
1.2489e+03	-2.5469e+02	5.3973e+02	1.4400e+01
1.2601e+03	-3.2000e+02	7.9722e+01	1.6000e+01
1.2745e+03	-2.5668e+02	-3.8187e+02	1.7600e+01
1.2857e+03	-1.9303e+02	-7.4267e+02	1.9200e+01
1.2936e+03	-1.2954e+02	-1.0027e+03	2.0800e+01
1.2984e+03	-6.6666e+01	-1.1618e+03	2.2400e+01
1.3001e+03	-4.8339e+00	-1.2202e+03	2.4000e+01
1.2989e+03	5.5574e+01	-1.1778e+03	2.5600e+01
1.2950e+03	1.1423e+02	-1.0345e+03	2.7200e+01
1.2888e+03	1.7087e+02	-7.9050e+02	2.8800e+01
1.2804e+03	2.2527e+02	-4.4565e+02	3.0400e+01
1.2701e+03	2.7730e+02	4.4767e-12	3.2000e+01
1.2701e+03	2.7730e+02	4.4767e-12	3.2000e+01

octave:30> diary off

12.4 Liigendita sümmeetriline kaar

Liigendita sümmeetriline kaar on kolmekordselt staatikaga määramatu (joonis 12.4).



Joonis 12.4. Liigendita sümmeetriline kaar

Lisatundmatu valikul on soovitatav, et võrrandisüsteemis

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = 0 \quad (12.33)$$

võrduksid kõik kõrvalsiirded nulliga ja $\delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$. Arvutuskeemides, joonistel 12.4 c) ja 12.4 d), kasutatakse jäiku konsoole. Jäiku konsoole kasutatakse liigendita suletud kontuuride arvutamisel. Arvutuskeem asendatakse kinemaatilisel ja staatiliselt ekvivalentse arvutuskeemiga [Rää75] (vt lõik lk 440 (lk 222)).

Kui põhiskeemis on jäikade konsoolide otsad kaare elastsuskeskmes, siis kõrvalsiire $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$.

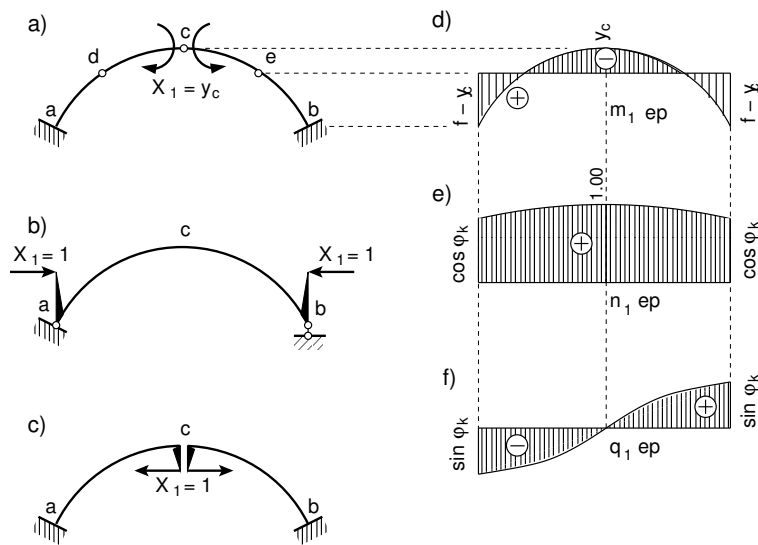
$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \delta_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = 0 \quad (12.34)$$

ja võrrandisüsteemi lahendid on

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \\ X_2 &= -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} \\ X_3 &= -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} \end{aligned} \quad (12.35)$$

Võtame kasutusele järgmised tundmatud:

- kolme liigendiga kaares sümmeetriline tundmatu $X_1 = y_c$ (vt joonis 12.5 a)), sümmeetriline grupptundmatu $X_2 = 1$ (joonis 12.6 a)) ja antisümmeetriline grupptundmatu $X_3 = x_c$ (joonis 12.7 a))
- kõvera tala puhul sümmeetrilised grupptundmatud $X_1 = 1$ (vt joonis 12.5 b)), $X_2 = 1$ (vt joonis 12.6 b)) ja antisümmeetriline grupptundmatu $X_3 = \frac{1}{2}$ (vt joonis 12.7 b))
- kahe konsooliga põhiskeemis $X_1 = 1$ (vt joonis 12.5 c)), $X_2 = 1$ (vt joonis 12.6 c)), $X_3 = 1$ (joonis 12.7 c)).



Joonis 12.5. Liigendita kaar. Tundmatu X_1

Kõigi kolme põhiskeemi jaoks on nendest tundmatutest põhjustatud sisejõudude avaldised ühesugused:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= y - y_c; & n_1 &= \cos \varphi; & q_1 &= -\sin \varphi \\
 m_2 &= 1; & n_2 &= 0; & q_1 &= 0 \\
 m_3 &= -x; & n_3 &= \sin \varphi; & q_3 &= \cos \varphi
 \end{aligned}
 \tag{12.36}$$

Kaare elastsuskeskme ordinaat y_c määratakse tingimusest $EI_c \delta_{12} = 0$. Avaldise (12.5) abil saame

$$\begin{aligned}
 EI_c \delta_{12} &= \int m_1 m_2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_1 n_2 \frac{A_c}{A} ds - \\
 &\quad - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_1 n_2}{\rho} \frac{A_c}{A_c} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{n_1 m_2}{\rho} \frac{A_c}{A_c} ds + \\
 &\quad + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int q_1 q_2 \frac{A_c}{A} ds = 0
 \end{aligned}
 \tag{12.37}$$

Arvestades avaldisi (12.36), kirjutame valemi (12.37) ringi

$$EI_c \delta_{12} = \int (y - y_c) \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{I} \int \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{A_c}{A_c} ds = 0 \quad (12.38)$$

Võrrandist (12.38) avaldame elastsuskeskme ordinaadi y_c

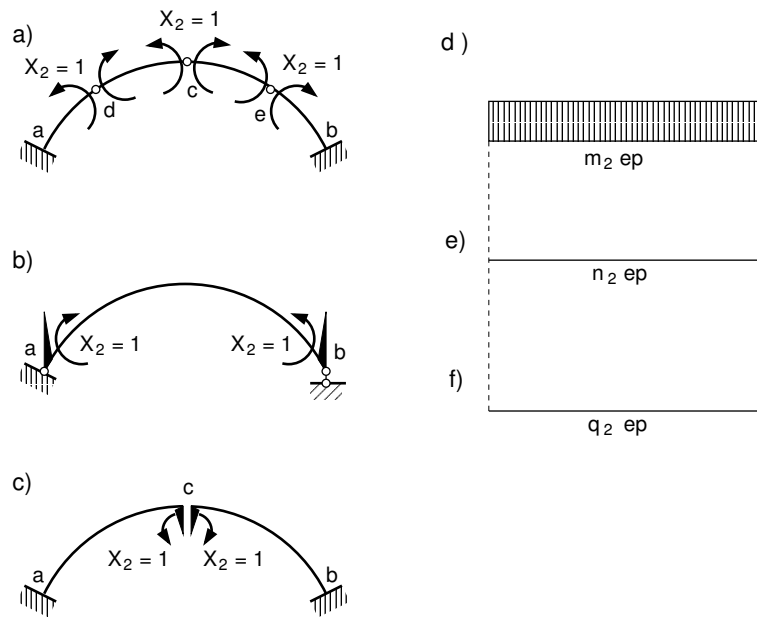
$$y_c = \frac{\int y \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{A_c}{A_c} ds}{\int \frac{I_c}{I} ds} \quad (12.39)$$

Koormusest põhjustatud siirete Δ_{1p} , Δ_{2p} ja Δ_{3p} arvutamiseks on soovitatav lahutada koormus sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks. Sümmeetrilisest koormusest saame siirded Δ_{1p} ja Δ_{2p} ning antisümmeetrilisest koormusest siirde Δ_{3p} . Siirded arvutatakse järgmiste avaldistega:

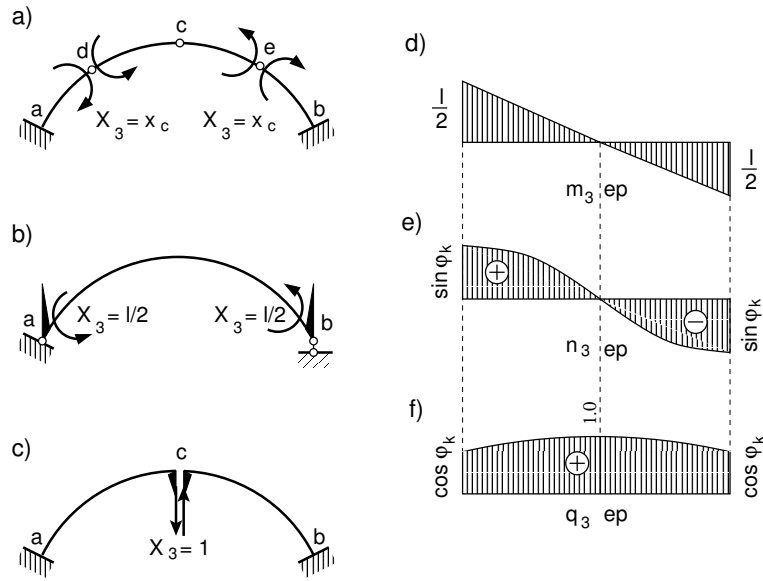
$$EI_c \delta_{ij} = \int m_i m_j \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_i n_j \frac{A_c}{A} ds - 2 \frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_i n_j}{\rho} \frac{A_c}{A_c} ds + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int q_i q_j \frac{A_c}{A} ds \quad (12.40)$$

siin $i = j$, ($j = 1, 2, 3$) ja joone $y = y(x)$ kõverusraadius $\rho = \frac{1}{\psi}$ (joone kõverus ψ_j – avaldis (1.17))

$$\rho = \frac{1}{\psi} = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad (12.41)$$



Joonis 12.6. Liigendita kaar. Tundmatu X_2



Joonis 12.7. Liigendita kaar. Tundmatu X_3

$$\begin{aligned}
 EI_c \Delta_{ip} = & \int m_i M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_i N_p^0 \frac{A_c}{A} ds - \\
 & - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_i N_p^0}{\rho} \frac{A_c}{A} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{n_i M_p^0}{\rho} \frac{A_c}{A} ds + \\
 & + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int q_i Q_p^0 \frac{A_c}{A} ds
 \end{aligned} \tag{12.42}$$

kus M_p^0 , Q_p^0 , N_p^0 on paindemoment, põik- ja pikijõud staatikaga määratavas põhiskeemis, mis saadakse liigendita kaarest kolme sideme eemaldamisega.

Kui valemities (12.40) ja (12.42) kasutada sisejõudude avaldisi (12.36), saame

$$\begin{aligned}
 EI_c \delta_{11} = & \int (y - y_c)^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds - \\
 & - 2 \frac{I_c}{A_c} \int \frac{(y - y_c) \cos \varphi}{\rho} \frac{A_c}{A} ds + \\
 & + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int \sin^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds
 \end{aligned} \tag{12.43}$$

$$EI_c \delta_{22} = \int \frac{I_c}{I} ds \tag{12.44}$$

$$\begin{aligned}
 EI_c \delta_{33} = & \int x^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \sin^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds + \\
 & + 2 \frac{I_c}{A_c} \int \frac{x \sin \varphi}{\rho} \frac{A_c}{A} ds + \\
 & + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds
 \end{aligned} \tag{12.45}$$

$$\begin{aligned}
EI_c \Delta_{1p} = & \int (y - y_c) M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int N_p^0 \cos \varphi \frac{A_c}{A} ds - \\
& - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{(y - y_c) N_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds - \\
& - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{M_p^0 \cos \varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds - \\
& - k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int Q_p^0 \sin \varphi \frac{A_c}{A} ds
\end{aligned} \tag{12.46}$$

$$EI_c \Delta_{2p} = \int M_p^0 \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{N_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds \tag{12.47}$$

$$\begin{aligned}
EI_c \Delta_{3p} = & - \int x M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int N_p^0 \sin \varphi \frac{A_c}{A} ds + \\
& + \frac{I_c}{A_c} \int \frac{x N_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{M_p^0 \sin \varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds + \\
& + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int Q_p^0 \cos \varphi \frac{A_c}{A} ds
\end{aligned} \tag{12.48}$$

Pärast tundmatute leidmist (vt avaldised (12.35)) arvutatakse sisejõud

$$\begin{aligned}
M_p &= M_p^0 + (y - y_c) X_1 + X_2 - x X_3 \\
N_p &= N_p^0 + X_1 \cos \varphi + X_3 \sin \varphi \\
Q_p &= Q_p^0 - X_1 \sin \varphi + X_3 \cos \varphi
\end{aligned} \tag{12.49}$$

12.5 Liigenditeta kaare arvutamise näited

12.5.1 Liigenditeta kaar. Näide 12.2

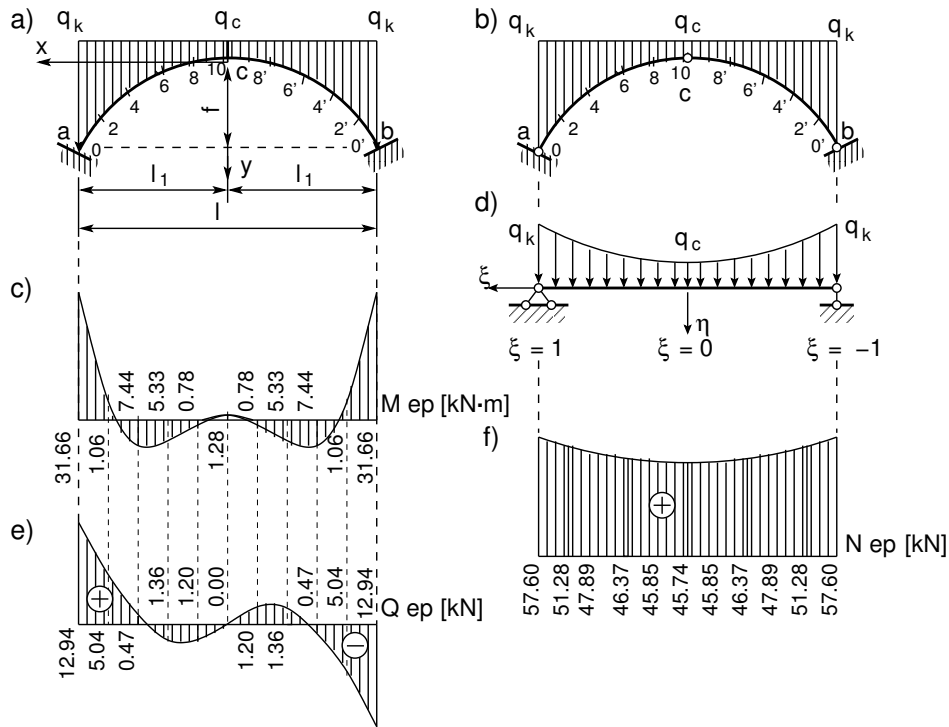
Näide 12.2 Arvutada liigenditeta kaare (joonis 12.8), mis on koormatud jaotatud koormusega q ($q_c = 1$ kN/m, $q_k = 5$ kN/m), sisejõudude M , Q ja N ordinaadid. Andmed: $l = 32$ m; $l_1 = 16$ m; $f = 4$ m; $A_c = 0.845$ m² ($h_c = 1.3$ m; $b_c = 0.65$ m); $I_c = 0.12$ m⁴; $G = 0.425E$; $\frac{I_c}{A_c} = 0.142$ m². Kaare telgjooneks on ruutparabool

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} \tag{12.50}$$

(Ülesanne on võetud raamatust [Rää75] lk 536 ja lahendatud GNU Octave'i programmiga *kaarPrbSTMSjPr.m* lk 737). Kaare ristlõige on jääva laiusega ja kõrgus muutub selliselt, et

$$I = \frac{I_c}{\cos \varphi} \tag{12.51}$$

$$A = \frac{A_c}{\sqrt[3]{\cos \varphi}} \tag{12.52}$$



Joonis 12.8. Liigenditeta kaar

Kaare elastsuskeskme ordinaat y_c arvutatakse avaldisega (12.39), kus

$$\frac{I_c}{I} = \cos \varphi, \quad \frac{A_c}{A} = \sqrt[3]{\cos \varphi}, \quad ds = \frac{dx}{\cos \varphi} \quad (12.53)$$

$$y_c = \frac{\int_0^{l/2} y dx - \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \frac{1}{\rho} \sqrt[3]{\cos \varphi} dx}{\int_0^{l/2} dx} \quad (12.54)$$

Kaare kõveruse ρ leiame valemiga (12.41)

$$\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{64f^2x^2}{l^4}\right)^3}}{\frac{8f}{l^2}} \quad (12.55)$$

Vastava lihttala paraboolse jaotusega koormuse saame kirjeldada avaldisega

$$\begin{aligned} q(\xi) &= N_1 \cdot q_k + N_2 \cdot q_c + N_3 \cdot q_k = \\ &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \cdot q_k + (1 - \xi^2) \cdot q_c + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \cdot q_k = \\ &= q_c + (q_k - q_c)\xi^2 \end{aligned} \quad (12.56)$$

siin on $\xi = \frac{x}{l/2}$ mõõduta koordinaat, mille null on tala keskel, N_i on kujufunktsioonid (Lagrange'i interpolatsioonipoliinoomi kordajad C.16, C.17, C.18 lk 655).

Lihttala (joonis 12.8 d) paindemomendi ja põikjõu epüüri ordinaadid paraboolsest koormusest

$$\begin{aligned}
M^0(\xi_k) &= V_a \cdot \left(\frac{l}{2} - x_k\right) - \int_{x_k}^{l/2} (x - x_k) \cdot q \, dx = \\
&= V_a \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\xi_k\right) - \int_{\xi_k}^1 q(\xi) \cdot (1 - \xi_k) \frac{l^2}{4} \, d\xi = \\
&= V_a \cdot \frac{l}{2}(1 - \xi_k) - q_c \cdot \left(\frac{1}{2} - \xi_k + \frac{\xi_k^2}{2}\right) \frac{l^2}{4} - (q_k - q_c) \left(\frac{1}{4} - \frac{\xi_k}{3} + \frac{\xi_k^4}{12}\right) \frac{l^2}{4} \quad (12.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^0(\xi_k) &= V_a - \int_{x_k}^{l/2} q \, dx = V_a - \int_{\xi_k}^1 q \frac{l}{2} \, d\xi = \\
&= V_a - q_c \cdot (1 - \xi_k) \frac{l}{2} - (q_k - q_c) \left(\frac{1}{3} - \frac{\xi_k^3}{3}\right) \frac{l}{2} \quad (12.58)
\end{aligned}$$

kus V_a on lihttala toereaktsioon antud koormusest

$$V_a = q_c \frac{l}{2} + (q_k - q_c) \frac{l^2}{6} \quad (12.59)$$

Lihttala paindemomendi ja põikjõu epüüri ordinaatide arvutamiseks parabolsest koormusest saame kasutada funktsiooni lihttalaPrbKSj.m (I.74 vt lk 737) ja programmi lihttalaPrbKSjPr.m vt lk 719).

Koormusest põhjustatud siirete leidmiseks arvutatakse sisejõudude M_p^0 , N_p^0 , Q_p^0 epüüride ordinaadid kolme liigendiga kaare (joonis 12.8 b) jaoks, mille kaks liigendit on kannaristlõigetes. Nende sisejõudude leidmiseks kaares (parabolse telgjoone kujuga) kasutame GNU Octave'i funktsiooni kaarPrbSTMSj.m (I.74 vt lk 737) ja programmi kaarPrbSTMSjPr.m (I.74 vt lk 737). See programm arvutab ka elastsuskeskme ordinaadi (vt avaldist(12.39)), kus

$$\int y \frac{I_c}{I} \, ds \approx 21.33333 \, \text{m}^2 \quad (12.60)$$

$$\frac{I_c}{A_c} \int \frac{\cos \varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A_c} \, ds \approx 0.62765 \, \text{m}^2 \quad (12.61)$$

$$\int \frac{I_c}{I} \, ds = 16 \, \text{m} \quad (12.62)$$

ja

$$y_c = \frac{21,33333 - 0.62765}{16} = 1.3294 \, \text{m} \quad (12.63)$$

Programmiga kaarPrbSTMSjPr.m lk 737 leitud tulemused ühtivad õpikus [Rää75] lk 538 toodud tulemustega. Toereaktsioonid:

$$V_{ap}^0 = q_c \frac{l}{2} + \frac{1}{3}(q_k - q_c) \frac{l}{2} = 1 \cdot 16 + \frac{16}{3} \cdot 4 = \frac{1120}{3} \, \text{kN} \quad (12.64)$$

$$H_p^0 = \left[1120 \cdot \frac{16}{3} - 16 \cdot 8.0 - \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \frac{16}{3} \right] / 4 = \frac{1600}{3} \, \text{kN} \quad (12.65)$$

Pikijõud lukuliigendis on $N_{cp}^0 = H_p^0$.

Sisejõud staatikaga määratavas põhiskeemis:

$$\begin{aligned} M_{xp}^0 &= N_{cp}^0 y - q_c \frac{x^2}{2} - 4(q_x - q_c) \frac{x^4}{12 \cdot l^2} = \\ &= \frac{1600}{3} y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{768} \end{aligned} \quad (12.66)$$

$$\begin{aligned} N_{xp}^0 &= N_{cp}^0 \cos \varphi + \left[q_c x + 4(q_x - q_c) \frac{x^3}{3 \cdot l^2} \right] \sin \varphi = \\ &= \frac{1600}{3} \cos \varphi + \left(x + \frac{x^3}{192} \right) \sin \varphi \end{aligned} \quad (12.67)$$

$$Q_{xp}^0 = -\frac{1600}{3} \sin \varphi + \left(x + \frac{x^3}{192} \right) \cos \varphi \quad (12.68)$$

Süirete $EI_c \delta_{11}$ ja $EI_c \delta_{22}$ arvutamisel avaldistega (12.43), (12.44) ja (12.46), (12.47) kasutame seoseid (12.53)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} EI_c \delta_{11} &= \int_0^{l/2} (y - y_c)^2 dx + \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx + \\ &+ k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \end{aligned} \quad (12.69)$$

$$\frac{1}{2} EI_c \delta_{22} = \int_0^{l/2} dx = 16 \text{ m} \quad (12.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} EI_c \Delta_{1p} &= \int_0^{l/2} (y - y_c) M_p^0 dx + \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} N_p^0 \sqrt[3]{\cos \varphi} dx - \\ &- k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} Q_p^0 \operatorname{tg} \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \end{aligned} \quad (12.71)$$

$$\frac{1}{2} EI_c \Delta_{2p} = \int_0^{l/2} M_p^0 dx \quad (12.72)$$

Avaldistes (12.69)–(12.72) ei ole arvestatud kõveruse $\frac{1}{\rho}$ mõju.

Programmiga *kaarPrbSTMSjPr.m* I.74 arvutatud võrrandisüsteemi kordajad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} EI_c \delta_{11} &= 25.407 \text{ m} \\ \frac{1}{2} EI_c \delta_{22} &= 16 \text{ m} \\ \frac{1}{2} EI_c \Delta_{1p} &= 1929.9 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\ \frac{1}{2} EI_c \Delta_{2p} &= 1820.3 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \end{aligned} \quad (12.73)$$

Võrrandisüsteemi lahend

$$X_1 = -75.959 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad X_2 = -113.77 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad X_3 = 0 \quad (12.74)$$

Liigenditeta kaare paindemomendi M_p , normaaljõu N_p ja põikjõu Q_p epüüri ordinaadid arvutame järgmiste valemite abil:

$$\begin{aligned} M_p &= M_p^0 + (y - y_c) X_1 + X_2 - x X_3 \\ N_p &= N_p^0 + X_1 \cos \varphi + X_3 \sin \varphi \\ Q_p &= Q_p^0 - X_1 \sin \varphi + X_3 \cos \varphi \end{aligned} \quad (12.75)$$

Liigendita kaare (joonis 12.8) arvutuspäevik 12.2.

Arvutuspäevik 12.2 octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> kaarPrbSTMSjPr

Liigenditeta kaare sisejõudude arvutamine

l = 32
f = 4
qk = 5
qc = 1
NN = 20
Ic = 0.12000
Ac = 0.84500
G = 0.42500
krist = 1.2000
l1 = 16
samm = 1.6000
Va = 37.333
Vb = 37.333

Lihttala sisejõud; x-koordinaat vasakult toelt

Q	M	x
37.33333	0.00000	0.00000
23.72267	96.46080	3.20000
14.20800	156.19413	6.40000
7.76533	190.66880	9.60000
3.37067	208.07680	12.80000
0.00000	213.33333	16.00000
-3.37067	208.07680	19.20000
-7.76533	190.66880	22.40000
-14.20800	156.19413	25.60000
-23.72267	96.46080	28.80000
-37.33333	0.00000	32.00000

Mk = 213.33

H = 53.333

Staatikaga määratud kaare sisejõud;

x-koordinaat vasakust kannast

N	Q	M	x
64.39876	9.54056	0.00000	0.00000
58.32913	2.21844	19.66080	3.20000
55.16671	-1.71642	19.66080	6.40000
53.82054	-2.84499	11.46880	9.60000
53.40404	-1.95293	3.27680	12.80000
53.33333	-0.00000	0.00000	16.00000
53.40404	1.95293	3.27680	19.20000
53.82054	2.84499	11.46880	22.40000
55.16671	1.71642	19.66080	25.60000

```
58.32913  -2.21844  19.66080  28.80000
64.39876  -9.54056   0.00000  32.00000
```

```
-----
y-koordinaadi algus lukuliigendis
```

```
-----
          y          sinFi          cosFi          roo
-----
4.0000e+00  4.4721e-01  8.9443e-01  4.4721e+01
2.5600e+00  3.7139e-01  9.2848e-01  3.9979e+01
1.4400e+00  2.8735e-01  9.5783e-01  3.6416e+01
6.4000e-01  1.9612e-01  9.8058e-01  3.3939e+01
1.6000e-01  9.9504e-02  9.9504e-01  3.2481e+01
4.4409e-16  5.5511e-17  1.0000e+00  3.2000e+01
1.6000e-01  -9.9504e-02  9.9504e-01  3.2481e+01
6.4000e-01  -1.9612e-01  9.8058e-01  3.3939e+01
1.4400e+00  -2.8735e-01  9.5783e-01  3.6416e+01
2.5600e+00  -3.7139e-01  9.2848e-01  3.9979e+01
4.0000e+00  -4.4721e-01  8.9443e-01  4.4721e+01
-----
```

```
Elastsuskeskme ordinaat Yc:
```

```
Yc = 1.3294
```

```
Võrrandisüsteemi kordajad:
```

```
EIDelta1p = 25.407
```

```
EIDelta22p = 16
```

```
EIDelta1p = 192.99
```

```
EIDelta2p = 182.03
```

```
Võrrandisüsteemi lahend:
```

```
X1 = -7.5959
```

```
X2 = -11.377
```

```
X3 = 0
```

```
Liigendita kaare epüüride ordinaadid
```

```
-----
          x          Mep          Qep          Nep
-----
0.00000  -31.66216  12.93755  57.60478
3.20000  -1.06327   5.03949  51.27652
6.40000   7.44413   0.46624  47.89116
9.60000   5.32885  -1.35531  46.37215
12.80000  0.78288  -1.19711  45.84584
16.00000  -1.27857  -0.00000  45.73744
19.20000  0.78288   1.19711  45.84584
22.40000  5.32885   1.35531  46.37215
25.60000  7.44413  -0.46624  47.89116
28.80000  -1.06327  -5.03949  51.27652
32.00000  -31.66216 -12.93755  57.60478
-----
```

```
octave-3.0.1:4> diary off
```

Tabel 12.1. Liigendita kaare sisejõudude võrdlus

x	M (Octave)	M (R.R)	Q (Octave)	Q (R.R)	N (Octave)	N (R.R)
m	kN·m	t·m	kN	t	kN	t
0.0	-31.66216	-31.560	12.93755	12.97	57.60478	57.63
3.2	-1.06327	-1.001	5.03949	5.03	51.27652	51.30
6.4	7.44413	7.477	0.46624	0.46	47.89116	47.92
9.6	5.32885	5.340	-1.35531	-1.37	46.37215	46.40
12.8	0.78288	0.781	-1.19711	-1.20	45.84584	45.89
16.0	-1.27857	-1.284	-0.00000	-0.00	45.73744	45.76
19.2	0.78288	0.781	1.19711	1.20	45.84584	45.89
22.4	5.32885	5.340	1.35531	1.37	46.37215	46.40
25.6	7.44413	7.477	-0.46624	-0.46	47.89116	47.92
28.8	-1.06327	-1.001	-5.03949	-5.03	51.27652	51.30
32.0	-31.66216	-31.560	-12.93755	-12.97	57.60478	57.63

Tabelis 12.1 on GNU Octave'i programmiga *kaarPrbSTMSjPr.m* arvatatud liigenditeta kaare sisejõud (tähistus (Octave)) ja õpikus [Rää75] lk 540 toodud sisejõud (tähistus (R.R)). Nende sisejõudude erinevus on tingitud arvutustäpsusest.

12.6 Rõnga arvutus

Rõngast arvutame, kui suure kõverusega kaart (12.6). Olgu rõnga keskpinna kõverusraadius $\rho = r$ (joonis 12.9(a)). Nii nagu näidatud õpikus [Kis86], saab taandada konstantse suure kõverusega varda koormusliikme (12.6) arvutamise avaldise kolmeliikmega avaldiseks.

Koostame joonisel 12.9 toodud rõnga elemendi tasakaaluvõrrandid

$$\sum M_o = 0; \quad \frac{dN}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dM}{ds} = q_t^v \frac{(\rho + h_2)^2}{\rho^2} = \frac{q_t \rho + m}{\rho} \quad (12.76)$$

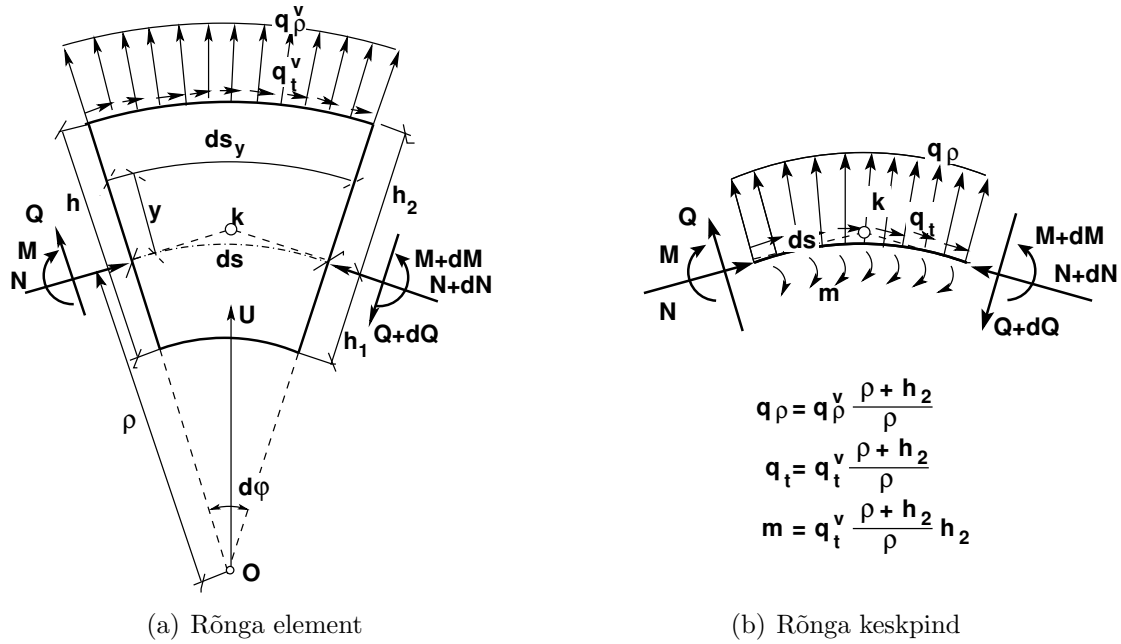
$$\sum M_k = 0; \quad \frac{dM}{ds} = Q + q_t^v \frac{\rho + h_2}{\rho} h_2 = Q + m \quad (12.77)$$

$$\sum U = 0; \quad \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{\rho} = q_\rho^v \frac{\rho + h_2}{\rho} = q_\rho \quad (12.78)$$

siin

$$m = q_t^v \frac{\rho + h_2}{\rho} h_2 \quad (12.79)$$

$$q_t = q_t^v \frac{\rho + h_2}{\rho} \quad (12.80)$$



Joonis 12.9. Rõnga koormused

Avaldisest (12.76) saame ($\rho = r$)

$$dM = -dN \cdot r + (q_t r + m) ds \quad (12.81)$$

Avaldist (12.81) integreerides saame

$$M = -N \cdot r + \int_0^s (q_t r + m) ds + D \quad (12.82)$$

Avaldises (12.82) integreerimiskonstandi D avaldame algtingimuste kaudu. Kui $s = 0$, $M = M_0$ ja $N = N_0$, siis $D = M_0 + N_0 r$.

Nüüd saame

$$M = -N \cdot r + C \quad (12.83)$$

siin

$$C = \int_0^s (q_t r + m) ds + D \quad (12.84)$$

$$D = M_0 + N_0 r \quad (12.85)$$

Ühikjõust $F_i = 1$ korral saame

$$m_i = -n_i \cdot r + d_i \quad (12.86)$$

Koormusest siirde arvutamisel kasutame valemit (12.6), kus $\rho = r$ ja normaaljõu positiivne suund on survel (joonis 12.9)

$$\Delta_{ip} = \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p}{EI} + \frac{n_i N_p}{EA} + k_j \frac{q_i Q_p}{GA} + \frac{m_i N_p}{EA r} + \frac{n_i M_p}{EA r} + \frac{m_i M_p}{EA r^2} \right) ds \quad (12.87)$$

Avaldise (12.87) neljandasse ja kuuendasse liikmesse asetame m_i avaldise (12.86), saame

$$\Delta_{ip} = \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p}{EI} + \frac{n_i N_p}{EA} + k_j \frac{q_i Q_p}{GA} + (-n_i r + d_i) \frac{N_p}{EA r} + \frac{n_i M_p}{EA r} + (-n_i r + d_i) \frac{M_p}{EA r^2} \right) ds \quad (12.88)$$

Pärast avaldise (12.88) lihtsustamist saame

$$\Delta_{ip} = \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p}{EI} + k_j \frac{q_i Q_p}{GA} \right) ds + d_i \int_0^{l_j} \left(\frac{N_p r + M_p}{EA r^2} \right) ds \quad (12.89)$$

Avaldise (12.83) arvestamisel saame

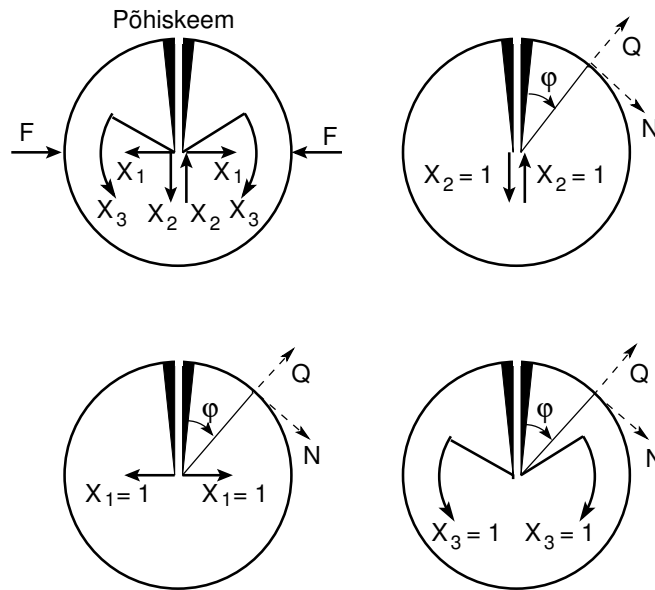
$$\Delta_{ip} = \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p}{EI} + k_j \frac{q_i Q_p}{GA} \right) ds + d_i \int_0^{l_j} \frac{C_p}{EA r^2} ds \quad (12.90)$$

Ühikjõududest siirete arvutamisel võtame $c_i = C_p$ ja $c_i = d_i$. Ühikjõududest siirete arvutamiseks saame avaldise

$$\delta_{ij} = \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i m_j}{EI} + k_j \frac{q_i q_j}{GA} \right) ds + \frac{d_i d_j}{r^2} \int_0^{l_j} \frac{ds}{EA} \quad (12.91)$$

Rõnga arvutamisel põhiskeemi moodustamisel kasutame jäiku konsooli (joonis 12.10). Jäikade konsoolide elastsuskese langeb kokku rõnga geomeetrilise keskpunktiga. Jäikade konsoolide kasutamisel põhiskeemis saame järgmise jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \delta_{11} + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{22} + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \quad (12.92)$$



Joonis 12.10. Rõngas. Põhiskeem

Ühikkoormused on näidatud joonisel 12.10. Nende skeemide abil leiame ühikjõududest põhjustatud sisejõud:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -r \cos \varphi; & m_2 &= r \sin \varphi; & m_3 &= 1; \\
 q_1 &= \sin \varphi; & q_2 &= \cos \varphi; & q_3 &= 0; \\
 n_1 &= \cos \varphi; & n_2 &= -\sin \varphi; & n_3 &= 0; \\
 d_1 &= 0; & d_2 &= 0; & d_3 &= 1;
 \end{aligned}
 \tag{12.93}$$

Kanoonilise võrrandisüsteemi (12.92) kordajate leidmisel kasutame avaldise (12.91), (12.93)

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta_{11}}{2} &= \int_0^\pi \frac{r^2 \cos^2 \varphi \cdot r d\varphi}{EI} + k_j \int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi \cdot r d\varphi}{GA} = \frac{\pi r^3}{2EI} + \frac{k_j \pi}{2GA} \\
 \frac{\delta_{22}}{2} &= \int_0^\pi \frac{r^2 \sin^2 \varphi \cdot r d\varphi}{EI} + k_j \int_0^\pi \frac{\cos^2 \varphi \cdot r d\varphi}{GA} = \frac{\pi r^3}{2EI} + \frac{k_j \pi}{2GA} \\
 \frac{\delta_{33}}{2} &= \int_0^\pi \frac{1^2 \cdot r d\varphi}{EI} + \frac{1}{r^2} \int_0^\pi \frac{r d\varphi}{EA} = \frac{\pi r}{EI} + \frac{\pi}{rEA}
 \end{aligned}
 \tag{12.94}$$

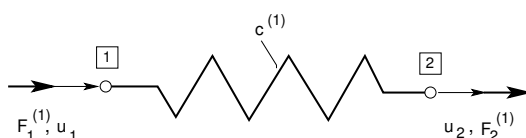
Kanoonilise võrrandisüsteemi (12.92) vabaliikmete arvutamisel kasutame avaldist (12.90).

13. Lõplike elementide meetod

Loeng 1¹: Vedrusüsteem. Näide 13.1. Loeng 2²: Varrassüsteem. Näide 13.2. Sõrestik. Näide 13.5 Tala.

13.1 Elastse vedru jäikusmaatriks

Vaatleme elastse vedru (joonis 13.1) tasakaalu. Vedru otste siirded on u_1 ja u_2 . Vedrule mõjuvad jõud $F_1^{(1)}$ ja $F_2^{(1)}$. Vedru jäikus on $c^{(1)}$.



Joonis 13.1. Vedru

Vedru otstes mõjuvate jõudude ja siirete vahel on järgmine seos (13.1):

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

Kinnitame vedru sõlmpunktis $\boxed{2}$ nii, et $u_2 = 0$. Võrrandist (13.1) saab järgmise seose (13.2):

$$F_1^{(1)} = k_{11}u_1 = c^{(1)}u_1 \quad (13.2)$$

Tasakaalutingimusest saame

$$F_2^{(1)} = -F_1^{(1)} = -c^{(1)}u_1, \quad k_{21} = -c^{(1)} \quad (13.3)$$

Kinnitame vedru sõlmpunktis $\boxed{1}$ nii, et $u_1 = 0$. Võrrandist (13.1) saame seose (13.4):

$$F_1^{(2)} = k_{22}u_2 = c^{(1)}u_2 \quad (13.4)$$

Tasakaalutingimusest saame

$$F_1^{(1)} = -F_2^{(1)} = -c^{(1)}u_2, \quad k_{12} = -c^{(1)} \quad (13.5)$$

¹./videod/LemLoeng1.html

²./videod/LemLoeng2.html

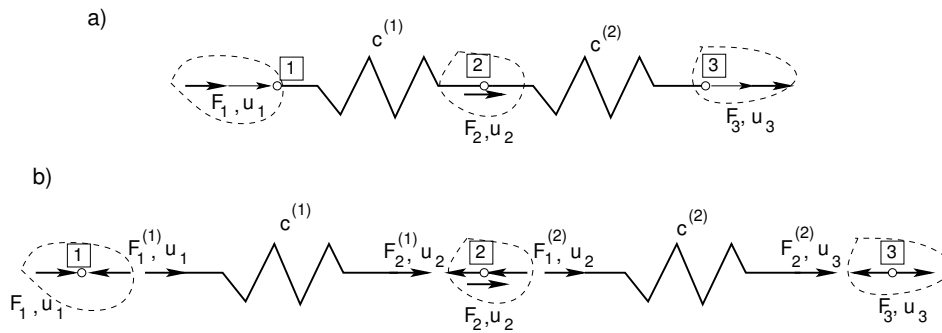
Nüüd võib avaldise (13.1) kirjutada kujul

$$\begin{bmatrix} c^{(1)} & -c^{(1)} \\ -c^{(1)} & c^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (13.6)$$

Tasakaaluvõrrandi (13.6) vasakul pool on vedru jäikusmaatriks.

13.2 Konstruktsiooni jäikusmaatriks

Vaatleme kahest vedrust (joonis 13.2 a)) koosnevat süsteemi, mis on koormatud kolme jõuga F_1 , F_2 , F_3 sõlmpunktides $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$. Vedrude jäikusd olgu $c^{(1)}$, $c^{(2)}$.



Joonis 13.2. Vedrusüsteem

Eraldame sõlmed ja vedrud (joonis 13.2 b)). Koostame sõlmede kohta tasakaalutingimused

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1^{(1)} \\ F_2 &= F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_3 &= F_2^{(2)} \end{aligned} \quad (13.7)$$

Vedru otste siirete ja otstes mõjuvate jõudude vahelised seosed võib kirjutada maatrikskujul

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(1)} & -c^{(1)} \\ -c^{(1)} & c^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (13.8)$$

$$\begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(2)} & -c^{(2)} \\ -c^{(2)} & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (13.9)$$

Seose (13.8) ja (13.9) paremal pool asetsevad maatrikseid nimetatakse vedru jäikusmaatriksiks.

Asetades seosed (13.8) ja (13.9) võrrandisüsteemi (13.7), saame

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(1)} & -c^{(1)} & 0 \\ -c^{(1)} & c^{(1)} + c^{(2)} & -c^{(2)} \\ 0 & -c^{(2)} & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (13.10)$$

Võrrandisüsteemi (13.10) üldkuju

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

Võrrandisüsteemi (13.11) paremal pool asetsevat maatriksit nimetatakse konstruksiooni jäikusmaatriksiks. Vaatleme võrrandisüsteemi (13.11) koostamiseks vajalikke tabeleid. Esmalt kirjeldame vedrusüsteemi elementide asetust (tabel 13.1).

Tabel 13.1. Vedrusüsteemi topoloogia

Vedru nr	Algus	Lõpp
(1)	1	2
(2)	2	3

Seejärel koostame elementide indekstabelid (tabel 13.2), mis annavad üldise jäikusmaatriksi aadressid (tabel 13.3).

Tabel 13.2. Elementide indekstabelid

Element nr 1			Element nr 2		
Sõlm	1	2	Sõlm	2	3
1	11	12	2	22	23
2	21	22	3	32	33

Tabel 13.3. Konstruksiooni jäikusmaatriksi aadressid

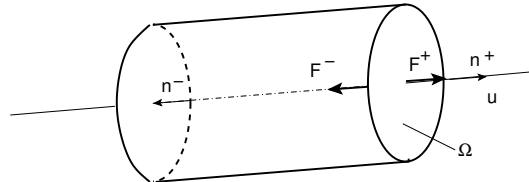
Sõlm nr	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Indekstabelite alusel kantakse elementide jäikusmaatriksid konstruksiooni jäikusmaatriksisse

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ 0 & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (13.12)$$

13.3 Elastse vedru virtuaaltöö

Vaatleme elastse vedru sisejõudude tööd. Vedru otsa ristlõikes Ω mõjuvad jõud F^+ ja F^- (joonis 13.3), mis on võrdsed ja vastupidi suunatud. Olgu välispind pinnanormaaliga n^+ ja sisepind pinnanormaaliga n^- . Siis on välispinnal mõjuv jõud F^+ rajajõud ja sisepinnal mõjuv jõud F^- sisejõud. Ristlõike siiret tähistab u .



Joonis 13.3. Rajajõud ja sisejõud

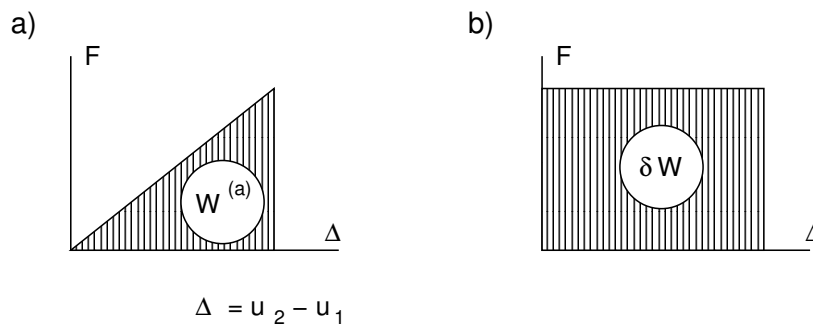
Rajajõu F^+ töö W_r siirdel u on

$$W_r = F^+ \cdot u \quad (13.13)$$

Sisejõu F^- töö W_s siirdel u on

$$W_s = -F^- \cdot u \quad (13.14)$$

Eristatakse aktiivtööd $W^{(a)}$ ja passiivtööd $W^{(p)}$. Aktiivtöö jõud teevad tööd nende endi põhjustatud siiretel (joonis 13.4 a). Passiivtöö puhul on jõudude töö virtuaalsiiretel (neid siirdeid ei kutsu esile vaadeldavad jõud)(joonis 13.4 b).



Joonis 13.4. Virtuaaltöö

Olgu vedru otste siirded u_1 , u_2 ja vedru pikenemine Δ

$$\Delta = u_2 - u_1 \quad (13.15)$$

Sisejõudude virtuaaltöö δW_s on

$$\delta W_s = -F (\delta \Delta) = -F (\delta u_2 - \delta u_1) \quad (13.16)$$

Arvestades jõu F ja vedru pikenemise Δ vahelist seost

$$F = c \cdot \Delta = c \cdot (u_2 - u_1) \quad (13.17)$$

saame

$$\delta W_s = -c \cdot (u_2 - u_1) (\delta \Delta) = -[\delta u_1 (cu_1 - cu_2) + \delta u_2 (cu_2 - cu_1)] \quad (13.18)$$

Avaldise (13.18) võib kirjutada maatrikskujul

$$\delta W_s = - \begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (13.19)$$

Välisjõudude virtuaaltöö δW_v on

$$\delta W_v = \begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (13.20)$$

Energiateoreemi põhjal on välisjõudude töö W_v ja sisejõudude töö W_s summa null

$$\delta W_v + \delta W_s = 0 \quad (13.21)$$

Arvestades välisjõudude virtuaaltööd (13.20) ja sisejõudude virtuaaltööd (13.19), saame

$$\begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (13.22)$$

Avaldise (13.22) võib esitada ka lühemalt indekskujul

$$\delta u_i \cdot F_i = \delta u_i \cdot k_{ij} \cdot u_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (13.23)$$

siin k_{ij} on jäikusmaatriksi \mathbf{k} elemendid

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad (13.24)$$

Jättes ära võrrandisüsteemis (13.22) δu_1 ja δu_2 , saame tasakaaluvõrrandi

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (13.25)$$

või indekskujul

$$F_i = k_{ij} \cdot u_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (13.26)$$

13.4 Võrrandisüsteemi lahendamine

Vaatleme võrrandisüsteemi (13.27) lahendamist

$$\begin{bmatrix} c^{(1)} & -c^{(1)} & 0 \\ -c^{(1)} & c^{(1)} + c^{(2)} & -c^{(2)} \\ 0 & -c^{(2)} & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (13.27)$$

mille maatrikskuju on

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (13.28)$$

Võrrandisüsteemi (13.27) determinant

$$\det \mathbf{K} = 0 \quad (13.29)$$

Determinandi null on tingitud sellest, et vedrusüsteemil (joonis 13.2) ei ole kirjeldatud rajatingimusi.

Kinnitame vedrusüsteemi sõlmpunktis $\boxed{1}$ ($u_1 = 0$), siis saame võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} c^{(1)} & \vdots & -c^{(1)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -c^{(1)} & \vdots & c^{(1)} + c^{(2)} & -c^{(2)} \\ 0 & -c^{(2)} & \vdots & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ \cdots \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \cdots \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (13.30)$$

Tundmatuteks on u_2 , u_3 ja F_1 . Leiame esmalt u_2 ja u_3 võrrandisüsteemi (13.30) kahest viimasest võrrandist

$$\begin{bmatrix} c^{(1)} + c^{(2)} & -c^{(2)} \\ -c^{(2)} & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (13.31)$$

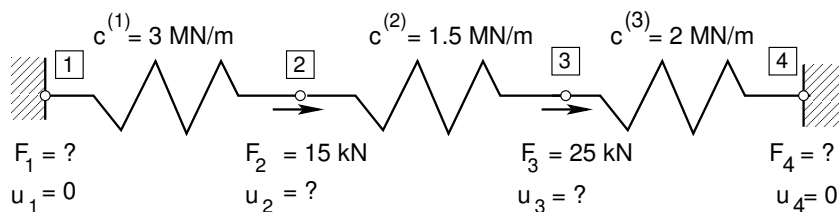
Võrrandisüsteemi (13.30) esimesest võrrandist (13.32)

$$\begin{bmatrix} -c^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \end{bmatrix} \quad (13.32)$$

arvutame tundmatu F_1 leitud u_2 ja u_3 abil.

13.4.1 Vedrusüsteemi arvutamine. Näide 13.1

Näide 13.1 Leida joonisel 13.5 näidatud vedrusüsteemi toereaktsioonid F_1 , F_2 ja sõlmpunktide $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ siirded u_2 , u_3 . Vedrusüsteem on koormatud jõududega $F_2 = 15 \text{ kN}$ ja $F_3 = 25 \text{ kN}$. Vedrude jäikused on $c^{(1)} = 3 \text{ MN/m}$ ja $c^{(2)} = 1.5 \text{ MN/m}$ ja $c^{(3)} = 2 \text{ MN/m}$.



Joonis 13.5. Vedrusüsteemi arvutuskeem

Vedrusüsteemi taskaalu võrrand on

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \vdots & K_{12} & K_{13} & \vdots & K_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{21} & \vdots & K_{22} & K_{23} & \vdots & K_{24} \\ K_{31} & \vdots & K_{32} & K_{33} & \vdots & K_{34} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{41} & \vdots & K_{42} & K_{43} & \vdots & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ \dots \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_4 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (13.33)$$

Jäikusmaatriksi (13.33) koostamiseks kirjeldame süsteemi topoloogiat (tabel 13.4). Koostame

Tabel 13.4. Süsteemi topoloogia

Vedru nr	Algus	Lõpp
(1)	1	2
(2)	2	3
(3)	3	4

elementide indekstabelid (tabel 13.5) ja elementide jäikusmaatriksid (tabel 13.6)

Tabel 13.5. Vedrude indekstabelid

Element nr 1			Element nr 2			Element nr 3		
Sõlm	1	2	Sõlm	2	3	Sõlm	3	4
1	11	12	2	22	23	3	33	34
2	21	22	3	32	33	4	43	44

Tabel 13.6. Vedrude jäikusmaatriksid

Element nr 1			Element nr 2			Element nr 3		
Sõlm	1	2	Sõlm	2	3	Sõlm	3	4
1	3.0	-3.0	2	1.5	-1.5	3	2.0	-2.0
2	-3.0	3.0	3	-1.5	1.5	4	-2.0	2.0

Tabelist 13.5 näeme, missugustele aadressidele tuleb kanda elementide jäikusmaatriksi elemendid (tabel 13.6). Konstruksiooni jäikusmaatriksi elemendid on

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= k_{11}^{(1)} = 3.0 \text{ MN/m} \\
 K_{12} &= k_{12}^{(1)} = -3.0 \text{ MN/m} \\
 K_{13} &= 0 \\
 K_{14} &= 0 \\
 K_{22} &= k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} = 3.0 + 1.5 = 4.5 \text{ MN/m} \\
 K_{23} &= k_{12}^{(2)} = -1.5 \text{ MN/m} \\
 K_{24} &= 0 \\
 K_{33} &= k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} = 1.5 + 2.0 = 3.5 \text{ MN/m} \\
 K_{34} &= k_{12}^{(3)} = -2.0 \text{ MN/m} \\
 K_{44} &= k_{22}^{(3)} = 3.0 \text{ MN/m}
 \end{aligned} \tag{13.34}$$

Jäikusmaatriks \mathbf{K} on sümmeetriline ($K_{ij} = K_{ji}$).

Esmalt koostame tasakaalvõrrandisüsteemi (13.33) teise ja kolmanda võrrandi

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{13.35}$$

Võrrandisüsteemi (13.35) arvuline kuju

$$\begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 \\ -1.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \cdot 10^{-3} \\ 25 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \tag{13.36}$$

Võrrandisüsteemi (13.36) determinant

$$\det \mathbf{K}_2 = 13.5 \text{ MN}^2/\text{m}^2 \tag{13.37}$$

Võrrandisüsteemi (13.35) lahendiks saame

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{F} \tag{13.38}$$

kus \mathbf{K}_2^{-1} on maatriksi \mathbf{K}_2 (13.35) pöördmaatriks

$$\mathbf{K}_2^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{K}_2} \begin{bmatrix} K_{33} & -K_{23} \\ -K_{32} & K_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{13.5} \begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 \\ 1.5 & 4.5 \end{bmatrix} \tag{13.39}$$

Võrrandisüsteemi (13.36) lahendiks saame

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13.5} \begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 \\ 1.5 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \cdot 10^{-3} \\ 25 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.666... \cdot 10^{-3} \\ 1.0 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \text{ m} \tag{13.40}$$

Tasakaalvõrrandisüsteemi (13.33) esimesest ja neljandast võrrandist saame

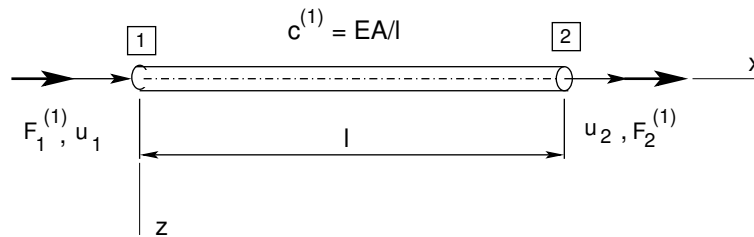
$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} F_1 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{12} & K_{13} \\ K_{42} & K_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} -3.2 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.666... \cdot 10^{-3} \\ 1.0 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.0 \\ -20.0 \end{bmatrix} \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{13.41}$$

Kontrollime vedrusüsteemi tasakaalu

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -20.0 + 15.0 + 25.0 - 20.0 = 0 \tag{13.42}$$

13.5 Varda pikke jäikusmaatriks

Vaatleme varda elementi (joonis 13.6) pikkusega l ja jäikusega $c^{(1)} = \frac{EA}{l}$. Varda teljega seome kohalikud koordinaadid x^* ja z^* . Kohalikes koordinaatides varda jäikusmaatriksi ja tasakaaluvõrrandi saame sarnaselt vedru tasakaaluvõrrandile (13.6).



Joonis 13.6. Varda element

Varda tasakaaluvõrrand on

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (13.43)$$

ehk maatrikskuju

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (13.44)$$

kus varda jäikusmaatriks \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.45)$$

13.6 Jäikusmaatriks üldkoordinaatides

Rajajõudude (kontaktjõudude) positiivse suuna määramisel on kasutusel kaks märgikokkulepet (joonis 1.19, kus on kasutusel parema käe teljestik, vt joonis 1.20). *Esimene märgikokkulepe* (joonis 1.19 b)) on tuttav tehnilisest mehaanikast. *Teine märgikokkulepe* (joonis 1.19 a)) on vajalik varrassüsteemide tasakaaluvõrrandite algoritmide koostamiseks.

Võrreldes I märgikokkulepet II märgikokkuleppega, näeme, et varda lõpus olevad rajajõudude (kontaktjõudude) suunad langevad kokku. Varda alguses on rajajõudude suunad vastasmärgilised. *Sisejõude* leitakse rajajõudude kaudu. Sisejõudude märgid ei tohi sõltuda rajajõudude märgikokkuleppest.

Sisejõudude märgireeglid I märgikokkuleppe puhul on raamatus [MR96] lk 35 „Tõmbejõu loeme positiivseks”, „Survejõu loeme negatiivseks”; lk 45 „Põikjõu range märgireegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis *positiivset sisepinda* nihutab koordinaattelje positiivses suunas või *negatiivset sisepinda* koordinaattelje negatiivses suunas”, „Põikjõu

märgi tööreegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis nihutab *positiivset sisepinda* päripäeva"; lk 43 „Paindemomendi loeme positiivseks, kui varda positiivsed kiud on tõmmatud”. Tehnilises mehaanikas (tugevusõpetuses) langevad sisejõudude märgireeglid ja rajajõudude (kontaktjõudude) märgireeglid (I märgikokkulepe) kokku. Kasutades II märgikokkulepet, tuleb sisejõudude märgi määramisel rajajõudude (kontaktjõudude) kaudu varda alguses arvestada nende erinevaid märke. Rõhutame, et sisejõud on varda *sisepinnal* ja rajajõud (kontaktjõud) mõjuvad varda *välispinnal*. Lisame varda tasakaaluvõrranditele (13.43) kohalikes koordinaatides tühjad read, mis vastavad z^* koordinaadile

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \\ u_2^* \\ v_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1}^* \\ F_{z1}^* \\ F_{x2}^* \\ F_{z2}^* \end{bmatrix} \quad (13.46)$$

ehk maatrikskujul

$$\mathbf{K}^* \mathbf{u}^* = \mathbf{F}^* \quad (13.47)$$

Teisendame jõud üldkoordinaatidest kohalikesse koordinaatidesse (13.48). Ühe jõu teisendus üldkoordinaatidest kohalikesse koordinaatidesse on toodud avaldisega (1.45).

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^* \\ F_{z1}^* \\ F_{x2}^* \\ F_{z2}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & 0 & 0 \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta \\ 0 & 0 & -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} \quad (13.48)$$

ehk maatrikskujul

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{T} \mathbf{F} \quad (13.49)$$

siin on \mathbf{T} pikkele töötava varda jõudude teisendusmaatriks

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & 0 & 0 \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta \\ 0 & 0 & -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (13.50)$$

Teisendusmaatriksi \mathbf{T} abil avaldame siirded kohalikes koordinaatides \mathbf{d}^* , siirete kaudu üldkoordinaatides \mathbf{d}

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (13.51)$$

Teisendusmaatriks (13.50) on ortogonaalne, s.o

$$\mathbf{T}^{(-1)} = \mathbf{T}^{(T)} \quad (13.52)$$

kus

$\mathbf{T}^{(T)}$ – transponeeritud maatriks

$\mathbf{T}^{(-1)}$ – maatriksi \mathbf{T} pöördmaatriks

Teisenduste (13.49), (13.51) pöördteisendused on

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^* \quad (13.53)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}^T \mathbf{d}^* \quad (13.54)$$

Jäikusmaatriksi \mathbf{K} üldkoordinaatides saame avaldise (13.53), (13.47) ja (13.51) abil

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{d}^* = \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T}}_{\mathbf{K}} \mathbf{d} \quad (13.55)$$

kus

$\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T}$ on jäikusmaatriks \mathbf{K} üldkoordinaatides

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \quad (13.56)$$

Teostame maatriksi \mathbf{T}^T ja maatriksi \mathbf{K}^* korrutamise, tähistades $c = \cos \alpha$, $s = \cos \beta$. Korrutise elementideks on maatriksi \mathbf{T}^T i-nda rea ja maatriksi \mathbf{K}^* j-nda veeru vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{aligned} & \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^* \\ \mathbf{T}^T = & \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}; \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & 0 & -c & 0 \\ s & 0 & -s & 0 \\ -c & 0 & c & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \quad (13.57) \end{aligned}$$

Korrutame saadud tulemust $\mathbf{T}^T \mathbf{K}^*$ teisendusmaatriksiga \mathbf{T}

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} = \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* = & \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & 0 & -c & 0 \\ s & 0 & -s & 0 \\ -c & 0 & c & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \end{bmatrix}; \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \quad (13.58) \end{aligned}$$

Varda elemendi jäikusmaatriks üldkoordinaatides

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & \vdots & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & \vdots & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & \vdots & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & \vdots & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (13.59)$$

Saadud jäikusmaatriksi esitame alammaatriksi \mathbf{k}

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (13.60)$$

kaudu

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (13.61)$$

13.7 Elemendis mõjuv pikkejõud

Tasakaaluvõrrandisüsteemi lahendamise tulemusel saadakse sõlmpunktide siirded u_1 , v_1 , u_2 , v_2 . Varda elemendis tuleb leida sisejõud. Sisejõudude leidmiseks vaatleme varda tasakaaluvõrrandit kohalikes koordinaatides (13.47)

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{K}^* \mathbf{d}^* = \mathbf{K}^* \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (13.62)$$

Korrutise $\mathbf{F}^* \mathbf{T}$ saame järgmiselt:

$$\mathbf{K}^* = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^* \mathbf{T} \quad (13.63)$$

võrrandist (13.62) saame korrutise (A.25) abil

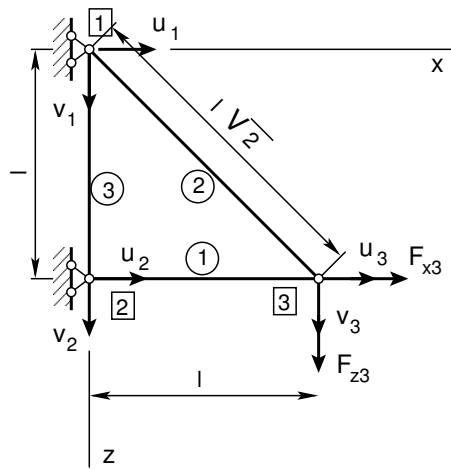
$$\begin{bmatrix} F_{x1}^* \\ F_{x2}^* \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (13.64)$$

Arvestades, et varda lõpus olev rajajõu märk langeb kokku sisejõu märgiga, saame

$$N = [F_{x2}^*] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (13.65)$$

13.7.1 Varrassüsteemi arvutamine. Näide 13.2

Näide 13.2 Leida varrassüsteemi (joonis 13.7) sõlmepunkti $\boxed{3}$ siirded u_3 ja v_3 . Koormus F_{x3} ja F_{z3} on rakendatud sõlme $\boxed{3}$. Varraste $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ pikkused on l , $l\sqrt{2}$ ja l .



Joonis 13.7. Varrassüsteemi arvutusskeem

Varrassüsteemi sõlmepunktide siirete vektor \mathbf{d} ja jõudude vektor \mathbf{F} on

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \\ F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \quad (13.66)$$

Jäikusmaatriksi \mathbf{K}_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) koostamiseks kirjeldame süsteemi topoloogiat (tabel 13.7).

Võttes arvesse varraste suunda (tabel 13.7), esitame varraste suunakoosinused tabelis (tabel 13.8). Koostame elementide indekstabelid (tabel 13.9) ja jäikusmaatriksid (tabel 13.10), kus $\mathbf{k}_{ij}^{(n)}$ on alammaatriksid (13.67), (13.68), (13.69), (vaata avaldist 13.60). Saame

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11}^{(1)} &= \mathbf{k}_{22}^{(1)} = \mathbf{k}^{(1)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{12}^{(1)} &= \mathbf{k}_{21}^{(1)} = -\mathbf{k}^{(1)} \end{aligned} \quad (13.67)$$

Tabel 13.7. Varrassüsteemi topoloogia

Varras nr	Algus	Lõpp
(1)	2	3
(2)	1	3
(3)	1	2

Tabel 13.8. Varraste suunakoosinused

Varras nr	$\cos \alpha$ c	$\cos \beta$ s
(1)	1.0	0.0
(2)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
(3)	0.0	1.0

Tabel 13.9. Varraste indekstabelid

Element nr 1			Element nr 2			Element nr 3		
Sõlm	2	3	Sõlm	1	3	Sõlm	1	2
2	22	23	1	11	13	1	11	12
3	32	33	3	31	33	2	21	22

Tabel 13.10. Varraste jäikusmaatriksid

Element nr 1			Element nr 2			Element nr 3		
Sõlm	2	3	Sõlm	1	3	Sõlm	1	2
2	$\mathbf{k}_{11}^{(1)}$	$\mathbf{k}_{12}^{(1)}$	1	$\mathbf{k}_{11}^{(2)}$	$\mathbf{k}_{12}^{(2)}$	1	$\mathbf{k}_{11}^{(3)}$	$\mathbf{k}_{12}^{(3)}$
3	$\mathbf{k}_{21}^{(1)}$	$\mathbf{k}_{22}^{(1)}$	3	$\mathbf{k}_{21}^{(2)}$	$\mathbf{k}_{22}^{(2)}$	2	$\mathbf{k}_{21}^{(3)}$	$\mathbf{k}_{22}^{(3)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11}^{(2)} &= \mathbf{k}_{22}^{(2)} = \mathbf{k}^{(2)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{12}^{(2)} &= \mathbf{k}_{21}^{(2)} = -\mathbf{k}^{(2)} \end{aligned} \quad (13.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11}^{(3)} &= \mathbf{k}_{22}^{(3)} = \mathbf{k}^{(3)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{12}^{(3)} &= \mathbf{k}_{21}^{(3)} = -\mathbf{k}^{(3)} \end{aligned} \quad (13.69)$$

Koostame tasakaalvõrrandite süsteemi alammaatriksite abil

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(2)} + \mathbf{k}_{11}^{(3)} & \vdots & \mathbf{k}_{12}^{(3)} & \vdots & \mathbf{k}_{12}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{k}_{21}^{(3)} & \vdots & \mathbf{k}_{11}^{(1)} + \mathbf{k}_{22}^{(3)} & \vdots & \mathbf{k}_{12}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{k}_{21}^{(2)} & \vdots & \mathbf{k}_{21}^{(1)} & \vdots & \mathbf{k}_{22}^{(1)} + \mathbf{k}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \dots \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \dots \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ \dots \\ F_{x2} \\ F_{z2} \\ \dots \\ F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \quad (13.70)$$

Võrrandisüsteem (13.70) on sümmeetriline. Võttes arvesse alammaatriksite avaldised (13.67), (13.68) ja (13.69), saame

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cdot & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \\ F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \quad (13.71)$$

Süüded u_3, v_3 leiame võrrandisüsteemi (13.71) kahest viimasest võrrandist:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \quad (13.72)$$

Võrrandisüsteemi (13.72) lahend on

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{l}{EA} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \quad (13.73)$$

Jõud sõlmedes $\boxed{1}$ ja $\boxed{2}$ leiame võrrandisüsteemi (13.71) esimesest neljast võrrandist:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (13.74)$$

Varda $\boxed{1}$ sisejõud N_1

$$N_1 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} = F_{x3} - F_{z3} \quad (13.75)$$

Varda ② sisejõud N_2

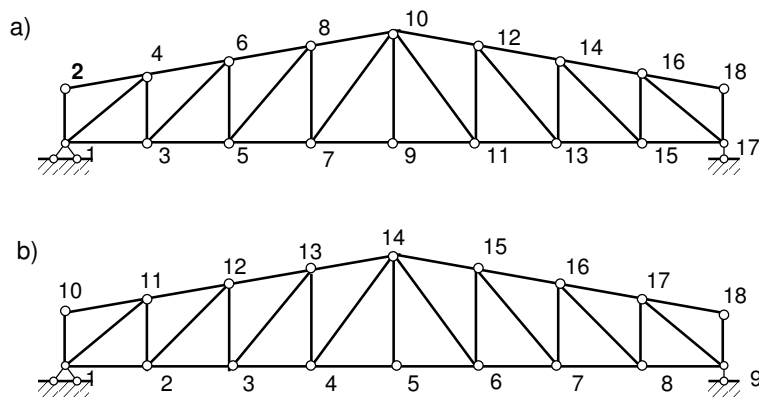
$$N_2 = \frac{EA}{l\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} = \sqrt{2}F_{z3} \quad (13.76)$$

Kolmanda varda ③ sisejõud $N_3 = 0$.

13.8 Sõlmede nummerdamisest

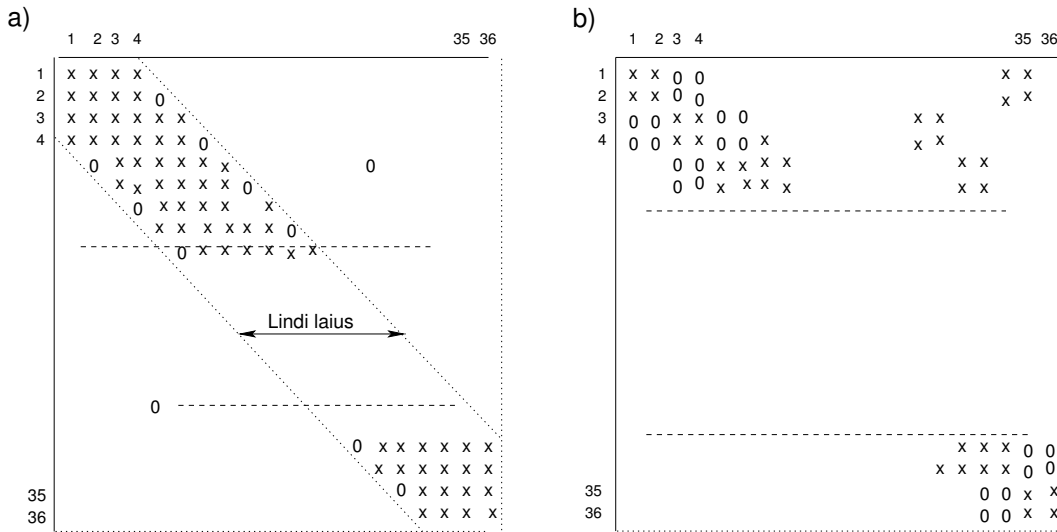
Tasakaaluvõrrandite vasaku poole maatriksid on hõredad maatriksid, s.o sisaldavad palju nullelemente. Sõlmede nummerdamise järjekorrast sõltub varraste jäikusmaat-



Joonis 13.8. Sõlmede nummerdamine

riksi elementide asukoht tasakaaluvõrrandisüsteemis. Joonisel 13.8 on näidatud kahte sõlmede nummerdamisviisi.

Joonisel 13.8 a) näidatud nummerdamise tulemusel saadakse lintvõrrandisüsteemi maatriks (joonis 13.9 a)). Joonisel 13.8 b) on konstruktsiooni jäikusmaatriksis hõre maatriks (vt lisa B lk 647). Võrrandisüsteemi lahendamiseks, mille vasak pool on hõre maatriks, kasutatakse hõredate võrrandisüsteemide lahendamise programme.



Joonis 13.9. Võrrandisüsteemi kuju

13.9 Sõrestiku arvutamise näited

13.9.1 Sõrestiku arvutamine. Näide 13.3

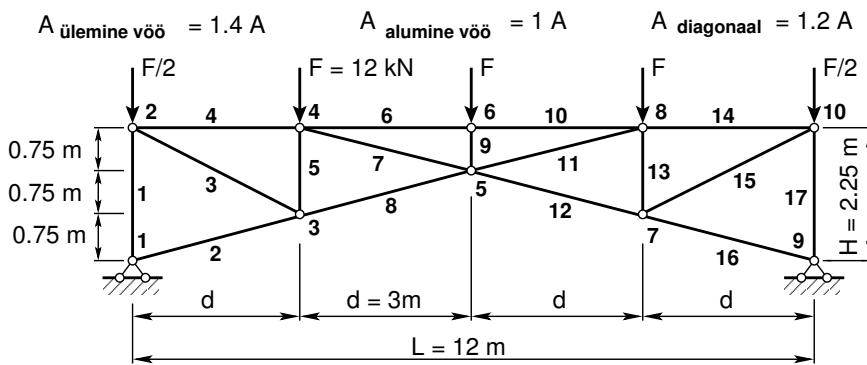
Näide 13.3 Arvutada pikijõud joonisel 13.10 näidatud staatikaga määramatus sõrestikus. Sõrestiku kõrgus $H = 2.25\text{ m}$ ja selle $L = 12\text{ m}$. Sõrestiku ülemise vöö sõlmedes mõjub koormus $F = 12\text{ kN}$.

Staatikaga määramatus tasandsõrestikus arvutame liigsidemete arvu valemiga (6.1):

$$n = n_v + n_t - 2 * n_s = 17 + 4 - 2 * 10 = 1 \quad (13.77)$$

kus $n_v = 17$ on sõrestikuvarraste arv, $n_t = 4$ toesidemete arv, $n_s = 10$ sõrestikusõlmede arv.

Lõplike elementide puhul peab jälgima, et arvutusskeem ei oleks hetkmuutuv (vt lk 86) või mehhanism. Lõplike elementide meetodiga saab arvutada, kui staatikaga määramatuse aste on $n \geq 0$.



Joonis 13.10. Staatikaga määramatu sõrestik

Ülesande lahendamisel kasutame GNU Octave'i programmi *srstkLemPY.m*³ lk 738. Lõplike elementide meetod (LEM) arvutab esmalt siirded, siis leiab sisejõud. Arvutamiseks on vaja teada sõrestiku varraste ristlõike jääkust EA. Esmakordseks arvutamiseks võib valida ristlõike pindalaks $A = 1$. Arvutiprogrammiga leiame maksimaalse jõu $N_2 = N_{16} = -38.622 \text{ N}$. Edasi leiame vajaliku ristlõike pindala. Terae elastsusmoodul ($E=210 \text{ GPa}$) $E = 2.1E + 11 \text{ Pa}$ ja lubatav pingeline $[\sigma] = 0.16 \text{ GPa} = 1.6E + 08 \text{ Pa}$. Vajalik ristlõike pindala

$$A \geq \frac{N}{\varphi[\sigma]} = \frac{3.862E + 04}{0.28[1.6E + 08]} = 8.621E - 04 \text{ m}^2 = 8.621 \text{ cm}^2 \quad (13.78)$$

siin φ on nõtketegur (vt [Jür85] lk 368, .djvu lk 186).

Valime $A = 2 \times 4.79 = 9.58 \text{ cm}^2 \geq 8.621 \text{ cm}^2$ ($2 \times 60 \times 40 \times 5$ Ruuki erikülgsed nurkraud $i_x = 1.89 \text{ cm}$). Varda saledus λ

$$\lambda = \frac{l_2}{i_x} = \frac{309.23}{1.89} = 163.6 \Rightarrow \varphi = 0.28 \quad (13.79)$$

Pärast ristlõike valimist arvutame sõrestiku sõlmpunktide siirded ja varraste sisejõud. Lahendamisel saadud tulemused on toodud päevikus 13.1.

Arvutuspäevik 13.1 octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> srstkLemPY

=====

```
Järgnev on sõrestiku arvutus:
A = 9.5800e-04
Aa = 9.5800e-04
Ay = 0.0013412
Ad = 0.0011496
E = 2.1000e+11
EAa = 201180000
EAy = 2.8165e+08
EAd = 241416000
SolmedeArv = 10
ElementideArv = 17
```

=====

```
Sõlmede koordinaadid
Jrk   X       Z
-----
  1    0.0000  0.0000
  2    0.0000 -2.2500
  3    3.0000 -0.7500
  4    3.0000 -2.2500
  5    6.0000 -1.5000
  6    6.0000 -2.2500
  7    9.0000 -0.7500
  8    9.0000 -2.2500
  9   12.0000  0.0000
 10   12.0000 -2.2500
-----
```

³./octaveProgrammid/srstkLemPY.Kommentaariid.pdf

```

=====
Elementide topoloogia
Nr      Algus  Lõpp    A          E
-----
  1      1      2      1.150e-03 2.100e+11
  2      1      3      9.580e-04 2.100e+11
  3      2      3      1.150e-03 2.100e+11
  4      2      4      1.341e-03 2.100e+11
  5      3      4      1.150e-03 2.100e+11
  6      4      6      1.341e-03 2.100e+11
  7      4      5      1.150e-03 2.100e+11
  8      3      5      9.580e-04 2.100e+11
  9      5      6      1.150e-03 2.100e+11
 10      6      8      1.341e-03 2.100e+11
 11      5      8      1.150e-03 2.100e+11
 12      5      7      9.580e-04 2.100e+11
 13      7      8      1.150e-03 2.100e+11
 14      8     10      1.341e-03 2.100e+11
 15      7     10      1.150e-03 2.100e+11
 16      7      9      9.580e-04 2.100e+11
 17      9     10      1.150e-03 2.100e+11
-----

```

```

=====
Toesõlmed
Jrk  X-suunas  Z-suunas
-----
  1      1      1
  2      0      0
  3      0      0
  4      0      0
  5      0      0
  6      0      0
  7      0      0
  8      0      0
  9      1      1
 10      0      0
-----

```

```

=====
Sõlmede vabadusastmete numbrid
Jrk  X-suunas  Z-suunas
-----
  1     17     18
  2      1      2
  3      3      4
  4      5      6
  5      7      8
  6      9     10
  7     11     12
  8     13     14
  9     19     20
 10     15     16

```

```

-----
Elementide suunakoosinused
JrkNr  cosAlpha  cosBeta
-----
  1      0.0000  -1.0000
  2      0.9701  -0.2425
  3      0.8944   0.4472
  4      1.0000   0.0000
  5      0.0000  -1.0000
  6      1.0000   0.0000
  7      0.9701   0.2425
  8      0.9701  -0.2425
  9      0.0000  -1.0000
 10      1.0000   0.0000
 11      0.9701  -0.2425
 12      0.9701   0.2425
 13      0.0000  -1.0000
 14      1.0000   0.0000
 15      0.8944  -0.4472
 16      0.9701   0.2425
 17      0.0000  -1.0000
-----

```

```

=====
Jõud sõlmedes [kN]
Jrk  X-suunas  Z-suunas
-----
  1      0.0000   0.0000

```

2	0.0000	6.0000			
3	0.0000	0.0000			
4	0.0000	12.0000			
5	0.0000	0.0000			
6	0.0000	12.0000			
7	0.0000	0.0000			
8	0.0000	12.0000			
9	0.0000	0.0000			
10	0.0000	6.0000			

			1	0.000e+00	0.000e+00
			2	4.625e-02	1.411e-02
			3	-1.022e-02	1.906e-01
			4	2.677e-02	1.991e-01
			5	-1.133e-16	3.435e-01
			6	-1.196e-16	3.472e-01
			7	1.022e-02	1.906e-01
			8	-2.677e-02	1.991e-01
			9	0.000e+00	0.000e+00
			10	-4.625e-02	1.411e-02

Sõlmede siirded [cm] (LEM)

Jrk	x-suunas	z-suunas
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Varraste sisejõud (LEM)

Jrk	N [kN]
1	-15.1420
2	-36.5223
3	20.4422
4	-18.2841
5	-13.7131
6	-25.1363
7	7.0631
8	-17.6755
9	-12.0000
10	-25.1363
11	7.0631
12	-17.6755
13	-13.7131
14	-18.2841
15	20.4422
16	-36.5223
17	-15.1420

Sõrestiku toereaktsioonid [kN]

Sõlme nr	Kinni nr	Toereaktsioon
1	17	35.4318
1	18	-24.0000
9	19	-35.4318
9	20	-24.0000

```
octave-3.0.1:4> diary off
```


13.9.2 Sõrestiku arvutamine. Näide 13.4

Näide 13.4 [Sõrestiku arvutus] Arvutada näites 6.2 lk 158 toodud staatikaga määratud sõrestik sõrestik lõplike elementide meetodiga.

GNU Octave'i programm *srstkLEM.m* lk 738 arvutab staatiliselt määratud sõrestiku varraste sisejõud võrdluseks programmiga *srstkNBA.m* lk 720.

Lahendamisel saadud tulemused on toodud päevikus 13.2.

Arvutuspäevik 13.2

```
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> srstkLEM
```

```
=====
```

Järgnev on sõrestiku arvutus:

```
Aa = 1
Ay = 1
Ad = 1
E = 210000
SolmedeArv = 16
ElementideArv = 29
```

```
=====
Varraste sisejõud (LEM)
Jrk      N [kN]
-----
 1  -32.6159
 2   5.0000
 3  25.4688
 4 -32.0866
 5   5.5360
 6  25.4688
 7   7.9444
 8 -30.0553
 9  -1.7535
10  30.8437
11   4.0000
12 -31.8750
13   1.7188
14  30.8437
15   0.0000
16 -31.8750
17   8.2812
18  -4.2187
19  26.9062
20 -24.5907
21  -0.0000
22  26.9062
23   6.5000
24 -26.2527
25   1.4007
26  23.2813
27   8.0000
28 -29.8145
29  23.2812
```

```
=====
Sõrestiku toereaktsioonid [kN]
Sõlme nr  Kinni nr  Toereaktsioon
-----
```

```
 1         30      0.0000
 1         31     -20.3750
16         32     -18.6250
-----
```

```
octave-3.0.1:4> diary off
```

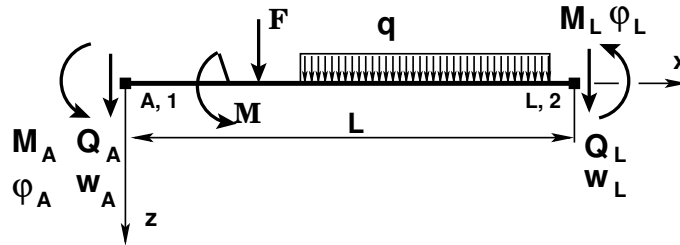
Leitud varraste sisejõud langevad kokku lk 160, 161 esitatutega.

13.10 Tala paine

Virtuaalsiirete printsiip varda elemendi (joonis 13.11) jaoks on toodud avaldisega (D.36 lk 669). Virtuaalsiirete printsiip väidab: *kui tala element on sellele rakendatud koormuse mõjul tasakaalus, siis tala elemendi mis tahes väikestel võimalikel siiretel sise-, kontakt- ja välisjõudude tööde summa on null*. Sisejõudude töö $-\delta d^T [\mathbf{K}] [d]$ on negatiivne ja on toodud teisele poole võrdusmärki:

$$[\delta d^T] [\mathbf{K}] [d] = [\delta d^T] [\mathbf{F}] + [\delta d^T] [\mathbf{F}_q] \quad (13.80)$$

Joonisel 13.11 esitatud jõudude ja siirete suunad vastavad teisele märgikokkuleppele.



Joonis 13.11. Tala elemendi jõudude ja siirete positiivsed suunad

Virtuaalsiirete printsiibist (13.80) saame varda elemendi tasakaaluvõrrandi (13.81).

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}_q^{(e)} \quad (13.81)$$

kus $\mathbf{K}^{(e)}$ on tala elemendi jäikusmaatriks,
 $\mathbf{F}^{(e)}$ – tala elemendi kontaktjõud (raja jõud),
 $\mathbf{F}_q^{(e)}$ – tala elemendi koormus,
 $\mathbf{d}^{(e)}$ – tala elemendi otsade siirded ja pöörded.

13.10.1 Tala painde jäikusmaatriks

Lõplike elementide meetodi (LEM) rakendamiseks vaatleme toodud lõplikku elementi (joonis 13.11).

Tala otstes mõjuvatest kontaktjõududest ja siiretest moodustame vektorid

$$\mathbf{F}^{(e)} = \begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_L \\ M_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}^{(e)} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix} \quad (13.82)$$

Moodustame tala alguses ja lõpus olevatest siiretest vastavad vektorid

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix} \quad (13.83)$$

ning tala alguses ja lõpus olevatest kontaktjõududest vektorid

$$\mathbf{s}_A = \begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_L = \begin{bmatrix} Q_L \\ M_L \end{bmatrix} \quad (13.84)$$

Jäikusmaatriksi leidmiseks vaatleme ülekandemaatriksit \mathbf{U} (F.33) ja võrrandit (F.31), mille struktuur on

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_L \\ \mathbf{s}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_A \\ \mathbf{s}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad (13.85)$$

Võrrandisüsteemi (13.85) teisendame kujule

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_A \\ \mathbf{s}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{12}^{-1}\mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12}^{-1} \\ \mathbf{U}_{21} - \mathbf{U}_{22}\mathbf{U}_{12}^{-1}\mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{22}\mathbf{U}_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_A \\ \mathbf{v}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{12}^{-1}\mathbf{f}_1 \\ -\mathbf{U}_{22}\mathbf{U}_{12}^{-1}\mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad (13.86)$$

ehk

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \cdot \mathbf{d}^{(e)} - \mathbf{F}_q^{(e)} \quad (13.87)$$

Kirjutame võrrandi (13.87) kujul

$$\mathbf{K}^{(e)} \cdot \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}_q^{(e)} \quad (13.88)$$

kus $\mathbf{K}^{(e)}$ on toodud avaldisega

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (13.89)$$

elemendi kontaktjõud $\mathbf{F}^{(e)}$ ja sõlmpunkti siirded $\mathbf{d}^{(e)}$ on toodud avaldisega (13.82) ning elemendile mõjuv koormusvektor $\mathbf{F}_q^{(e)}$ – avaldisega

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_q^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{qA} \\ f_{mA} \\ f_{qL} \\ f_{mL} \end{bmatrix} = \frac{ql}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -l \\ 6 \\ l \end{bmatrix} \quad (13.90)$$

Tala elemendi, millel on momendiliigend paremal, jäikusmaatriksi arvutame maatriksi kondensatsiooni valemiga (13.92) (vt jaotised A.12.1 ja A.12.2 valemid (A.69), (A.74) ja (A.75):

$$\mathbf{K}_{\text{par}}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} - \frac{1}{k_{44}} \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{41} & k_{42} & k_{43} \end{bmatrix} \quad (13.91)$$

$$\mathbf{K}_{\text{par}}^{(e)} = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 \\ -6l & 4l^2 & 6l \\ -12 & 6l & 12 \end{bmatrix} - \frac{EI_y l}{l^3} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -6l \\ 2l^2 \\ 6l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6l & 2l^2 & 6l \end{bmatrix} \quad (13.92)$$

$$\mathbf{K}_{\text{par}}^{(e)} = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & -3l & -3 \\ -3l & 3l^2 & 3l \\ -3l & 3l & 3 \end{bmatrix} \quad (13.93)$$

Koormusvektoriks $\mathbf{f}_{\text{par}}^{(e)}$ kondensatsiooni valemiga (A.70).

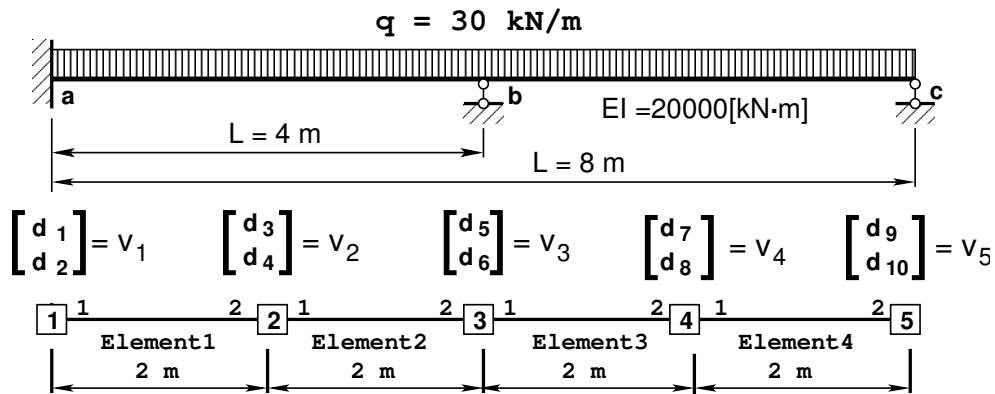
$$\mathbf{f}_{\text{par}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{qA} \\ \tilde{f}_{mA} \\ \tilde{f}_{qL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{qA} \\ f_{mA} \\ f_{qL} \end{bmatrix} - \frac{1}{k_{44}} \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} f_{mL} \quad (13.94)$$

$$\mathbf{f}_{\text{par}}^{(e)} = \frac{q_z l}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -l \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{l^3} \frac{l}{4} \begin{bmatrix} -6l \\ 2l^2 \\ 6l \end{bmatrix} \frac{q_z l^2}{12} = \frac{q_z l}{8} \begin{bmatrix} 5 \\ -l \\ 3 \end{bmatrix} \quad (13.95)$$

13.10.2 LEM. Tala arvutus. Näide 13.5

Näide 13.5 Leida joonisel 13.12 tala põikjõud ja paindemomendid lõplike elementide meetodiga. Tala on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega $q_z = 30 \text{ kN/m}$. Tala ristlõike jäikus on $EI = 2 \cdot 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$. Tala silded on 4 m.

Ülesande lahendamiseks saab kasutada GNU Octave'is koostatud programmi *LemTalaNaide1.m* lk 738.



Joonis 13.12. Tala arvutus LEM-iga

Vaadeldava tala jagame elementideks pikkusega 2 m. Tala elemendi jäikusmaatriksi arvutame avaldisele (13.89) järgi:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} 30.0 & -30.0 & \vdots & -30.0 & -30.0 \\ -30.0 & 40.0 & \vdots & 30.0 & 20.0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -30.0 & 30.0 & \vdots & 30.0 & 30.0 \\ -30.0 & 20.0 & \vdots & 30.0 & 40.0 \end{bmatrix} *10^3 \quad (13.96)$$

Koormusvektori $\mathbf{F}_q^{(e)}$ (13.97) leiame avaldise (13.90) järgi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_q^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{qA} \\ f_{mA} \\ f_{qL} \\ f_{mL} \end{bmatrix} = \frac{ql}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -l \\ 6 \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.0 \\ -10.0 \\ 30.0 \\ 10.0 \end{bmatrix} \quad (13.97)$$

Tala elemendi, momendiliigendiga paremal, jäikusmaatriksi moodustame valemi (13.93) järgi:

$$\mathbf{K}_{\text{par}}^{(e)} = \begin{bmatrix} 7.5 & -15.0 & -7.5 \\ -15.0 & 30.0 & 15.0 \\ -7.5 & 15.0 & 7.5 \end{bmatrix} *10^3 \quad (13.98)$$

Tala elemendi, momendiliigendiga paremal, koormusvektori moodustame valemi (13.95) järgi:

$$\mathbf{f}_{\text{par}}^{(e)} = \frac{q_z l}{8} \begin{bmatrix} 5 \\ -l \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{15}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (13.99)$$

Tala tasakaaluvõrrand:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_q \quad (13.100)$$

kus \mathbf{K} on toodud avaldisega (13.102)

ja siirete \mathbf{d} , sõlmkoormuse \mathbf{F} ja koormuse vektorid \mathbf{F}_q on kirjeldatud (13.101):

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \\ d_5 \\ d_6 \\ \dots \\ d_7 \\ d_8 \\ \dots \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ \dots \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 \\ \dots \\ w_4 \\ \varphi_4 \\ \dots \\ w_5 = 0 \\ \varphi_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 = ? \\ F_2 = ? \\ \dots \\ F_3 \\ F_4 \\ \dots \\ F_5 = ? \\ F_6 \\ \dots \\ F_7 \\ F_8 \\ \dots \\ F_9 = ? \\ F_{10} = 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_q = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_3 \\ f_4 \\ \dots \\ f_5 \\ f_6 \\ \dots \\ f_7 \\ f_8 \\ \dots \\ f_9 \\ f_{10} \end{bmatrix} \quad (13.101)$$

$$\mathbf{Kd} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} + k_{21}^{(2)} & k_{44}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{34}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & k_{13}^{(3)} & k_{14}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} + k_{21}^{(3)} & k_{23}^{(3)} & k_{24}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{31}^{(3)} & k_{33}^{(3)} + k_{11}^{(4)} & k_{34}^{(3)} + k_{12}^{(4)} & k_{13}^{(4)} & k_{14}^{(4)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{41}^{(3)} & k_{43}^{(3)} + k_{21}^{(4)} & k_{44}^{(3)} + k_{22}^{(4)} & k_{23}^{(4)} & k_{24}^{(4)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{31}^{(4)} & k_{32}^{(4)} & k_{33}^{(4)} & k_{34}^{(4)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{41}^{(4)} & k_{42}^{(4)} & k_{43}^{(4)} & k_{44}^{(4)} & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \\ d_5 \\ d_6 \\ \dots \\ d_7 \\ d_8 \\ \dots \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix} \tag{13.102}$$

$k^{(1)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	---	---	---	---	---	---
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	3	---	5	5, 5	5, 6	5, 7
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	4	4, 3	6	6, 5	6, 6	6, 7
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	5	5, 3	7	7, 5	7, 6	7, 7
					6	6, 3	8	8, 5	8, 6	8, 7
					$k^{(4)}$	---	7	7, 7	7, 8	7, 9
					7	---	8	8, 7	8, 8	8, 9
					8	---	9	9, 7	9, 8	9, 9
					9	---	10	10, 7	10, 8	10, 9
					10	---	---	---	---	---

$$K^* = \text{InsertBtoA}(K^*, 10, 10, \mathbf{1}, \mathbf{1}, K_e, 4, 4), \quad K^* = \text{InsertBtoA}(K^*, 10, 10, \mathbf{10}, \mathbf{10}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, K_e, 4, 4), \quad K^* = \text{InsertBtoA}(K^*, 10, 10, \mathbf{10}, \mathbf{10}, \mathbf{5}, \mathbf{5}, K_e, 4, 4), \\ K^* = \text{InsertBtoA}(K^*, 10, 10, \mathbf{7}, \mathbf{7}, K_e, 4, 4), \text{ funktsioon InsertBtoA.m lk 726.} \tag{13.103}$$

Tala elemendi jäikusmaatriksitest moodustame vaadeldava tala jäikusmaatriksi (13.102). Selle jäikusmaatriksi (13.102) koostamiseks kasutame indekstabeleid (13.103). Need saame elemendi alguse ja lõpu siirete indeksitest koostatud vektorite diaad- ehk otsekorrutisena (vt jaotis A.4 avaldis (A.14)). Elemendi indekstabel näitab tala jäikusmaatriksi rea ja veeru indekseid, kuhu tuleb lisada varda elemendi vastav jäikusmaatriksi element.

Tala jäikusmaatriksi koostamiseks saab kasutada GNU Octave'is koostatud funktsiooni *InsertBtoA.m* lk 726. Indekstabelite (13.103) vasakust ülemisest nurgast saame aadressid ((1,1), (3,3), (5,5), (7,7)), kust alates tuleb lisada (liita) vastava tala jäikusmaatriksi elemendid.

Lõplike elementide meetodi (LEM) puhul antakse kinemaatilised rajatingimused (vt jaotis 3.2 ja joonis 3.1) täpselt ette. Kõnesolevas näites anname ette tala sõlmpunktis 1 siirde ja pöörde $w_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, sõlmpunktis 3 siirde $w_3 = 0$ ja sõlmpunktis 5 siirde $w_5 = 0$. Staatilist rajatingimust $F_{10} \equiv M_5 = 0$ kasutame siirde φ_5 leidmiseks.

Võrrandisüsteemi moodustamisel kasutame neljanda elemendi puhul kondenseeritud jäikusmaatriksit. Nii saame 10×10 võrrandisüsteemi asemel 9×9 võrrandisüsteemi. Sellest võrrandisüsteemist eemaldame 1., 2., 5. ja 9. võrrandi ja nendele vastavad veerud. Neid võrrandeid kasutame hiljem toereaktsioonide F_1 , F_2 , F_5 ja F_9 leidmiseks. Tala jäikusmaatriksist rea ja veeru eemaldamiseks saab kasutada GNU Octave'is koostatud funktsiooni *remRowIRfromA.m* lk 726 ning *remColJRfromA.m* lk 727. Pärast nelja võrrandi ja nelja veeru eemaldamist võrrandisüsteemist 9×9 saame võrrandisüsteemi 5×5

$$\begin{bmatrix} 60.0 & 0.0 & -30.9 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 80.0 & 20.0 & 0.0 & 0.0 \\ -30.0 & 20.0 & 80.0 & 30.0 & 20.0 \\ 0.0 & 0.0 & 30.0 & 37.5 & 15.0 \\ 0.0 & 0.0 & 20.0 & 15.0 & 70.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0600 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0675 \\ -0.0050 \end{bmatrix} \quad (13.104)$$

Võrrandisüsteemi (13.104) lahend on

$$\begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.1429e-04 \\ 1.4286e-04 \\ -5.7143e-04 \\ 2.4286e-03 \\ -4.2857e-04 \end{bmatrix} \quad (13.105)$$

Võrrandisüsteemi 10×10 (13.100) viimasest võrrandist (ühtib tala elemendi võrrandiga (13.81) (vt avaldist (13.102)) avaldame sõlme 5 pöördenurga φ_5 (13.106):

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= -\frac{1}{k_{44}^{(4)}} \begin{bmatrix} k_{41}^{(4)} & k_{42}^{(4)} & k_{43}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_7 \\ d_8 \\ d_9 \equiv w_5 = 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{k_{44}^{(4)}} (F_{10} + f_{10}) = \\ &= -\frac{1.0}{40.0} \begin{bmatrix} -30.0 & 20.0 & 30.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0024286 \\ -0.00042857 \\ 0.0 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \frac{1}{4.0e+04} (0.0 + 10.0) = 0.0020357 \end{aligned} \quad (13.106)$$

Viie sõlmpunkti siirded ja pöörded on toodud avaldisega:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \\ d_5 \\ d_6 \\ \dots \\ d_7 \\ d_8 \\ \dots \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000e + 00 \\ 0.0000e + 00 \\ \dots \\ 7.1429e - 04 \\ 1.4286e - 04 \\ \dots \\ 0.0000e + 00 \\ -5.7143e - 04 \\ \dots \\ 2.4286e - 03 \\ -4.2857e - 04 \\ \dots \\ 0.0000e + 00 \\ 2.0357e - 03 \end{bmatrix} \quad (13.107)$$

Võrrandisüsteemi (13.100) 1., 2., 5. ja 9. võrrandist toereaktsioonide (sõlmkoormuse \mathbf{F}) leidmiseks kirjutame võrrandisüsteemi kujul:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{F}_q \quad (13.108)$$

Tala toereaktsioonid leiame avaldisega (13.109):

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_5 \\ F_9 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K(1,:) \\ K(2,:) \\ K(5,:) \\ K(9,:) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_5 \\ f_9 \end{bmatrix} \quad (13.109)$$

kus $K(i,:)$ on matriksi \mathbf{K} i -ndas rida.

Toereaktsioonide arvutuse tulemused on toodud avaldisega:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_5 \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55.714 \\ 34.286 \\ -137.14 \\ -47.143 \end{bmatrix} \quad (13.110)$$

Teostame staatilise kontrolli:

$$\begin{aligned} \sum Z &= 30 * 8 + F_1 + F_2 + F_5 + F_9 = 0.000 \\ \sum M_a &= F_2 - 30 * 8 * 4 - 4.0 * F_5 - 8.0 * F_9 = -2.2737e - 13 \end{aligned} \quad (13.111)$$

Leitud toereaktsioonid rahuldavad staatilist kontrolli.

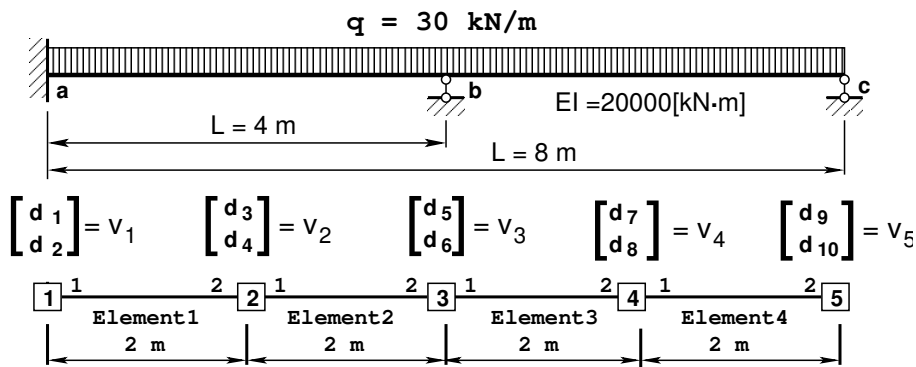
Arvutused on tehtud GNU Octave'is koostatud programmiga *LemTalaNaide1.m* lk 738. Selle programmiga saadud tulemusi näeme arvutuspäevikust 13.3 lk 376.

Tala elementide otstes olevad kontaktjõudude (sisejõudude) leidmiseks kasutame elemendi tasakaalvõrrandit (13.87)

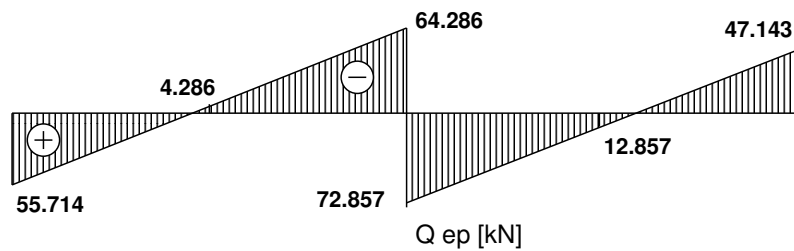
$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \cdot \mathbf{d}^{(e)} - \mathbf{F}_q^{(e)} \tag{13.112}$$

Tala elementide otstes olevad kontaktjõud on leitud vastavalt II märgikokkuleppele (vt jaotis 1.12 lk 47) ja ärgmiste avaldistega:

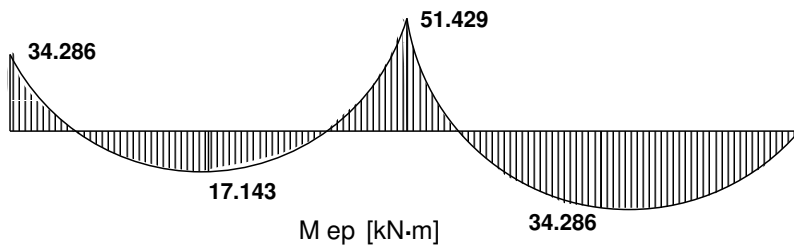
$$\begin{bmatrix} Q_A^{(1)} \\ M_A^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \\ M_L^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55.714 \\ 34.286 \\ -4.2857 \\ 17.143 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_A^{(2)} \\ M_A^{(2)} \\ Q_L^{(2)} \\ M_L^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2857 \\ -17.143 \\ -64.286 \\ -51.429 \end{bmatrix} \tag{13.113}$$



(a) Tala arvutuskeem



(b) Põikjõud Q



(c) Paindemoment M

Joonis 13.13. Tala sisejõude epüürid LEM-meetodiga

$$\begin{bmatrix} Q_A^{(3)} \\ M_A^{(3)} \\ Q_L^{(3)} \\ M_L^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72.857 \\ 51.429 \\ 12.857 \\ 34.286 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_A^{(4)} \\ M_A^{(4)} \\ Q_L^{(4)} \\ M_L^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.857 \\ -34.286 \\ -47.143 \\ 0.000 \end{bmatrix} \quad (13.114)$$

Leitud kontaktjõudude (13.113) ja (13.114) abil joonistame põikjõu ja paindemomendi epüürid (joonised 13.13(b) ja 13.13(c)).

Arvutuspäevik 13.3 octave-3.0.1:1> diary LemTalaNaide1.out

octave-3.0.1:2> diary on

octave-3.0.1:3> LemTalaNaide1

Tala arvutamise lähteandmed

L - tala sille, EI - ristlõike jäikus,

Se - pikijõud, q - ühtlaselt jaotatud koormus

II märgikokkulepe

L = 2

EI = 20000

Se = 1000

q = 30

Tala elemendi jäikusmaatriks K

K = lemTalaKe4x4(L,EI)/1.0e+03 =

```

30  -30  -30  -30
-30  40   30   20
-30  30   30   30
-30  20   30   40

```

Tala liigendiga elemendi jäikusmaatriks

Kl = lemTalaK3x3lpar(Se,L,EI)/1.0e+03 =

```

7.5000  -15.0000  -7.5000
-15.0000  30.0000  15.0000
-7.5000  15.0000  7.5000

```

Elemendi koormusvektor S1

S1=lemTalaFq4x1(L,q,EI)/1.0e+03 =

```

0.030000
-0.010000
0.030000
0.010000

```

Elemendi, liigend paremal, koormusvektor

S2=lemTalaFq3x1lp(L,q,EI)/1.0e+03 =

```

0.037500
-0.015000
0.022500

```

Tala võrrandisüsteem A 9x9.

A9x9 =

Columns 1 through 7:

```

30.00000  -30.00000  -30.00000  -30.00000  0.00000  0.00000  0.00000
-30.00000  40.00000  30.00000  20.00000  0.00000  0.00000  0.00000
-30.00000  30.00000  60.00000  0.00000  -30.00000  -30.00000  0.00000
-30.00000  20.00000  0.00000  80.00000  30.00000  20.00000  0.00000
0.00000  0.00000  -30.00000  30.00000  60.00000  0.00000  -30.00000
0.00000  0.00000  -30.00000  20.00000  0.00000  80.00000  30.00000
0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  -30.00000  30.00000  37.50000
0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  -30.00000  20.00000  15.00000
0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  -7.50000

```

Columns 8 and 9:

0.00000	0.00000
0.00000	0.00000
0.00000	0.00000
0.00000	0.00000
-30.00000	0.00000
20.00000	0.00000
15.00000	-7.50000
70.00000	15.00000
15.00000	7.50000

Tala võrrandisüsteemi parem pool S9x1
S9x1 =

0.030000
-0.010000
0.060000
0.000000
0.060000
0.000000
0.067500
-0.005000
0.022500

Tala võrrandisüsteemi vasak pool A 5x5.

1., 2., 5. ja 9. read ja veerud puuduvad raja-
tingimuste tõttu.

Anew =

60.00000	0.00000	-30.00000	0.00000	0.00000
0.00000	80.00000	20.00000	0.00000	0.00000
-30.00000	20.00000	80.00000	30.00000	20.00000
0.00000	0.00000	30.00000	37.50000	15.00000
0.00000	0.00000	20.00000	15.00000	70.00000

Tala võrrandisüsteemi parem pool Ss 5x1
Ss =

0.060000
0.000000
0.000000
0.067500
-0.005000

Võrrandisüsteemi lahend X=A\Ss
XX =

7.1429e-04
1.4286e-04
-5.7143e-04
2.4286e-03
-4.2857e-04

4. elemendi vasaku otsa siire, pööre
Xl45=XX(4:5,1)

Xl45 =

2.4286e-03
-4.2857e-04

0.75000 -0.50000 -0.75000 -1.00000

valin esimesed kaks Kord=Vor4(1,1:2)
Kord =

0.75000	-0.50000
---------	----------

4. elemendi jäikusmaatriksi K viimases
võrrandis pöördenurga kordajaks 1
Vor4=-K(4,:)/K(4,4)

Vor4 =

4. elemendi parema otsa pööre Xxx

Xxx = Kord*Xl45
Xxx = 0.0020357

```

=====
Siirded sõlmpunktides
  Jrk      Siire
-----
   1      0.0000e+00
   2      0.0000e+00
   3      7.1429e-04
   4      1.4286e-04
   5      0.0000e+00
   6      -5.7143e-04
   7      2.4286e-03
   8      -4.2857e-04
   9      0.0000e+00
  10      2.0357e-03
-----

```

Toereaktsioonid F1, F2, F5 ja F9.

F1 = -55.714

F5 = -137.14

F2 = 34.286

F9 = -47.143

Staatiline kontroll: $\text{SumF} = q \cdot 8 + F1 + F5 + F9$

SumF = 5.6843e-14

Element 1. Siirded, pöörded ja momendid
XL1 =

0.0000e+00
0.0000e+00
7.1429e-04
1.4286e-04

Q1 = -55.714

M1 = 34.286

Q2 = -4.2857

M2 = 17.143

Element 2. Siirded, pöörded ja momendid
XL2 =

7.1429e-04
1.4286e-04
0.0000e+00
-5.7143e-04

Q2a = 4.2857

M2a = -17.143

Q2 = -64.286

M3 = -51.429

Element 3. Siirded, pöörded ja momendid
XL3 =

0.0000000
-0.0005714
0.0024286
-0.0004286

Q3a = -72.857

M3a = 51.429

Q3 = 12.857

M4 = 34.286

Element 4. Siirded, pöörded ja momendid
XL4 =

0.0024286
-0.0004286
0.0000000
0.0020357

Q4a = -12.857

M4a = -34.286

Q4b = -47.143

M5 = 0.0

Momendid sõlmes arvutatakse aritmeetilise keskmisena I märgikokkuleppe järgi

```

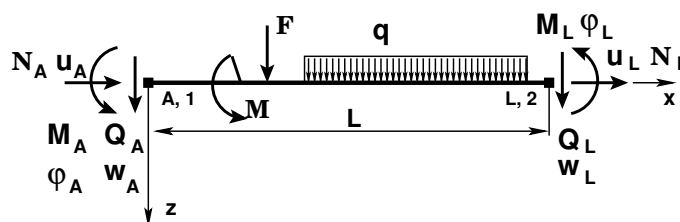
Moment 1. sõlmes
M1k = -34.286
Moment 2. sõlmes
M2k = 17.143
Moment 3. sõlmes
M3k = -51.429
Moment 4. sõlmes
M4k = 34.286
Moment 5. sõlmes
M5 = 0
octave-3.0.1:4> diary off

```

Sama ülesande saab lahendada kolme momendi võrrandiga GNU Octave'is koostatud programiga *jtala1kLEM.m* lk 735.

13.11 Varda paine

Joonisel 13.14 on toodud varda elemendi kontaktjõude ja siirete positiivsed suunad.



Joonis 13.14. Varda jõude ja siirete positiivsed suunad

13.11.1 Varda painde jäikusmaatriks

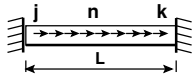
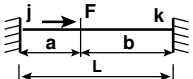
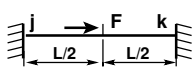
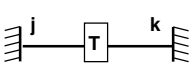
Teisendame ülekandevõrrandid (G.18) sarnaselt tala ülekandevõrrandite teisendusele (13.85) lk 369. Saadud tasakaaluvõrrand (13.115) erineb tala ülekandevõrranditest (13.88) selle poolest, et varda puhul on arvesse võetud pikijõudu N_A , N_L ja pikisiiret u_A , u_L kirjeldavad liikmed

$$\mathbf{K}^* \mathbf{d}^* = \mathbf{F}^* + \overset{\circ}{\mathbf{F}}^* \quad (13.115)$$

kus

$$\mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ u_L \\ w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} N_A \\ Q_A \\ M_A \\ N_L \\ Q_L \\ M_L \end{bmatrix} \quad (13.116)$$

Tabel 13.11. Kinnitusjõud. II märgikokkulepe

Skeem	N_j / N_k	Skeem	N_j / N_k
	$-nL/2 / -nL/2$		$-Fb/L / -Fa/L$
	$-F/2 / -F/2$		$EA\alpha_T T / -EA\alpha_T T$

ja jäikusmaatriks \mathbf{K}^* (13.117) vastab II märgikokkuleppele

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \quad (13.117)$$

ning elemendile rakendatud jõud \mathbf{F}^*

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{N}_A \\ \overset{\circ}{Q}_A \\ \overset{\circ}{M}_A \\ \overset{\circ}{N}_L \\ \overset{\circ}{Q}_L \\ \overset{\circ}{M}_L \end{bmatrix} \quad (13.118)$$

kus elementide $\overset{\circ}{Q}_A$, $\overset{\circ}{M}_A$, $\overset{\circ}{Q}_L$, $\overset{\circ}{M}_L$ avaldised saame tala kinnitusemomentide ja põikjõudude tabelist 11.2 lk 324 (II märgikokkulepe) ning elementide $\overset{\circ}{N}_A$, $\overset{\circ}{N}_L$ avaldised tabelist 13.11.

Koordinaatide teisendamiseks (1.45) täiendame sõrestiku varda teisendusmaatriksit (13.50) paindeelemendiga. Varda teisendusmaatriks \mathbf{T} on toodud avaldisega

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.119)$$

kus $c = \cos \alpha$ (1.42) ja $s = \cos \beta$ (1.43) lk 50.

Jäikusmaatriks üldkoordinaatides \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \quad (13.120)$$

Varda elemendile rakendatud jõud $\overset{\circ}{\mathbf{F}}$ üldkoordinaatides

$$\overset{\circ}{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^T \overset{\circ}{\mathbf{F}}^* \quad (13.121)$$

Varda elemendi tasakaaluvõrrand üldkoordinaatides

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} + \overset{\circ}{\mathbf{F}} \quad (13.122)$$

14. Rajaelementide meetod

Loeng 1¹: Sõrestik. Näide 14.1. Loeng 2²: EST-meetodi võrrandisüsteem. Näide 14.2. Raam.

14.1 Rajaelementide meetodist

Rajaelementide meetodi (REM) koht teiste lahendusmeetodite hulgas (vt joonis E.2 „Lahendusmeetodite klassifikatsioon”) seisneb selles, et *diferentsiaalvõrrand rahuldatakse täpselt* ning olulised ehk *kinemaatilised rajatingimused* (E.27) ja loomulikud ehk *staatilisid rajatingimused* (E.28) rahuldatakse teatava täpsusega [BW80].

Rajaelementide meetodi puhul leitakse varda fundamentaalne lahend [Har87] [Str89] lõpmatu varda jaoks ja siis sobitatakse rajatingimustele.

Algparameetrite meetod (vt jaotis G.1) on matemaatikas tuntud Cauchy meetodina. Ehitusmehaanikasse tõi selle meetodi 1862. a A. Clebsch. Algparameetrid pole enamasti teada, vaid need tuleb määrata rajatingimustest. *Rajatingimused* võib jagada toe- ja kontaktitingimusteks. *Toetingimused* (vt jaotis 3.2 joonis 3.1) jagunevad toe-reaktsioonideks ja toesiireteks. *Kontaktitingimused* (vt jaotis 3.3 joonis 3.2) jagunevad kontaktjõududeks ja vastastikusteks siireteks. Rajatingimused jagunevad *staatilisteks rajatingimusteks* ja *kinemaatilisteks rajatingimusteks*.

Üks algparameetrite meetodi rakendusi on ülekandemaatriksmeetod (sks *Übertragungsverfahren*) (ingl *transfer matrix method*). Ülekandemaatriksmeetodit nimetatakse ka reduktsiooni meetodiks (sks *Reduktionsverfahren*) [Krä91b] lk 286 ja [RH95] lk 241. Arvutite kasutuselevõtuga leidis see meetod laialdast rakendamist [PL63], [LT80], kus ühe elemendi lõpu suurused (siirded, kontaktjõud) olid teise elemendi alguse suurused. Konstruktsiooni arvutamisel liiguti maatriksite korrutamise edasi. Kuid peagi selgus, et sellisel korrutamisel viga kasvas ja loobuti selle meetodi kasutamisest. Ülekandemaatrikseid kasutatakse LEM-i jäikusmaatriksite saamiseks [RH95], [Krä91b], [WR95]. *Tervikmeetodist* (sks *Gesamtmatrixverfahren GMV*) (ingl *Complete Matrix Method (CMM)*) jõumeetodi saamist vaadeldakse töödes [Eb190a], [Eb190].

¹./videod/ESTMetLoeng1.html

²./videod/ESTMetLoeng2.html

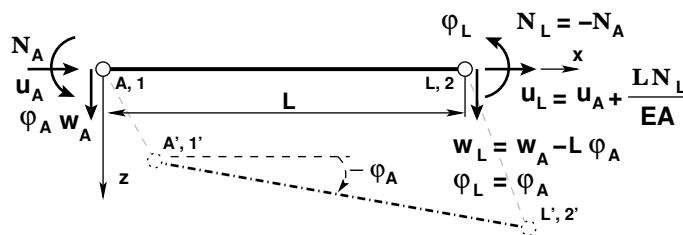
14.2 EST-meetod

EST-meetod [Lah97a], [Lah97b], [Lah98a], [Lah98b] on rajaelementide meetod, kus var-
da diferentsiaalvõrrandi (DV) fundamentaallahendi [GaW96] asemel kasutatakse alg-
parameetritega kirjeldatud diferentsiaalvõrrandi DV lahendit (14.12). Siin $\widehat{\mathbf{U}} \cdot \widehat{\mathbf{Z}}$ on
var-
da homogeense DV lahend ja $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ on mittehomoogeense DV erilahend. Siin kasu-
tatakse ülekanemaatriksit. Võrrandisüsteemi koostamisel saadakse pooled võrrandid
var-
da põhivõrranditest ja ülejäänud pooled võrrandid rajatingimustest. *Rajatingimused*
jagunevad toe- ja kontaktitingimusteks (vt joonis 3.1, 3.2). Varraste otstes olevad kon-
taktjõud ja siirded leitakse võrrandisüsteemi lahendamisega. Võrrandisüsteemis on sii-
rete ja sisejõudude arvvaartuste erinevus ca 10^3 korda. Korrutame siirete võrrandid
baasjäikusega $i_0 = \frac{\max EI}{\min I}$. Nüüd võtame uued siirded, mis on $i_0 = \frac{\max EI}{\min I}$ korda suuremad.
Seoses sellega tuleb jäikusmaatriksi (G.17) alammaatriksi \mathbf{U}_{sv} nullist erinevad liikmed
korrutada baasjäikusega $i_0 = \frac{\max EI}{\min I}$. Sellist võrrandisüsteemi teisendust nimetatakse
võrrandisüsteemi skaleerimiseks (ingl k *scaling*). Tegelike siirete saamiseks pärast võr-
randisüsteemi lahendamist jagame siirded baasjäikusega. Nii oli ka deformatsioonimee-
todis, kus siirded ja pöörded saadi võrrandisüsteemi lahendamisel i_0 korda suuremad.
Nüüd suurendame ainult siirdeid, kontaktjõud jätame samaks.

EST-meetodiga koostatud võrrandisüsteemis on nullist erinevaid võrrandisüsteemi kor-
dajaid vähem kui 5% (nt 60×60 võrrandisüsteemis 152 nullist erinevat kordajat). Et
mitte tegelda nullidega, võtame kasutusele **hõredad maatriksid** (vt lisa B lk 647).

14.2.1 Sissejuhatuse EST-meetodisse

Sissejuhatuseks EST-meetodisse vaatleme staatiliselt määramatu sõrestiku arvutamist.
Sõrestiku var-
da elemendi kirjeldamisel võtame kasutusele parema käe teljestiku ja II
märgikokkuleppe.



Joonis 14.1. Sõrestiku varras

Sõrestiku var-
da (joonis 14.1) alguse ja lõpu siirdeid kohalikes koordinaatides kirjel-
dame võrranditega

$$u_L = u_A + \Delta u = u_L + \frac{LN}{EA} \quad (14.1)$$

$$w_L = w_A - L\varphi_A \quad (14.2)$$

$$\varphi_L = \varphi_A \quad (14.3)$$

siin u_A, u_L – varda alguse ja lõpu siire x-telje suunas,
 w_A, w_L – varda alguse ja lõpu siire z-telje suunas,
 φ_A, φ_L – varda alguse ja lõpu pööre ümber z-telje (sisemine vabadusaste),
 $\Delta u = \frac{LN}{EA}$ – pikkuse muut (joonis 1.3),
kus EA – varda ristlõike pikkejäikus,
 N – pikkejõud,
 L – varda pikkus.

Varda tasakaalu kirjeldame seosega

$$N_L = -N_A \quad (14.4)$$

Esitame eespool vaadeldud seosed maatrikskujul

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}_L - \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_A = 0 \quad (14.5)$$

kus $\mathbf{Z}_L, \mathbf{Z}_A$ – varda lõpus ja alguses olevad siirded ning kontaktjõud

$$\mathbf{Z}_L = \begin{bmatrix} u_L \\ w_L \\ \varphi_L \\ \dots \\ N_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_A = \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ \dots \\ N_A \end{bmatrix}, \quad (14.6)$$

ja maatriks \mathbf{U} on toodud avaldisega (14.7)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -i_0 \frac{x}{EA} \\ 0 & 1 & -x & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \quad (14.7)$$

siin i_0 on baasjäikus.

Maatriks (14.7) koosneb järgmistest alammatriksitest

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \text{jäiga keha liikumist} & \vdots & \text{põhideformatsioone} \\ \text{kirjeldav alammatriks} & \vdots & \text{kirjeldav alammatriks} \\ \dots & \vdots & \dots \\ & \vdots & \text{tasakaaluvõrrandeid} \\ & \vdots & \text{kirjeldav alammatriks} \end{bmatrix} \quad (14.8)$$

Maatriksit (14.7), (14.8) nimetatakse ülekandemaatriksiks (sks *Übertragungsmatrix*) (ingl *transfer matrix*). Kirjeldus (14.8) kehtib ka painde ülekandemaatriksi (14.20) kohta.

Nimetame võrrandeid (14.5) sõrestiku varda põhivõrranditeks ja esitame nad järgmisel maatrikskujul:

$$\widehat{\mathbf{IU}} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = 0 \quad (14.9)$$

kus $\widehat{\mathbf{Z}}$ (14.10) koosneb sõrestiku varda lõpus ja alguses olevatest siiretest ning kontaktjõududest

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_L \\ \mathbf{Z}_A \end{bmatrix}, \quad (14.10)$$

Maatriks $\widehat{\mathbf{IU}}$ on 4×8 maatriks. Võrrandisüsteem (14.9) koosneb 4 võrrandist 8 tundmatuga. Maatriksi koostame hõreda maatriksina GNU Octave'i funktsiooniga `ySPSRmhvI.m` lk 725. Hõre maatriks `ySPSRmhvI.m` sisaldab 10 nullist erinevat elementi.

`ySPSRmhvI =`

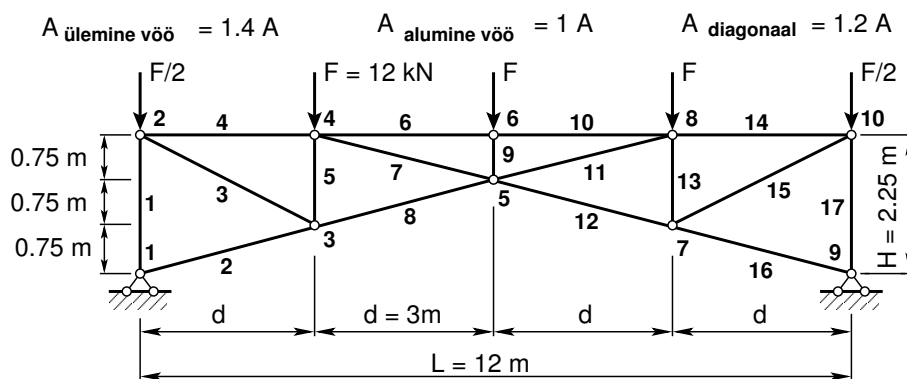
Compressed Column Sparse (rows = 4, cols = 8, nnz = 10)

Funktsioon `ySPSRmhvI.m` kasutab GNU Octave'i funktsiooni `ySPSRhlin.m` lk 725 maatriksi (14.7) sisestamiseks.

14.2.2 Sõrestiku arvutus EST-meetodiga. Näide 14.1

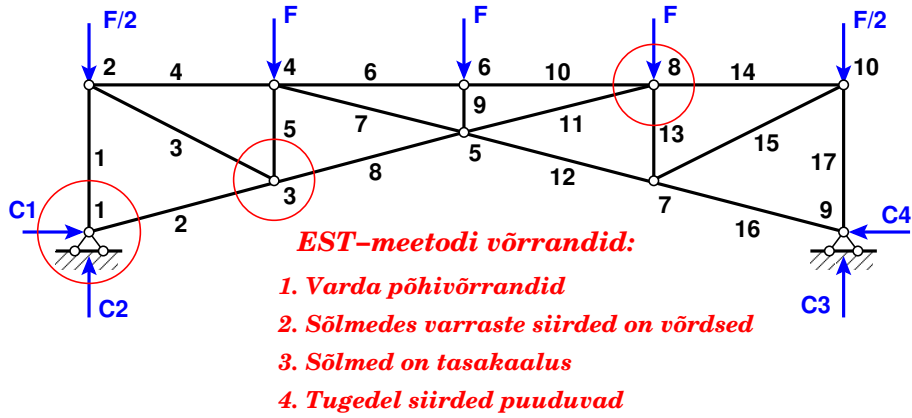
Lahendame näites 13.3 (lk 363) toodud ülesande EST-meetodiga.

Näide 14.1 Arvutada pikijõud joonisel 14.2 näidatud staatikaga määramatus sõrestikus EST-meetodiga. Sõrestiku kõrgus $H = 2.25$ m ja selle $L = 12$ m. Sõrestiku ülemise vöö sõlmedes mõjub koormus $F = 12$ kN.

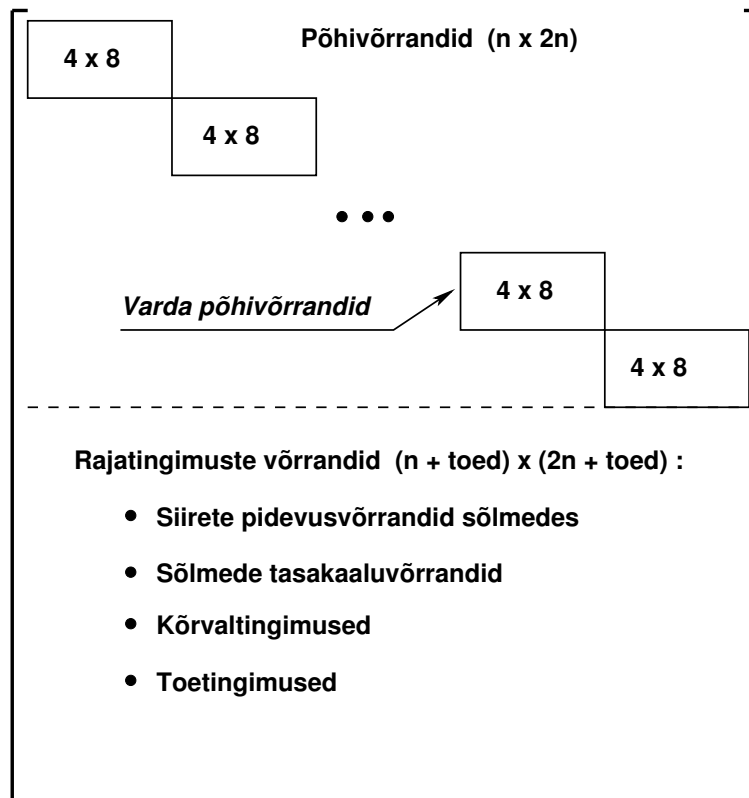


Joonis 14.2. Sõrestik

Sõrestiku sõlmede, varraste ja toereaktsioonide nummerdus on toodud joonisel 14.3. EST-meetodiga leiame sõrestiku varraste otste siirded, kontaktjõud ja toereaktsioonid.



Joonis 14.3. Sõrestiku arvutusskeemi nummerdus



Joonis 14.4. Sõrestiku võrrandite $spA \cdot Z = B$ struktuur

Väljavõte programmist 14.1 (Sisejõud. **srstkESTPY.m** lk 725)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
spA=sparse(NNK,NNK); % nullistan võrrandisüsteemi kordajad
B=zeros(NNK,1); % nullistan võrrandisüsteemi vabaliikmed
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
IIv=0;
IJv=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
krda=0;
for i=1:NEARV
krda=krda+1;
%
EA=selemEA(i,1);
Li=lvarras(i,1);
spvFs=ySpSRmhvI(baasi0,Li,EA);
vBs=zeros(4,1); % varda koormus puudub vB=vBs;
IIv=krda*4-3;
IJv=krda*8-7;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvFs);
B=InsertBtoA(B,NNK,1,IIv,1,vBs,4,1);
%
endfor
%
% siin NEARV on elementide (varraste) arv
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% võrrandeid on 136/2=68

```

EST-meetodiga leiame sõrestiku varraste otste siirded, kontaktjõud ja toereaktsioonid. Nende nummerdus on toodud joonisel 14.5.

Siirete, kontaktjõudude ja toereaktsioonide leidmiseks koostatud võrrandisüsteem koosneb järgmistest osadest:

1. Varraste põhivõrrandid (14.9).

põhivõrrandid =

Compressed Column Sparse (rows = 68, cols = 136, nnz = 170 [1.8%])

2. Sõlmedes varraste otste siirete võrdsustamise võrrandid (pidevusvõrrandid).

pidevusvõrrandid =

Compressed Column Sparse (rows = 116-68, cols = 134, nnz = 142 [0.91%])

3. Sõlmede tasakaaluvõrrandid. Sõlmkoormus kantakse võrrandi vabaliikmesse. Toereaktsioonid sõlmedes kantakse võrrandisüsteemi tundmatute poolele miinusmärgiga.

tasakaaluvõrrandid =

Compressed Column Sparse (rows = 136-116, cols = 140, nnz = 54 [0.28%])

4. Toetingimuste võrrandid, kus toereaktsioonidele vastavad siirded antakse ette (nullitakse).

toetingimused =

Compressed Column Sparse (rows = 140-136, cols = 134, nnz = 4 [0.043%])

Väljavõte programmist 14.4 (Rajatingimused. **srstkESTPY.m** lk 725)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Toereaktsioonid 137-140
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% toereaktsioon C1 (x-telje suunas +)
% toereaktsioon C2 (z-teljel vastupidine -)
% toereaktsioon C3
% toereaktsioon C4
% Toereaktsioonidele vastavad siirded on nullid
spA=spSisestaArv(spA,137,6,1);      %u1=0
spA=spSisestaArv(spA,138,5,1);      % w1=0
spA=spSisestaArv(spA,139,134,1);    % u9=0
spA=spSisestaArv(spA,140,133,1);    % w9=0
B(137,1)=0.0;
B(138,1)=0.0;
B(139,1)=0.0;
B(140,1)=0.0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Rajatingimustes kasutatud GNU Octave'i funktsioon `spA=spInsertBtoA(spA,69,5,spT1x2)` – sisestab varda 1 hõreda (2×2) teisendusmaatriksi `spT1x2` maatriksisse `spA` algusega 69 ritta ja 5 veergu.

GNU Octave'i funktsioon `spA=spInsertBtoA(spA,69,13,spT2x2m)` – sisestab varda 2 hõreda (2×2) teisendusmaatriksi `spT1x2m` miinusmärgiga maatriksisse `spA`, algusega 69 ritta ja 13 veergu.

Sõrestiku arvutamist saab teha GNU Octave'i programmiga `srstkESTPY.m`³ lk 725. Arvutuse tulemused on toodud arvutuspäevikus 14.1.

Arvutuspäevik 14.1 octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> srstkLemPY

=====

Varda alguse/lõpu siirded (skaleerimata) kontaktjõud. I märgikokkulepe

Varda Nr	u	w	fi	N
1	0.000e+00	0.000e+00	-2.056e-04	-15142.038
1	-1.411e-04	4.625e-04	-2.056e-04	-15142.038
2	-0.000e+00	-0.000e+00	-5.898e-04	-36522.315
2	-5.614e-04	1.824e-03	-5.898e-04	-36522.315
3	4.768e-04	-8.061e-05	-5.458e-04	20442.218
3	7.608e-04	1.750e-03	-5.458e-04	20442.218
4	4.625e-04	1.411e-04	-6.166e-04	-18284.075
4	2.677e-04	1.991e-03	-6.166e-04	-18284.075
5	-1.906e-03	-1.022e-04	-2.467e-04	-13713.056
5	-1.991e-03	2.677e-04	-2.467e-04	-13713.056
6	2.677e-04	1.991e-03	-4.938e-04	-25136.301
6	6.221e-21	3.472e-03	-4.938e-04	-25136.301
7	7.426e-04	1.866e-03	-4.740e-04	7063.113
7	8.331e-04	3.332e-03	-4.740e-04	7063.113
8	-5.614e-04	1.824e-03	-4.878e-04	-17675.521
8	-8.331e-04	3.332e-03	-4.878e-04	-17675.521
9	-3.435e-03	9.168e-20	1.139e-19	-12000.000
9	-3.472e-03	6.221e-21	1.139e-19	-12000.000
10	6.221e-21	3.472e-03	4.938e-04	-25136.301
10	-2.677e-04	1.991e-03	4.938e-04	-25136.301

³./octaveProgrammide/srstkESTPY.Kommentaariid.m

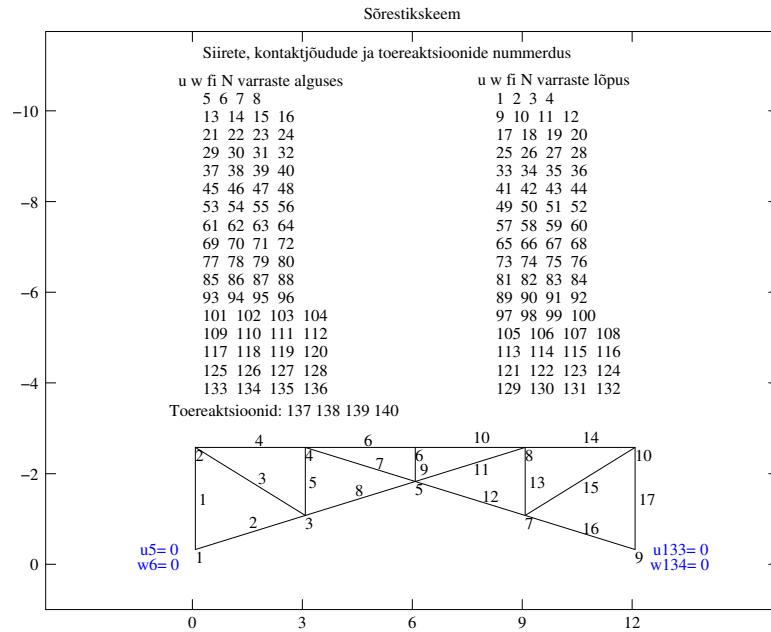
```

11 -8.331e-04 3.332e-03 4.740e-04 7063.113
11 -7.426e-04 1.866e-03 4.740e-04 7063.113
12 8.331e-04 3.332e-03 4.878e-04 -17675.521
12 5.614e-04 1.824e-03 4.878e-04 -17675.521
13 -1.906e-03 1.022e-04 2.467e-04 -13713.056
13 -1.991e-03 -2.677e-04 2.467e-04 -13713.056
14 -2.677e-04 1.991e-03 6.166e-04 -18284.075
14 -4.625e-04 1.411e-04 6.166e-04 -18284.075
15 -7.608e-04 1.750e-03 5.458e-04 20442.218
15 -4.768e-04 -8.061e-05 5.458e-04 20442.218
16 5.614e-04 1.824e-03 5.898e-04 -36522.315
16 0.000e+00 0.000e+00 5.898e-04 -36522.315
17 0.000e+00 0.000e+00 2.056e-04 -15142.038
17 -1.411e-04 -4.625e-04 2.056e-04 -15142.038
=====
Toereaktsioonid
C1 = 3.5432e+04
C2 = 24000
C3 = 3.5432e+04
C4 = 24000
-----
N5 = -1.3713e+04
H1 = 3.5432e+04
Va = 24000
-1.371306e+04 3.543185e+04 2.400000e+04
Staatiline kontroll. Moment M8
Lõige on tehtud läbi varraste 4, 5 ja 8
Momentpunktiks on valitud sõlm 8
M8=(Va-6000.0)*9.0+N5*6.0-H1*2.25
M8 = -1.4552e-11
octave-3.2.4:4> diary off

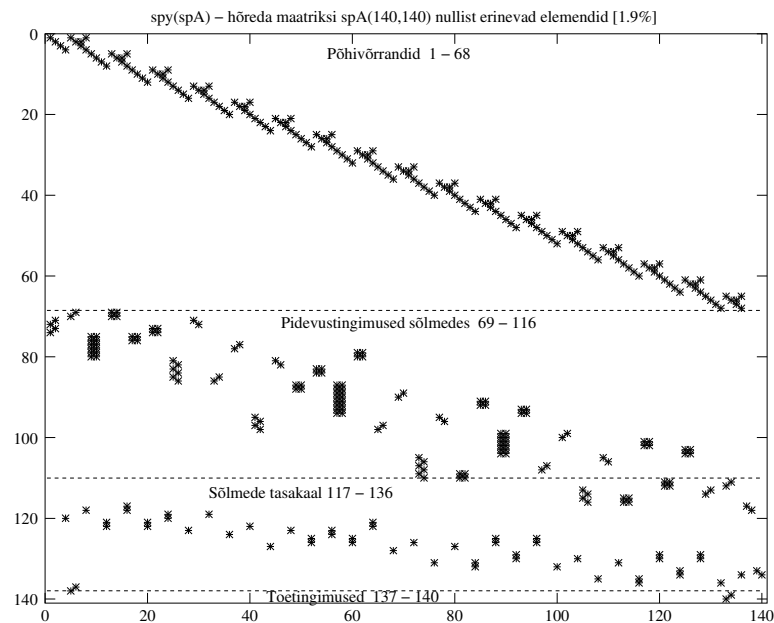
```

Siin arvutuspäevikus 14.1 ja joonisel 14.6 on tähistus φ . See tähistus vastab joonisel 14.1 jäiga keha pöördele φ . Jäiga keha pööre φ on sõrestiku varda sisemine parameeter ega mõjuta sõrestiku varda deformatsioone. Sõrestiku programmi sisestatud elementide, siirete ja kontaktjõudude järjekorranumbrid on joonisel 14.6. Koostatud võrrandisüsteemi vasaku poole hõreda matriksi nullist erinevate elementide asukohad on toodud joonisel 14.7.

Tabelis 14.1 on staatikaga määramatu sõrestiku sisejõudude ja siirete võrdlus, mis on leitud EST- ja LEM-meetodiga näites 13.3 (vt lk 363). EST-meetodiga arvutatud sõrestiku (vt joonis 14.2) siirded u^* , w^* ja sisejõud on kohalikes koordinaatides. LEM-meetodiga leitakse sõlmpunktide siirded u , w üldkoordinaatides. Nii võrreldakse varraste 1, 5, 9, 13 ja 17 varraste otstes olevaid siirdeid nende varraste otstes olevate sõlmpunktide 1, 2, 3, ..., 10 siiretega. Siin peame arvestama kohalike ja üldkoordinaatide telgede suunaga. Tabelist 14.1 näeme, et nende erinevate meetoditega leitud sõrestiku siirded ja sisejõud ühtuvad.



Joonis 14.6. Sõrestikskeemi elemendid



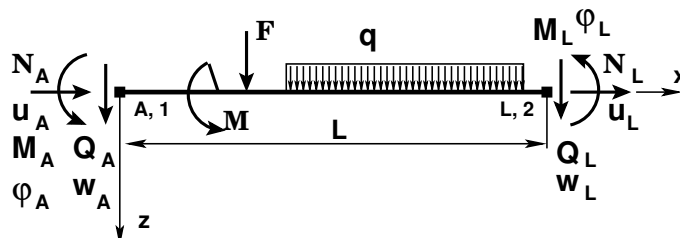
Joonis 14.7. Sõrestikskeemi spA nullist erinevate elementide asukohad

Tabel 14.1. Sõrestiku sisejõudude võrdlus

EST-meetodiga. I märgikokkulepe				LEM – üldkoordinaadid		
<i>Varda nr a/l</i>	u^* [m]	w^* [m]	N [N]	u [m]	w [m]	N [kN]
1 alg.	0.000e+00	0.000e+00	-15142.038	0.000e+00	0.000e+00	
1 lõpp	-1.411e-04	4.625e-04	-15142.038	4.625e-02	1.411e-02	-15.1420
2 alg.	-0.000e+00	-0.000e+00	-36522.315			
2 lõpp	-5.614e-04	1.824e-03	-36522.315			-36.5223
3 alg.	4.768e-04	-8.061e-05	20442.218			
3 lõpp	7.608e-04	1.750e-03	20442.218			20.4422
4 alg.	4.625e-04	1.411e-04	-18284.075			
4 lõpp	2.677e-04	1.991e-03	-18284.075			-18.2841
5 alg.	-1.906e-03	-1.022e-04	-13713.056	-1.022e-02	1.906e-01	
5 lõpp	-1.991e-03	2.677e-04	-13713.056	2.677e-02	1.991e-01	-13.7131
6 alg.	2.677e-04	1.991e-03	-25136.301			
6 lõpp	3.056e-20	3.472e-03	-25136.301			-25.1363
7 alg.	7.426e-04	1.866e-03	7063.113			
7 lõpp	8.331e-04	3.332e-03	7063.113			7.0631
8 alg.	-5.614e-04	1.824e-03	-17675.521			
8 lõpp	-8.331e-04	3.332e-03	-17675.521			-17.6755
9 alg.	-3.435e-03	1.540e-21	-12000.000	-1.133e-16	3.435e-01	
9 lõpp	-3.472e-03	3.056e-20	-12000.000	-1.196e-16	3.472e-01	-12.0000
10 alg.	3.056e-20	3.472e-03	-25136.301			
10 lõpp	-2.677e-04	1.991e-03	-25136.301			-25.1363
11 alg.	-8.331e-04	3.332e-03	7063.113			
11 lõpp	-7.426e-04	1.866e-03	7063.113			7.0631
12 alg.	8.331e-04	3.332e-03	-17675.521			
12 lõpp	5.614e-04	1.824e-03	-17675.521			-17.6755
13 alg.	-1.906e-03	1.022e-04	-13713.056	1.022e-02	1.906e-01	
13 lõpp	-1.991e-03	-2.677e-04	-13713.056	-2.677e-02	1.991e-01	-13.7131
14 alg.	-2.677e-04	1.991e-03	-18284.075			
14 lõpp	-4.625e-04	1.411e-04	-18284.075			-18.2841
15 alg.	-7.608e-04	1.750e-03	20442.218			
15 lõpp	-4.768e-04	-8.061e-05	20442.218			20.4422
16 alg.	5.614e-04	1.824e-03	-36522.315			
16 lõpp	0.000e+00	0.000e+00	-36522.315			-36.5223
17 alg.	0.000e+00	0.000e+00	-15142.038	0.000e+00	0.000e+00	
17 lõpp	-1.411e-04	-4.625e-04	-15142.038	-4.625e-02	1.411e-02	-15.1420

14.3 Varda põhivõrrandid

Elemendi kirjeldamisel võtame kasutusele parema käe teljestiku ja II märgikokkuleppe.



Joonis 14.8. Varda jõudude ja siirete positiivsed suunad

Kasutades varda elemendi ülekandevõrrandit (G.11), kirjutame selle ringi 6×12 var-
da põhivõrranditeks (14.11), mis kirjeldavad varda põhiseoseid (G.17). Varda põhivõr-
randid (14.11) saab koostada GNU Octave'i funktsiooniga `ysplvfmhvI.m` lk 724

$$\widehat{\mathbf{I}}\mathbf{U} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{Z}} \quad (14.11)$$

ehk

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}_L - \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_A = \dot{\mathbf{Z}}, \quad (14.12)$$

kus \mathbf{I} on ühikmaatriks (vardal 6×6),

$\widehat{\mathbf{Z}}$ (14.13) koosneb varda lõpus ja alguses olevatest siiretest ning kontaktjõududest

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_L \\ \mathbf{Z}_A \end{bmatrix}, \quad (14.13)$$

siin $\mathbf{Z}_L, \mathbf{Z}_A$ – varda lõpus ja alguses olevad siirded ning kontaktjõud

$$\mathbf{Z}_L = \begin{bmatrix} u_L \\ w_L \\ \varphi_L \\ \dots \\ N_L \\ Q_L \\ M_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_A = \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ \dots \\ N_A \\ Q_A \\ M_A \end{bmatrix}, \quad (14.14)$$

ehk

$$\mathbf{Z}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_L \\ \dots \\ \mathbf{s}_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_A \\ \dots \\ \mathbf{s}_A \end{bmatrix}, \quad (14.15)$$

kus \mathbf{v}_L , \mathbf{v}_A on varda lõpus ja alguses olevad siirded

$$\mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} u_L \\ w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \end{bmatrix} \quad (14.16)$$

\mathbf{s}_L , \mathbf{s}_A varda lõpus ja alguses olevad kontaktjõud

$$\mathbf{s}_L = \begin{bmatrix} N_L \\ Q_L \\ M_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_A = \begin{bmatrix} N_A \\ Q_A \\ M_A \end{bmatrix} \quad (14.17)$$

Koormusvektor $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ on summa mitmest koormusvektorist (vt $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$ (G.22), $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$ (G.23)). Korrutame siirete read baasjäikusega (i_0 =baasio), mis on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

Ühtlaselt jaotatud koormuse q (projektsioonid q_x ja q_z) puhul on koormusliige $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$ järgmine:

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q = \begin{bmatrix} -i_0 \frac{q_x \cdot x^2}{2 \cdot EA} \\ i_0 \frac{q_z \cdot x^4}{24EI_y} \\ -i_0 \frac{q_z \cdot x^3}{6EI_y} \\ -q_x \cdot x \\ -q_z \cdot x \\ -q_z \cdot x^2/2 \end{bmatrix} \quad (14.18)$$

Koormusvektorit $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$ arvutame GNU Octave'i funktsiooniga [yzhqz.m](#) lk 721. Koondatud jõu korral, kus x_a on koondatud jõu koordinaat, saame järgmise koormusliikme $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F = \begin{bmatrix} -i_0 \frac{F_x \cdot (x - x_a)_+}{EA} \\ i_0 \frac{F_z \cdot (x - x_a)_+^3}{6EI_y} \\ -i_0 \frac{F_z \cdot (x - x_a)_+^2}{2EI_y} \\ -F_x \cdot (x - x_a)_+^o \\ -F_z \cdot (x - x_a)_+^o \\ -F_z \cdot (x - x_a)_+ \end{bmatrix} \quad (14.19)$$

Koormusvektorit $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$ arvutame GNU Octave'i funktsiooniga [yzfvz.m](#) lk 722.

Ülekandemaatriksi \mathbf{U} (G.20) siirete read korrutame baasjäikusega (i_0 =baasio)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -i_0 \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & \vdots & 0 & i_0 \frac{x^3}{6EI_y} - i_0 \frac{x}{GA_{red}} & i_0 \frac{x^2}{2EI_y} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & -i_0 \frac{x^2}{2EI_y} & -i_0 \frac{x}{EI_y} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -x & -1 \end{bmatrix} \quad (14.20)$$

Maatriks (14.20) koosneb, nii nagu maatriks (14.7), järgmistest alammaatriksitest

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \text{jäiga keha liikumist} & \vdots & \text{põhideformatsioone} \\ \text{kirjeldav alammaatriks} & \vdots & \text{kirjeldav alammaatriks} \\ \dots & \vdots & \dots \\ & \vdots & \text{tasakaalvõrrandeid} \\ & \vdots & \text{kirjeldav alammaatriks} \end{bmatrix} \quad (14.21)$$

Ülekandemaatriksit \mathbf{U} (14.20) saame arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [yflhlin.m](#) lk 721 või hõreda maatriksina [ysplfhlhlin.m](#) lk 723.

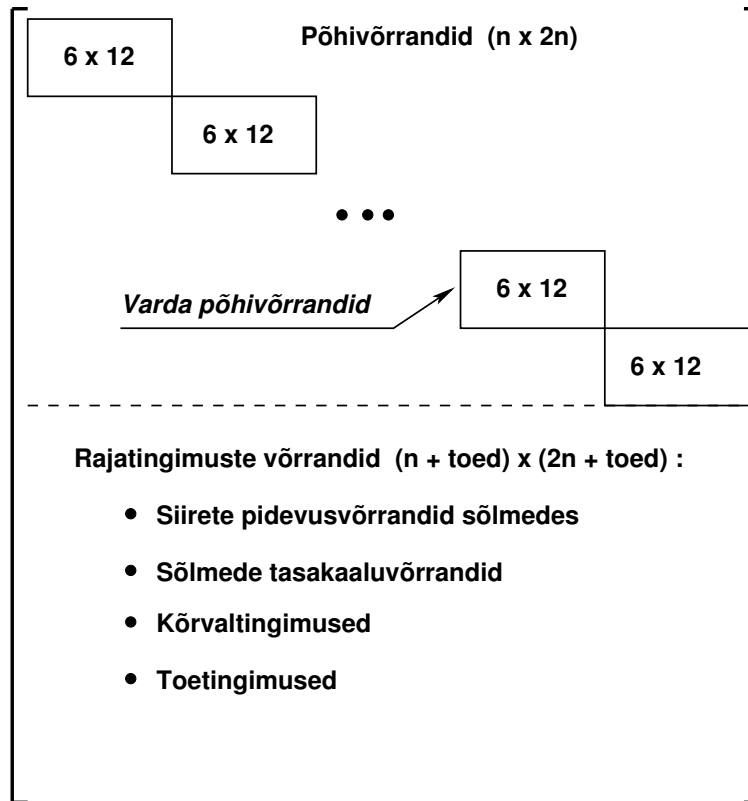
Varraste otstes olevate siirete ja kontaktjõudude (14.14)-(14.17) määramiseks koostatud võrrandisüsteem koosneb (joonis 14.9):

- varraste põhivõrranditest,
- sõlmedes varraste otste siirete pidevuse võrranditest,
- sõlmede tasakaalvõrranditest,
- varraste kõrvaltingimustest (momendiliigendid),
- toesõlmede toetingimustest (varraste momendiliigendeid ei näidata topelt).

14.4 Põhivõrrandite koostamine

Varraskonstruksiooni arvutuskeemi koostamisel võtame kasutusele parema käe teljestiku ja II märgikokkuleppe. Üldteljestiku tähistame X, Y, Z ja kohalikud teljestikud x, y, z -ga.

Võrrandisüsteemi koostamisel *EST-meetodiga* on tundmatuteks siirded ja kontaktjõud varraste otstes (14.14)-(14.17). Kontaktjõudude ja siirete arv sõltub varraste

Joonis 14.9. Võrrandisüsteemi $\text{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}$ struktuur

arvust. Ühel vardal on otstes 6 siiret (14.16) ja 6 kontaktjõudu (14.17). Nende arvud tuleb korrutada varraste arvuga, siis saame otsitavate suuruste arvu. Koostame võrrandisüsteemi:

$$\text{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \quad (14.22)$$

kus spA on hõre maatriks. Hõredate maatriksite tehetega saame tutvuda [lisas B lk 647](#).

Konstruksiooni põhivõrranditeks nimetame neid võrrandisüsteemi (14.22) võrrandeid, mida koostame *varda põhivõrranditega* (14.11). Võrrandisüsteemi (14.22) ülejäänud võrrandid kirjeldavad konstruktsiooni rajatingimusi, mis omakorda jagunevad kontakti- ja toetingimusi kirjeldavateks võrranditeks.

Konstruksiooni põhivõrrandite koostamisel GNU Octave'i programmid [ysplvfmhvI.m](#) lk 724, [yzhqz.m](#) lk 721, [yzfzv.m](#) lk 722, [spInsertBtoA.m](#) lk 726, [InsertBtoA.m](#) lk 726 arvutavad ja paigutavad võrrandisüsteemi (14.22) varraste põhivõrrandid (14.11) järgmise tsükliga.

Väljavõtte programmist 14.5 (Põhivõrrandid. **spRaamEST.m** lk 728)

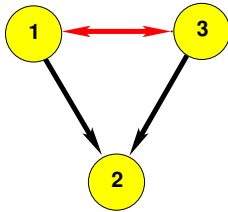
```

IIV=0;
IJV=0;
%
for i=1:NEARV
    krda=i;
    EI=selem(i,13); % topoloogilisest kirjeldusest
    EA=selem(i,14); %
    GAR=selem(i,15); %
    Li=lvarras(i,1);
    qx=qxZ(i,1);
    qz=qzZ(i,1);
    aLx=aLXx(i,1);
    Fz=FZz(i,1);
    Fx=FZx(i,1);
    spvF=y splvfmhvl(baasi0, Li, Li, EA, GAR, EI);
    vB=yzhqz(baasi0, Li, qx, qz, EA, EI);
    vFz=yzfzv(baasi0, Li, aLx, Fx, Fz, EA, EI);
    vB=vB+vFz;
    IIV=krda*6-5;
    IJV=krda*12-11;
    spA=spInsertBtoA(spA, IIV, IJV, spvF);
    B=InsertBtoA(B, NNK, 1, IIV, 1, vB, 6, 1);
endfor
% siin NEARV on elementide arv

```

14.5 Vastastikused siirded

Kui sõlme on ühendatud mitu varrast, siis varraste omavaheliste siirete võrdsuse kirjeldamisel peame jälgima transitiivsust⁴.



Transitiivsus on seose omadus, kui varda 1 siirded on seoses varda 2 siiretega ja varda 3 siirded on seoses varda 2 siiretega, siis ka varda 3 ja 1 vahel on seos. See viimane on järeldus ja seda transitiivset seost pidevusvõrranditesse ei lisa.

Joonis 14.10. Transitiivsus

Transitiivsuse mõistega oleme tuttavad jõumeetodist, kus ühikepüüride koostamisel vaatlesime lihtliigendeid, et vajalikul hulgal vastastikuseid pöördeid kirjeldada.

Kontaktitingimustest (vt jaotis 3.3 joonis 3.2) vaatame esmalt vastastikuseid siirdeid.

Kui kaks varrast ühendada, kus ühe varda (i) lõpus olevad siirded ja pöörded $\mathbf{v}_L^{(i)}$ (14.16) ühendatakse teise varda (j) alguses olevate siiretega ja pööretega $\mathbf{v}_A^{(j)}$, kus

$$\mathbf{v}_L^{(i)} = \begin{bmatrix} u_L^{(i)} \\ w_L^{(i)} \\ \varphi_L^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{v}_A^{(j)} = \begin{bmatrix} u_A^{(j)} \\ w_A^{(j)} \\ \varphi_A^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (14.23)$$

⁴<http://et.wikipedia.org/wiki/Transitiivsus>

siis kohalikes koordinaatides olevad siirded teisendame üldkoordinaatidesse (vt teisendust 1.46) varda teisendusmaatriksiga

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.24)$$

Kui on tegemist *momendiliigendiga*, siis ühendatakse ainult siirded.

$$\mathbf{v}_L^{(i)} = \begin{bmatrix} u_L^{(i)} \\ w_L^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{v}_A^{(j)} = \begin{bmatrix} u_A^{(j)} \\ w_A^{(j)} \end{bmatrix} \quad (14.25)$$

ning teisendusmaatriks \mathbf{T}_{i2} on järgmine:

$$\mathbf{T}_{i2} = \mathbf{T}_{i2} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (14.26)$$

Varraste otstes olevad momendiliigendid kirjeldatakse kõrvaltingimustega. Kõrvaltingimustega varda otsas olevat momendiliigendit ja toetingimusega antavat momendiliigendit topelt ei kirjeldata.

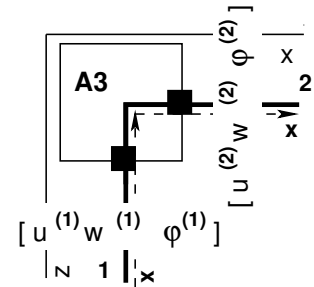
Järgnevalt vaatleme sõlmedes ühendatud varraste vastastikuseid siirdeid ja pöördeid.

Sõlme A3 pidevustingimused (vt joonis 14.11). Siin on 2 varrast omavahel jäigalt ühendatud.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L^{(1)} \\ w_L^{(1)} \\ \varphi_L^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A^{(2)} \\ w_A^{(2)} \\ \varphi_A^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.27)$$

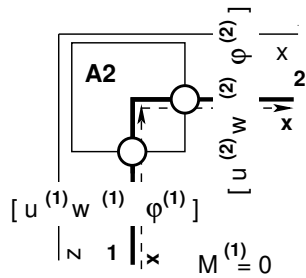
ehk

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{v}_L^{(1)} - \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{v}_A^{(2)} = 0 \quad (14.28)$$



Joonis 14.11. Sõlme A3 pidevus

Sõlme A2 pidevustingimused (vt joonis 14.12). Siin on 2 varrast omavahel ühendatud momendiliigendiga.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L^{(1)} \\ w_L^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A^{(2)} \\ w_A^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.29)$$

ehk

Joonis 14.12. Sõlme A2 pidevus

$$\mathbf{T}_{12} \mathbf{v}_{2L}^{(1)} - \mathbf{T}_2 \mathbf{v}_{2A}^{(2)} = 0 \quad (14.30)$$

Varraste 1 ja 2 otstes olevad momendiliigendid antakse kõrvaltingimustega

$$\mathbf{M}_L^{(1)} = 0 \quad (14.31)$$

$$\mathbf{M}_A^{(2)} = 0 \quad (14.32)$$

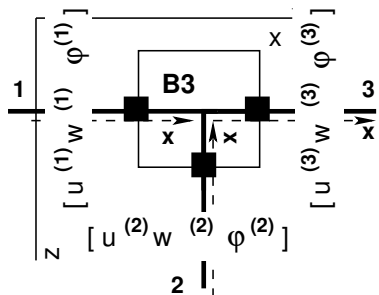
Sõlme B3 pidevustingimused (vt joonis 14.13). Siin on 3 varrast omavahel järgalt ühendatud. Varraste 1–2 omavahelised seosed on toodud võrrandiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L^{(1)} \\ w_L^{(1)} \\ \varphi_L^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A^{(2)} \\ w_A^{(2)} \\ \varphi_A^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.33)$$

ehk

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{v}_L^{(1)} - \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{v}_A^{(2)} = 0 \quad (14.34)$$

Varraste 2–3 omavahelised seosed on toodud võrrandiga (14.35). Varraste 1–3 side on juba järeldus (transitiivne side):



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L^{(2)} \\ w_L^{(2)} \\ \varphi_L^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A^{(3)} \\ w_A^{(3)} \\ \varphi_A^{(3)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.35)$$

Joonis 14.13. Sõlme B3 pidevus

ehk

$$\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{v}_L^{(2)} - \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{v}_A^{(3)} = 0 \quad (14.36)$$

Sõlme B32 pidevustingimused (vt joonis 14.14). Siin on 3 varrast omavahel ühendatud. Vardad 1–2 on omavahel järgalt ühendatud. Seosed on toodud võrrandiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L^{(1)} \\ w_L^{(1)} \\ \varphi_L^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L^{(2)} \\ w_L^{(2)} \\ \varphi_L^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.37)$$

ehk

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{v}_L^{(1)} - \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{v}_L^{(2)} = 0 \quad (14.38)$$

Vardad 2–3 on omavahel ühendatud liigendiga. Seosed on toodud võrrandiga (14.39). Varraste 1–3 side on juba järelendus (transitiivne side):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L^{(2)} \\ w_L^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A^{(3)} \\ w_A^{(3)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.39)$$

ehk

$$\mathbf{T}_{22} \cdot \mathbf{v}_{2L}^{(2)} - \mathbf{T}_{32} \cdot \mathbf{v}_{2A}^{(3)} = 0 \quad (14.40)$$

Kolmana varda otsas olev momendiliigend kirjeldatakse *kõrvaltingimusega*

$$\mathbf{M}_A^{(3)} = 0 \quad (14.41)$$

Sõlme B2 pidevustingimused (vt joonis 14.15). Siin on 3 varrast omavahel ühendatud liigenditega. Vardad 1–2 on omavahel ühendatud liigendiga. Seosed on toodud võrrandiga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L^{(1)} \\ w_L^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A^{(2)} \\ w_A^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.42)$$

ehk

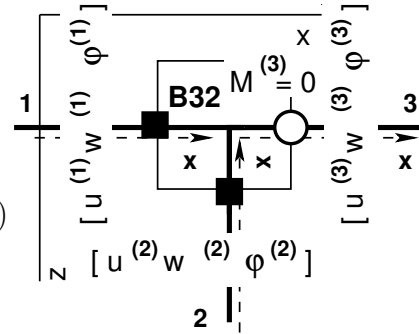
$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{v}_{2L}^{(1)} - \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{v}_{2A}^{(2)} = 0 \quad (14.43)$$

Varraste 1, 2 ja 3 otstes olevaid momendiliigendeid kirjeldame *kõrvaltingimustega*

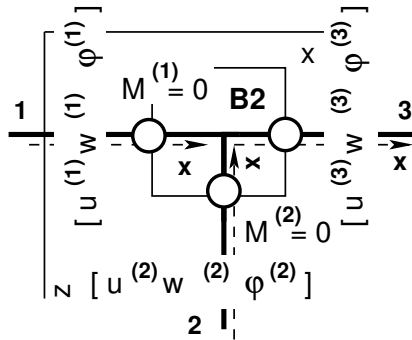
$$\mathbf{M}_L^{(1)} = 0 \quad (14.44)$$

$$\mathbf{M}_L^{(2)} = 0 \quad (14.45)$$

$$\mathbf{M}_A^{(3)} = 0 \quad (14.46)$$



Joonis 14.14. Sõlme B32 pidevus



Vardad 2–3 on omavahel ühendatud liigendiga. Seosed on toodud võrrandiga (14.47). Varraste 1–3 side on juba järelalus (transitiivne side):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L^{(2)} \\ w_L^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A^{(3)} \\ w_A^{(3)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.47)$$

ehk

Joonis 14.15. Sõlme B2 pidevus

$$\mathbf{T}_{22} \cdot \mathbf{v}_{2L}^{(2)} - \mathbf{T}_{32} \cdot \mathbf{v}_{2A}^{(3)} = 0 \quad (14.48)$$

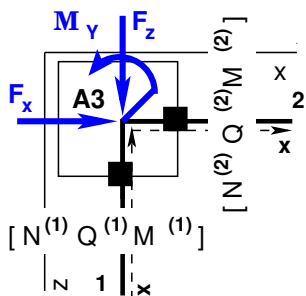
Teisendusmaatriksid $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i$ saab muuta hõredaks maatriksiks käsuga $spTi = sparse(Ti)$. Need teisendatud hõredad maatriksid asetame võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse spA käsuga $spA = spInsertBtoA(spA, M, N, spTi)$. Siin on M ja N rea ja veeru indeks. Võrrandisüsteemi (14.22) vabaliikme \mathbf{B} nullime eelnevalt ja pidevustingimuste puhul nulle ei ole vaja sisestada. Kõrvaltingimuse kontaktjõu kordaja 1 asetame võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse käsuga $spA = spSisestaArv(spA, M, N, 1)$.

Järgnevalt vaatame kontaktitingimusi (vt jaotis 3.3 joonis 3.2) ja sõlmede tasakaalu.

14.6 Sõlme tasakaaluvõrrandid

Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamisel kasutame samu teisendusmaatrikseid \mathbf{T}_i (14.24) nagu siirete pidevusvõrrandite koostamisel. Kui siirete pidevusvõrrandite koostamisel oli ühe varda teisendusmaatriks \mathbf{T}_j plussmärgiga ja teise varda teisendusmaatriksist \mathbf{T}_i miinusmärgiga, siis tasakaaluvõrrandite koostamisel on nad plussmärgiga.

Sõlme A3 tasakaaluvõrrandid (vt joonis 14.16). Siin peab sõlm A3 olema tasakaalus varda 1, 2 kontaktjõudude ja sõlmele rakendatud jõudude F_x, F_z, \mathcal{M}_y mõjul



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \\ M_L^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A^{(2)} \\ Q_A^{(2)} \\ M_A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ \mathcal{M}_y \end{bmatrix} \quad (14.49)$$

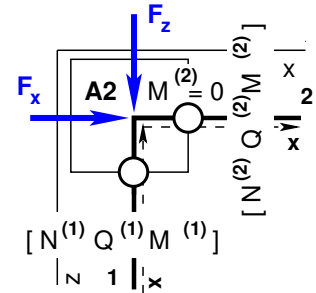
Joonis 14.16. Sõlme A3 tasakaal

ehk

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{s}_L^{(1)} + \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{s}_A^{(2)} = \mathcal{F}_{A3} \quad (14.50)$$

Sõlme A2 tasakaaluvõrrandid (vt joonis 14.17). Siin on omavahel ühendatud 2 varrast momendiliigendiga:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A^{(2)} \\ Q_A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (14.51)$$



ehk $\mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{s}_{2L}^{(1)} + \mathbf{T}_{22} \cdot \mathbf{s}_{2A}^{(2)} = \mathcal{F}_{A2}$ (14.52) Joonis 14.17. Sõlme A2 tasakaal

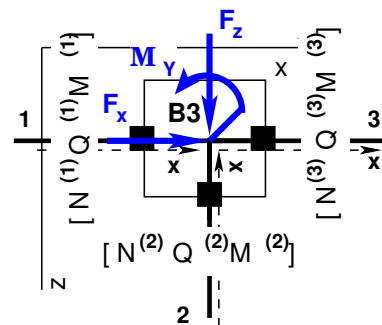
Varraste otstes olevad momendiliigendid kirjeldatakse kõrvaltingimustega.

Sõlme B3 tasakaaluvõrrandid (vt joonis 14.18). Siin on kolm varrast omavahel jäigalt ühendatud:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \\ M_L^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(2)} \\ Q_L^{(2)} \\ M_L^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A^{(3)} \\ Q_A^{(3)} \\ M_A^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ \mathcal{M}_y \end{bmatrix} \quad (14.53)$$

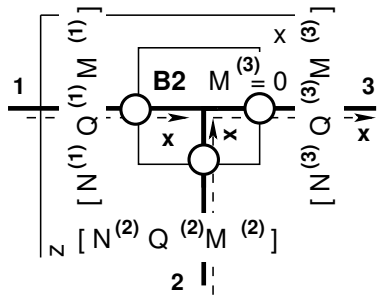
ehk

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{s}_L^{(1)} + \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{s}_L^{(2)} + \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{s}_A^{(3)} = \mathcal{F}_{B3} \quad (14.54)$$



Joonis 14.18. Sõlme B3 tasakaal

Sõlme B2 tasakaaluvõrrandid (vt joonis 14.19). Siin on kolm varrast omavahel ühendatud momendiliigendiga:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(2)} \\ Q_L^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A^{(3)} \\ Q_A^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (14.55)$$

ehk
Joonis 14.19. Sõlme B2 tasakaal

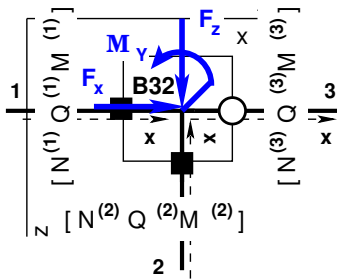
$$\mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{s}_{2L}^{(1)} + \mathbf{T}_{22} \cdot \mathbf{s}_{2L}^{(2)} + \mathbf{T}_{32} \cdot \mathbf{s}_{2A}^{(3)} = \mathcal{F}_{B2} \quad (14.56)$$

Varraste otstes olevad momendiliigendid kirjeldatakse kõrvaltingimustega.

Sõlme B32 tasakaaluvõrrandid (vt joonis 14.20). Siin on omavahel ühendatud kolm varrast, kaks jäigalt ja üks momendiliigendiga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \\ M_L^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(2)} \\ Q_L^{(2)} \\ M_L^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A^{(3)} \\ Q_A^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ \mathcal{M}_y \end{bmatrix} \quad (14.57)$$

ehk

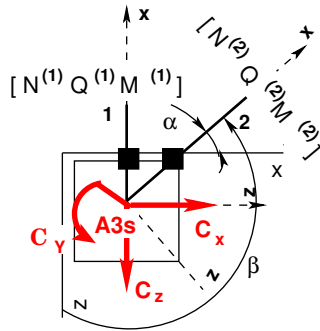


$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{s}_L^{(1)} + \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{s}_L^{(2)} + \mathbf{T}_{32} \cdot \mathbf{s}_{2A}^{(3)} = \mathcal{F}_{B32} \quad (14.58)$$

Siin on kolm tasakaaluvõrrandit. Tasakaaluvõrrandite teisendusmaatriksid \mathbf{T}_i asetame võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse \mathbf{spA} nii nagu siirete pidevusvõrrandite puhul (vt lk 403). Sõlmkoormused sisestame võrrandisüsteemi vabaliikmete vektorisse \mathbf{B} . Kui sõlmes on ühendatud rohkem kui kolm varrast, siis sõlmes tasakaaluvõrrandite arv ei suurene.

Joonis 14.20. Sõlme B32 tasakaal

Sõlme AF3s tasakaaluvõrrandid (vt joonis 14.21). Joonisel 14.21 on näidatud toereaktsioonide C_x , C_z ja C_y lisamine tasakaaluvõrranditesse:



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A^{(1)} \\ Q_A^{(1)} \\ M_A^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A^{(2)} \\ Q_A^{(2)} \\ M_A^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_x \\ C_z \\ C_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ \mathcal{M}_y \end{bmatrix} \quad (14.59)$$

Joonisel ei ole näidatud võrrandis (14.59) toodud sõlmkoormust F_x , F_z ja \mathcal{M}_y .

14.7 Kõrvaltingimused

Kõrvaltingimustes näidatakse varraste otstes olevad momendiliigendid. Avaldistega (14.31), (14.32), (14.41), (14.44), (14.45) ja (14.46) on kirjeldatud momendiliigendeid.

14.8 Toetingimused

Toetingimused (vt jaotis 3.2 joonis 3.1) jagunevad toereaktsioonideks ja toesiireteks. Räägitakse ka *staatilistest rajatingimustest* ja *kinemaatilistest rajatingimustest*. Jooniselt 3.1 lk 80 näeme, et ühel toel olevast kuuest rajatingimusest antakse ette kolm rajatingimust. Kinemaatilised ja staatilised rajatingimused on paarikaupa. Kui üks on ette antud, siis teine tuleb leida võrrandisüsteemi lahendamisega. Ehitusmehaanikas on diferentsiaalvõrrandi lahend ja rajatingimused ühesuguse tähtsusega. Arvutustehnika arenguga ja programmide kasutamisega on muutunud veelgi olulisemaks õigete rajatingimuste valimine. Eksimine rajatingimuste valimisel põhjustab programmi mittetöötamise või, mis on veelgi halvem, valede tulemuste saamise.

Rajatingimuse sisestamiseks võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse \mathbf{spA} peame teadma varda otsas, mis on toel, kontaktjõu või siirde järjekorranumbrit N ja võrrandi numbrit M , kuhu me selle tingimuse kirjutame. Toetingimuse sisestamiseks kasutame GNU Octave'i funktsiooni $\mathbf{spA} = \mathbf{spSisestaArv}(\mathbf{spA}, M, N, 1)$. Toetingimuse sisestamist näeme programmis $\mathbf{spRaamEST.m}$ lk 728.

14.9 Siirete ja sisejõudude arvutamine

Koostatud võrrandisüsteemi (14.22) kordajad moodustavad hõreda maatriksi \mathbf{spA} (Hõredad maatriksid vt lisa B lk 647). See võrrandisüsteem (14.60) on skaleeritud, st siirded on korrutatud baasjäikusega $i_0 = \frac{\max EI}{\min I}$

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \quad (14.60)$$

Lahendame võrrandisüsteemi (14.60).

$$X = spA \setminus B \quad \% \text{ lahend võrrandisüsteemile } spA * X = B \quad (14.61)$$

Võrrandisüsteemi lahendist (14.61) tegelike siirete saamiseks jagame leitud siirded baasjäikusega i_0 . Algpameetrid varrastele saame, kui valime välja varraste alguses olevad tegelikud siirded ja kontaktjõud. Leitud algpameetrid vastavad II märgikokkuleppele. Varda lõpus olevad sisejõudude suunad langevad I ja II märgikokkuleppe puhul kokku (vt jaotis 1.12 lk 47).

Võrrandisüsteemi (14.12) kirjutame kujul (14.62), kus \mathbf{Z}_A on algpameetrite vektor ja \mathbf{Z}_L varda lõpus olevate siirete ja sisejõudude vektor

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_A + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (14.62)$$

siin koormusvektor $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ on summa mitmest koormusvektorist (vt $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$ (14.18), $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$ (14.19)), kus baasjäikuse ($i_0 = 1.0$) valime üheks, kuna vaatleme normaliseeritud (tegelikke) siirdeid.

Ülekandemaatriks \mathbf{U} avaldises (14.62) on kirjeldatud avaldisega (14.20) ja seda saame arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [ylfhlin.m](#) lk 721.

Koormusvektorit $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$ arvutame GNU Octave'i funktsiooniga [yzhqz.m](#) lk 721 ja koormusvektorit $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$ – funktsiooniga [yzfzv.m](#) lk 722.

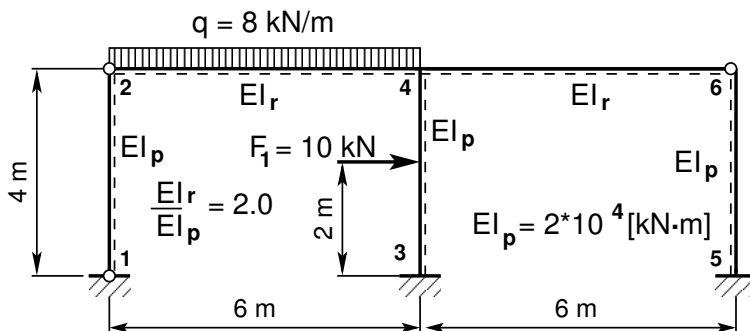
Väljavõte programmist 14.6 (Sisejõud. [spRaamEST.m](#) lk 728)

```
for i=1:NEARV
    krda=i;
    vF=zeros(6,12);
    EI=selem(i,13); % topoloogilisest kirjeldusest
    EA=selem(i,14); %
    GAR=selem(i,15); %
    Li=lvarras(i,1);
    qx=qxZ(i,1);
    qz=qzZ(i,1);
    aLx=aLXx(i,1);
    Fz=FZz(i,1);
    Fx=FZx(i,1);
    xsamm=Li/4; % varda neljandikel sisejõud
    xx=0; % siis siin 1. ja 2. märgi kokkulepe
    AP=AlgPar(i,:)'; %
    for ij=1:5 % 5 – sisejõud ka varda algul
        vvF=ylfhlin(1.0,xx,EA,GAR,EI);
        vvB=yzhqz(1.0,xx,qx,qz,EA,EI);
        vvFz=yzfzv(1.0,xx,aLx,Fx,Fz,EA,EI);
        Fvv(:,ij)=vvF*AP+vvB+vvFz; % ülekandevõrrand
        xx=xx+xsamm;
    endfor
endfor
% siin NEARV on elementide (varraste) arv
```

14.10 Raami arvutuse näited EST-meetodiga

14.10.1 Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 14.2 [\[slaidid\]](#)

Näide 14.2 Koostada joonisel 14.22 näidatud raamile sisejõudude epüürid. Raami kõrgus $h = 4$ m ja avad $l = 6$ m. Raami riivile 2–4 on rakendatud ühtlaselt jaotatud koormus $q = 8$ kN/m ja posti 3–4 keskele koondatud jõud $F = 10$ kN.



Joonis 14.22. Kahe avaga raam

Raami posti ristlõike paindejäikus on $EI_p = 2 \cdot 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ja raami riivi ristlõike paindejäikus $EI_r = 2.0EI_p$, posti ristlõike pikijäikus $EA_p = 4.6 \cdot 10^6 \text{ kN}$, $EA_r = 8.8 \cdot 10^6 \text{ kN}$, posti ristlõike lõikejäikus $GA_{rp} = 0.4EA_p$, $GA_{rr} = 0.4EA_r$.

Arvutuse tulemusi võrrelda näites 9.2 jõumeetodiga lahendatud ülesandega.

Võrrandisüsteemi koostamisel EST-meetodiga on tundmatuteks siirded ja kontaktjõud varraste otstes (joonised 14.23 ja 14.24). Kontaktjõudude ja siirete arv on 60. Kontaktjõudude ja siirete arv sõltub varraste arvust. Kontaktjõudude ja siirete leidmiseks koostame võrrandisüsteemi (14.63)

$$\text{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \quad (14.63)$$

kus spA on hõre maatriks. Hõredate maatriksite tehetega saame tutvuda lisas B lk 647.

Põhivõrrandid moodustavad poole võrrandisüsteemist (14.63) (vt joonis 14.9). Põhivõrranditega tutvusime lõigus 14.4 (lk 398). Samal leheküljel tutvusime funktsioonidega ja programmi tsükliga, mille abil saab moodustada põhivõrrandid. Põhivõrrandite arv on 30. Varraste otste siirete sidumise (siirete pidevusvõrrandid) alustame võrrandist 31 (vt Rajatingimusi 14.7 lk 410).

Varraste siirete pidevusvõrrandid seovad sõlmedes vardaid paarikaupa. Jooniselt 14.23 näeme, et sõlmes 2 on seotud vardad 1–2, sõlmes 4 on seotud vardad 2–3 ja 3–4 ning sõlmes 6 vardad 4–5. Erinevat tüüpi sõlmedes varraste ühendamist vaatlesime lõigus 14.5 lk 399. Varraste kohalikes koordinaatides olevad siirded teisendame üldkoordinaatidesse (vt teisendust 1.46) varda teisendusmaatriksiga \mathbf{T}_i (14.24) ja \mathbf{T}_{i2} (14.26)). Hõredate maatriksitena tähistame neid maatrikseid järgmiselt:

spTi – varda i 3×3 teisendusmaatriks,

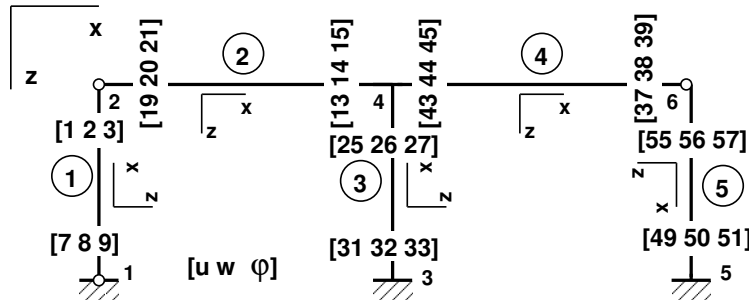
spTim – varda i 3×3 teisendusmaatriks korrutatud miinus ühega,

spTi2 – varda i 2×2 teisendusmaatriks,

spTi2m – varda i 2×2 teisendusmaatriks korrutatud miinus ühega.

Sõlmes 2 on kaks varrast ühendatud momendiliigendiga. Sellist tüüpi ühendust vaatlesime kirjelduses „Sõlme A2 pidevustingimused” lk 400 joonis 14.12. Jooniselt 14.23 näeme, et sõlmes 2 on ühendatud 1. ja 2. varda siirded, mille järjekorranumbrid algavad 1-st ja 19-st. Kanname need arvud „Rajatingimustesse 14.7”.

Sõlmes 4 on kolm varrast ühendatud jäigalt. Siin varraste ühenduste kirjeldamisel jälgime varraste **transitiivsust** (lk 399). Sellist tüüpi ühendust vaatlesime kirjelduses „Sõlme B3 pidevustingimused” lk 401 joonis 14.13. Jooniselt 14.23 näeme, et sõlmes 4 on ühendatud 2. ja



Joonis 14.23. Raami siirete nummerdus

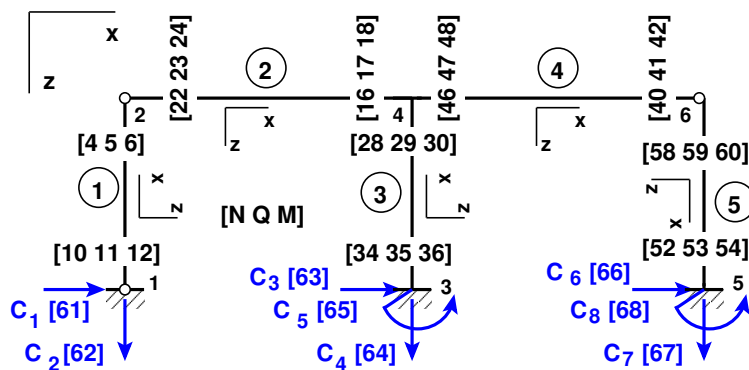
3. varda siirded, mille järjekorranumbrid algavad 13-st ja 25-st. Veel on sõlmes 4 ühendatud 3. ja 4. varda siirded, mille järjekorranumbrid algavad 25-st ja 43-st. Kanne need arvud „Rajatingimustesse 14.7”.

Sõlmes 6 on kaks varrast ühendatud momendiliigendiga. Sõlm 6 on sarnane sõlmega 2. Jooniselt 14.23 näeme, et sõlmes 6 on ühendatud 4. ja 5. varda siirded, mille järjekorranumbrid algavad 37-st ja 55-st. Kanne need arvud „Rajatingimustesse 14.7”.

Sõlmede tasakaalvõrrandid. Erinevat tüüpi sõlmede tasakaalvõrrandeid vaatlesime lõigus 14.6 lk 403. Siin kasutame kontaktjõudude teisendamiseks samu teisendusmaatrikseid, mida kirjeldasime siirete teisendamisel.

Sõlmes 2 lähevad tasakaalvõrrandisse varraste 1 ja 2 suunakoosinustest moodustatud teisendusmaatriksid \mathbf{T}_{12} ja \mathbf{T}_{22} (14.51) lk 404. Jooniselt 14.24 näeme, et sõlmes 2 on varraste 1 ja 2 kontaktjõud, mille järjekorranumbrid algavad 4-st ja 22-st. Kanne need arvud „Rajatingimustesse 14.7”.

Sõlme 4 tasakaalvõrrandid. Sellist tüüpi sõlme tasakaalvõrrandeid vaatlesime kirjelduses „Sõlme B3 tasakaalvõrrandid” (lk 404). Sõlmes 4 lähevad tasakaalvõrrandisse varraste 2, 4 ja 6 suunakoosinustest moodustatud teisendusmaatriksid \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_3 ja \mathbf{T}_4 (14.53) lk 404. Jooniselt 14.24 näeme, et sõlmes 4 on varraste 2, 3 ja 4 kontaktjõud, mille järjekorranumbrid algavad 16-st, 28-st, ja 46-st. Kanne need arvud „Rajatingimustesse 14.7”.



Joonis 14.24. Raami kontaktjõudude nummerdus

Väljavõte programmist 14.7 (Rajatingimused. spRaamEST.m lk 728)

```

% Siirete pidevuse võrrandid 31–40 % vabaliikmete vektor on nullitud
% Sõlm 2
spA=spInsertBtoA(spA,31,1,spT12); spA=spInsertBtoA(spA,31,19,spT22m);
% Sõlm 4
spA=spInsertBtoA(spA,33,13,spT2); spA=spInsertBtoA(spA,33,25,spT3m);
spA=spInsertBtoA(spA,36,25,spT3); spA=spInsertBtoA(spA,36,43,spT4m);
% Sõlm 6
spA=spInsertBtoA(spA,39,37,spT42); spA=spInsertBtoA(spA,39,55,spT52m);
% Sõlme tasakaaluvõrrandid 41–55
% Sõlm 2
spA=spInsertBtoA(spA,41,4,spT12); spA=spInsertBtoA(spA,41,22,spT22);
B(41:42,1)=s2F(1:2,1); % sõlme 2 koormus
% Sõlm 4
spA=spInsertBtoA(spA,43,16,spT2); spA=spInsertBtoA(spA,43,28,spT3);
spA=spInsertBtoA(spA,43,46,spT4); % siin oli kolm varrast
B(43:45,1)=s4F(1:3,1); % sõlme 4 koormus
% Sõlm 6
spA=spInsertBtoA(spA,46,40,spT42); spA=spInsertBtoA(spA,46,58,spT52);
B(46:47,1)=s6F(1:2,1); % sõlme 6 koormus
% Sõlm 1
spA=spInsertBtoA(spA,48,10,spT12); spA=spInsertBtoA(spA,48,61,spTy2m);
B(48:49,1)=0.0; % sõlm 1 t.reakts. C1–61, C2–62
% Sõlm 3
spA=spInsertBtoA(spA,50,34,spT3); spA=spInsertBtoA(spA,50,63,spTym);
B(50:52,1)=0.0; % sõlm 3 t.reakts. C3–63, C4–64, C5–65
% Sõlm 5
spA=spInsertBtoA(spA,53,52,spT5); spA=spInsertBtoA(spA,53,66,spTym);
B(53:55,1)=0.0; % sõlm 5 t.reakts. C6–66, C7–67, C8–68
% Kõrvaltingimused 56–59 % momendiliigendid varraste otstes
% vabaliikmete vektor B on nullitud
spA=spSisestaArv(spA,56,6,1); % kõrvaltingimus M6=0
spA=spSisestaArv(spA,57,24,1); % kõrvaltingimus M24=0
spA=spSisestaArv(spA,58,42,1); % kõrvaltingimus M42=0
spA=spSisestaArv(spA,59,60,1); % kõrvaltingimus M60=0
% Toereaktsioonid 60–68 % vabaliikmete vektor on nullitud
spA=spSisestaArv(spA,60,12,1); % kõrvaltingimus – toetingimus M60=0
spA=spSisestaArv(spA,61,7,1); % toesõlm 1, u
spA=spSisestaArv(spA,62,8,1); % w
spA=spSisestaArv(spA,63,31,1); % toesõlm 3, u, w, fi
spA=spSisestaArv(spA,64,32,1); spA=spSisestaArv(spA,65,33,1);
spA=spSisestaArv(spA,66,49,1); % toesõlm 5, u, w, fi
spA=spSisestaArv(spA,67,50,1); spA=spSisestaArv(spA,68,51,1);

```

Sõlme 6 tasakaaluvõrrandid. Sõlme tasakaaluvõrrandite koostamine on sarnane sõlme 2 tasakaaluvõrrandite koostamisele. Varraste 4 ja 5 kontaktjõud, mille järjekorranumbrid algavad 40-st ja 58-st. Kanname need arvud „Rajatingimustesse 14.7”.

Kõrvaltingimused. Nendeks on varraste otstes olevad momendiliigendid. Jooniselt 14.24 näeme, et sõlmes 2 on varda 1 lõpus ja varda 2 algul momendiliigend $M_L^{(1)}6 = 0$ ning $M_A^{(1)}24 = 0$. Varda 4 lõpus ja varda 5 algul on momendiliigend $M_L^{(4)}42 = 0$ ning $M_A^{(5)}60 = 0$. Kanname need arvud „Rajatingimustesse 14.7”. Varda 1 algul oleva momendiliigendi võtame arvesse toetingimustes.

Toetingimused (vt jaotis 3.2 joonis 3.1) jagunevad toereaktsioonideks ja toesiireteks. Neid nimetatakse ka staatilisteks rajatingimusteks ja kinemaatilisteks rajatingimusteks. Jooniselt 3.1 lk 80 näeme, et igal toel on 3 siiret ja 3 toereaktsiooni. Kolm antakse ette ja kolm tuleb arvutada. Joonistelt 14.23 ja 14.24 näeme, et toesõlmes 1 on siire 7 ja 8 ning moment 12 nullid. Toesõlmes 3 on siirded 31, 32 ja 33 nullid. Toesõlmes 5 on siirded 49, 50 ja 51 nullid. Kanname need „Rajatingimustesse 14.7”.

Rajatingimuste sisestamisel võrrandisüsteemi (14.63) kasutame GNU Octave'i funktsioone *spInsertBtoA(spA,M,N,spTi)*, *InsertBtoA(A,I,J,M,N,B,M,N)* ja *spSisestaArv(spA,M,N,sv)*, siin *M* on rea ja *N* veeru number. Sisestatavate suuruste ja rea *M* ning veeru *N* numbrid on näidatud „Rajatingimustes 14.7”. Rajatingimuste sisestamist näeme programmi väljavõttes 14.7 lk 410. Koordinaatide teisendusel tähistame 3×3 teisendusmaatriksi $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i$ -ina (14.24, lk 400), 2×2 teisendusmaatriksi $\mathbf{T}_{i2} = \mathbf{T}_{i2}$ -na (14.26, lk 400). Miinusega läbi korrutatud teisendusmaatriksitele lisame tähe *m* $\mathbf{T}_{im} = \mathbf{T}_{im}$, $\mathbf{T}_{i2m} = \mathbf{T}_{i2m}$. Nendest teisendusmaatriksitest on moodustatud hõredad maatriksid käsuga *spTi=sparse(Ti)*.

Lahendame võrrandisüsteemi (14.63) GNU Octave'iga

$$X = spA \setminus B \quad \% \text{ lahend võrrandisüsteemile } spA * X = B \quad (14.64)$$

Sellele järgnevalt jagame siirded baasjäikusega i_0 . Nüüd saame avaldada varraste algparameetrid, mis vastavad II märgikokkuleppele (varda algul olevate kontaktjõudude märgid II märgikokkuleppe puhul on vastupidised I märgikokkuleppe omadega).

Väljavõte arvutuse päevikust 14.1 (Arvutuspäevik 14.2 lk 413)

```
=====
Algparameetrid (skaleerimata). II märgikokkulepe
Varda Nr      u          w          fi          N          Q          M
-----
```

1	0.000e+00	0.000e+00	8.881e-06	20.301	0.000	0.000
2	-3.552e-05	1.765e-05	-1.247e-03	0.000	-20.301	0.000
3	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	29.980	-10.033	11.622
4	-3.552e-05	2.607e-05	6.889e-04	-0.033	-2.281	13.684
5	-1.983e-06	3.549e-05	1.331e-05	-2.281	0.033	0.000

```
-----
```

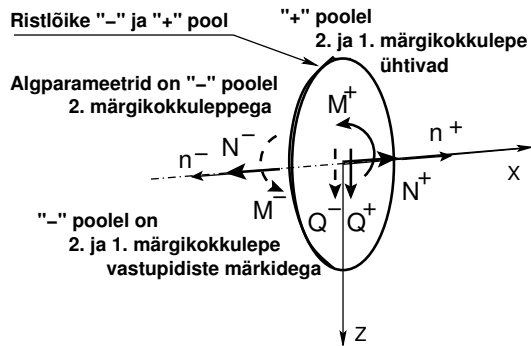
Sisejõudude arvutamiseks kasutame ülekandevõrrandit (14.62).

$$\mathbf{Z}_L(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_A + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (14.65)$$

Selle võrrandi kasutamist arvutiprogrammis on näidatud programmi väljavõttes 14.6 lk 407. Siin võrrandite skaleerimist ei toimu, programmides on baasjäikus võetud üheks ($i_0 = 1.0$).

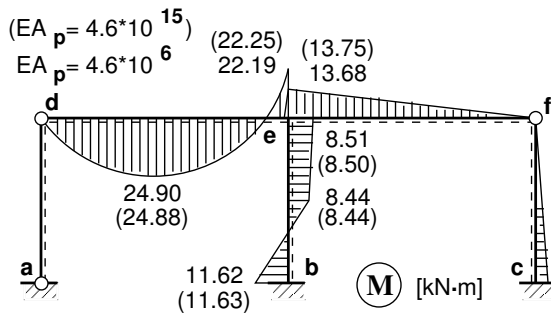
Sisejõudude arvutuse tulemusi näeme arvutuspäevikus 14.2, kus siirded ja sisejõud on leitud varraste neljandikel. Arvutustulemuste põhjal koostame sisejõudude epüürid.

Paindemomendi (joonis 14.26), põikjõu ja normaaljõu epüürit (joonis 14.27) leiame raami toereaktsioonid. Kanname need joonisele 14.28.



Joonis 14.25. Positiivne pind

Varda algul on algparameetrid „negatiivsel pinnal” (vt joonis 14.25) ja nende märk vastab 2. märgikokkuleppele. Sellel pinnal on sisejõud 1. ja 2. märgikokkuleppe puhul erinevad. „Pluss”-pinnal on sisejõud 1. ja 2. märgikokkuleppe puhul ühesuguste märkidega. Avaldisega (14.65) arvutatakse sisejõud parempoolsel „pluss”-pinnal. Seega arvutame avaldisega (14.65) sisejõud ka varda ristlõike algul ($x = 0$) „pluss”-pool, siis saame varda algul kontaktjõud (sisejõud), mille märgid on ühesugused nii 1. kui ka 2. märgikokkuleppe puhul.



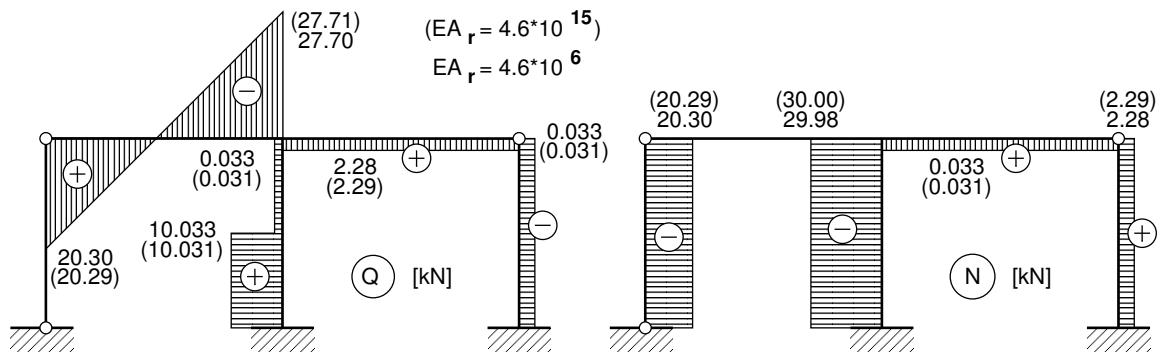
Joonis 14.26. Raami EST paindemomendi epüür

Joonistel 14.26 ja 14.27 sulgudes olevad sisejõudude väärtused on arvutatud raami posti ristlõike pikijäikusega $EA_p = 4.6 \cdot 10^{15}$ kN (jäik post ja riiu). Tulemused langevat ühte jõumeetodiga leitud tulemustega (joon. 9.13 lk 232). Raami posti ristlõike pikijäikusega $EA_p = 4.6 \cdot 10^6$ kN arvutatud tulemused on kantud samale joonisele.

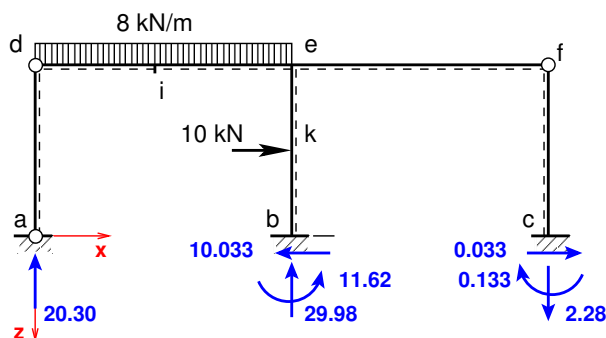
Raami staatiline kontroll.

Projitseerime kõik jõud horisontaalteljele X (joonis 14.28)

$$\Sigma X = 0; \quad 10.0 - 10.033 + 0.033 = 0 \quad (14.66)$$



Joonis 14.27. Raami EST Q ja N



Joonis 14.28. Raami EST toereaktsioonid

Projitseerime kõik jõud vertikaalteljele Z (joonis 14.28)

$$\Sigma Z = 0; \quad 8.0 * 6.0 - 20.30 - 29.98 + 2.28 = 0 \quad (14.67)$$

Momentide summaga kontrollimine on väga oluline kontroll. Paljudel juhtudel avastatakse arvutustes tehtud viga alles selle kontrolliga.

Momentide summa toe a suhtes (vt joonis 14.28).

$$\Sigma M_a = 0; \quad -8.0 * 6.0 * 3.0 - 10.0 * 2.0 + 29.98 * 6.0 + 11.62 - 2.28 * 12.0 - 0.133 = 0.007 \text{ kN}\cdot\text{m} \approx 0 \quad (14.68)$$

Leitud toereaktsioonid läbisid staatilise kontrolli.

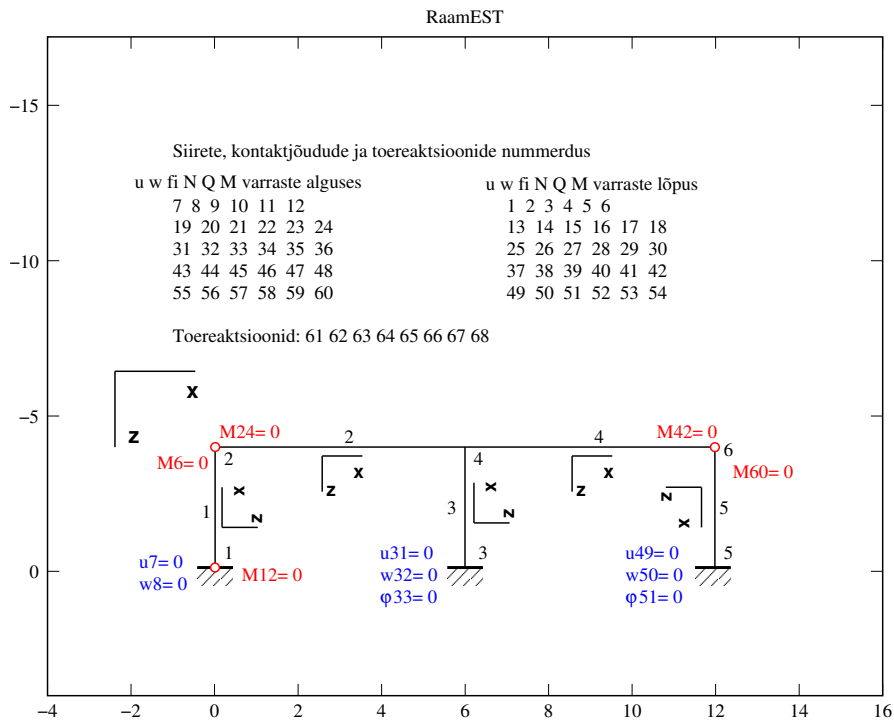
Arvutuspäevik 14.2 (Programm **spRaamEST.m** lk 728)

```
Octave-3.0.1:1> diary spRaamEST.out
Octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spRaamEST
```

```
=====
Järgnev on staatiliselt määratud raami arvutus: GNU Octave'iga
Nmitmeks = 4
Ntoerkts = 8
EIp = 20000
EIr = 40000
EAp = 4600000
EAR = 6800000
GAp = 1840000
GAR = 2720000
baasi0 = 5000
```

```
Elemendi koormus kohalikes koordinaatides Fz =
qz =
0 0 0 0 0
0 8 0 0 0
qx =
0 0 0 0 0
aL =
4 6 2 6 4
Fx =
0 0 10 0 0

Sõlme 2 koormus üldkoordinaatides
ans =
0 0 0
Sõlme 4 koormus üldkoordinaatides
ans =
0 0 0
```



Joonis 14.29. Raami EST elemendid

Sõlme 6 koormus üldkoordinaatides

SolmedeArv = 6

ans =

ElementideArv = 5

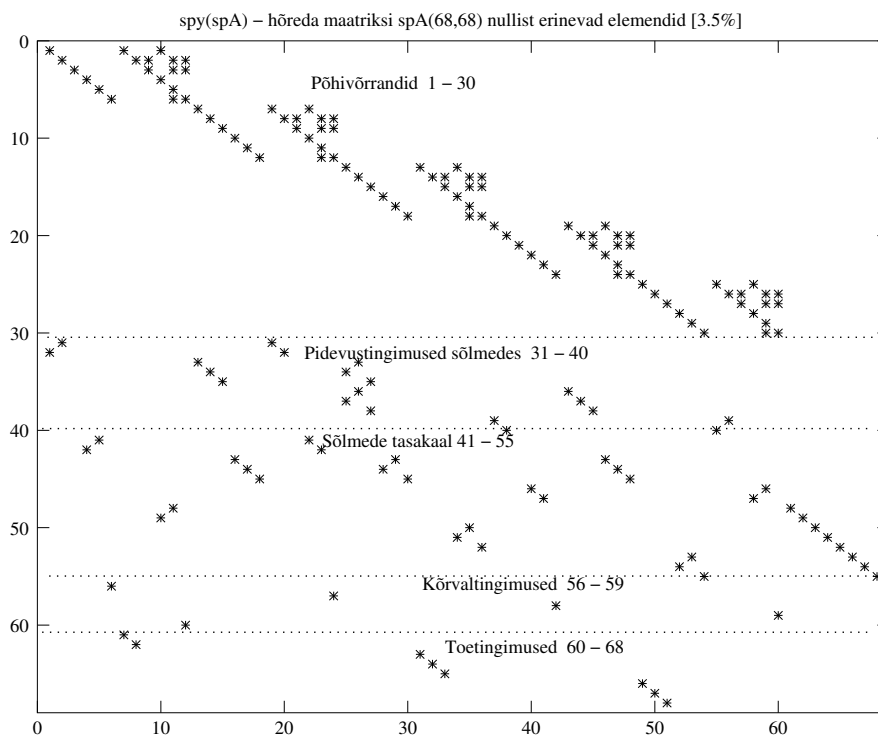
0 0 0

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 68, cols = 68, nnz = 161 [3.5%])

(1, 1) -> 1	(3, 9) -> -1	(34, 14) -> 1
(32, 1) -> -1	(1, 10) -> 0.0043478	(9, 15) -> 1
(2, 2) -> 1	(4, 10) -> 1	(35, 15) -> 1
(31, 2) -> 1	(49, 10) -> -1	(10, 16) -> 1
(3, 3) -> 1	(2, 11) -> -2.6667	(43, 16) -> 1
(4, 4) -> 1	(3, 11) -> 2	(11, 17) -> 1
(42, 4) -> -1	(5, 11) -> 1	(44, 17) -> 1
(5, 5) -> 1	(6, 11) -> 4	(12, 18) -> 1
(41, 5) -> 1	(48, 11) -> 1	(45, 18) -> 1
(6, 6) -> 1	(2, 12) -> -2	(7, 19) -> -1
(56, 6) -> 1	(3, 12) -> 1	(31, 19) -> -1
(1, 7) -> -1	(6, 12) -> 1	(8, 20) -> -1
(61, 7) -> 1	(60, 12) -> 1	(32, 20) -> -1
(2, 8) -> -1	(7, 13) -> 1	(8, 21) -> 6
(62, 8) -> 1	(33, 13) -> 1	(9, 21) -> -1
(2, 9) -> 4	(8, 14) -> 1	(7, 22) -> 0.0044118

(10, 22) -> 1	(13, 31) -> -1	(23, 41) -> 1
(41, 22) -> 1	(63, 31) -> 1	(47, 41) -> 1
(8, 23) -> -4.5000	(14, 32) -> -1	(24, 42) -> 1
(9, 23) -> 2.2500	(64, 32) -> 1	(58, 42) -> 1
(11, 23) -> 1	(14, 33) -> 4	(19, 43) -> -1
(12, 23) -> 6	(15, 33) -> -1	(36, 43) -> -1
(42, 23) -> 1	(65, 33) -> 1	(20, 44) -> -1
(8, 24) -> -2.2500	(13, 34) -> 0.0043478	(37, 44) -> -1
(9, 24) -> 0.75000	(16, 34) -> 1	(20, 45) -> 6
(12, 24) -> 1	(51, 34) -> -1	(21, 45) -> -1
(57, 24) -> 1	(14, 35) -> -2.6667	(38, 45) -> -1
(13, 25) -> 1	(15, 35) -> 2	(19, 46) -> 0.0044118
(34, 25) -> 1	(17, 35) -> 1	(22, 46) -> 1
(37, 25) -> -1	(18, 35) -> 4	(43, 46) -> 1
(14, 26) -> 1	(50, 35) -> 1	(20, 47) -> -4.5000
(33, 26) -> -1	(14, 36) -> -2	(21, 47) -> 2.2500
(36, 26) -> 1	(15, 36) -> 1	(23, 47) -> 1
(15, 27) -> 1	(18, 36) -> 1	(24, 47) -> 6
(35, 27) -> -1	(52, 36) -> 1	(44, 47) -> 1
(38, 27) -> 1	(19, 37) -> 1	(20, 48) -> -2.2500
(16, 28) -> 1	(39, 37) -> 1	(21, 48) -> 0.75000
(44, 28) -> -1	(20, 38) -> 1	(24, 48) -> 1
(17, 29) -> 1	(40, 38) -> 1	(45, 48) -> 1
(43, 29) -> 1	(21, 39) -> 1	(25, 49) -> 1
(18, 30) -> 1	(22, 40) -> 1	(66, 49) -> 1
(45, 30) -> 1	(46, 40) -> 1	(26, 50) -> 1



Joonis 14.30. Raami EST spA nullist erinevate elementide asukohad

(67, 50) -> 1	(39, 56) -> 1	(27, 60) -> 1
(27, 51) -> 1	(26, 57) -> 4	(30, 60) -> 1
(68, 51) -> 1	(27, 57) -> -1	(59, 60) -> 1
(28, 52) -> 1	(25, 58) -> 0.0043478	(48, 61) -> -1
(54, 52) -> 1	(28, 58) -> 1	(49, 62) -> -1
(29, 53) -> 1	(47, 58) -> 1	(50, 63) -> -1
(53, 53) -> -1	(26, 59) -> -2.6667	(51, 64) -> -1
(30, 54) -> 1	(27, 59) -> 2	(52, 65) -> -1
(55, 54) -> 1	(29, 59) -> 1	(53, 66) -> -1
(25, 55) -> -1	(30, 59) -> 4	(54, 67) -> -1
(40, 55) -> -1	(46, 59) -> -1	(55, 68) -> -1
(26, 56) -> -1	(26, 60) -> -2	

B =

1	0.000	18	-20.000	35	0.000	52	0.000
2	0.000	19	0.000	36	0.000	53	0.000
3	0.000	20	0.000	37	0.000	54	0.000
4	0.000	21	0.000	38	0.000	55	0.000
5	0.000	22	0.000	39	0.000	56	0.000
6	0.000	23	0.000	40	0.000	57	0.000
7	0.000	24	0.000	41	0.000	58	0.000
8	54.000	25	0.000	42	0.000	59	0.000
9	-36.000	26	0.000	43	0.000	60	0.000
10	0.000	27	0.000	44	0.000	61	0.000
11	-48.000	28	0.000	45	0.000	62	0.000
12	-144.000	29	0.000	46	0.000	63	0.000
13	0.000	30	0.000	47	0.000	64	0.000
14	3.333	31	0.000	48	0.000	65	0.000
15	-5.000	32	0.000	49	0.000	66	0.000
16	0.000	33	0.000	50	0.000	67	0.000
17	-10.000	34	0.000	51	0.000	68	0.000

X =

1	-8.826e-02	19	-1.776e-01	37	-1.775e-01	55	-9.916e-03
2	-1.776e-01	20	8.826e-02	38	-9.916e-03	56	1.775e-01
3	4.440e-02	21	-6.233e+00	39	-1.687e+00	57	6.655e-02
4	-2.030e+01	22	0.000e+00	40	3.327e-02	58	-2.281e+00
5	0.000e+00	23	-2.030e+01	41	2.281e+00	59	3.327e-02
6	0.000e+00	24	0.000e+00	42	0.000e+00	60	0.000e+00
7	0.000e+00	25	-1.303e-01	43	-1.776e-01		Toereaktsioonid
8	0.000e+00	26	-1.776e-01	44	1.303e-01	61	-0.000e+00
9	4.440e-02	27	3.444e+00	45	3.444e+00	62	-2.030e+01
10	2.030e+01	28	-2.998e+01	46	-3.327e-02	63	-1.003e+01
11	0.000e+00	29	3.327e-02	47	-2.281e+00	64	-2.998e+01
12	0.000e+00	30	8.511e+00	48	1.368e+01	65	1.162e+01
13	-1.776e-01	31	0.000e+00	49	0.000e+00	66	3.327e-02
14	1.303e-01	32	0.000e+00	50	0.000e+00	67	2.281e+00
15	3.444e+00	33	0.000e+00	51	0.000e+00	68	-1.331e-01
16	0.000e+00	34	2.998e+01	52	2.281e+00		
17	-2.770e+01	35	-1.003e+01	53	-3.327e-02		
18	-2.219e+01	36	1.162e+01	54	-1.331e-01		

```

=====
Algparameetrid skaleerimata. II märgikokkulepe
Varda Nr      u          w          fi          N          Q          M
-----
1  0.000e+00  0.000e+00  8.881e-06  20.301    0.000    0.000
2 -3.552e-05  1.765e-05 -1.247e-03  0.000   -20.301    0.000
3  0.000e+00  0.000e+00  0.000e+00  29.980   -10.033   11.622
4 -3.552e-05  2.607e-05  6.889e-04  -0.033   -2.281   13.684
5 -1.983e-06  3.549e-05  1.331e-05  -2.281    0.033    0.000
-----
=====
Varras 1.  Li on jaotatud neljaks
Li = 4
siire u - 0.00000e+00 -4.41324e-06 -8.82647e-06 -1.32397e-05 -1.76529e-05
siire w - 0.00000e+00 -8.88062e-06 -1.77612e-05 -2.66418e-05 -3.55225e-05
pööre fi - 8.88062e-06 8.88062e-06 8.88062e-06 8.88062e-06 8.88062e-06
normaaljõud N - -20.30089 -20.30089 -20.30089 -20.30089 -20.30089
põikjõud Q - 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
moment M - 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
-----
Varras 2.  Li on jaotatud neljaks
Li = 6
siire u - -3.55225e-05 -3.55225e-05 -3.55225e-05 -3.55225e-05 -3.55225e-05
siire w - 1.76529e-05 1.64416e-03 2.14841e-03 1.33626e-03 2.60693e-05
pööre fi - -1.24654e-03 -7.88074e-04 1.37314e-04 8.54627e-04 6.88865e-04
normaaljõud N - 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
põikjõud Q - 20.30089 8.30089 -3.69911 -15.69911 -27.69911
moment M - 0.00000 21.45134 24.90267 10.35401 -22.19465
-----
Varras 3.  Li on jaotatud neljaks
Li = 4
siire u - 0.00000e+00 -6.51733e-06 -1.30347e-05 -1.95520e-05 -2.60693e-05
siire w - 0.00000e+00 2.06945e-04 4.93338e-04 4.40848e-04 -3.55225e-05
pööre fi - 0.00000e+00 -3.30279e-04 -1.58895e-04 2.64153e-04 6.88865e-04
normaaljõud N - -29.97974 -29.97974 -29.97974 -29.97974 -29.97974
põikjõud Q - 10.03327 10.03327 0.03327 0.03327 0.03327
moment M - -11.62223 -1.58895 8.44432 8.47760 8.51087
-----
Varras 4.  Li on jaotatud neljaks
Li = 6
siire u - -3.55225e-05 -3.55151e-05 -3.55078e-05 -3.55004e-05 -3.54931e-05
siire w - 2.60693e-05 -6.54442e-04 -7.57670e-04 -4.76041e-04 -1.98316e-06
pööre fi - 6.88865e-04 2.39865e-04 -8.08482e-05 -2.73276e-04 -3.37419e-04
normaaljõud N - 0.03327 0.03327 0.03327 0.03327 0.03327
põikjõud Q - 2.28063 2.28063 2.28063 2.28063 2.28063
moment M - -13.68378 -10.26284 -6.84189 -3.42095 0.00000
-----
Varras 5.  Li on jaotatud neljaks
Li = 4
siire u - -1.98316e-06 -1.48737e-06 -9.91578e-07 -4.95789e-07 2.41950e-23
siire w - 3.54931e-05 2.24605e-05 1.10916e-05 3.05019e-06 7.34536e-22
pööre fi - 1.33099e-05 1.24780e-05 9.98244e-06 5.82309e-06 0.00000e+00

```

```

normaaljõud N - 2.28063 2.28063 2.28063 2.28063 2.28063
põikjõud Q - -0.03327 -0.03327 -0.03327 -0.03327 -0.03327
moment M - 0.00000 -0.03327 -0.06655 -0.09982 -0.13310

```

```
-----
octave-3.0.1:4> diary off
```

Raami arvutuse programmi sisestatud elementide, siirete ja kontaktjõudude järjekorranumbrid on joonisel 14.29. Koostatud võrrandisüsteemi vasaku poole hõreda maatriksi nullist erinevate elementide asukohad on joonisel 14.30.

Tabel 14.2. Raami EST sisejõudude võrdlus jõumeetodiga leitutega

EST-meetodiga. I märgikokkulepe				Jõumeetod	
<i>Varda</i>	N^*	Q^*	M^*	Q	M
<i>nr a/l</i>	[kN]	[kN]	[kN·m]	[kN]	[kN·m]
1 alg.	-20.301	0.000	0.000	0.0000	0.00
1 lõpp	-20.301	0.000	0.000	0.0000	0.00
2 alg.	0.000	20.301	0.000	20.2917	0.00
2 lõpp	0.000	-27.699	-22.195	-27.7083	-22.25
3 alg.	-29.980	10.033	11.622	10.0312	11.62
3k lõpp	-29.980	10.033	-8.444	10.0312	-8.44
3k alg.	-29.980	0.033	-8.444	0.0313	-8.44
3 lõpp	-29.980	0.033	-8.511	0.0313	-8.50
4 alg.	0.033	2.281	-13.684	2.291	-13.75
4 lõpp	0.033	2.281	0.000	2.291	0.00
5 alg.	2.281	-0.033	0.000	-0.0313	0.00
5 lõpp	2.281	-0.033	-0.133	-0.0313	-0.13

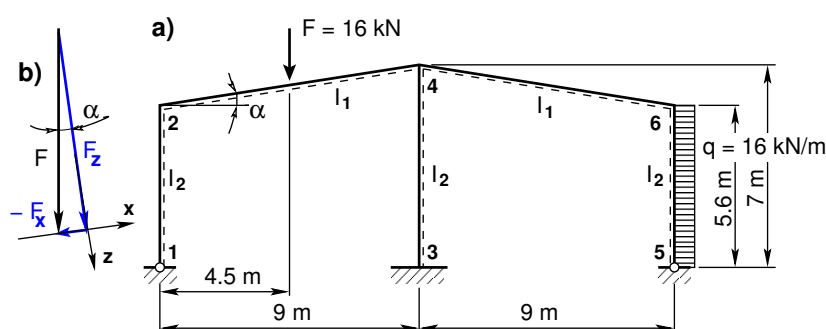
Tabelis 14.2 on RaamEST sisejõudude võrdlus, mis on leitud EST- ja jõumeetodiga näites 9.2 (vt lk 229). Jõumeetodiga lahendatud ülesande sisejõude M ja Q on kontrollitud ka programmiga `joumNAq.m`⁵. Koondatud jõu kohal on varras 3 on jagatud kaheks. Tabelis on selle punkti tähiseks 3k. Momentide märk keskmises postis on tabelis kooskõlas joonisel 14.26 näidatud kriipsjoonega. Tabelist 14.2 on näha, et sisejõud ühtivad. Joonistel 14.26 ja 14.27 on jõumeetodiga leitud sisejõudude väärtused toodud sulgudes.

EST-meetodiga arvutades on võetud varraste ristlõigete pikijäikuseks $EAp = 4600000$. Suur jäikus lubab võrrelda tulemusi jõumeetodiga, kus pikijäikust ei arvestata (vardad on jäigad).

⁵ `./octaveProgrammid/joumNAq.m`

14.10.2 Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 14.3 [slaidid]

Näide 14.3 Koostada joonisel 14.31 näidatud raamile sisejõudude epüürid. Raami kõrgus $h = 7$ m ja avad $l = 9$ m. Raami riivile 2–4 on rakendatud koondatud jõud $F = 16$ kN ja postile 3–4 jaotatud koormus $q = 16$ kN/m. Raami posti ristlõike paindejäikus on $EI_p = 2 \cdot 10^4$ kN·m² ja raami riivi ristlõike paindejäikus $EI_r = 2.0EI_p$ ($I_1 = 2.0I_2$), posti ristlõike pikijäikus $EA_p = 4.6 \cdot 10^6$ kN, $EA_r = 8.8 \cdot 10^6$ kN, posti ristlõike lõikejäikus $GA_{rp} = 0.4EA_p$, $GA_{rr} = 0.4EA_r$.



Joonis 14.31. Kahe avaga raam EST93

Kõnesolevas näites lahutame koormuse F (vt joonis 14.31 b)) komponentideks (F_x – projektsioon kohalikule teljele x ja F_z – projektsioon kohalikule teljele z) ja laseme arvutada arvutil, siis saame suurema täpsuse. Ka jõu F rakenduspunkti kauguse arvutame arvutiga kohalikus teljestikus. Avaldisega (14.69) on toodud jõu F projektsioonid kohalikus teljestikus (vt joonis 14.32):

$$\begin{aligned} F_x &= -F \cdot \sin \alpha, & \text{kus } \sin \alpha &= 1.4/l_2 \\ F_z &= F \cdot \cos \alpha, & \text{kus } \cos \alpha &= 9.0/l_2 \\ aF &= l_2/2, & \text{kus } l_2 &= \sqrt{9^2 + 1.4^2} \end{aligned} \quad (14.69)$$

Ülesande lahendamise nagu näite 14.2 puhul. Koostame väljavõtte programmist 14.8, mille lisame arvutiprogrammi `spRaamEST93.m`.

Teeme GNU Octave'is kirjutatud programmiga `spRaamEST93.m` lk 731 arvutused. Arvutuse tulemust näeme arvutuspäevikus 14.3 lk 421. Selles päevikus toodud varraste sisejõudude põhjal koostame sisejõudude epüürid (vt joonis 14.34(a), 14.34(b) ja 14.34(c)).

Raami staatiliseks kontrolliks koostame joonise 14.33, kus toereaktsioonid saame paindemomendi (joonis 14.34(a)), põikjõu (joonis 14.34(b)) ja normaaljõu epüürit (joonis 14.34(c)).

Väljavõte programmist 14.8 (Rajatingimused. spRaamEST93.m lk 731)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Siirete pidevuse võrrandid 31-42 % vabaliikmete vektor on nullitud
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Sõlm 2
spA=spInsertBtoA (spA,31,1,spT1);    spA=spInsertBtoA (spA,31,19,spT2m);
% Sõlm 4
spA=spInsertBtoA (spA,34,13,spT2);   spA=spInsertBtoA (spA,34,25,spT3m);
spA=spInsertBtoA (spA,37,25,spT3);   spA=spInsertBtoA (spA,37,43,spT4m);
% Sõlm 6
spA=spInsertBtoA (spA,40,37,spT4);   spA=spInsertBtoA (spA,40,55,spT5m);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Sõlmede tasakaaluvõrrandid 43-58
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Sõlm 2
spA=spInsertBtoA (spA,43,4,spT1);    spA=spInsertBtoA (spA,43,22,spT2);
B(43:45,1)=s2F(1:3,1);                % sõlme 2 koormus s2F(1:2,1)
% Sõlm 4
spA=spInsertBtoA (spA,46,16,spT2);   spA=spInsertBtoA (spA,46,28,spT3);
spA=spInsertBtoA (spA,46,46,spT4);   % siin oli kolm varrast
B(46:48,1)=s4F(1:3,1);                % sõlme 4 koormus
% Sõlm 6
spA=spInsertBtoA (spA,49,40,spT4);   spA=spInsertBtoA (spA,49,58,spT5);
B(49:51,1)=s6F(1:3,1);                % sõlme 6 koormus s6F(1:2,1);
% Sõlm 1
spA=spInsertBtoA (spA,52,10,spT12);  spA=spInsertBtoA (spA,52,61,spTy2m);
B(52:53,1)=0.0;                        % sõlme 1 koormus C1-61, C2-62
% Sõlm 3
spA=spInsertBtoA (spA,54,34,spT3);   spA=spInsertBtoA (spA,54,63,spTym);
B(54:56,1)=0.0;                        % sõlme 3 koormus
% Sõlm 5
spA=spInsertBtoA (spA,57,52,spT52);  spA=spInsertBtoA (spA,57,66,spTy2m);
B(57:58,1)=0.0;                        % sõlme 5 koormus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Kõrvaltingimused 59 -60 % vabaliikmete vektor on nullitud
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Varras 1
spA=spSisestaArv (spA,59,12,1);        % kõrvaltingimus/toetingimus
B(59,1)=0.0;                            % M12=0
% Varras 5
spA=spSisestaArv (spA,60,54,1);        % kõrvaltingimus/toetingimus
B(60,1)=0.0;                            % M54=0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Toetingimused 61-67 % vabaliikmete vektor on nullitud
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
spA=spSisestaArv (spA,61,7,1);          % toesõlm 1
spA=spSisestaArv (spA,62,8,1);
spA=spSisestaArv (spA,63,31,1);         % toesõlm 3
spA=spSisestaArv (spA,64,32,1);        spA=spSisestaArv (spA,65,33,1);
spA=spSisestaArv (spA,66,49,1);         % toesõlm 5
spA=spSisestaArv (spA,67,50,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Raami staatiline kontroll.

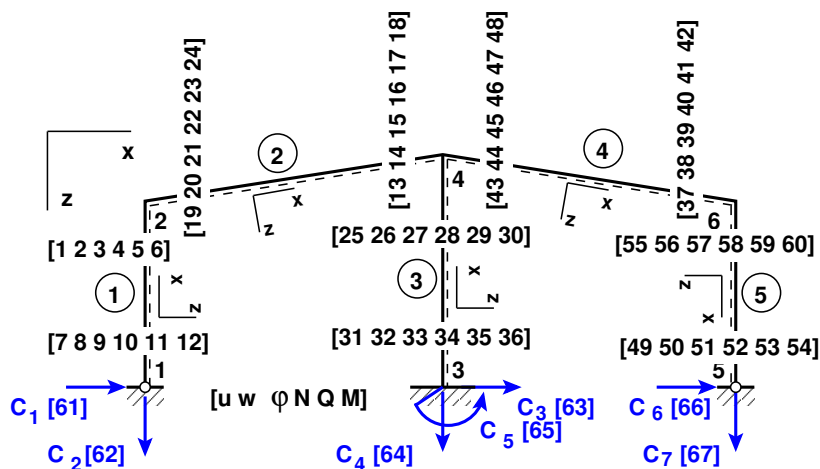
Projitseerime kõik jõud horisontaalteljele X (joonis 14.33).

$$\Sigma X = 0; \quad 12.85 + 27.275 + 49.475 - 16 * 5.6 = 0 \quad (14.70)$$

Projitseerime kõik jõud vertikaalteljele Z (joonis 14.33).

$$\Sigma Z = 0; \quad 16.0 - 22.67 + 4.87 + 1.80 = 0 \quad (14.71)$$

Momentide summaga kontrollimine on väga oluline kontroll. Paljudel juhtudel avastatakse arvutustes tehtud viga alles selle kontrolliga.



Joonis 14.32. Raami EST93 tundmatute nummerdus

Momentide summa toe 1 suhtes.

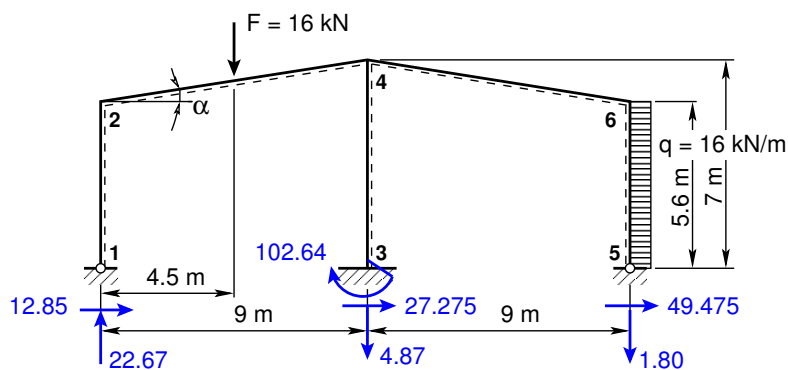
$$\begin{aligned} \Sigma M_1 = 0; & -16.0 * 4.5 - 4.8701 * 9.0 - 102.64244 - \\ & -1.800378 * 18.0 + 16.0 * 5.6 * 2.8 = -1.44 * 10^{-14} [kNm] \approx 0 \end{aligned} \quad (14.72)$$

Leitud toereaktsioonid läbisid staatilise kontrolli.

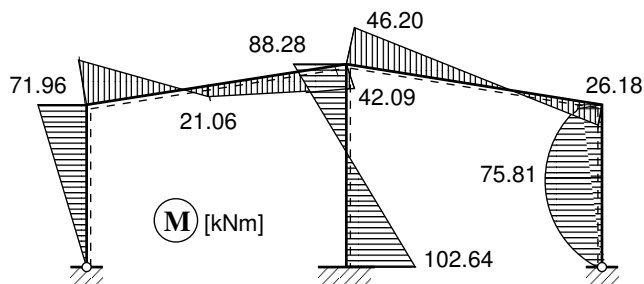
Arvutuspäevik 14.3 (Programm **spRaamEST93.m** lk 731)

```
Octave-3.0.1:1> diary spRaamEST93.out
Octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spRaamEST93
```

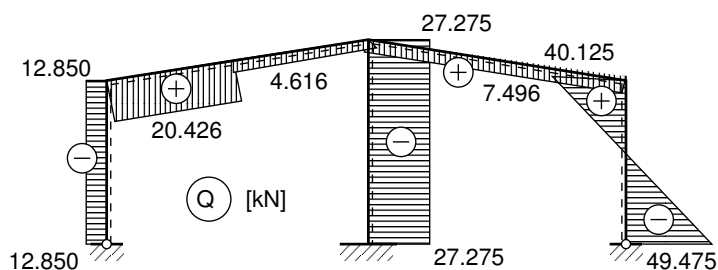
```
=====
Järgnev on staatikaga määratud raami arvutus: GNU Octave'iga
EIp = 20000
EIr = 40000
EAp = 4.6000e+15
```



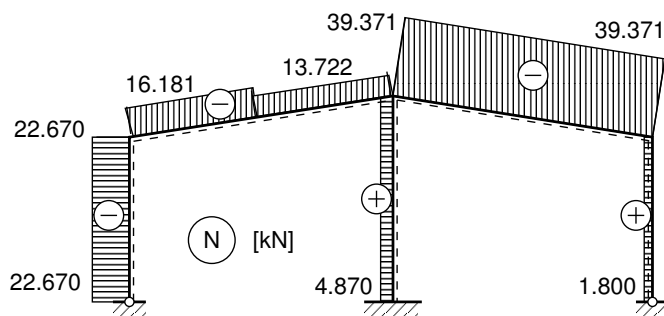
Joonis 14.33. Raami EST93 toereaktsioonid



(a) Raami EST93 paindemomendi epüür



(b) Raami EST93 põikjõu epüür



(c) Raami EST93 normaaljõu epüür

Joonis 14.34. Raami EST93 sisejõudude epüürid

EAr = 6.8000e+15

baasi0 = 3571.4

Elemendi koormus kohalikes koordinaatides

qz =

0 0 0 0 16

qx =

0 0 0 0 0

aFL =

5.6000 4.5541 7.0000 9.1082 5.6000

Fx =

0.00000 -2.45931 0.00000 0.00000 0.00000

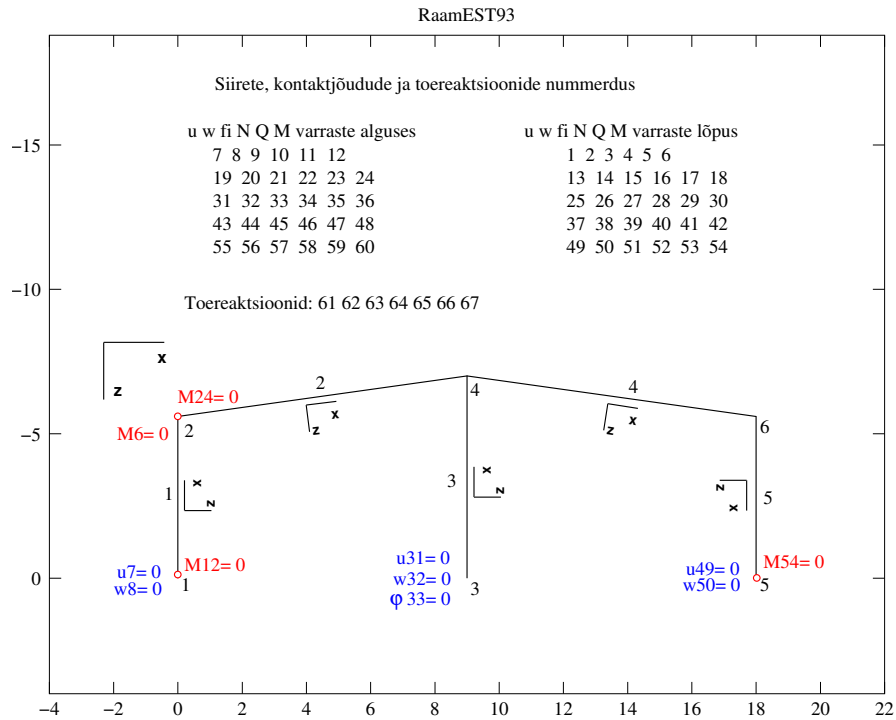
Fz =

0.00000 15.80986 0.00000 0.00000 0.00000

SolmedeArv = 6

ElementideArv = 5

spA =



Joonis 14.35. Raami EST93 elemendid

Compressed Column Sparse (rows = 67, cols = 67, nnz = 179 [4%])

```
(1, 1) -> 1           Nr   B           X =
(32, 1) -> -1        1   0.000        1   -0.00000
(2, 2) -> 1          2   0.000        2  -170.62745
(31, 2) -> 1         3   0.000        3    6.48300
...                   ....           ...
```

```
...
60  -2.618e+01
Toereaktsioonid
61   1.285e+01 - C1
62  -2.267e+01 - C2
63   2.728e+01 - C3
64   4.870e+00 - C4
65  -1.026e+02 - C5
66   4.948e+01 - C6
67   1.800e+00 - C7
```

Algparameetrid skaleerimata

Varda Nr	u	w	fi	N	Q	M
1	0.000e+00	0.000e+00	1.189e-02	22.670	12.850	0.000
2	-4.721e-02	-7.343e-03	1.815e-03	16.182	-20.426	71.959

3	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	-4.870	27.275	-102.642
4	-4.721e-02	7.343e-03	2.513e-03	39.371	-7.946	46.197
5	-2.192e-15	4.778e-02	2.340e-04	-1.800	-40.125	-26.181

Varraste siirded ja sisejõud

Varras 1. Li on jaotatud neljaks

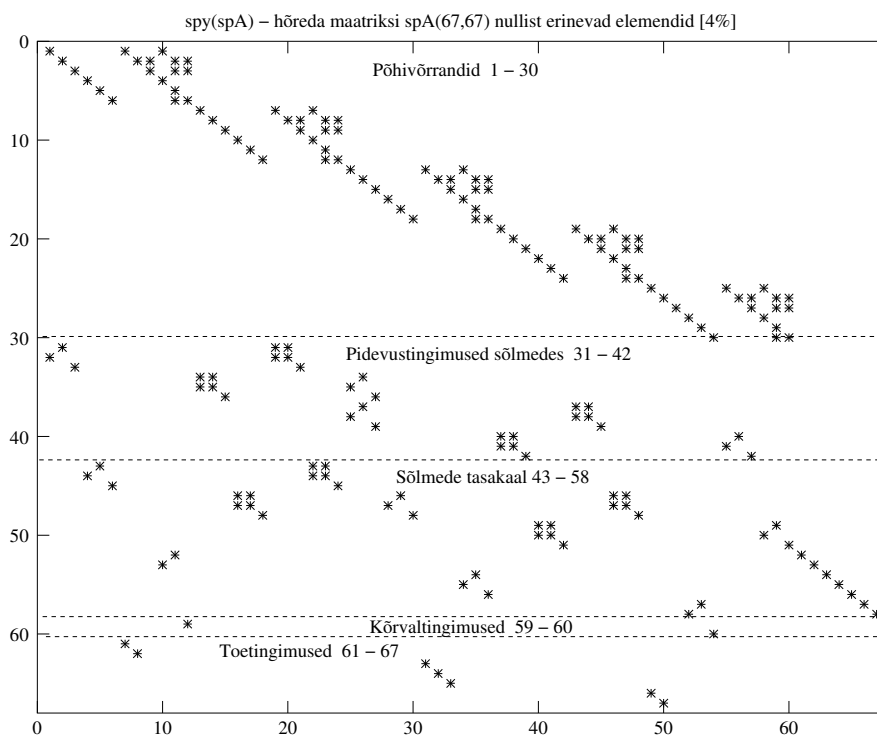
Li = 5.6000

siire u -	0.00000e+00	-6.89971e-15	-1.37994e-14	-2.06991e-14	-2.75988e-14
siire w -	0.00000e+00	-1.63514e-02	-3.09398e-02	-4.20022e-02	-4.77757e-02
pööre fi -	1.18894e-02	1.12598e-02	9.37089e-03	6.22270e-03	1.81524e-03
normaaljõud N -	-22.67047	-22.67047	-22.67047	-22.67047	-22.67047
põikjõud Q -	-12.84975	-12.84975	-12.84975	-12.84975	-12.84975
moment M -	0.00000	-17.98964	-35.97929	-53.96893	-71.95857

Varras 2. Li on jaotatud neljaks

Li = 9.1082

siire u -	-4.72079e-02	-4.72079e-02	-4.72079e-02	-4.72079e-02	-4.72079e-02
siire w -	-7.34346e-03	-7.81788e-03	-4.99369e-03	-4.12213e-03	-7.34346e-03
pööre fi -	1.81524e-03	-9.57252e-04	-1.08203e-03	4.16239e-04	2.51287e-03
normaaljõud N -	-16.18166	-16.18166	-13.72234	-13.72234	-13.72234
põikjõud Q -	20.42597	20.42597	4.61611	4.61611	4.61611
moment M -	-71.95857	-25.44743	21.06372	31.57487	42.08602



Joonis 14.36. Raami EST93 spA nullist erinevate elementide asukohad

```

Varras 3. Li on jaotatud neljaks
Li = 7
siire u - 0.00000e+00  1.85276e-15  3.70551e-15  5.55827e-15  7.41102e-15
siire w - 0.00000e+00 -6.64042e-03 -2.16891e-02 -3.78371e-02 -4.77757e-02
pööre fi - 0.00000e+00  6.89296e-03  9.60943e-03  8.14940e-03  2.51287e-03
normaaljõud N - 4.87010  4.87010  4.87010  4.87010  4.87010
põikjõud Q - -27.27509 -27.27509 -27.27509 -27.27509 -27.27509
moment M - 102.64244  54.91103  7.17962 -40.55179 -88.28320

```

```

-----
Varras 4. Li on jaotatud neljaks
Li = 9.1082
siire u - -4.72079e-02 -4.72079e-02 -4.72079e-02 -4.72079e-02 -4.72079e-02
siire w - 7.34346e-03  4.22475e-03  4.74885e-03  6.57025e-03  7.34346e-03
pööre fi - 2.51287e-03  3.98052e-04 -6.86705e-04 -7.41404e-04  2.33954e-04
normaaljõud N - -39.37128 -39.37128 -39.37128 -39.37128 -39.37128
põikjõud Q - 7.94644  7.94644  7.94644  7.94644  7.94644
moment M - -46.19719 -28.10266 -10.00814  8.08639  26.18091

```

```

-----
Varras 5. Li on jaotatud neljaks
Li = 5.6000
siire u - -2.19175e-15 -1.64382e-15 -1.09588e-15 -5.47939e-16 -1.79882e-31
siire w - 4.77757e-02  4.53758e-02  3.66978e-02  2.08465e-02 -6.93889e-18
pööre fi - 2.33954e-04  3.66687e-03  8.83682e-03  1.35486e-02  1.56070e-02
normaaljõud N - 1.80037  1.80037  1.80037  1.80037  1.80037
põikjõud Q - 40.12484  17.72484 -4.67516 -27.07516 -49.47516
moment M - 26.18091  66.67568  75.81046  53.58523  0.00000

```

```

-----
octave-3.0.1:4> diary off

```

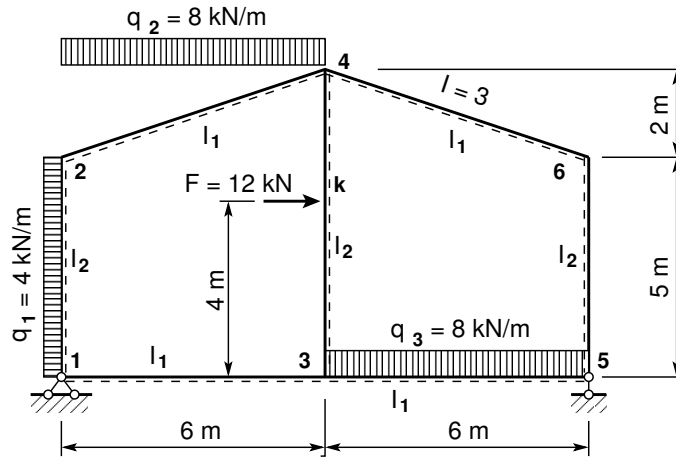
Raami arvutuse programmi sisestatud elementide, siirete ja kontaktjõudude järjekorranumbrid on joonisel 14.35. Koostatud võrrandisüsteemi vasaku poole hõreda maatriksi nullist erinevate elementide asukohad on toodud joonisel 14.36.

14.10.3 Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 14.4 [\[slaidid\]](#)

Näide 14.4 Koostada joonisel 14.37 näidatud raamile sisejõudude epüürid. Raami kõrgus $h = 7$ m ja avad $l = 6$ m. Raami postidele on rakendatud koormused $q_1 = 4$ kN/m ja $F = 12$ kN. Raami riividele on rakendatud koormused $q_2 = 8$ kN/m ja $q_3 = 8$ kN/m.

Raami posti ristlõike paindejäikus on $EI_p = 2 \cdot 10^4$ kN·m² ja raami riivi ristlõike paindejäikus $EI_r = 3.0EI_p$ ($I_1 = 3.0 \cdot I_2$), posti ristlõike pikijäikus $EA_p = 4.6 \cdot 10^{16}$ kN, $EA_r = 8.8 \cdot 10^{16}$ kN, posti ristlõike lõikejäikus $GA_{rp} = 0.4EA_p$, $GA_{rr} = 0.4EA_r$. Valime varraste suure piki- ja lõikejäikuse, et võrrelda arvutuse tulemusi jõumeetodil (näide 9.3 lk 238) leitutega. Koostame GNU Octave'is programmi *spRaamEST77.m* lk 728.

Kõnesolevas näites on jaotatud koormus q_2 (vt joonis 14.37) antud varda projektsioonile (6 m). Teisendame jaotatud koormuse q_2 koormuseks q_{2k} kaldu oleva varda pikkusele l_2 (14.73). Lahutame koormuse q_{2k} komponentideks (q_{2x} – projektsioon kohalikule teljele x ja q_{2z} – projektsioon kohalikule teljele z) ja arvutame arvutiga, siis saame täpsema tulemuse.

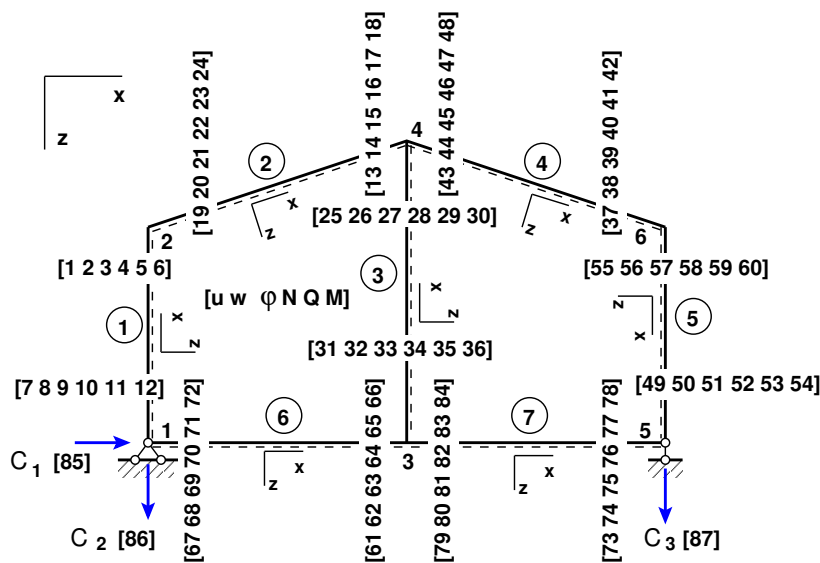


Joonis 14.37. Raami EST77

$$\begin{aligned}
 q_{2x} &= -q_{2k} \cdot \sin \alpha, & \text{kus } \sin \alpha &= 2.0/l_2 \\
 q_{2z} &= q_{2k} \cdot \cos \alpha, & \text{kus } \cos \alpha &= 6.0/l_2 \\
 q_{2k} &= q_2 \cdot 6.0/l_2, & \text{kus } l_2 &= \sqrt{6^2 + 2.0^2}
 \end{aligned}
 \tag{14.73}$$

Võrrandisüsteemi koostamisel EST-meetodiga on tundmatuteks siirded ja kontaktjõud varraste otstes. Kontaktjõudude ja siirete arv on 84. Kõnesolevas näites lisanduvad veel toe-reaktsioonid C_1 , C_2 ja C_3 (joonis 14.38). Nii on võrrandisüsteemis otsitavaid 87. Kontaktjõudude ja siirete arv sõltub varraste arvust. Kontaktjõudude ja siirete leidmiseks koostame võrrandisüsteemi (14.74)

$$\text{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}, \tag{14.74}$$

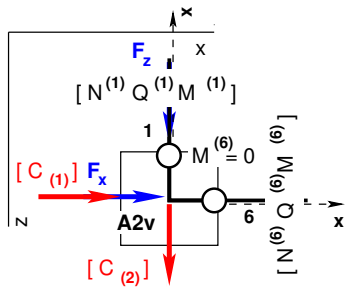


Joonis 14.38. Raami EST77 tundmatute nummerdus

kus spA on hõre maatriks. Hõredate maatriksite tehetega saame tutvuda *lisas B lk 647*. Võrrandisüsteemi koostamise võib jagada järgmisteks osadeks:

1. Konstruktsiooni põhivõrrandite koostamine.
2. Siirete pidevusvõrrandite koostamine.
3. Sõlmede tasakaaluvõrrandite (kontaktjõud, toereaktsioonid, sõlmkoormus) koostamine.
4. Kõrvaltingimuste lisamine.
5. Toetingimuste lisamine.

Toesõlmed.

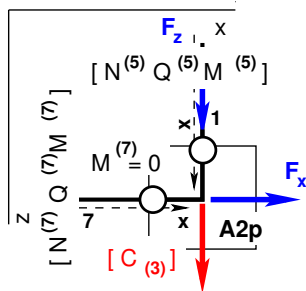


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A^{(6)} \\ Q_A^{(6)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (14.75)$$

Joonis 14.39. Sõlme A2v tasakaal

ehk

$$\mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{s}_{2L}^{(1)} + \mathbf{T}_{62} \cdot \mathbf{s}_{2A}^{(6)} - C_{A2v} = \mathcal{F}_{A2v} \quad (14.76)$$



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_L^{(5)} \\ Q_L^{(5)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A^{(7)} \\ Q_A^{(7)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dots \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (14.77)$$

Joonis 14.40. Sõlme A2p tasakaal

ehk

$$\mathbf{T}_{52} \cdot \mathbf{s}_{2L}^{(5)} + \mathbf{T}_{72} \cdot \mathbf{s}_{2A}^{(7)} - C_{A2p} = \mathcal{F}_{A2p} \quad (14.78)$$

Konstruktsiooni põhivõrrandid. Kõnesolevas programmis, nii nagu programmides *spRaamEST.m*, *spRaamEST93.m*, kasutame konstruktsiooni põhivõrrandite koostamiseks programmi tsükli *14.5 lk 399*.

Siirete pidevusvõrrandid. Varraste ühendamist erinevat tüüpi sõlmedes vaatlesime lõigus 14.5 lk 399. Kõnesolevas näites on siirete pidevusvõrrandite koostamine ja kõrvaltingimuste lisamine sarnane näidetes 14.2 ja 14.3 toodutele.

Sõlmede tasakaaluvõrrandid. Lisaks varem lõigus „Sõlme tasakaaluvõrrandid” 14.6 lk 403 vaadeldud sõlmede tüüpidele vaatame sõlmi koos toereaktsioonidega (joonis 14.38). **Kõrvaltingimused.** Kõrvaltingimusteks on varraste 1, 6 alguses ja varraste 5, 7 lõpus olevad momendiliigendid:

$$\mathbf{M}_A^{(1)} = 0 \quad (14.79)$$

$$\mathbf{M}_A^{(6)} = 0 \quad (14.80)$$

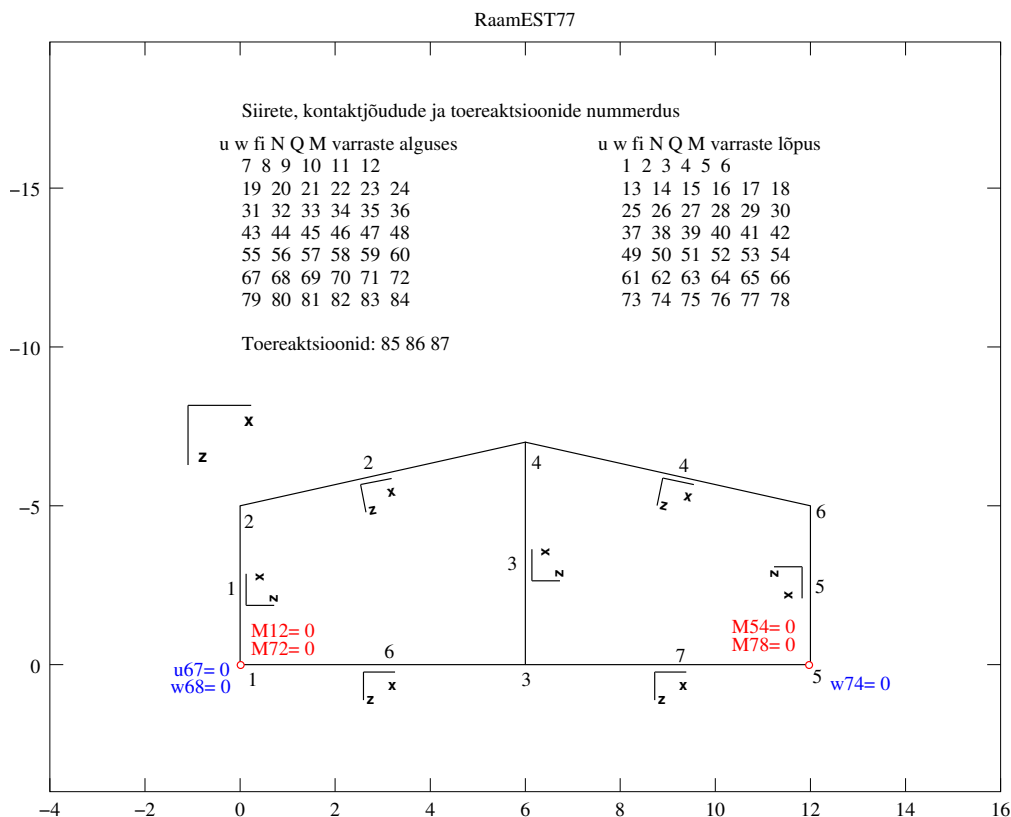
$$\mathbf{M}_L^{(5)} = 0 \quad (14.81)$$

$$\mathbf{M}_L^{(7)} = 0 \quad (14.82)$$

Toetingimused. Toetingimustes anname üldkoordinaatides toel 1 horisontaalseks ja vertikaalseks siirdeks nulli (etteantud suuruse). Valime selleks varda 6 alguse siirded u ja w (67 ja 68), toel 5 vertikaalseks siirdeks varda 7 lõpus oleva siirde w (74) (vt joonist 14.38).

Toetingimused on paarikaupa (joonis 3.1 lk 80). Kui kinemaatiline rajatingimus on ette antud, siis vastav staatiline rajatingimus tuleb leida võrrandisüsteemi lahendamisega.

Toereaktsioonidele C_1 , C_2 ja C_3 vastavad siirded üldkoordinaatides on sõlmes 1 varda 6 algul



Joonis 14.41. Raami EST77 elemendid

olevad siirded u , w (joonisel 14.38 siirded 67 ja 68) ning sõlmes 5 varda 7 lõpus olev siire w (joonisel 14.38 siire 74). Toetingimused on kirjeldatud väljavõttes programmist 14.9.

Väljavõtet programmist 14.9 kasutame GNU Octave'is koostatud programmis **spRaamEST77.m** lk 728. Arvutuse tulemused langevad ühte näites 9.3 lk 238 jõumeetodiga saadutega (võrdle sisejõudude epüüre joonisel 9.23 lk 243 ja programmiga **spRaamEST77.m** arvutatud tulemusi arvutuspäevikus 14.4 lk 429). Arvutuspäevikus on sisejõud arvutatud varraste neljandikel. Vardal 3 koondatud jõu F all sisejõud arvutame eraldi GNU Octave'is kirjutatud funktsiooniga **SisejoudPunktis.m** lk 727.

Väljavõte programmist 14.9 (Rajatingimused. **spRaamEST77.m** lk 728)

```
% Siirete pidevuse võrrandid 43–64 % vabaliikmete vektor on nullitud
spA=spInsertBtoA(spA,43,7,spT12); spA=spInsertBtoA(spA,43,67,spT62m);
spA=spInsertBtoA(spA,45,1,spT1); spA=spInsertBtoA(spA,45,19,spT2m);
spA=spInsertBtoA(spA,48,13,spT2); spA=spInsertBtoA(spA,48,25,spT3m);
spA=spInsertBtoA(spA,51,25,spT3); spA=spInsertBtoA(spA,51,43,spT4m);
spA=spInsertBtoA(spA,54,37,spT4); spA=spInsertBtoA(spA,54,55,spT5m);
spA=spInsertBtoA(spA,57,49,spT52); spA=spInsertBtoA(spA,57,73,spT72m);
spA=spInsertBtoA(spA,59,61,spT6); spA=spInsertBtoA(spA,59,31,spT3m);
spA=spInsertBtoA(spA,62,31,spT3); spA=spInsertBtoA(spA,62,79,spT7m);

% Sõlme tasakaaluvõrrandid 65–80
spA=spInsertBtoA(spA,65,10,spT12); spA=spInsertBtoA(spA,65,70,spT62);
spA=spSisestaArv(spA,65,85,-1); % toereaktsioon C1
spA=spSisestaArv(spA,66,86,-1); % toereaktsioon C2
B(65:66,1)=s1F(1:2,1); % sõlme 1 koormus s1F(1:2,1)
spA=spInsertBtoA(spA,67,4,spT1); spA=spInsertBtoA(spA,67,22,spT2);
B(67:69,1)=s2F(1:3,1); % sõlme 2 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,70,64,spT6); spA=spInsertBtoA(spA,70,34,spT3);
spA=spInsertBtoA(spA,70,82,spT7); % siin oli kolm varrast
B(70:72,1)=s3F(1:3,1); % sõlme 3 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,73,16,spT2); spA=spInsertBtoA(spA,73,28,spT3);
spA=spInsertBtoA(spA,73,46,spT4); % siin oli kolm varrast
B(73:75,1)=s4F(1:3,1); % sõlme 4 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,76,40,spT4); spA=spInsertBtoA(spA,76,58,spT5);
B(76:78,1)=s6F(1:3,1); % sõlme 6 koormus s6F(1:2,1)
spA=spInsertBtoA(spA,79,76,spT72); spA=spInsertBtoA(spA,79,52,spT52);
spA=spSisestaArv(spA,80,87,-1); % toereaktsioon C3
B(79:80,1)=s5F(1:2,1); % sõlme 5 koormus s5F(1:2,1)

% Kõrvaltingimused 81–84 % vabaliikmete vektor on nullitud
spA=spSisestaArv(spA,81,12,1); % kõrvaltingimus sõlmes 1
spA=spSisestaArv(spA,82,72,1); % kõrvaltingimus sõlmes 1
spA=spSisestaArv(spA,83,54,1); % kõrvaltingimus sõlmes 5
spA=spSisestaArv(spA,84,78,1); % kõrvaltingimus sõlmes 5

% Toetingimused 85–87 % vabaliikmete vektor on nullitud
spA=spSisestaArv(spA,85,67,1); % C1-le vastav siire on 0
spA=spSisestaArv(spA,86,68,1); % C2-le vastav siire on 0
spA=spSisestaArv(spA,87,74,1); % C2-le vastav siire on 0
```

Arvutuspäevik 14.4 (Programm **spRaamEST77.m** lk 728)

```
Octave-3.0.1:1> diary spRaamEST77.out
Octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spRaamEST77
```

```

=====
  Järgnev on staatikaga määramatu raami arvutus: GNU Octave'iga
Ntoerkts = 3
EIp = 20000
EIr = 60000
EAp = 4.6000e+15
EAR = 6.8000e+15
baasi0 = 4000
  Elemendi koormus kohalikes koordinaatides
qz =
  4.00000  7.20000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  8.00000
qx =
  0.00000 -2.40000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000

aFL =
  5.0000  6.3246  4.0000  6.3246  5.0000  6.0000  6.0000

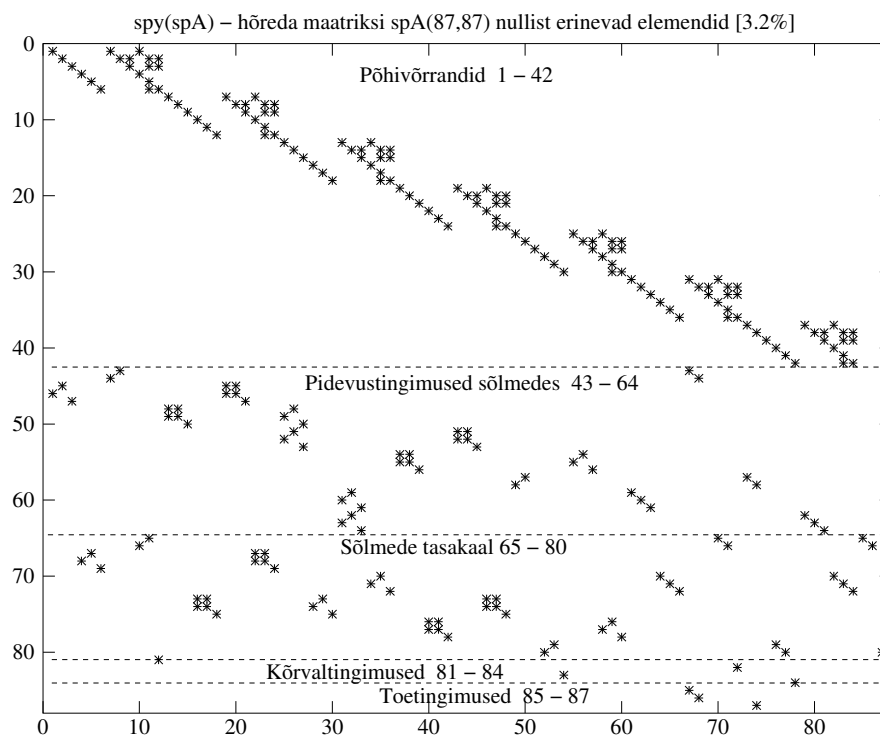
Fx =
  0  0  0  0  0  0  0
Fz =
  0  0  12  0  0  0  0

SolmedeArv = 6
ElementideArv = 7

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 87, cols = 87, nnz = 241)

```



Joonis 14.42. Raami EST77 spA nullist erinevate elementide asukohad

(1, 1) -> 1
 (46, 1) -> -1
 (2, 2) -> 1
 (45, 2) -> 1
 ...

Nr B
 1 0.000
 2 20.833
 3 -16.667
 ...

Nr X
 1 -1.627e-10
 2 5.076e+01
 3 -1.189e+01
 ...
 85 -3.200e+01 % C1 - toereaktsioon
 86 -3.983e+01 % C2 - toereaktsioon
 87 -5.617e+01 % C3 - toereaktsioon
 ...

=====

Algparameetrid skaleerimata

Varda Nr	u	w	fi	N	Q	M
1	-0.000e+00	0.000e+00	-2.842e-03	37.423	-6.458	0.000
2	1.204e-02	4.013e-03	-2.972e-03	24.682	-31.221	17.712
3	-1.021e-02	2.254e-14	-1.220e-03	-12.982	-14.240	37.191
4	1.850e-02	4.598e-03	5.078e-04	18.172	18.775	-62.236
5	2.561e-14	-1.950e-02	8.096e-04	23.558	-11.302	56.510
6	0.000e+00	0.000e+00	-1.943e-03	-25.542	-2.410	0.000
7	2.254e-14	1.021e-02	-1.220e-03	-11.302	-15.392	-51.650

=====

Sisejõud vardas 1 varda pikkus on 5.00000 varras on jaotatud neljaks

siire u -	0.00000e+00	-1.01694e-14	-2.03388e-14	-3.05082e-14	-4.06777e-14
siire w -	0.00000e+00	3.46740e-03	6.58899e-03	9.46659e-03	1.26902e-02
pööre fi -	-2.84172e-03	-2.65458e-03	-2.35355e-03	-2.32927e-03	-2.97237e-03
normaaljõud N -	-37.42345	-37.42345	-37.42345	-37.42345	-37.42345
põikjõud Q -	6.45764	1.45764	-3.54236	-8.54236	-13.54236
moment M -	0.00000	4.94705	3.64410	-3.90885	-17.71180

=====

Sisejõud vardas 2 varda pikkus on 6.32456 varras on jaotatud neljaks

siire u -	1.20390e-02	1.20390e-02	1.20390e-02	1.20390e-02	1.20390e-02
siire w -	4.01301e-03	8.77017e-03	1.26460e-02	1.47086e-02	1.47763e-02
pööre fi -	-2.97237e-03	-2.86774e-03	-1.93660e-03	-6.53295e-04	5.07846e-04
normaaljõud N -	-24.68175	-20.88701	-17.09228	-13.29755	-9.50281
põikjõud Q -	31.22053	19.83633	8.45213	-2.93207	-14.31626
moment M -	-17.71180	22.65220	45.01619	49.38019	35.74419

```
-----
Sisejõud vardas 3   varda pikkus on 7.00000   varras on jaotatud neljaks
siire u - -1.02109e-02 -1.02109e-02 -1.02109e-02 -1.02109e-02 -1.02109e-02
siire w - 2.25374e-14 4.34616e-03 1.05712e-02 1.50544e-02 1.60939e-02
pööre fi - -1.21985e-03 -3.38376e-03 -3.36712e-03 -1.63867e-03 5.07846e-04
normaaljõud N - 12.98177 12.98177 12.98177 12.98177 12.98177
põikjõud Q - 14.24039 14.24039 14.24039 2.24039 2.24039
moment M - -37.19081 -12.27013 12.65055 22.57123 26.49192
-----
```

```
-----
Sisejõud vardas 4   varda pikkus on 6.32456   varras on jaotatud neljaks
siire u - 1.84970e-02 1.84970e-02 1.84970e-02 1.84970e-02 1.84970e-02
siire w - 4.59761e-03 2.70421e-03 -5.45432e-04 -3.91437e-03 -6.16566e-03
pööre fi - 5.07846e-04 1.75676e-03 2.22336e-03 1.90766e-03 8.09646e-04
normaaljõud N - -18.17178 -18.17178 -18.17178 -18.17178 -18.17178
põikjõud Q - -18.77538 -18.77538 -18.77538 -18.77538 -18.77538
moment M - 62.23611 32.54962 2.86313 -26.82336 -56.50985
-----
```

```
-----
Sisejõud vardas 5   varda pikkus on 5.00000   varras on jaotatud neljaks
siire u - 2.56069e-14 1.92051e-14 1.28034e-14 6.40172e-15 -1.15402e-30
siire w - -1.94975e-02 -1.84861e-02 -1.41636e-02 -7.63366e-03 -3.25101e-14
pööre fi - 8.09646e-04 -2.28074e-03 -4.48815e-03 -5.81260e-03 -6.25409e-03
normaaljõud N - -23.55832 -23.55832 -23.55832 -23.55832 -23.55832
põikjõud Q - 11.30197 11.30197 11.30197 11.30197 11.30197
moment M - -56.50985 -42.38239 -28.25493 -14.12746 0.00000
-----
```

```
-----
Sisejõud vardas 6   varda pikkus on 6.00000   varras on jaotatud neljaks
siire u - 0.00000e+00 5.63434e-15 1.12687e-14 1.69030e-14 2.25374e-14
siire w - 0.00000e+00 2.89162e-03 5.64769e-03 8.13265e-03 1.02109e-02
pööre fi - -1.94281e-03 -1.89763e-03 -1.76207e-03 -1.53614e-03 -1.21985e-03
normaaljõud N - 25.54236 25.54236 25.54236 25.54236 25.54236
põikjõud Q - 2.40988 2.40988 2.40988 2.40988 2.40988
moment M - 0.00000 3.61482 7.22964 10.84447 14.45929
-----
```

```
-----
Sisejõud vardas 7   varda pikkus on 6.00000   varras on jaotatud neljaks
siire u - 2.25374e-14 2.50305e-14 2.75235e-14 3.00166e-14 3.25097e-14
siire w - 1.02109e-02 1.09561e-02 9.29235e-03 5.36641e-03 8.67362e-19
pööre fi - -1.21985e-03 2.84999e-04 1.91703e-03 3.22625e-03 3.76266e-03
normaaljõud N - 11.30197 11.30197 11.30197 11.30197 11.30197
põikjõud Q - 15.39165 3.39165 -8.60835 -20.60835 -32.60835
moment M - 51.65010 65.73758 61.82505 39.91253 0.00000
-----
```

```
-----
Sisejõud vardas 3   kohal x = 4.000000
siire u - -1.02109e-02
siire w - 1.21608e-02
pööre fi - -2.96185e-03
normaaljõud N - 12.98177
põikjõud Q - 2.24039
moment M - 19.77075
-----
```

```
-----
Sisejõud vardas 3   kohal x = 3.999999
siire u - -1.02109e-02
siire w - 1.21608e-02
pööre fi - -2.96185e-03
-----
```

```

normaaljõud N - 12.98177
põikjõud Q - 14.24039
moment M - 19.77073

```

```
-----
octave-3.0.1:4> diary off
```

Tabel 14.3. Raami EST77 sisejõudude võrdlus

EST-meetodiga. I märgikokkulepe				Jõumeetod	
<i>Varda</i> <i>nr a/l</i>	N^* [kN]	Q^* [kN]	M^* [kN·m]	Q [kN]	M [kN·m]
1 alg.	-37.423	6.458	0.000	6.46	0.0000
1 lõpp	-37.423	-13.542	-17.712	-13.54	-17.7118
2 alg.	-24.682	31.221	-17.712	31.22	-17.7118
2 lõpp	-9.503	-14.316	35.744	-14.32	35.7442
3 alg.	12.982	14.240	-37.191	14.24	-37.1908
3k alg.	12.982	14.240	19.771	14.24	19.7707
3k lõpp	12.982	2.240	19.771	2.24	19.7707
3 lõpp	12.982	2.240	26.492	2.24	26.4919
4 alg.	-18.172	-18.775	62.236	-18.78	62.2361
4 lõpp	-18.172	-18.775	-56.510	-18.78	-56.5099
5 alg.	-23.558	11.302	-56.510	11.30	-56.5099
5 lõpp	-23.558	11.302	0.000	11.30	0.0000
6 alg.	25.542	2.410	0.000	2.41	0.0000
6 lõpp	25.542	2.410	14.459	2.41	14.4593
7 alg.	11.302	15.392	51.650	15.39	51.6501
7 lõpp	11.302	-32.608	0.000	-32.61	0.0000

Tabelis 14.3 on toodud Raami EST77 sisejõudude võrdlus, mis on leitud EST- ja jõumeetodiga näites 9.3 (vt lk 238). Jõumeetodiga lahendatud ülesande sisejõude M ja Q on kontrollitud ka programmiga `joumNA4q.m`⁶. Koondatud jõu kohal on varras 3 on jagatud kaheks. Tabelis on selle punkti tähiseks 3k. Tabelist 14.3 on näha, et sisejõud ühtivad. Epüürid on koostatud joonisel 9.23 (lk 243) ja on jõumeetodiga ühised.

⁶ `./octaveProgrammide/joumNA4q.m`

14.11 Jätkuvtalade arvutus EST-meetodiga

Tala arvutamisel koostame võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}, \quad (14.83)$$

kus \mathbf{spA} on hõre maatriks. Hõredate maatriksite tehetega saame tutvuda [lisas B lk 647](#).

Võrrandisüsteemi koostamise võib jagada järgmisteks osadeks:

1. Tala põhivõrrandite koostamine.
2. Siirete pidevusvõrrandite koostamine.
3. Sõlmede tasakaaluvõrrandite (kontaktjõud, toereaktsioonid, sõlmkoormus) koostamine.
4. Kõrvaltingimuste lisamine.
5. Toetingimuste lisamine.

Pärast võrrandisüsteemi lahendamist arvutame sisejõud talades.

Tala põhivõrrandid.

Sarnaselt varda arvutusel konstruktsiooni põhivõrrandite koostamisel kasutatavale programmi tsüklile [14.5 lk 399](#) kasutame tala arvutamisel tsükli [14.10 lk 434](#).
Väljavõte programmist 14.10 (Põhivõrrandid. `spTalaEST.m` lk 732)

```

IIv=0;
IJv=0;
%
for i=1:NEARV
    qkoormus=zeros(1,3);
    Fjoud=zeros(1,2);
    spvF=zeros(4,8);
    vB=zeros(4,1);
    krda=i;
    EI=selem(i,9);
    GAr=selem(i,10);
    Li=lvarras(i,1);
    %
    Fjoud=esFjoud(:,1:2,i);
    qkoormus=esQkoormus(:,1:3,i);
    %
    spvF=yspTlvfmhvI(baasi0, Li, Li, GAr, EI);
    vB=ESTtalaKrmus(baasi0, Li, Li, Fjoud, qkoormus, EI);
    IIv=krda*4-3;
    IJv=krda*8-7;
    spA=spInsertBtoA(spA, IIv, IJv, spvF);
    B=InsertBtoA(B, NNK, 1, IIv, 1, vB, 4, 1);
    %
endfor
% siin NEARV on elementide arv

```

Tala põhivõrrandi saame varda põhivõrrandist ([14.12](#)), kui varda ülekandemaatriksist \mathbf{U} ([14.20](#)), $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{q}}$ ([14.18](#)) ja $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$ ([14.19](#)) eemaldame pikisiirdele u ja normaaljõule N

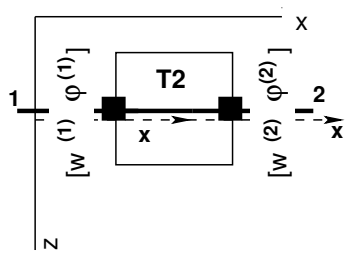
vastavad elemendid. Koostame talale maatriksi $\widehat{\mathbf{IU}}$ (14.11) arvutamiseks GNU Octave'i funktsiooni `yspTlvfmhvI.m` lk 724 (koostatakse funktsiooni `yspTlfhlin.m` lk 723 abil).

Koormusvektori $\mathring{\mathbf{Z}}$ (14.11) arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `ESTtalaKrmus.m` lk 727, mis omakorda kasutab koormusvektorite $\mathring{\mathbf{Z}}_q$, $\mathring{\mathbf{Z}}_F$ arvutamiseks funktsioone `yzThqz.m` ja `yzTfzv.m` lk 722.

Mitmesildelise tala põhivõrrandite arv on neljakordne varraste arv.

Siirete pidevusvõrrandid. Varraste ühendamist erinevat tüüpi sõlmedes vaatlesime lõigus 14.5 lk 399. Kui sõlme oli ühendatud mitu varrast, siis pidime siirete pidevuse kirjeldamisel jälgima **transitiivsust**.

Tala sõlmpunktis on ühendatud kaks tala ja siirete pidevuse kirjeldamine on lihtsam. Joonisel 14.43 on sõlmes ühendatud kaks tala. Nende tala otste siirded on võrdsed. Võrrandis (14.84) on mõlema varda teisendusmaatriks 2 ühikmaatriks.

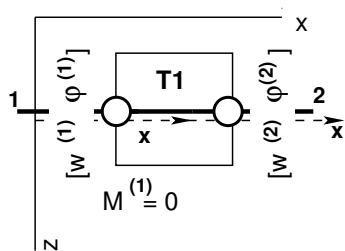


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_L^{(1)} \\ \varphi_L^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A^{(2)} \\ \varphi_A^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.84)$$

ehk

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{v}_L^{(1)} - \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{v}_A^{(2)} = 0 \quad (14.85)$$

Joonis 14.43. Sõlme T2 pidevus



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_L^{(1)} \\ \varphi_L^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A^{(2)} \\ \varphi_A^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.86)$$

ehk

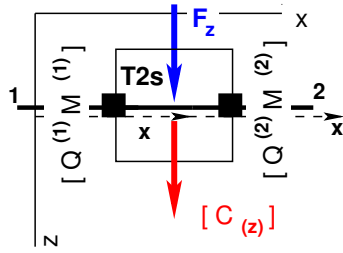
$$\mathbf{T}_1^o \cdot \mathbf{v}_L^{(1)} - \mathbf{T}_2^o \cdot \mathbf{v}_A^{(2)} = 0 \quad (14.87)$$

Joonis 14.44. Sõlme T1 pidevus

Siin teine võrrand puudub, on nullid.

Esimese ja teise vardaotsa momendiliigendeid ($M^{(1)}$ ja $M^{(2)}$) kirjeldame *kõrvaltingimustes*.

Sõlmede tasakaaluvõrrandid. Lisaks varem lõigus „Sõlme tasakaaluvõrrandid” 14.6 lk 403 vaadeldud sõlmede tüüpile vaatame sõlmi koos toereaktsioonidega (joonis 14.45). Joonisel 14.45 on näidatud sõlm, kus sõlmkoormusele \mathcal{F}_{T2s} lisaks kirjeldatakse toereaktsiooni \mathcal{C}_{T2s} . (14.89)

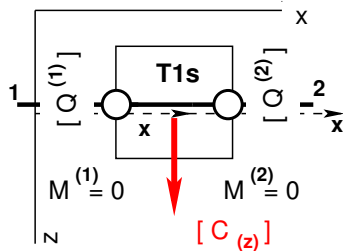


Joonis 14.45. Sõlme T2s tasakaal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_L^{(1)} \\ M_L^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A^{(2)} \\ M_A^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_z \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z \\ \dots \end{bmatrix} \quad (14.88)$$

ehk

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{s}_{2L}^{(1)} + \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{s}_{2A}^{(2)} - \mathcal{C}_{T2s} = \mathcal{F}_{T2s} \quad (14.89)$$



Joonis 14.46. Sõlme T1s tasakaal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_L^{(1)} \\ M_L^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A^{(2)} \\ M_A^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_z \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z \\ \dots \end{bmatrix} \quad (14.90)$$

ehk

$$\mathbf{T}_1^o \cdot \mathbf{s}_{2L}^{(1)} + \mathbf{T}_2^o \cdot \mathbf{s}_{2A}^{(2)} - \mathcal{C}_{T1s} = \mathcal{F}_{T1s} \quad (14.91)$$

Siin teine võrrand puudub, on nullid.

Esimese ja teise vardaotsa momendiliigendeid ($M^{(1)}$ ja $M^{(2)}$) kirjeldame kõrvallingimustes.

Toetingimused (vt jaotis 3.2 joonis 3.1) jagunevad toereaktsioonideks ja toe-siireteks. Neid nimetatakse ka *staatilisteks rajatingimusteks* ja *kinemaatilisteks rajatingimusteks*.

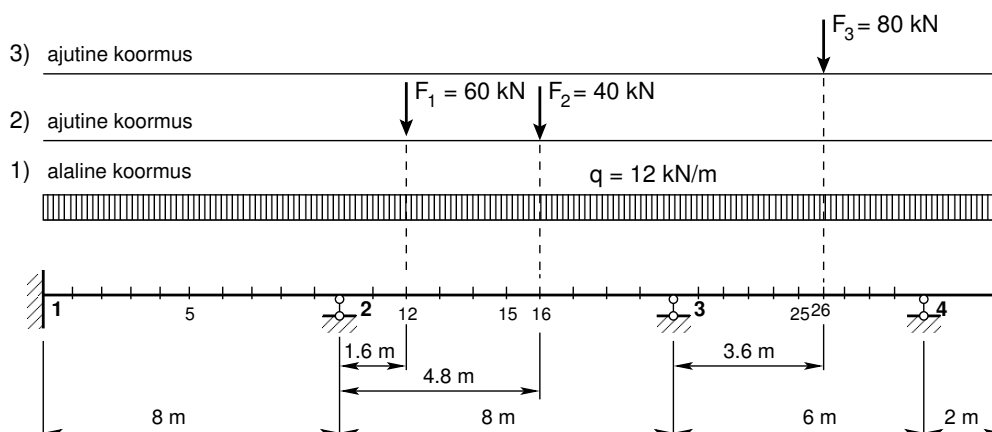
Mitmesildelise tala otstes antakse ette kas siire või kontaktjõud (toereaktsioon). Näiteks konsooli otsas anname ette Q_L ja otsime w_L 'id ($M_L \vee \varphi_L$). Järgal toel anname ette siirde ja pöörde. Otsime põikjõudu ja paindemomenti.

Kui lisame sõlme tasakaaluvõrranditele (14.88) toereaktsiooni, siis peame sellele toereaktsioonile vastava siirde lisavõrrandis ette andma.

Pidevustingimuste, tasakaaluvõrrandite ja toetingimuste rakendamist vaatame järgnevas näites.

14.11.1 Tala arvutus EST-meetodiga. Näide 14.5 [slaidid]

Näide 14.5 Leida joonisel 14.47 näidatud jätkuvtala sisejõud ja toereaktsioonid ning võrrelda näites 10.3 lk 269 saadud tulemustega. Tala jäikus on konstantne. Tala omakaal $q = 12 \text{ kN/m}$ (koormusvariant, 1 vt joonis 14.47) ja ajutise koormuse koondatud jõudude $F_1 = 60 \text{ kN}$, $F_2 = 40 \text{ kN}$ (koormusvariant 2), $F_a = 80 \text{ kN}$ (koormusvariant 3), asukohad on näidatud joonisel. Ühel sildel asuvad jõud F_1 ja F_2 mõjuvad samal ajal.



Joonis 14.47. Jätkuvtala EST

Võrrandisüsteemi koostamisel EST-meetodiga on tundmatuteks siirded ja kontaktjõud varraste otstes. Talal on 8 siiret ja kontaktjõudu ning tala elemente on 4, seega kokku on 32 siiret ja kontaktjõudu. Kõnesolevas näites lisanduvad veel toereaktsioonid C_1 , C_2 ja C_3 (joonis 14.48). Nii on võrrandisüsteemis 35 otsitavat. Kontaktjõudude ja siirete leidmiseks koostame võrrandisüsteemi (14.92)

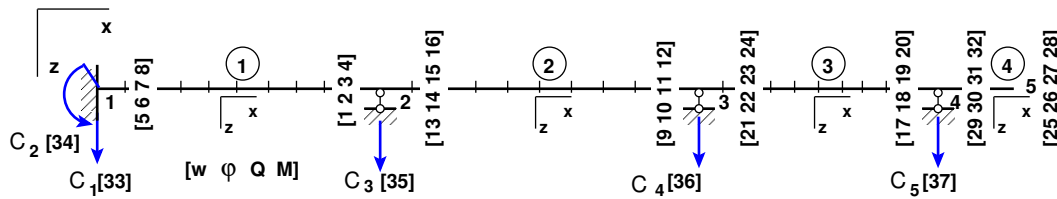
$$\text{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}, \quad (14.92)$$

kus spA on hõre maatriks. Hõredate maatriksite tehete saame tutvuda *lisas B* lk 647.

Võrrandisüsteemi koostamise võib jagada järgmisteks osadeks:

1. Konstruktsiooni põhivõrrandite koostamine.
2. Siirete pidevusvõrrandite koostamine.
3. Sõlmede tasakaaluvõrrandite (kontaktjõud, toereaktsioonid) koostamine.
4. Kõrvaltingimuste lisamine.
5. Toetingimuste lisamine.

Konstruktsiooni põhivõrrandid. Tala põhivõrrandite koostamise tsükli näeme programmi *spTalaEST.m* väljavõttes 14.10 lk 434.



Joonis 14.48. Jätkuvtala EST nummerdus

Väljavõte programmist 14.11 (Rajatingimused. **spTalaEST.m** lk 732)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Siirete pidevuse võrrandid 17-22 % vabaliikmete vektor on nullitud
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% sõlm 2
spA=spInsertBtoA (spA,17,1,spT1); spA=spInsertBtoA (spA,17,13,spT2m);
% sõlm 3
spA=spInsertBtoA (spA,19,9,spT2); spA=spInsertBtoA (spA,19,21,spT3m);
% sõlm 4
spA=spInsertBtoA (spA,21,17,spT3); spA=spInsertBtoA (spA,21,29,spT4m);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Sõlmede tasakaaluvõrrandid 23-30
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% sõlm 1
spA=spInsertBtoA (spA,23,7,spT1); spA=spInsertBtoA (spA,23,33,spT1m);
% toereaktsioon C1, C2
% sõlme 1 koormus
B(23:24,1)=0.0;
% sõlm 2
spA=spInsertBtoA (spA,25,3,spT1); spA=spInsertBtoA (spA,25,15,spT2);
spA=spSisestaArv (spA,25,35,-1); % toereaktsioon C3
B(25:26,1)=s2F(1:2,1); % sõlme 2 koormus
% sõlm 3
spA=spInsertBtoA (spA,27,11,spT2); spA=spInsertBtoA (spA,27,23,spT3);
spA=spSisestaArv (spA,27,36,-1); % toereaktsioon C4
B(27:28,1)=s3F(1:2,1); % sõlme 3 koormus
% sõlm 4
spA=spInsertBtoA (spA,29,19,spT3); spA=spInsertBtoA (spA,29,31,spT4);
spA=spSisestaArv (spA,29,37,-1); % toereaktsioon C5
B(29:30,1)=s4F(1:2,1); % sõlme 4 koormus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Kõrvaltingimused 31-32
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% sõlm 5
spA=spInsertBtoA (spA,31,27,spT4);
B(31:32,1)=0.0; % sõlme 5 koormus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Toetingimused 33-37
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
spA=spSisestaArv (spA,33,5,1); % C1-le vastav siire on 0
spA=spSisestaArv (spA,34,6,1); % C2-le vastav pööre on 0
spA=spSisestaArv (spA,35,1,1); % C3-le vastav siire on 0
spA=spSisestaArv (spA,36,9,1); % C4-le vastav siire on 0
spA=spSisestaArv (spA,37,17,1); % C5-le vastav siire on 0
B(33:37,1)=0.0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Siirete pidevusvõrrandid. Erinevat tüüpi tala elementide ühendamist sõlmedes on kirjeldatud lõigus „Siirete pidevusvõrrandid“ lk 435. Joonisel 14.48 näidatud siirete nummerduse põhjal koostame siirete pidevuse võrrandid (vt väljavõtet programmist 14.11).

Sõlmede tasakaaluvõrrandid. Erinevat tüüpi tala sõlmede tasakaalu on kirjeldatud lõi-

gus „Sõlmede tasakaaluvõrrandid“ lk 435. Joonisel 14.48 näidatud kontaktjõudude nummerduse põhjal koostame sõlmede tasakaaluvõrrandid (vt väljavõtet programmist 14.11).

Toetingimused. Tala algul on siire w ja pööre φ nullid. Tala lõpus (konsooli otsas) on põikjõud Q ja paindemoment M null. Toereaktsioonidele C_1 , C_3 , C_4 ja C_5 vastavad vertikaalsed siirded w on nullid. Joonisel 14.48 näidatud siirete ja kontaktjõudude nummerduse põhjal koostame toetingimused (vt väljavõtet programmist 14.11).

Väljavõtte programmist 14.11 lisame GNU Octave'i programmile `spTalaEST.m` lk 732.

Arvutuspäevikus on sisejõu arvutamisel kasutatud GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni `SisejoudTalaPunktis.m` lk 727. GNU Octave'i programmiga `spTalaEST.m` lk 732 arvutamise tulemust näeme arvutuspäevikus:

1. Koormusvarianti 1 (joonis 14.47) – arvutuspäevik lk 439. Näites 10.3 lk 269 toodud sisejõudude väärtused (joonis 10.18 lk 270) ja toereaktsioonid (10.79) ühtivad kõnesolevas näites saadud tulemustega.
2. Koormusvariandi 2 (joonis 14.47) käivitamisel programmiga ühtivad sisejõudude väärtused ja toereaktsioonid näites 10.3 lk 269 toodud sisejõudude (joonis 10.19 lk 273) ja toereaktsioonidega (10.92).
3. Koormusvarianti 3 (joonis 14.47) käivitamisel programmiga ühtivad sisejõudude väärtused ja toereaktsioonid näites 10.3 lk 269 toodud sisejõudude (joonis 10.20 lk 275) ja toereaktsioonidega (10.103).

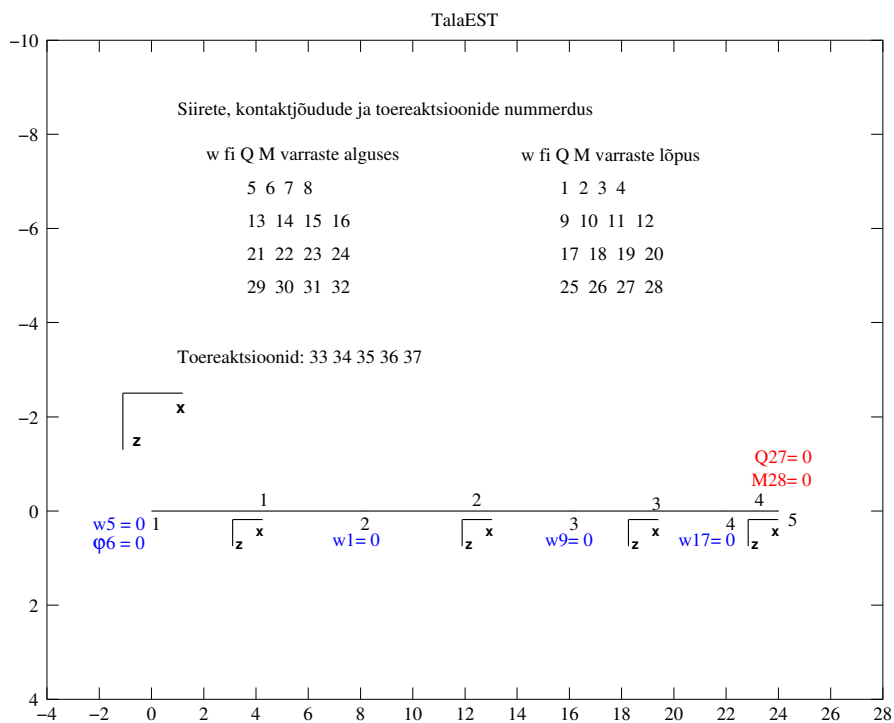
Arvutuspäevik 14.5 (Koormusvariant 1. Programm `spTalaEST.m` lk 732)

```
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spTalaEST
=====
Järgnev on jätkuvtala arvutus: GNU Octave'iga
  spTalaEST.m
  SolmedeArv=5
  ElementideArv=4
  Nmitmeks = 5
  Ntoerkts = 5
  EI = 20000
  baasi0 = 2500
  koormusvariant = 1
  Elemendi koormus kohalikes koordinaatides
  esQkoormus =

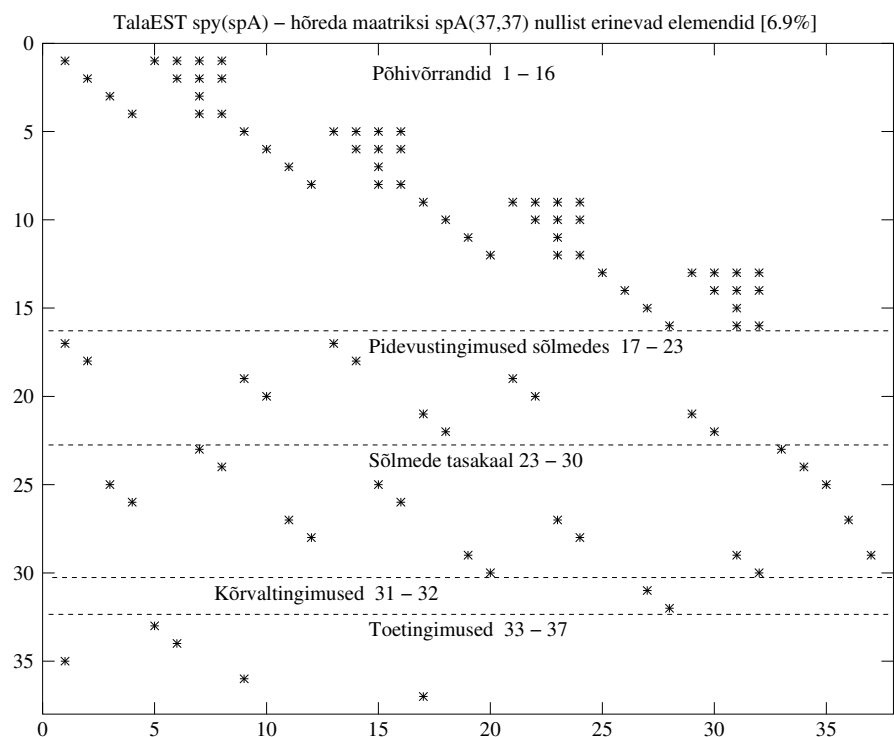
ans(:,:,1) =
    12     0     8
ans(:,:,2) =
    12     0     8
ans(:,:,3) =
    12     0     6
ans(:,:,4) =
    12     0     2

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 37, cols = 37, nnz = 94 [6.9%])
```



Joonis 14.49. Tala EST elemendid



Joonis 14.50. Tala EST spA nullist erinevate elementide asukohad

```

Nr      X
1      0.000e+00
...
33     -4.745e+01 % C1 - toereaktsioon
34      6.253e+01 % C2 - toereaktsioon
35     -9.820e+01 % C3 - toereaktsioon
36     -8.731e+01 % C4 - toereaktsioon
37     -5.504e+01 % C5 - toereaktsioon

```

```

=====
Algparameetrid skaleerimata

```

Varda Nr	w	fi	Q	M
1	0.000e+00	0.000e+00	-4.745e+01	62.533
2	-0.000e+00	-2.933e-04	-4.965e+01	66.933
3	-0.000e+00	1.173e-03	-4.096e+01	53.733
4	-0.000e+00	3.133e-04	-2.400e+01	24.000

```

=====
Koormusvariant Nr 1
-----

```

```

Sisejõud vardas 1  varda pikkus on 8.00000  varras on jaotatud viieks
siire w - 0.000e+00  2.546e-03  5.673e-03  5.560e-03  2.321e-03  0.000e+00
pööre fi - 0.000e+00 -2.375e-03 -1.135e-03  1.264e-03  2.364e-03 -2.933e-04
põikjõud Q - 47.450  28.250  9.050  -10.150  -29.350  -48.550
moment M - -62.533  -1.973  27.867  26.987  -4.613  -66.933

```

```

Sisejõud vardas 2  varda pikkus on 8.00000  varras on jaotatud viieks
siire w - 0.000e+00  3.222e-03  7.137e-03  7.475e-03  3.898e-03  0.000e+00
pööre fi --2.933e-04 -2.880e-03 -1.569e-03  1.182e-03  2.915e-03  1.173e-03
põikjõud Q - 49.650  30.450  11.250  -7.950  -27.150  -46.350
moment M - -66.933  -2.853  30.507  33.147  5.067  -53.733

```

```

Sisejõud vardas 3  varda pikkus on 6.00000  varras on jaotatud viieks
siire w - 0.000e+00 -1.152e-05  1.033e-03  1.461e-03  8.448e-04  6.939e-18
pööre fi - 1.173e-03 -7.491e-04 -7.595e-04  1.053e-04  8.085e-04  3.133e-04
põikjõud Q - 40.956  26.556  12.156  -2.244  -16.644  -31.044
moment M - -53.733  -13.227  10.000  15.947  4.613  -24.000

```

```

Sisejõud vardas 4  varda pikkus on 2.00000  varras on jaotatud viieks
siire w - 0.000e+00 -4.149e-05  4.117e-05  1.942e-04  3.793e-04  5.733e-04
pööre fi - 3.133e-04 -7.707e-05 -3.139e-04 -4.355e-04 -4.803e-04 -4.867e-04
põikjõud Q - 24.000  19.200  14.400  9.600  4.800  0.000
moment M - -24.000  -15.360  -8.640  -3.840  -0.960  0.000

```

```

Sisejõud vardas 1 kohal x = 4.00
siire w - 6.10667e-03
pööre fi - 7.33333e-05
põikjõud Q - -0.55000
moment M - 31.26667
-----

```

```

Sisejõud vardas 2 kohal x = 4.00
siire          w - 7.86667e-03
pööre         fi - -2.20000e-04
põikjõud      Q - 1.65000
moment        M - 35.66667
-----

```

```

Sisejõud vardas 3 kohal x = 3.00
siire          w - 1.38000e-03
pööre         fi - -3.71667e-04
põikjõud      Q - 4.95556
moment        M - 15.13333
-----

```

```

octave-3.0.1:4> diary off

```

Tabel 14.4. Tala EST sisejõudude võrdlus

Elemendi nr a/l	EST-meetodiga. I märgikokkulepe				Jõumeetod	
	w^* [m]	φ^* [rad]	Q^* [kN]	M^* [kN·m]	Q [kN]	M [kN·m]
1 alg.	0.000e+00	0.000e+00	47.450	-62.533	47.45	-62.53
1k kesk.	6.107e-03	7.333e-05	-0.550	31.267		31.27
1 lõpp	0.000e+00	-2.933e-04	-48.550	-66.933	-48.55	-66.93
2 alg.	0.000e+00	-2.933e-04	49.650	-66.933	49.65	-66.93
2k kesk.	7.867e-03	-2.200e-04	1.650	35.667		35.67
2 lõpp	0.000e+00	1.173e-03	-46.350	-53.733	-46.35	-53.73
3 alg.	0.000e+00	1.173e-03	40.956	-53.733	40.955	-53.73
3k kesk.	1.380e-03	-3.717e-04	4.956	15.133		15.135
3 lõpp	0.000e+00	3.133e-04	-31.044	-24.000	-31.045	-24.00
4 alg.	0.000e+00	3.133e-04	24.000	-24.000	24.00	-24.00
4 lõpp	5.733e-04	-4.867e-04	0.000	0.000	0.00	0.00

Tabelis 14.4 on Tala EST sisejõudude võrdlus, mis on arvatatud EST-meetodiga ja kolme momendi võrrandiga näites 10.3 (lk 269). Jätkuvtala avade keskel olevad momendid on näidatud tabeli 14.4 ridades 1k kesk., 2k kesk., 3k kesk. Tabelist 14.4 on näha, et sisejõud ühtivad. Jätkuvtala omakaalust põhjustatud M , Q epüürid ja toereaktsioonid on joonisel 10.18 (lk 270).

14.12 Staatikaga määratud raami arvutus EST-meetodiga

Staatikaga määratud raamskeemi puhul vaatleme ainult varraste (i) kontaktjõude $N_L^{(i)}$, $Q_L^{(i)}$, $M_L^{(i)}$, $N_A^{(i)}$, $Q_A^{(i)}$, $M_A^{(i)}$. Nende kontaktjõudude leidmiseks koostame võrrandisüsteemi (14.93)

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}, \quad (14.93)$$

kus \mathbf{spA} on hõre maatriks. Hõredate maatriksite tehetega saame tutvuda [lisas B lk 647](#). Võrrandisüsteemi koostamise võib jagada järgmisteks osadeks:

1. Konstruksiooni põhivõrrandite koostamine.
2. Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamine.
3. Kõrvaltingimuste lisamine.
4. Toetingimuste lisamine.

Konstruksiooni põhivõrrandid.

Kolme liigendiga raami põhivõrrandi saame varda põhivõrrandist (14.12), kui varda ülekandemaatriksist \mathbf{U} (14.20), $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{q}}$ (14.18) ja $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$ (14.19) eemaldame siiretele u , v ja pöördele φ vastavad elemendid.

Koostame kolme liigendiga raamile maatriksi $\widehat{\mathbf{IU}}$ (14.11) arvutamiseks GNU Octave'i funktsiooni `yspSlvfmhvI.m` lk 724 (koostatakse funktsiooni `yspSlfmlin.m` lk 724 abil). Koormusvektori $\mathring{\mathbf{Z}}$ (14.11) arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `ESTSKr-mus.m` lk 727, mis omakorda kasutab koormusvektorite $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{q}}$, $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$ arvutamiseks funktsioone `yzShqz.m` ja `yzSfzv.m` lk 722.

Sarnaselt varda arvutusel konstruksiooni põhivõrrandite koostamisel kasutatavale programmi tsüklile 14.5 lk 399 kasutame tala arvutamisel tsükli 14.12 lk 444.

Kolme liigendiga raami põhivõrrandite arv on kolmekordne varraste (3×3 elementide) arv. Need moodustavad pooled võrrandid võrrandisüsteemist (14.93). Teise poole võrranditest peame saama sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamisega ja kõrvaltingimuste lisamisega.

Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamine. Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamisega tutvusime lõigus 14.6 lk 403. Siin kasutame neid eespool vaadatud sõlmetüüpe.

Väljavõtte programmist 14.12 (Põhivõrrandid. sp3liigendRaamEST.m lk 729)

```

IIv=0;
IJv=0;
%
for i=1:NEARV
    qkoormus=zeros(1,4);
    Fjoud=zeros(1,3);
    spvF=zeros(3,6);
    vB=zeros(3,1);
    krda=i;
    Li=lvarras(i,1);
    Fjoud=esFjoud(:,1:3,i);
    qkoormus=esQkoormus(:,1:4,i);
    %
    spvF=yspSlvfmhvI(Li, Li);
    vB=ESTSKrmus(Li, Li, Fjoud, qkoormus);
    %
    IIv=krda*3-2;
    IJv=krda*6-5;
    spA=spInsertBtoA(spA, IIv, IJv, spvF);
    B=InsertBtoA(B, NNK, 1, IIv, 1, vB, 3, 1);
endfor
%
% siin NEARV on elementide arv

```

Kõrvaltingimuste lisamine. Staatikaga määratud konstruktsiooni puhul kirjeldame varraste otstes olevad momendiliigendid kõrvaltingimustega. Kui kaks varrast on ühendatud momendiliigendiga, siis on siin kaks kõrvaltingimust.

Väljavõtte programmist 14.13 (Sisejõud. sp3liigendRaamEST.m lk 729)

```

for i=1:NEARV
    qkoormus=zeros(1,4);
    Fjoud=zeros(1,3);
    krda=i;
    Li=lvarras(i,1);
    %
    Fjoud=esFjoud(:,1:3,i);
    qkoormus=esQkoormus(:,1:4,i);
    xsamm=Li/Nmitmeks; % varda viiendikel sisejõud
    xx=0;
    AP=AlgPar(i, :)';
    %
    for ij=1:Nmitmeks+1 % +1 - sisejõud ka varda algul
        vvF=ylSfhlIn(xx);
        vvB=ESTSKrmus(xx, Li, Fjoud, qkoormus);
        %
        Fvv(:, ij)=vvF*AP+vvB;
        xx=xx+xsamm;
    endfor
%
VardaNr=i;
...
endfor
% siin NEARV on elementide (varraste) arv

```

Sisejõudude arvutamine. Sisejõudude arvutamiseks kasutame ülekandevõrrandit:

$$\mathbf{Z}_L(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_A + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (14.94)$$

siin arvutame ülekandemaatriksi \mathbf{U} funktsiooniga ylSfhlIn.m lk 721. Koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ arvutame funktsiooniga ESTSKrmus.m lk 727. Selles funktsioonis koondatud jõudu

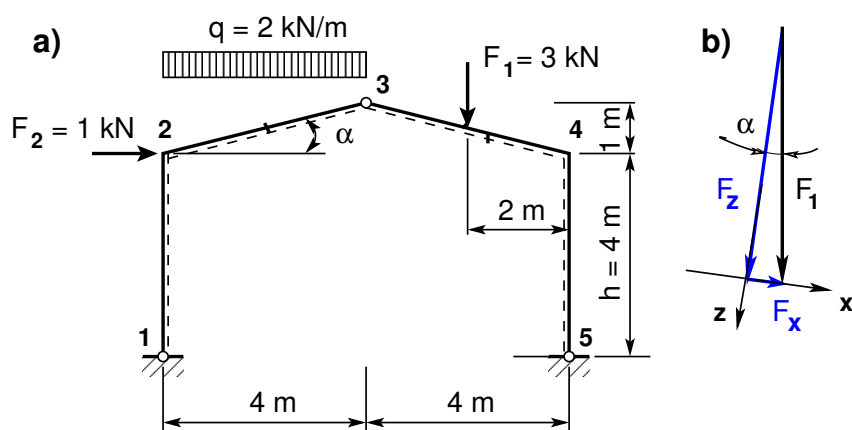
arvutatakse funktsiooniga yzSfzv.m ja jaotatud koormust funktsiooniga yzShqz.m. Need funktsioonid aitavad võrrandit (14.94) kasutada arvutiprogrammis, mis on näidatud programmi väljavõttes 14.13 lk 444.

14.12.1 Kolme liigendiga raam. Näide 14.6

[slaidid]

Näide 14.6

Leida joonisel 14.51 kujutatud kolme liigendiga raami sisejõud EST-meetodiga ja võrrelda arvutuse tulemusi näites 5.4 lk 136 leitudega.



Joonis 14.51. Kolme liigendiga raam

Kõnesolevas näites on jaotatud koormus q (vt joonis 14.51) antud varda projektsioonile (4 m). Teisendame jaotatud koormuse q koormuseks q_k kaldu oleva varda pikkusele l_2 (14.95). Lahutame koormuse q_k komponentideks (q_x – projektsioon kohalikule teljele x ja q_z – projektsioon kohalikule teljele z) ja arvutame arvutiga, siis saame suurema täpsuse.

$$\begin{aligned} q_x &= -q_k * \sin \alpha, & kus & \sin \alpha = 1.0/l_2 \\ q_z &= q_k * \cos \alpha, & kus & \cos \alpha = 4.0/l_2 \\ q_k &= q * 4.0/l_2, & kus & l_2 = \sqrt{4^2 + 1.0^2} \end{aligned} \quad (14.95)$$

Koormuse F_1 (vt joonis 14.51 b)) lahutame komponentideks (F_x – projektsioon kohalikule teljele x ja F_z – projektsioon kohalikule teljele z) ja laseme arvutada arvutil, siis saame suurema täpsuse. Ka jõu F rakenduspunkti kauguse arvutame arvutiga, kohalikus teljestikus. Avaldisega (14.96) on toodud jõu F projektsioonid kohalikus teljestikus (vt joonis 14.52).

$$\begin{aligned} F_x &= F_1 * \sin \alpha, & kus & \sin \alpha = 1.0/l_2 \\ F_z &= F_1 * \cos \alpha, & kus & \cos \alpha = 4.0/l_2 \\ aF &= l_3/2, & kus & l_3 = \sqrt{4^2 + 1.0^2} \end{aligned} \quad (14.96)$$

Joonisel 14.52 näidatud kontaktjõudude nummerduse põhjal koostame väljavõtte programmist 14.14. Väljavõtte programmist lisame GNU Octave'i programmile *sp3liigendRaamEST.m* lk 729.

Väljavõte programmist 14.14 (Rajatingimused. **sp3liigendRaamEST.m** lk 729)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Siirete pidevuse võrrandid puuduvad
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Sõlmede tasakaaluvõrrandid 13–21
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% sõlm 1
spA=spInsertBtoA(spA,13,4,spT12);   spA=spInsertBtoA(spA,13,25,spTY2m);
                                     % toereaktsioon C1, C2

% sõlm 2
spA=spInsertBtoA(spA,15,1,spT1);   spA=spInsertBtoA(spA,15,10,spT2);
B(15:17,1)=s2F(1:3,1);              % sõlme 2 koormus

% sõlm 3
spA=spInsertBtoA(spA,18,7,spT22);  spA=spInsertBtoA(spA,18,16,spT32);
B(18:19,1)=s3F(1:2,1);              % sõlme 3 koormus

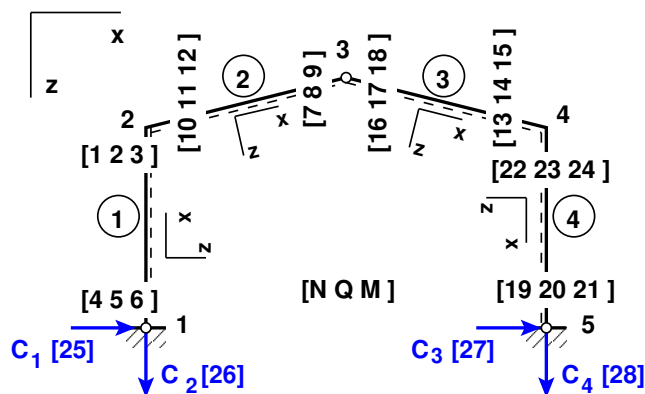
% sõlm 4
spA=spInsertBtoA(spA,20,13,spT3);  spA=spInsertBtoA(spA,20,22,spT4);
B(20:22,1)=s4F(1:3,1);              % sõlme 4 koormus

% sõlm 5
spA=spInsertBtoA(spA,23,19,spT42);  spA=spInsertBtoA(spA,23,27,spTY2m);
                                     % toereaktsioon C3, C4

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Kõrvaltingimused 25–28           % vabaliikmete vektor on nullitud
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
spA=spSisestaArv(spA,25,9,1);       % kõrvaltingimus sõlmes 3
spA=spSisestaArv(spA,26,18,1);     % kõrvaltingimus sõlmes 3
spA=spSisestaArv(spA,27,6,1);      % kõrvaltingimus sõlmes 1
spA=spSisestaArv(spA,28,21,1);     % kõrvaltingimus sõlmes 5
B(25:28,1)=0.0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Arvutuse tulemusi näeme arvutuspäevikus 14.6 lk 447. Nende põhjal kanname kolme liigendiga raami toereaktsioonid joonisele 14.53 ja teostame staatilise tasakaalu kontrolli (14.97). Sisejõud on leitud varda viiendikel (alguspunkt sealhulgas), siin I ja II märgikokkuleppe puhul on sisejõudude märgid ühesugused. Leitud sisejõud langevad kokku näites 5.4 lk 136 toodutega. Arvutuspäevikus on raami riivi keskel sisejõud välja toodud programmiga **Sisejoud3LraamiPnktis.m** lk 728.



Joonis 14.52. Kolme liigendiga raami kontaktjõudude nummerdus

$$\begin{aligned}
 \Sigma X = 0; & \quad 1.6 + 1.0 - 2.6 = 0 \\
 \Sigma Z = 0; & \quad 6.25 + 4.75 - 2 * 4 - 3 = 0 \\
 \Sigma M_1 = 0; & \quad 4.75 * 8 - 1 * 4 - 2 * 4 * 2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{14.97}$$

Arvutuspäevik 14.6 (Programm **sp3liigendRaamEST.m** lk 729)

```

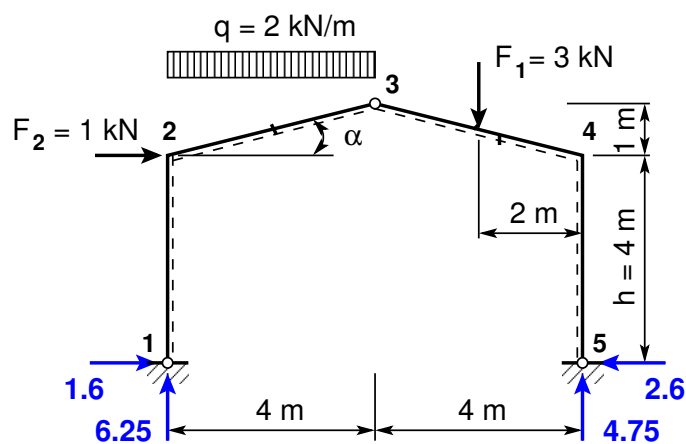
octave-3.0.1:1> diary sp3liigendRaamEST.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> sp3liigendRaamEST
=====
Järgnev on kolme liigendiga raami arvutus: GNU Octave'iga
  sp3liigendRaamEST.m
Nmitmeks = 5
koormusvariant = 1
  Koormusvariant 1
  Elemendi koormus kohalikes koordinaatides
%esQkoormus(1,1:4,i)=[qz qx aqA aqL];
esQkoormus =

ans(:,:,1) =
   0   0   0   4
ans(:,:,2) =
  1.88235 -0.47059   0.00000   4.12311
ans(:,:,3) =
   0.00000   0.00000   0.00000   4.12311
ans(:,:,4) =
   0   0   0   4

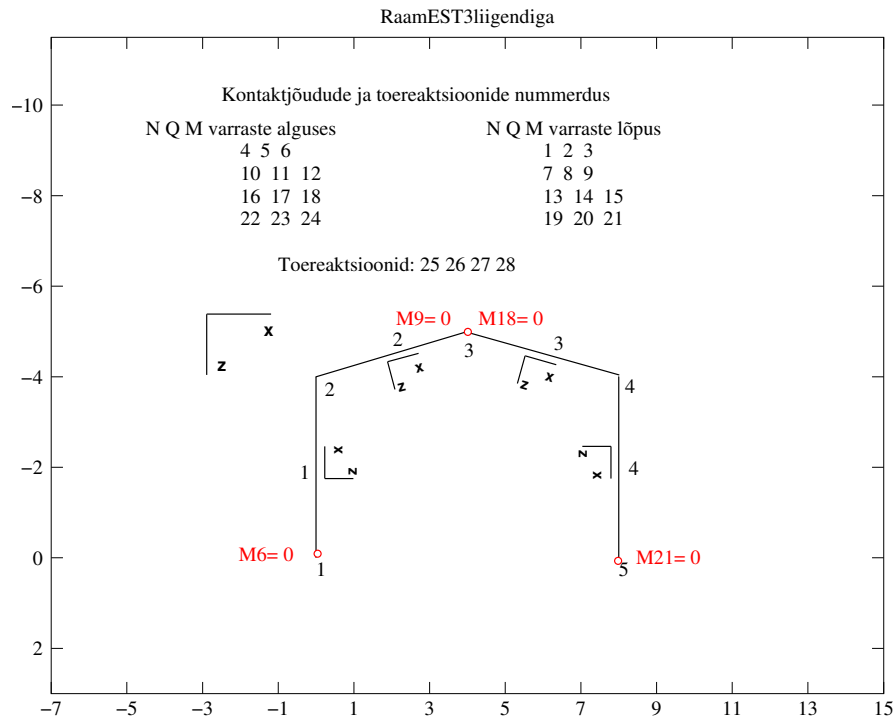
esFjoud(1,1:3,i)=[Fz Fx aF];
esFjoud =

ans(:,:,1) =
   0   0   0
ans(:,:,2) =
   0   0   0

```



Joonis 14.53. Kolme liigendiga raami toereaktsioonid



Joonis 14.54. Kolme liigendiga raami EST-meetodi elemendid

```
ans(:,:,3) =
    2.91043    0.72761    2.06155

ans(:,:,4) =
    0    0    0

Sõlme 1 koormus üldkoordinaatides
ans =
    0    0    0

Sõlme 2 koormus üldkoordinaatides
ans =
    1    0    0

Sõlme 3 koormus üldkoordinaatides
ans =
    0    0    0

Sõlme 4 koormus üldkoordinaatides
ans =
    0    0    0

Sõlme 5 koormus üldkoordinaatides
ans =
    0    0    0
SolmedeArv = 5
ElementideArv = 4
%

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 28, cols = 28, nnz = 64 [8.2%])
```

```
Nr    X
```

1	-6.250e+00	11	-5.433e+00	21	0.000e+00
2	-1.600e+00	12	6.400e+00	22	4.750e+00
3	-6.400e+00	13	-3.674e+00	23	-2.600e+00
4	6.250e+00	14	-3.978e+00	24	1.040e+01
5	1.600e+00	15	-1.040e+01	% Toereaktsioonid	
6	0.000e+00	16	2.947e+00	25	1.600e+00 % - C1
7	-2.098e+00	17	1.067e+00	26	-6.250e+00 % - C2
8	-2.328e+00	18	0.000e+00	27	-2.600e+00 % - C3
9	0.000e+00	19	-4.750e+00	28	-4.750e+00 % - C4
10	4.038e+00	20	2.600e+00		

=====

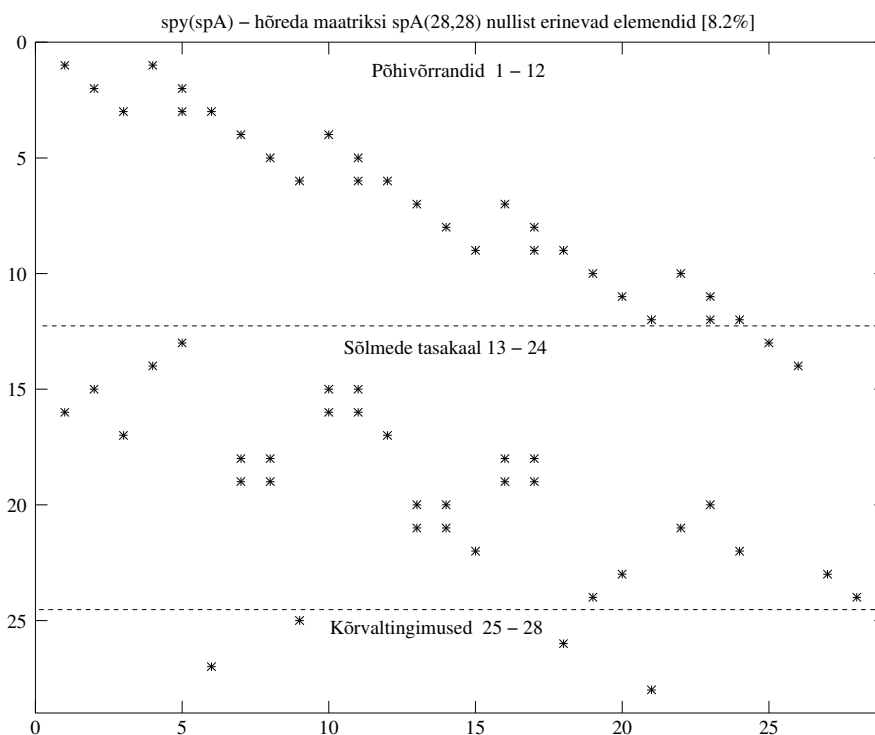
Algparameetrid

Varda Nr	N	Q	M
1	6.250	1.600	0.000
2	4.038	-5.433	6.400
3	2.947	1.067	0.000
4	4.750	-2.600	10.400

=====

Koormusvariant Nr 1

Sisejõud vardas 1 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud viieks
 pikijõud N - -6.250 -6.250 -6.250 -6.250 -6.250 -6.250
 põikjõud Q - -1.600 -1.600 -1.600 -1.600 -1.600 -1.600



Joonis 14.55. Kolme liigendiga raami nullist erinevate elementide asukohad

moment	M -	0.000	-1.280	-2.560	-3.840	-5.120	-6.400

Sisejõud vardas	2	varda pikkus on	4.12311	varras on jaotatud viieks			
pikijõud	N -	-4.038	-3.650	-3.262	-2.874	-2.486	-2.098
põikjõud	Q -	5.433	3.881	2.328	0.776	-0.776	-2.328
moment	M -	-6.400	-2.560	-0.000	1.280	1.280	0.000

Sisejõud vardas	3	varda pikkus on	4.12311	varras on jaotatud viieks			
pikijõud	N -	-2.947	-2.947	-2.947	-3.674	-3.674	-3.674
põikjõud	Q -	-1.067	-1.067	-1.067	-3.978	-3.978	-3.978
moment	M -	0.000	-0.880	-1.760	-3.840	-7.120	-10.400

Sisejõud vardas	4	varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud viieks			
pikijõud	N -	-4.750	-4.750	-4.750	-4.750	-4.750	-4.750
põikjõud	Q -	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600
moment	M -	-10.400	-8.320	-6.240	-4.160	-2.080	-0.000

Sisejõud vardas	3	kohal x =	2.061552				
pikijõud	N -	-2.947					
põikjõud	Q -	-1.067					
moment	M -	-2.200					
Sisejõud vardas	3	kohal x =	2.061553				
pikijõud	N -	-3.674					
põikjõud	Q -	-3.978					
moment	M -	-2.200					

octave-3.0.1:4> diary off

Tabel 14.5. Kolme liigendiga raami sisejõudude võrdlus

Varda <i>nr a/l</i>	EST-meetodiga. I märgikokkulepe			Lõikemeetodiga		
	<i>N*</i> [kN]	<i>Q*</i> [kN]	<i>M*</i> [kN·m]	<i>N</i> [kN]	<i>Q</i> [kN]	<i>M</i> [kN·m]
1 alg.	-6.250	-1.600	0.000	-6.250	-1.600	0.000
1 lõpp	-6.250	-1.600	-6.400	-6.250	-1.600	-6.400
2 alg.	-4.038	5.433	-6.400	-4.038	5.433	-6.400
2k kesk.	-3.068	1.552	0.800	-3.068	1.552	0.800
2 lõpp	-2.098	-2.328	0.000	-2.098	-2.328	0.000
3 alg.	-2.947	-1.067	0.000	-2.947	-1.067	0.000
3kv kesk.v	-2.947	-1.067	-2.200	-2.947	-1.067	-2.200
3kp kesk.p	-3.674	-3.978	-2.200	-3.674	-3.978	-2.200
3 lõpp	-3.674	-3.978	-10.400	-3.674	-3.978	-10.400
4 alg.	-4.750	2.600	-10.400	-4.750	2.600	-10.400
4 lõpp	-4.750	2.600	0.000	-4.750	2.600	0.000

Tabelis 14.5 on toodud EST-meetodiga määratud kolme liigendiga raami sisejõudude võrdlus näites näites 5.4 (vt lk 136) leitutega. Tabelis on toodud raami riivi keskel olevad sise-

jõudude ridades 2k kesk., 3kv kesk.v ja 3kp kesk.p. Tabelist 14.5 on näha, et sisejõud ühtivad. Paindemomendi epüür on toodud joonisel 5.15 (lk 136), põikjõu ja normaaljõu epüürid on joonisel 5.20 (lk 139).

14.13 Staatikaga määratud tala EST-meetodiga

Staatikaga määratud talaskeemi puhul vaatleme ainult talade (i) kontaktjõude $Q_L^{(i)}$, $M_L^{(i)}$, $Q_A^{(i)}$, $M_A^{(i)}$. Nende kontaktjõudude leidmiseks koostame võrrandisüsteemi (14.98)

$$\text{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}, \quad (14.98)$$

kus spA on hõre maatriks. Hõredate maatriksite tehetege saame tutvuda [lisan B lk 647](#).

Võrrandisüsteemi koostamise võib jagada järgmisteks osadeks:

1. Konstruksiooni põhivõrrandite koostamine.
2. Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamine.
3. Kõrvaltingimuste lisamine.
4. Toetingimuste lisamine.

Väljavõte programmist 14.15 (Põhivõrrandid. spGerberTalaEST.m lk 730)

```

IIv=0;
IJv=0;
%
for i=1:NEARV
    qkoormus=zeros(1,3);
    Fjoud=zeros(1,2);
    spvF=zeros(2,4);
    vB=zeros(2,1);
    krda=i;
    Li=lvarras(i,1);
    %
    Fjoud=esFjoud(:,1:2,i);
    qkoormus=esQkoormus(:,1:3,i);
    %
    spvF=ysspSTlvfmhvI(Li, Li);
    vB=ESTSTKrmus(Li, Li, Fjoud, qkoormus);
    IIv=krda*2-1;
    IJv=krda*4-3;
    spA=spInsertBtoA(spA, IIv, IJv, spvF);
    B=InsertBtoA(B, NNK, 1, IIv, 1, vB, 2, 1);
endfor
%
% siin NEARV on elementide arv

```

Konstruksiooni põhivõrrandid.

Staatikaga määratud tala põhivõrrandi saame varda põhivõrrandist (14.12), kui varda ülekandemaatriksist \mathbf{U} (14.20), $\mathring{\mathbf{Z}}_q$ (14.18) ja $\mathring{\mathbf{Z}}_F$ (14.19) eemaldame siiretele u , v , pöördele φ ja normaaljõule N vastavad elemendid.

Koostame staatiliselt määratud tala maatriksi $\widehat{\mathbf{IU}}$ (14.11) arvutamiseks GNU Octave'i funktsiooni `yspSTlvfmhvL.m` lk 725 (koostatakse funktsiooni `yspSTlfhlin.m` lk 724 abil). Koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ (14.11) arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `ESTSTKrmus.m` lk 727, mis omakorda kasutab koormusvektorite $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$, $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$ arvutamiseks funktsioone `yzSThqz.m` ja `yzSTfzv.m` lk 722.

Sarnaselt varda arvutusel konstruktsiooni põhivõrrandite koostamisel kasutatavale programmi tsüklile 14.5 lk 399, kasutame tala arvutamisel tsüklit 14.15 lk 451.

Staatikaga määratud tala põhivõrrandite arv on kahekordne varraste (2xelementide) arv. Need moodustavad pooled võrrandid võrrandisüsteemist (14.98). Teise poole võrranditest peame saama sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamisega ja kõrvaltingimuste lisamisega.

Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamine. Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamisega tutvusime lõigus lk 435. Siin kasutame neid eespool vaadatud sõlmetüüpe.

Väljavõte programmist 14.16 (Sisejõud. `spGerberTalaEST.m` lk 730)

```
for i=1:NEARV
    qkoormus=zeros(1,3);
    Fjoud=zeros(1,2);
    %
    krda=i;
    vF=zeros(2,4);
    Li=lvarras(i,1);
    %
    Fjoud=esFjoud(:,1:2,i);
    qkoormus=esQkoormus(:,1:3,i);
    xsamm=Li/Nmitmeks; % varda meljandikel sisejõud
    xx=0;
    AP=AlgPar(i,:)';
    %
    for ij=1:Nmitmeks+1 % 5 - sisejõud ka varda algul
        vvF=ylSTfhlin(xx);
        vvB=ESTSTKrmus(xx, Li, Fjoud, qkoormus);
        %
        Fvv(:,ij)=vvF*AP+vvB;
        xx=xx+xsamm;
    endfor
    %
    ValiJaotus=Nmitmeks;
    VardaNr=i;
    ...
    ...
endfor
% siin NEARV on elementide (varraste) arv
```

Kõrvaltingimuste lisamine. Staatikaga määratud konstruktsiooni puhul kirjeldame varraste otstes olevad momendiliigendid kõrvaltingimustega. Kui kaks varrast on ühendatud momendiliigendiga, siis on siin kaks kõrvaltingimust. Ühe nendest varda otsas olevast momendiliigendit kirjeldavast kõrvaltingimusest kirjutame sõlme tasakaaluvõrranditele lisaks. Teise varda otsas oleva momendiliigendit kirjeldava kõrvaltingimuse kirjutame eraldi.

Sisejõudude arvutamine. Sisejõudude arvutamist ülekandevõrranditega vaatasi-me lõigus „Ülekandemaatriks paindel” 1.17 lk 56. Sisejõudude arvutamiseks kasutame ülekandevõrrandit

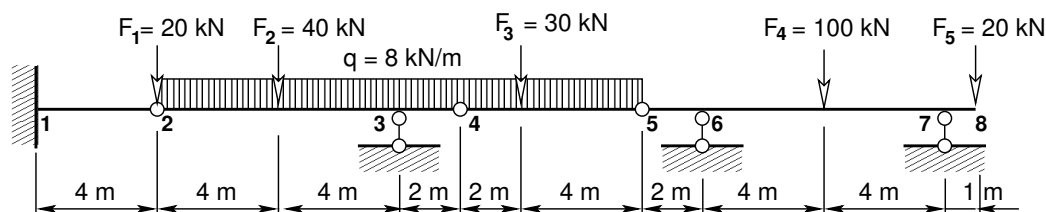
$$\mathbf{Z}_L(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_A + \mathring{\mathbf{Z}} \quad (14.99)$$

siin ülekandemaatriksi \mathbf{U} arvutame funktsiooniga `ylSTfhlin.m` lk 721. Koormusvektori $\mathring{\mathbf{Z}}$ arvutame funktsiooniga `ESTSTKrmus.m` lk 727. Selles funktsioonis koondatud jõudu arvutatakse funktsiooniga `yzSTfzv.m` ja jaotatud koormust funktsiooniga `yzSThqz.m`. Need funktsioonid aitavad võrrandit (14.99) kasutada arvutiprogrammis, mis on näidatud programmi väljavõttes 14.16 lk 452.

14.13.1 Mitmesildeline tala EST-meetodiga. Näide 14.7 [slaidid]

Näide 14.7

Leida joonisel 14.56 näidatud staatikaga määratud tala sisejõud EST-meetodiga ja võrrelda tulemusi näites 4.1 lk 96 leitutega.



Joonis 14.56. Gerberi tala arvutus EST-meetodiga

Gerberi tala jagame elementideks, mille otspunktides oleval kontaktjõud nummerdame (vt joonis 14.57). Nende kontaktjõudude leidmiseks koostame võrrandisüsteemi (14.100)

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}, \quad (14.100)$$

kus \mathbf{spA} on hõre maatriks. Hõredate maatriksite tehetega saame tutvuda *lisas B* lk 647. Võrrandisüsteemi koostamise võib jagada järgmisteks osadeks:

1. Konstruksiooni põhivõrrandite koostamine.
2. Sõlmede tasakaaluvõrrandite koostamine.
3. Kõrvaltingimuste lisamine.
4. Toetingimuste lisamine.

Konstruksiooni põhivõrrandid. Gerberi tala põhivõrrandid arvutame GNU Octave'i funktsiooni `yspSTlvfmbHvI.m` lk 725 abil. Koormusvektori arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `ESTSTKrmus.m` lk 727. Gerberi tala põhivõrrandite arvutamist näeme programmi väljavõttes 14.15 lk 451.

Väljavõtte programmist 14.17 lisame GNU Octave'i programmile *spGerberTalaEST.m* lk 730.

Kõrvaltingimused. Kõrvaltingimustega iseloomustame varraste otstes olevaid momendiliigendeid. Kõrvaltingimuste kaudu on võimalik varda otsas anda ka nullist erinev moment, kui see on rakendatud selle varda otsa ja ei ole seotud teise vardaga.

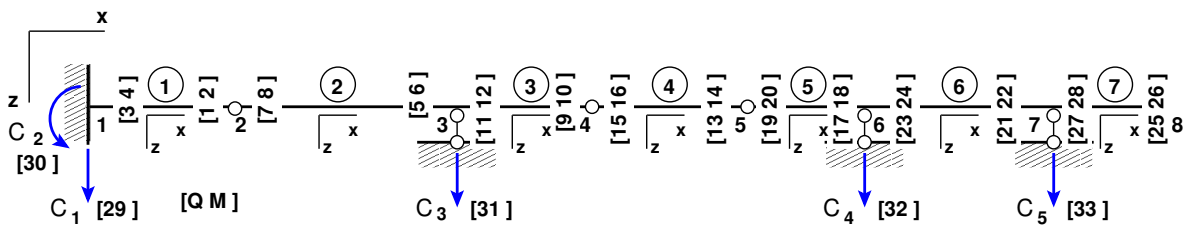
Sisejõudude arvutamine. Gerberi tala sisejõudude arvutamiseks kasutame ülekandevõrrandit (14.99) lk 453. Sisejõudude arvutamist ülekandevõrranditega vaatasime ka varem lõigus „Ülekandemaatriks paindel” 1.17 lk 56. Arvutuspäevikus on sisejõu arvutamisel koondatud jõu F all kasutatud GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni *SsjoudGrbrTalaPnktis.m* lk 728. Arvutuste tulemusi programmiga *spGerberTalaEST.m* lk 730 näeme arvutuste päevikus. Arvutuste tulemused langevad kokku näites 4.1 lk 96 leitud tulemustega. Varem lahendatud ülesande epüüre näeme joonisel 4.7 lk 104 ja toereaktsioone väljavõttes „Toereaktsioonid ja kontaktjõud” lk 107. Toe 1 toereaktsioonid langevad kokku varda 1 algul olevate kontaktjõududega.

Arvutuspäevik 14.7 (Programm *spGerberTalaEST.m* lk 730)

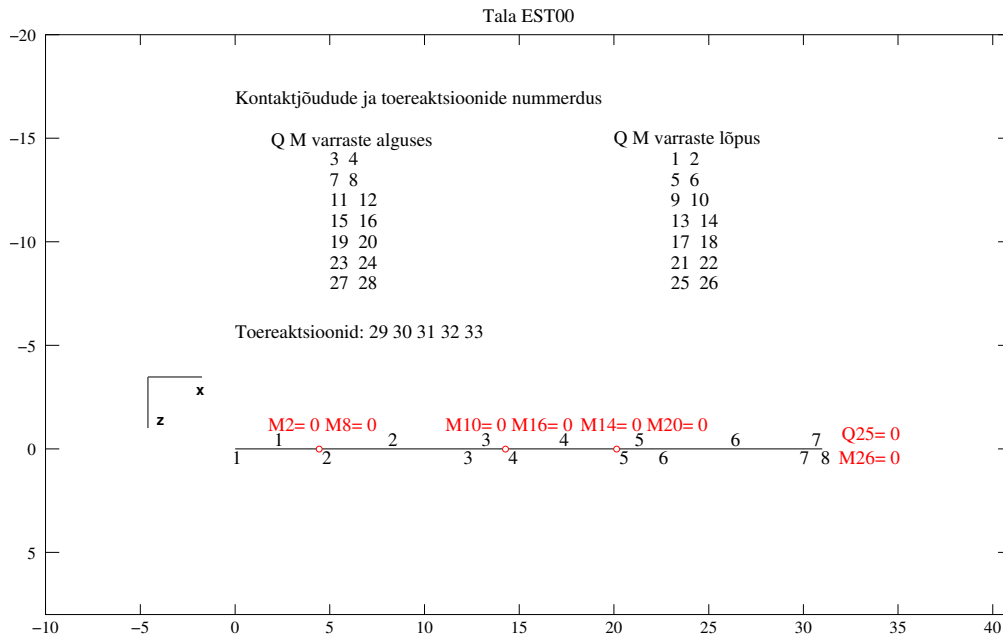
```
octave-3.0.1:1> diary spGerberTalaEST.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spGerberTalaEST
=====
Järgnev on Gerberi tala arvutus: GNU Octave'iga
spGerberTalaEST.m
Nmitmeks = 4
Ntoerkts = 5
koormusvariant = 1
Elemendi koormus kohalikes koordinaatides
%esQkoormus(1,1:3,i)=[qz aqA aqL];
esQkoormus =

ans(:,:,1) =      ans(:,:,3) =      ans(:,:,5) =      ans(:,:,7) =
    0    0    4          8    0    2          0    0    2          0    0    1
ans(:,:,2) =      ans(:,:,4) =      ans(:,:,6) =
    8    0    8          8    0    6          0    0    8

%esFjoud(1,1:2,i)=[Fz aF];
esFjoud =
```



Joonis 14.57. Gerberi tala EST nummerdus



Joonis 14.58. EST-meetod. Gerberi tala elementid

```
ans(:,:,1) =      ans(:,:,3) =      ans(:,:,5) =      ans(:,:,7) =
    0  4           0  2           0  2           0  1
ans(:,:,2) =      ans(:,:,4) =      ans(:,:,6) =
   40  4          30  2          100  4
```

Sõlme 1 koormus üldkoordinaatides

```
ans =
    0  0
```

Sõlme 2 koormus üldkoordinaatides

```
ans =
   20  0
```

Sõlme 3 koormus üldkoordinaatides

```
ans =
    0  0
```

Sõlme 4 koormus üldkoordinaatides

```
ans =
    0  0
```

Sõlme 5 koormus üldkoordinaatides

```
ans =
    0  0
```

Sõlme 6 koormus üldkoordinaatides

```
ans =
    0  0
```

Sõlme 7 koormus üldkoordinaatides

```
ans =
    0  0
```

Sõlme 8 koormus üldkoordinaatides

```
ans =
   20  0
```

SolmedeArv = 8

ElementideArv = 7

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 33, cols = 33, nnz = 68)

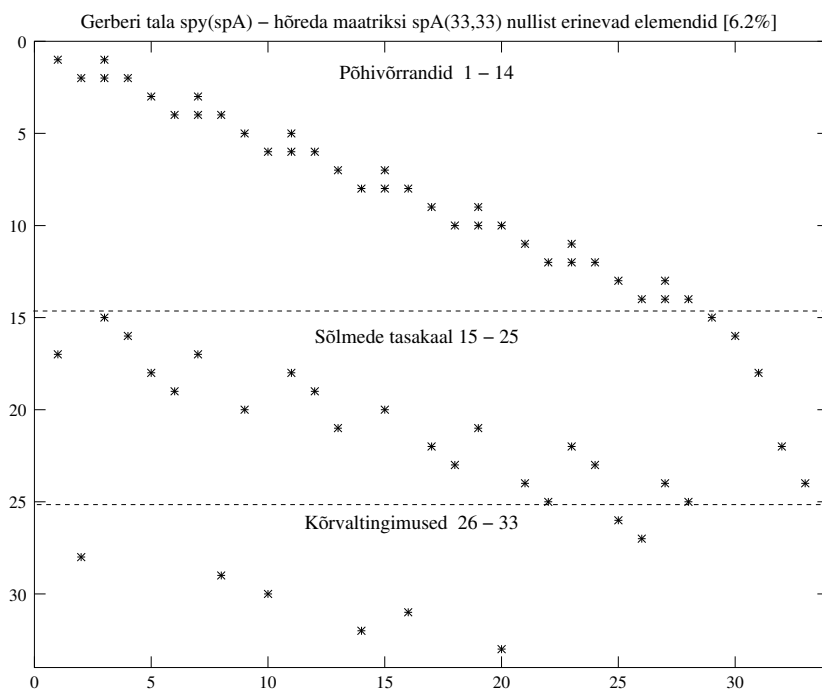
(1, 1) -> 1 (28, 2) -> 1 (15, 3) -> 1 (3, 5) -> 1
 (17, 1) -> 1 (1, 3) -> 1 (2, 4) -> 1 (18, 5) -> 1
 (2, 2) -> 1 (2, 3) -> 4 (16, 4) -> 1 ...

Nr	X	
1	5.900e+01	
2	0.000e+00	
3	-5.900e+01	
...		
29	-5.900e+01	- toereaktsioon C1
30	2.360e+02	- toereaktsioon C2
31	-1.250e+02	- toereaktsioon C3
32	-9.000e+01	- toereaktsioon C4
33	-6.400e+01	- toereaktsioon C5

=====

Algparameetrid; II märgikokkulepe

Varda Nr	Q	M
1	-59.000	236.000
2	-39.000	0.000
3	-60.000	104.000
4	-44.000	0.000
5	34.000	0.000
6	-56.000	68.000



Joonis 14.59. Gerberi tala. Nullist erinevate elementide asukohad

```

7      -20.000    20.000
-----
=====
Koormusvariant Nr 1;   I ja II märgikokkulepe
-----
Sisejõud vardas 1  varda pikkus on 4.00000  varras on jaotatud neljaks
põikjõud   Q -   59.000    59.000    59.000    59.000    59.000
moment     M -  -236.000  -177.000  -118.000  -59.000    0.000
-----
Sisejõud vardas 2  varda pikkus on 8.00000  varras on jaotatud neljaks
põikjõud   Q -   39.000    23.000   -33.000   -49.000   -65.000
moment     M -    0.000    62.000    92.000    10.000  -104.000
-----
Sisejõud vardas 3  varda pikkus on 2.00000  varras on jaotatud neljaks
põikjõud   Q -   60.000    56.000    52.000    48.000    44.000
moment     M - -104.000   -75.000   -48.000   -23.000    0.000
-----
Sisejõud vardas 4  varda pikkus on 6.00000  varras on jaotatud neljaks
põikjõud   Q -   44.000    32.000   -10.000   -22.000   -34.000
moment     M -    0.000    57.000    66.000    42.000    0.000
-----
Sisejõud vardas 5  varda pikkus on 2.00000  varras on jaotatud neljaks
põikjõud   Q -  -34.000   -34.000   -34.000   -34.000   -34.000
moment     M -    0.000   -17.000   -34.000   -51.000   -68.000
-----
Sisejõud vardas 6  varda pikkus on 8.00000  varras on jaotatud neljaks
põikjõud   Q -   56.000    56.000   -44.000   -44.000   -44.000
moment     M -  -68.000    44.000   156.000    68.000   -20.000
-----
Sisejõud vardas 7  varda pikkus on 1.00000  varras on jaotatud neljaks
põikjõud   Q -   20.000    20.000    20.000    20.000    20.000
moment     M -  -20.000   -15.000   -10.000    -5.000    0.000
-----
Sisejõud vardas 4  kohal x =  1.999999
põikjõud   Q -    28.000
moment     M -    72.000
Sisejõud vardas 4  kohal x =  2.000000
põikjõud   Q -    -2.000
moment     M -    72.000
-----
Sisejõud vardas 2  kohal x =  3.999999
põikjõud   Q -     7.000
moment     M -    92.000
-----
Sisejõud vardas 6  kohal x =  3.999999
põikjõud   Q -    56.000
moment     M -   156.000
-----
octave-3.0.1:4> diary off

```

Tabelis 14.6 on toodud Gerberi tala sisejõudude võrdlus, mis on määratud EST-meetodiga ja lõikemeetodiga näites 4.1 (vt lk 96). Koondatud jõudude kohal on tabelis sisejõudude vää-

Tabel 14.6. EST-meetod. Gerberi tala sisejõudude võrdlus

EST-meetodiga. I märgikokkulepe			Lõikemeetod	
<i>Varda</i> <i>nr a/l</i>	Q^* [kN]	M^* [kN·m]	Q [kN]	M [kN·m]
1 alg.	59.000	-236.000	59.0	-236.0
1 lõpp	59.000	0.000	59.0	0.0
2 alg.	39.000	0.000	39.0	0.0
2kv avas	7.000	92.000	7.0	92.0
2kp avas	-33.000	92.000	-33.0	92.0
2 lõpp	-65.000	-104.000	-65.0	-104.0
3 alg.	60.000	-104.000	60.0	-104.0
3 lõpp	44.000	0.000	44.0	0.0
4 alg.	44.000	0.000	44.0	0.0
4kv avas	28.000	72.000	28.0	72.0
4kp avas	-2.000	72.000	-2.0	72.0
4 lõpp	-34.000	0.000	-34.0	0.0
5 alg.	-34.000	0.000	-34.0	0.0
5 lõpp	-34.000	-68.000	-34.0	-68.0
6 alg.	56.000	-68.000	56.0	-68.0
6kv avas	56.000	156.000	56.0	156.0
6kp avas	-44.000	156.000	-44.0	156.0
6 lõpp	-44.000	-20.000	-44.0	-20.0
7 alg.	20.000	-20.000	20.0	-20.0
7 lõpp	20.000	0.000	20.0	0.0

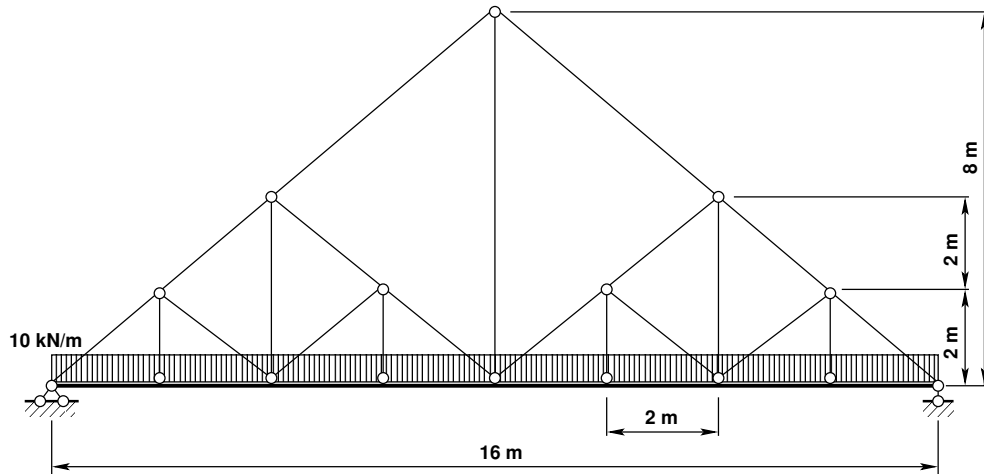
tused toodud ridades 2kv avas, 2kp avas, 4kv avas, 4kp avas ja 6kv avas, 6kp avas. Tabelist 14.6 on näha, et sisejõud ühtivad. Joonisel 4.7 (lk 104) on nende sisejõudude väärtused.

14.13.2 Sõrestiktala arvutuskeem. Näide 14.8

Näide 14.8

Leida joonisel 14.60 näidatud sõrestiktala arvutuskeemi sisejõud EST-meetodiga. Arvutuskeemis tala sille on 16 m. Arvutuskeemi ülemises osas on vardad, mis töötavad ainult pikkele. Sõrestiku sõlmede asukohad on näidatud joonisel.

Talal on ühtlaselt jaotatud koormus 10 kN/m. Tala ja sõrestiku arvutamisel on elastsusmoodul $E = 2.1E + 11 \text{ kN/m}^2$, tala inertsimoment $I = 1.9021E - 05 \text{ m}^4$, tala ristlõike pindala $A = 7.26E - 05 \text{ m}^2$, sõrestiku varraste ristlõike pindala $A_s = 1.2E - 05 \text{ m}^2$



Joonis 14.60. Sõrestiktala arvutusskeem EST-meetodiga

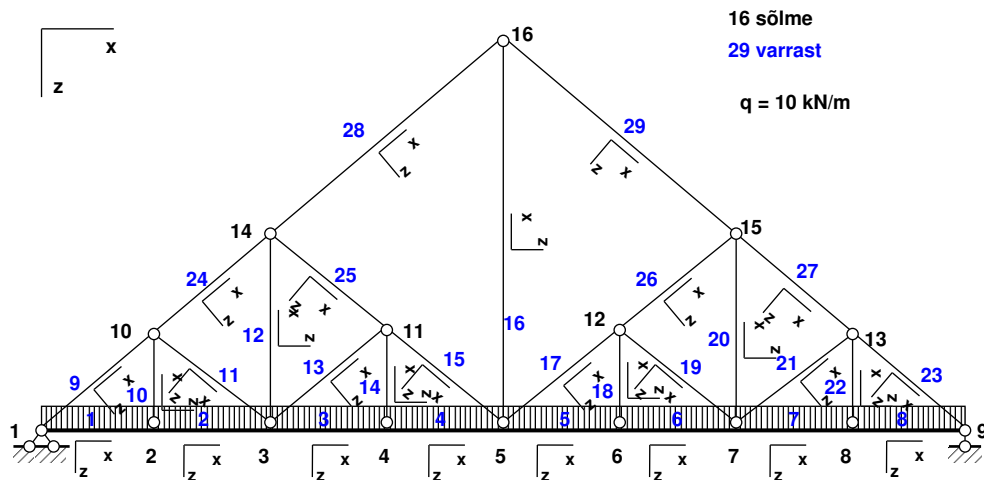
Tala on jaotatud kaheksaks elementiks. Sõlmede ja elementide numbrid ning kohalikud teljestikud on joonisel 14.61.

Joonisel 14.62 on varda elementide siirete ja kontaktjõudude nummerdus varda lõpus ja alguses.

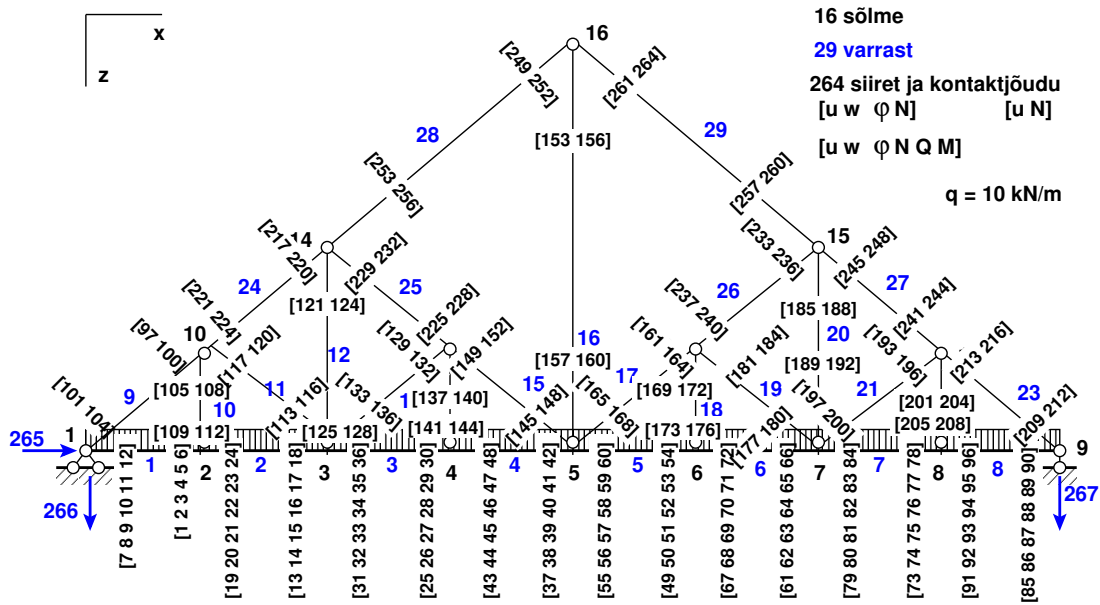
Arvutused teeme GNU Octave'i programmiga *spTalaVarrasESTR.m* lk 726. Arvutuse tulemused on toodud väljavõttes arvutuspäevikust 14.2.

Väljavõte arvutuse päevikust 14.2

```
=====
spTalaVarrasESTR.m
Raami varras koos sõrestikuga:
Nmitmeks = 4
Ntoerkts = 3
E = 2.1000e+11
```



Joonis 14.61. Sõrestiktala arvutusskeemi sõlmed ja elementid



Joonis 14.62. Sõrestiktala arvutuskeemi siirded ja kontaktjõud

I = 1.9021e-05 % raami varda (tala) ristlõige
 A = 7.2600e-05 % raami varda (tala) ristlõige
 As = 1.2000e-05 % sõrestiku varda ristlõige
 qtala = 10

Elemendi koormus kohalikes koordinaatides

qz =
 10 10 10 10 10 10 10 10

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 267, cols = 267, nnz = 750 [1.1%])

(1, 1) -> 1 (2, 2) -> 1 (3, 3) -> 1 (226, 4) -> 1
 (135, 1) -> 1 (136, 2) -> 1 (137, 3) -> 1 (5, 5) -> 1
 (138, 1) -> 1 (139, 2) -> 1 (4, 4) -> 1 ...

Nr X

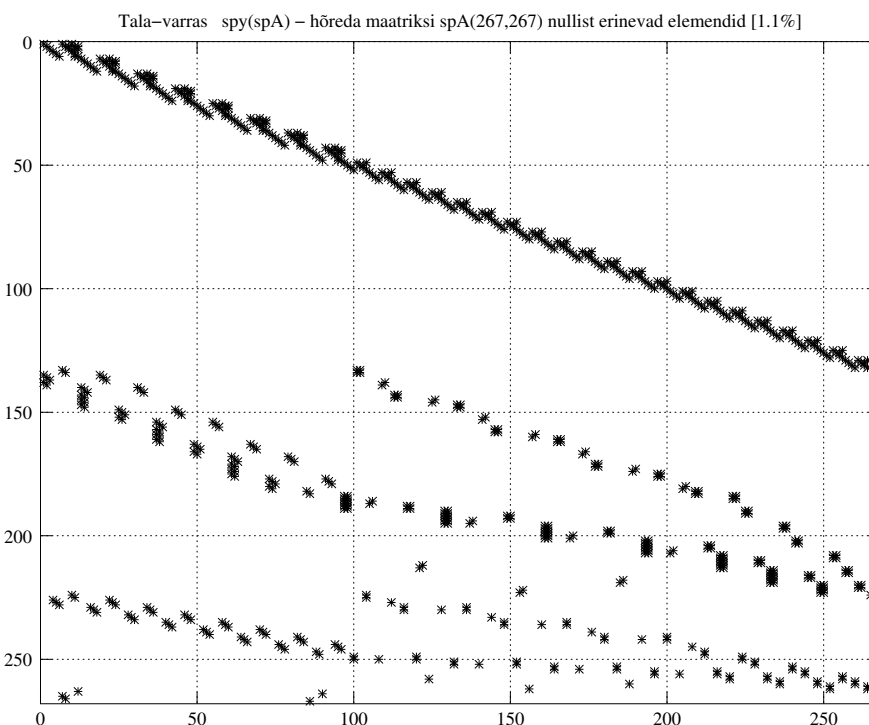
1 3.586e+01
 2 1.849e+03
 3 -8.311e+02
 ...
 265 -8.882e-16 % Horisontaalne toereaktsioon
 266 -8.000e+01 % Vasakpoolne vertikaalne toereaktsioon
 267 -8.000e+01 % Parempoolme vertikaalne toereaktsioon

=====						
Varda alguse/lõpu siirded (skaleerimata) kontaktjõud. I märgikokkulepe						
Varda Nr	u	w	fi	N	Q	M

1	0.000e+00	0.000e+00	-1.278e-04	35.860	44.140	-0.000
1	4.704e-06	2.425e-04	-1.090e-04	35.860	24.140	68.281
2	4.704e-06	2.425e-04	-1.090e-04	35.860	13.674	68.281
2	9.408e-06	4.235e-04	-7.133e-05	35.860	-6.326	75.629
3	9.408e-06	4.235e-04	-7.133e-05	46.779	8.293	75.629
3	1.554e-05	5.272e-04	-3.265e-05	46.779	-11.707	72.215
4	1.554e-05	5.272e-04	-3.265e-05	46.779	-0.334	72.215
4	2.168e-05	5.581e-04	6.859e-21	46.779	-20.334	51.548
5	2.168e-05	5.581e-04	6.859e-21	46.779	20.334	51.548
5	2.782e-05	5.272e-04	3.265e-05	46.779	0.334	72.215
6	2.782e-05	5.272e-04	3.265e-05	46.779	11.707	72.215
6	3.395e-05	4.235e-04	7.133e-05	46.779	-8.293	75.629
7	3.395e-05	4.235e-04	7.133e-05	35.860	6.326	75.629
7	3.866e-05	2.425e-04	1.090e-04	35.860	-13.674	68.281
8	3.866e-05	2.425e-04	1.090e-04	35.860	-24.140	68.281
8	4.336e-05	0.000e+00	1.278e-04	35.860	-44.140	0.000
9	0.000e+00	-0.000e+00	-1.053e-04	-50.713		
9	-5.692e-05	2.978e-04	-1.053e-04	-50.713		
10	-2.425e-04	4.704e-06	-8.281e-05	-10.466		
10	-2.508e-04	1.703e-04	-8.281e-05	-10.466		
11	2.978e-04	5.692e-05	-8.340e-05	7.401		
11	3.061e-04	2.928e-04	-8.340e-05	7.401		
12	-4.235e-04	9.408e-06	-5.436e-05	15.073		
12	-3.996e-04	2.268e-04	-5.436e-05	15.073		
13	-2.928e-04	3.061e-04	-4.415e-05	-8.042		
13	-3.018e-04	4.310e-04	-4.415e-05	-8.042		

=====						
Varda alguse/lõpu siirded (skaleerimata) kontaktjõud. I märgikokkulepe						
Varda Nr	u	w	fi	N	Q	M

14	-5.272e-04	1.554e-05	-3.789e-05	11.373		
14	-5.182e-04	9.132e-05	-3.789e-05	11.373		
15	4.310e-04	3.018e-04	-2.740e-05	-18.700		
15	4.100e-04	3.793e-04	-2.740e-05	-18.700		
16	-5.581e-04	2.168e-05	3.965e-22	67.113		
16	-3.451e-04	2.168e-05	3.965e-22	67.113		
17	-3.793e-04	4.100e-04	2.740e-05	-18.700		
17	-4.003e-04	3.325e-04	2.740e-05	-18.700		
18	-5.272e-04	2.782e-05	3.789e-05	11.373		
18	-5.182e-04	-4.796e-05	3.789e-05	11.373		
19	3.325e-04	4.003e-04	4.415e-05	-8.042		
19	3.235e-04	2.755e-04	4.415e-05	-8.042		
20	-4.235e-04	3.395e-05	5.436e-05	15.073		
20	-3.996e-04	-1.835e-04	5.436e-05	15.073		
21	-2.755e-04	3.235e-04	8.340e-05	7.401		
21	-2.671e-04	8.758e-05	8.340e-05	7.401		

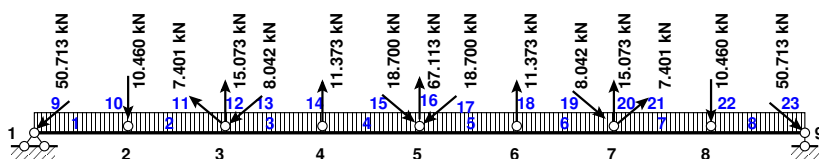


Joonis 14.63. Sõrestiktala spA nullist erinevate elementide asukohad

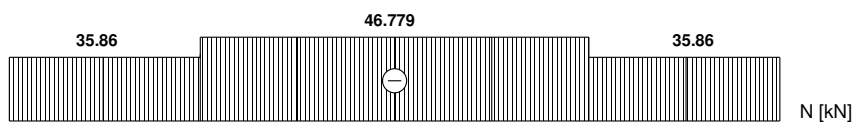
22	-2.425e-04	3.866e-05	8.281e-05	-10.466
22	-2.508e-04	-1.270e-04	8.281e-05	-10.466
23	8.758e-05	2.671e-04	1.053e-04	-50.713
23	3.066e-05	-3.066e-05	1.053e-04	-50.713
24	-5.692e-05	2.978e-04	-5.131e-05	-58.114
24	-1.221e-04	4.429e-04	-5.131e-05	-58.114
25	4.429e-04	1.221e-04	-6.353e-05	-10.658
25	4.310e-04	3.018e-04	-6.353e-05	-10.658
26	-4.003e-04	3.325e-04	6.353e-05	-10.658
26	-4.123e-04	1.528e-04	6.353e-05	-10.658
27	1.528e-04	4.123e-04	5.131e-05	-58.114
27	8.758e-05	2.671e-04	5.131e-05	-58.114
28	-1.221e-04	4.429e-04	3.246e-05	-47.456
28	-2.287e-04	2.593e-04	3.246e-05	-47.456
29	2.593e-04	2.287e-04	-3.246e-05	-47.456
29	1.528e-04	4.123e-04	-3.246e-05	-47.456

Arvutuspäevikus on sõrestiktala siirded ja sisejõud. Tala (raami) elemendi puhul erineb pöördnurk $f_i \equiv \varphi$ elemendi alguses ja lõpus paindeprinkuse tõttu (vt põhideformatsioonid (14.21)). Sõrestiku elemendil on pöördnurgad elemendi alguses ja lõpus samad, kuna siin vaadeldakse pööret jäiga keha pöördena (vt avaldist (14.3 lk 384)). See pööre jääb sisemiseks vabadusastmeks (sks innere Freiheitsgrade) (ingl internal degrees of freedom).

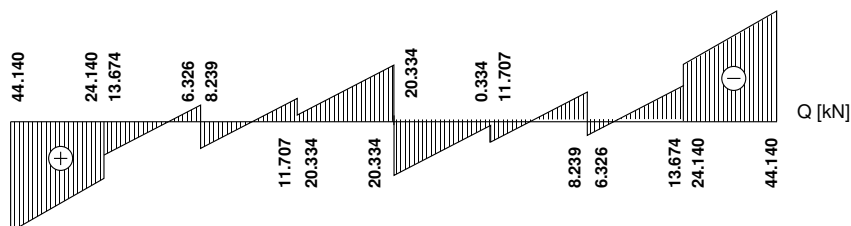
Joonisel 14.64 on tala osa sisejõudude N , Q ja M epüürid.



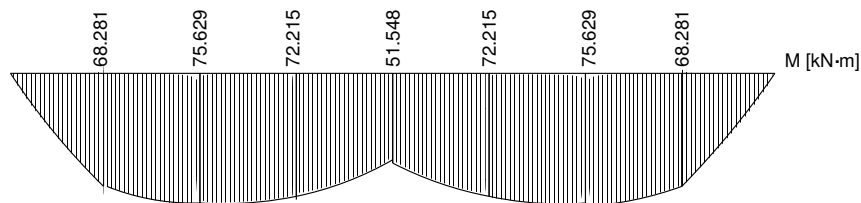
(a) Sõrestiktala



(b) Sõrestiktala N epüür



(c) Sõrestiktala Q epüür



(d) Sõrestiktala M epüür

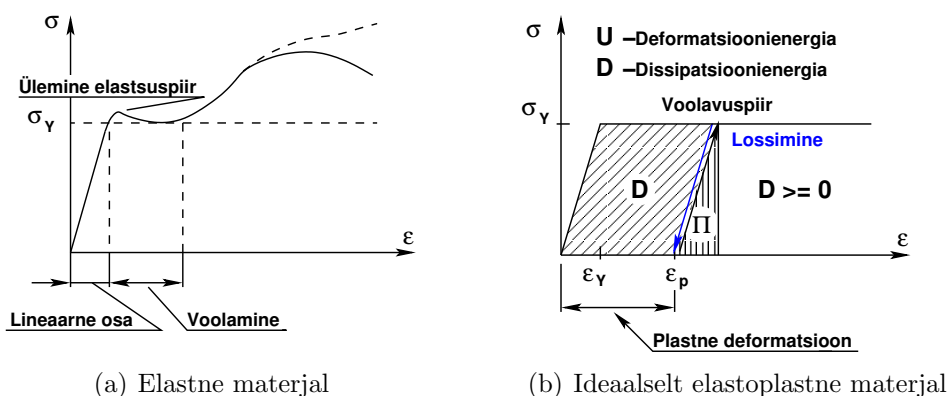
Joonis 14.64. Sõrestiktala sisejõudude epüürid

15. Arvutus piirkoormuse järgi

Loeng 1¹: Piirkoormus.

Kõnesolevas peatükis vaatleme varraskonstruksiooni arvutust kandepiir seisundi järgi. *Kandepiir seisund* on varraskonstruksiooni seisund, mille ületamisel konstruksioon ei rahulda temale esitatavaid nõudeid.

Piirkoormuseks nimetatakse koormust, mille puhul konstruksiooni kandevõime on täielikult ammendatud (konstruksiooni avari). Piirkoormuse määramisel võtame aluseks ideaalselt elastoplastse materjali pinge ja deformatsiooni diagrammi, mis on toodud joonisel 15.1(b). Oletame, et voolavuspiir tõmbel ja survel on ühesugune.



Joonis 15.1. Tõmbediagramm

Ideaalselt elastoplastse materjali diagramm koosneb kahest sirgjoonest, millest esimene vastab pingetega proportsionaalsetele deformatsioonidele, teine aga konstantsetele pingetele – *voolavuspiirile*. Seda diagrammi nimetatakse ka Prandtl² diagrammiks. Kuni voolavuspiirini ($\epsilon \leq \epsilon_Y$) kehtib Hooke'i seadus

$$\sigma = E\epsilon \quad (15.1)$$

Kui deformatsioonid $\epsilon > \epsilon_Y$, jäävad pinged konstantseks.

$$\sigma = \sigma_Y \quad (15.2)$$

Selles peatükis on kasutatud näiteid õpikutest [Rää75], [Beer04], [EP67].

¹./videod/PiirkoormusLoeng1.html

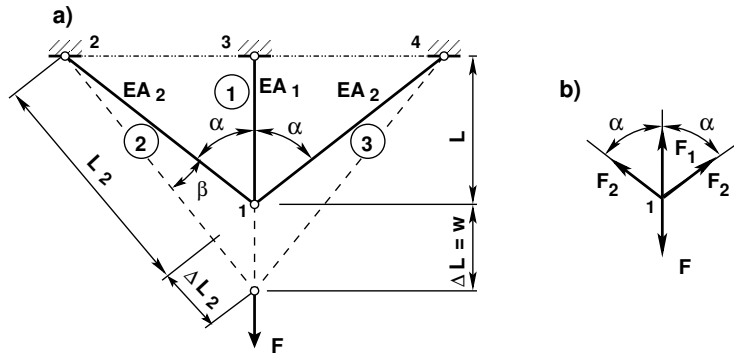
²Ludwig Prandtl, saksa füüsik, 1875–1953.

15.1 Konstruktsiooni elastoplastne töötamine

Sstaatikaga määramatu varraskonstruktsiooni arvutus piirloomukorra järgi annab erineva tulemuse, võrreldes lubatavate pingete meetodiga. Võrdsete varutegurite puhul lubab piirkoormuse järgi arvutus rakendada suuremat koormust kui lubatavate pingete meetodiga arvutus. Võrdleme seda järgnevas näites (vt näiteid [MR99] lk 32 ja [Beer04] lk 64).

Näide 15.1 Leida joonisel 15.2 näidatud varrassüsteemile rakendatud jõu F piirväärtus F_{lim} . Vardad 1, 2, 3 on samast materjalist ja ristlõiked on võrdsed $A_1 = A_2 = A_3 = A$. Väikestel deformatsioonidel on nurk β väike ja $\cos(\alpha + \beta) \approx \cos \alpha$. Vaatleme ka juhtu, kui $\alpha = 60^\circ$.

Elastsed deformatsioonid. Vaadeldav ülesanne on ühekordselt staatikaga määramatu.



Joonis 15.2. Staatikaga määramatu süsteem

Sõlme 1 tasakaaluvõrrand

$$F = 2F_2 \cos \alpha + F_1 \quad (15.3)$$

Sõlmes 1 siirete pidevuse võrrand. Siin vaatame väikseid deformatsioone, kus $\cos(\alpha + \beta) \approx \cos \alpha$. Saame

$$\Delta L \cos(\alpha + \beta) = \Delta L_2, \quad \Delta L \cos \alpha = \Delta L_2, \quad (15.4)$$

ehk

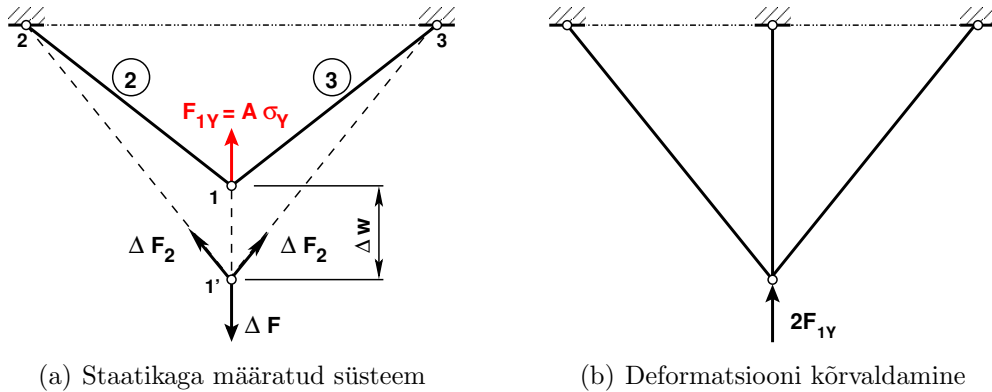
$$\frac{F_1 L}{EA} \cos \alpha = \frac{F_2 L_2}{EA}, \quad \frac{F_1 L}{EA} \cos \alpha = \frac{F_2 L / \cos \alpha}{EA} \quad (15.5)$$

siit saame

$$F_2 = F_1 \cos^2 \alpha \quad (15.6)$$

Nüüd saame sõlme 1 tasakaaluvõrrandist (15.3)

$$F = 2F_2 \cos \alpha + F_1 = 2F_1 \cos^3 \alpha + F_1 = F_1 (1 + 2 \cos^3 \alpha) \quad (15.7)$$



(a) Staatikaga määratud süsteem

(b) Deformatsiooni kõrvaldamine

Joonis 15.3. Varrassüsteemid

Järgnevalt leiame pinged varrastes tingimusel, et $\sigma_1 < \sigma_Y$, $\sigma_2 = \sigma_3 < \sigma_Y$:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A(1 + 2\cos^3\alpha)}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{F\cos^2\alpha}{A(1 + 2\cos^3\alpha)} \quad (15.8)$$

Siit näeme, et vardas 1 on pinge suurem kui varrastes 2 ja 3. Jõu suurenedes saavutab 1. varda pinge esimesena voolavuspiiri.

Mitteelastsed deformatsioonid. Varras 1 voolab. Edasi vaatleme juhtu, kui vardas 1 olevad pinged on saavutanud voolavuspiiri ja varrastes 2 ja 3 on pinged väiksemad kui voolavuspiir. Selle olukorra tekkimisel konstruktsioonile mõjuva jõu tähistame F_Y -ga, vardas 1 oleva jõu F_{1Y} -ga ja temale vastava siirde w_Y -ga. Avaldises (15.7) asendame jõu F_1 F_{1Y} -ga. Saame

$$F_Y = F_{1Y}(1 + 2\cos^3\alpha), \quad F_Y = \frac{5}{4}F_{1Y} \Big|_{\alpha=60^\circ} \quad (15.9)$$

$$w = \Delta L = \frac{F_1 L}{EA} = \frac{FL}{EA(1 + 2\cos^3\alpha)}, \quad w = \frac{4}{5} \frac{FL}{EA} \Big|_{\alpha=60^\circ} \quad (15.10)$$

Selle punkti tähistame joonisel 15.4 punktiga A. Sellises olukorras muutub ülesanne staatiliselt määratavaks (vt joonis 15.3(a)). Jõu juurdekasvu varras 1 jõudu enam juurde ei võta. Varras on jõu juurdekasvu suhtes passiivne. Joonpinguse puhul nimetatakse koormuse ja seega ka pingete monotoonsele suurenemisele vastavaid deformatsioone aktiivseteks; keha koormusest vabastamisel, seega pingete absoluutse suuruse vähenemisel tekkivaid deformatsioone nimetatakse passiivseteks (vt aktiivne ja passiivne deformatsioon [EP67] lk 555 (279)).

Vaatame jõu juurdekasvu ΔF (vt joonis 15.3(a)). Sõlm 1' on tasakaalus (vardal 1 jõu juurdekasvu ei ole):

$$\Delta F - 2\Delta F_2 \cos\alpha = 0, \quad \Delta F = \Delta F_2 \Big|_{\alpha=60^\circ} \quad (15.11)$$

Kui vardas 1 algas voolamine (F_{1Y}), siis vardas 2 saame jõu avaldisest (15.6):

$$F_2 = F_{1Y} \cos^2\alpha \quad F_2 = \frac{1}{4}F_{1Y} \Big|_{\alpha=60^\circ} \quad (15.12)$$

Jõu edasisel kasvamisel lisandub sellele ΔF_2 , mille arvutamiseks saame avaldise

$$\Delta F_2 = F_2 - F_{1Y} \cos^2\alpha \quad (15.13)$$

Jõu edasisel kasvamisel saabub moment, millal kõigis kolmes vardas on pinged saavutanud voolavuspiiri ($F_{1Y} = F_{2Y} = F_{3Y}$), konstruktsioon on saavutanud piirkoormuse

$$\begin{aligned} F_{lim} &= F_Y + \Delta F = F_{1Y} (1 + 2 \cos^3 \alpha) + 2 \Delta F_2 \cos \alpha = \\ &= F_{1Y} (1 + 2 \cos^3 \alpha) + 2 (F_{2Y} - F_{1Y} \cos^2 \alpha) \cos \alpha \end{aligned} \quad (15.14)$$

Arvestades, et varrastel on ühesugused voolavuspiirid $F_{2Y} = F_{1Y}$, saame piirkoormuseks

$$F_{lim} = F_{1Y} (1 + 2 \cos \alpha), \quad F_{lim} = 2F_{1Y} \big|_{\alpha=60^\circ} \quad (15.15)$$

Piirkoormusele F_{lim} vastav siire w_{lim} on toodud avaldisega

$$\begin{aligned} w_{lim} &= w_Y + \Delta w = \frac{F_{1Y}L}{EA} + \frac{\Delta F_2 L_2}{EA} \frac{1}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{F_{1Y}L}{EA} + \frac{(F_2 - F_{1Y} \cos^2 \alpha) L}{EA} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{aligned} \quad (15.16)$$

Arvestades varraste ühesuguseid voolavuspiire $F_{2Y} = F_{1Y}$, saame siirdeks

$$w_{lim} = \frac{F_{1Y}L}{EA} \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad w_{lim} = 4 \frac{F_{1Y}L}{EA} \big|_{\alpha=60^\circ} = 4w_Y \quad (15.17)$$

Kanname selle väärtuse joonisele 15.4 punktina B.

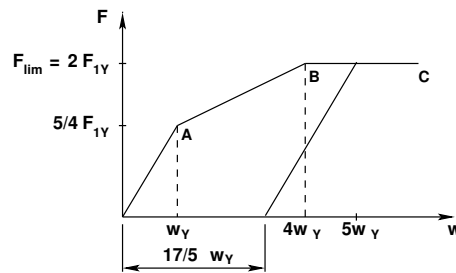
Koormusest vabastamine. Deformeerime konstruktsiooni kuni $5w_Y$, siis koormus on F_{lim} . Jõule F_{lim} vastavad elastsed deformatsioonid leiame valemi (15.10) abil. Saame

$$w = \Delta L = \frac{FL}{EA} \frac{1}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)}, \quad w = \frac{8}{5} \frac{F_{1Y}L}{EA} \big|_{\alpha=60^\circ} \quad (15.18)$$

Koormusest vabastamisel ja endisesse olukorda tagasi viimisel tuleb konstruktsioonile rakendada vastupidine jõud (joonis 15.3(b)). Jääkdeformatsiooni leiame, kui deformatsioonist $5w_Y$ lahutame elastsed deformatsioonid (15.18):

$$w_p = 5w_Y - \frac{F_{lim}L}{EA} \frac{1}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)}, \quad w_p = 5w_Y - \frac{8}{5} w_Y \big|_{\alpha=60^\circ} = \frac{17}{5} w_Y \big|_{\alpha=60^\circ} \quad (15.19)$$

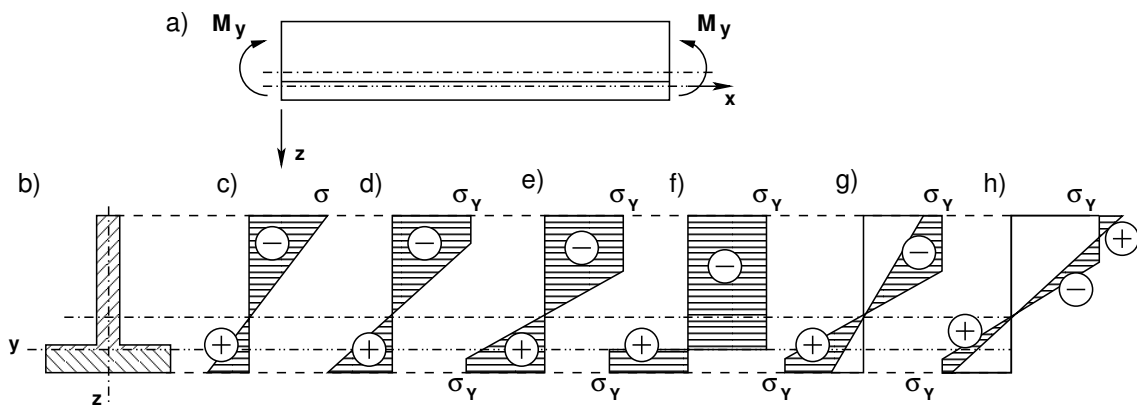
Näitame seda plastset deformatsiooni joonisel 15.4. Jääkdeformatsioonid põhjustavad jääkpingeid, mis konstruktsiooni sees tasakaalustavad üksteist.



Joonis 15.4. Koormus-siire diagramm

15.2 Piirpaimement ja plastne tugevusmoment

Vaatame juhtu, kui tala (joonis 15.5 a)) on koormatud konstantse momendiga (puhas paine) ja voolavuspiir on tõmbel ja survel ühesugune. Jälgime pingete muutumist tala ristlõikes (joonis 15.5 b)) koormuse suurendamisel. Elastses olukorras muutuvad pinged lineaarselt ja on ristlõike raskuskeset läbival y teljel nullid (joonis 15.5 c)). Koormuse kasvades pinged äärmistes kiududes suurenevad kuni voolavuspiirini σ_Y (joonis 15.5 d), 15.5 e)). *Piirlokorras* on pinged ülemise ja alumise tsooni ulatuses ühtlased ja võrduvad voolavuspiiriga (joonis 15.5 f)). Neid tsoone eraldav joon (nulljoon) ei läbi enam ristlõike raskuskeset. Ristlõikes on tekkinud plastne liigend. Puhtal paindel on ristlõikes



Joonis 15.5. Ristlõige puhtal paindel

normaaljõud võrdne nulliga. See tingimus on väljendatud võrrandiga (15.20). Paindemoment omab suurimat väärtust M_{ypl} (piirpaimement), mida ristlõige on võimeline vastu võtma. Normaalpingete moment võrdub välismomendiga M_{ypl} (15.21). Seega,

$$\int_{A_t} \sigma_Y dA - \int_{A_s} \sigma_Y dA = 0, \quad (15.20)$$

$$\int_{A_t} z \sigma_Y dA - \int_{A_s} z \sigma_Y dA = M_{ypl}, \quad (15.21)$$

siin A_t ja A_s on tõmbe ja survetsooni pindala ning M_{ypl} piirlokorraks vastav paindemoment.

Avaldised (15.20) ja (15.21) saab ümber kirjutada järgmiselt:

$$A_t - A_s = 0, \quad (15.22)$$

$$S_t + S_s = \frac{M_{ypl}}{\sigma_Y}, \quad (15.23)$$

kus S_t ja S_s on tõmbe- ja survetsooni staatilised momendid nende tsoonide eraldusjoone suhtes (staatilised momendid on positiivsed).

Piirmomendi avaldise esitame järgmisel kujul:

$$M_{ypl} = W_{ypl} \sigma_Y, \quad (15.24)$$

kus W_{ypl} on plastne tugevusmoment (vastupanumoment) (15.25).

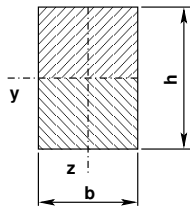
$$W_{ypl} = S_t + S_s \quad (15.25)$$

Koormuse lossimisel normaalpinged vähenevad (joonis 15.1). Normaalpingete epüüir on näidatud joonisel 15.5 g). Koormuse täielikul eemaldamisel on jääkpingete epüüir toodud joonisel 15.5 h). Normaalpingete tekitatud moment võrdub nulliga, kuna väline koormus on eemaldatud.

Näide 15.2

Leiame joonisel 15.6 näidatud ristkülikulise ristlõike plastse vastupanumomendi (plastse tugevusmomendi). Elastses olukorras on vastupanumoment

$$M_{yel} = \frac{bh^2}{6} \quad (15.26)$$



Plastseks vastupanumomendiks W_{ypl} (15.25) saame

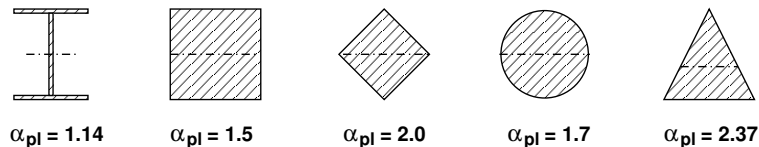
$$W_{ypl} = S_t + S_s = \frac{1}{2}bh \left(\frac{h}{4} + \frac{h}{4} \right) = \frac{bh^2}{4} \quad (15.27)$$

Ristlõike plastse vastupanumomendi (15.27) ja vastupanumomendi (15.26) suhe on

Joonis 15.6.
Ristkülikuline
ristlõige

$$\alpha_{pl} = \frac{W_{ypl}}{W_{yel}} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1.5 \quad (15.28)$$

Valtsitud I-profilide puhul on $W_{ypl} = 1.16W_{yel}$ [Rää75]. Erinevate ristlõigete (joonis 15.7) puhul võib leida plastse vastupanumomendi ja vastupanumomendi suhteid α_{pl} õpikust [Beer04].



Joonis 15.7. Vastupanumomendi suhteid α_{pl}

15.3 Piirkoormuse määramise meetodid

Piirkoormuse F_{lim} tekkimiseni peavad olema täidetud järgmised tingimused:

- konstruktsioon peab olema tasakaalus
- igas punktis peab olema täidetud tingimus $M \leq M_{pl}$

- dissipatsioonienergia D peab olema positiivne $D \geq 0$, millest järeldub, et rajajõudude (kontaktjõudude) töö sõlmes on negatiivne $W^{(r)} = -D \leq 0$ (vt joonis 15.16)
- kinemaatiline ahel peab olema võimalik.

Siin on M_{pl} täisplastne paindemoment plastses liigendis.

Edaspidi vaatleme konstruktsioone, mille sõlmed on tasakaalus. Siis kontaktjõudude (rajajõudude) töö $W^{(r)}$ tasakaalus olevas sõlmes on null (vt avaldis (7.7)), kuid plastses liigendis varraste pöörded ei ole võrdsed ja kontaktjõudude (rajajõudude) töö $W^{(r)} = -D$ on negatiivne. Siin on D dissipatsioon sõlmes (vt joonis (15.16)). *Energiateoreemi* ((7.6) lk 172)

$$W^{(v)} + W^{(r)} + W^{(s)} = 0 \quad (15.29)$$

saame kirjutada kujul

$$W^{(v)} - D - U = 0 \quad (15.30)$$

kus $W^{(v)}$ on välisjõudude töö, $D \geq 0$ – dissipatsioonienergia ja $U = \Pi^s$ (vt avaldis (7.10)) on *deformatsioonienergia* (joonis 1.3) ehk potentsiaalenergia. Virtuaalsiirete printsiibis lisaks välisjõudude tööle $W^{(v)}$ võetakse arvesse rajajõudude töö $-D$, deformatsioonienergiat U ei arvestata (vt [Beer04] lk 62 (3-57)). Piirkoormuse määramisel võib kasutada staatilist või kinemaatilist (virtuaalsiirete printsiip) meetodit. Piirkoormuse F_{lim} leidmisel võtame arvesse tingimuse (vt [MA99] lk 39 (lk 45), [Beer04] lk 69 (3-64))):

$$F_{stat} \leq F_{lim} \leq F_{kin} \quad (15.31)$$

kus F_{stat} on staatika meetoditega leitud piirkoormus ja F_{kin} kinemaatilise (virtuaalsiirete printsiip) meetodiga leitud piirkoormus.

Staatika meetoditega piirkoormuse määramisel suurendatakse koormust erinevatel põhiskeemidel. Põhiskeemidel staatikaga määramatuse astet vähendatakse ja koormust suurendatakse kuni kinemaatilise ahela tekkimiseni. Siin määratud piirkoormus ei lähe suuremaks kui F_{lim} ja täidetud on avaldise (15.31) esimene pool.

Järkjärguline koormuse suurendamise meetodi puhul eeldame, et

- n korda staatikaga määramatu konstruktsiooni koormused F_i on antud
- ristlõigete jäikused ja täisplastsed paindemomendid on teada $M_{pl}^{(i)}$.

Selle meetodi rakendamisel on järgmised sammud:

1. Suurendame koormust κ_o korda ($\kappa_o F_i$) nii, et ristlõikes tekib täisplastne paindemoment $M_{pl}^{(0)}$.
 - koostame $n-1$ korda staatikaga määramatu arvutuskeemi; täisplastse paindemomendiga $M_{pl}^{(0)}$ momendiliigendis
 - leiame koormusparameetri κ_o .

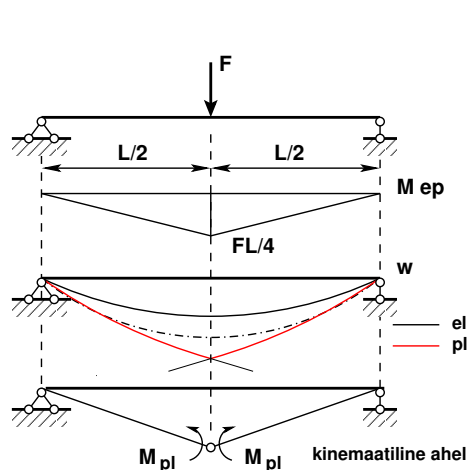
2. $n-1$ korda staatikaga määratus arvutusskeemis suurendame koormust κ_1 korda nii, et ristlõikes tekib teine täisplastne paindemoment $M_{pl}^{(0)}$.
 - koostame $n-2$ korda staatikaga määratu arvutusskeemi, kahe täisplastse paindemomendiga $M_{pl}^{(0)}$ momendiliigendites
 - leiame koormusparameetri $\kappa_0 + \kappa_1$.
3. Edasine staatikaga määratuse astme vähendamine ja koormuse suurendamine.
4. Viimases koormuse suurendamises ($n=0$) staatikaga määratud arvutusskeemis tekib ristlõikes täisplastne paindemoment $M_{pl}^{(0)}$ ja moodustub kinemaatiline ahel.
 - edasine koormuse suurendamine pole enam võimalik ja on jõutud piirkoormuseni F_{lim}
 - leiame koormusparameetri $\kappa_0 + \kappa_1 + \dots + \kappa_n$.

Virtuaalsiirete printsiibiga piirkoormuse määramisel vaadeldakse erinevaid kinemaatilisi ahelaid. Kuna kinemaatilised ahelad on juba oletatud, siis määratud piirkoormus ei ole väiksem piirkoormusest F_{lim} .

Järgnevatel näidetes vaatleme nende meetodite kasutamist.

15.4 Staatikaga määratud tala

Staatikaga määratud tala (joonis 15.8) saab kuni plastse liigendi tekkimiseni vaadata elastsena. Tala igas punktis peab olema täidetud tingimus $M \leq M_{pl}$. Talale on rakendatud jõud F . Kui normaalpinged saavutavad voolavuspiiri σ_Y , tähistame jõu F_Y -ga.



Joonis 15.8. Piirmoment lihttalas

Moment

$$M_{yel} = \frac{F_Y L}{4} = \sigma_Y W_{yel} \quad (15.32)$$

Kui jõud F on saavutanud piirväärtuse F_{lim} , saame

$$M_{ypl} = \frac{F_{lim} L}{4} = \sigma_Y W_{ypl} \quad (15.33)$$

Ristlõike plastse vastupanumomendi (15.27) ja vastupanumomendi (15.26) suhe

$$\alpha_{pl} = \frac{M_{ypl}}{M_{yel}} = \frac{F_{lim}}{F_Y} \quad (15.34)$$

15.5 Jäikade tugelega tala

Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala muutub mehhanismiks kolme plastse liigendi tekkimisel (joonis 15.9). Leiame piirulukorrale vastava koormuse kinemaatilise meetodiga.

Anneme talal, plastilise liigendi tekkimise kohal, virtuaalsiirde $\delta w = L/2\delta\varphi$. Tala välisjõudude virtuaaltöö \widehat{W}^v ja rajajõudude virtuaaltöö \widehat{W}^r summa on null (15.35) (virtuaalsiirete printsiibis sisejõudude virtuaaltööd \widehat{W}^s arvesse ei võeta). Saame:

$$\widehat{W}^v + \widehat{W}^r = 0 \tag{15.35}$$

$$F_{lim} \frac{L}{2} \delta\varphi - 4M_{pl} \delta\varphi = 0 \tag{15.36}$$

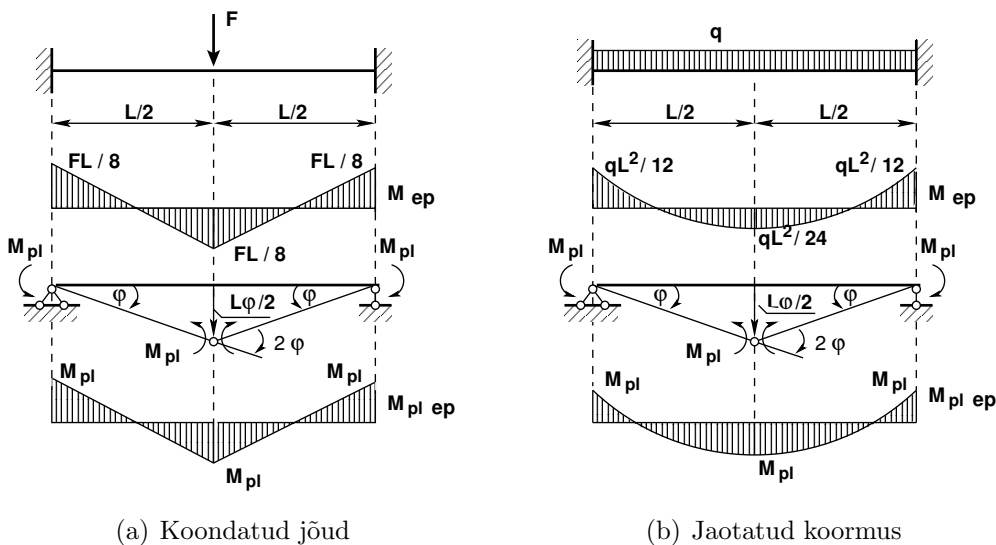
siin $\widehat{W}^r = -4M_{pl}\delta\varphi$ rajajõudude töö on miinusmärgiga (joonis (15.16) lk 481) (dissipatsioonienenergia $\mathcal{D} = -W^r$ on alati positiivne). Avaldisest (15.36) saame piirkoormuse F_{lim} jäikade tugelega talale (joonis 15.9(a))

$$F_{lim} = \frac{8M_{pl}}{L} = \frac{8W_{ypl}\sigma_Y}{L} \tag{15.37}$$

siin $M_{pl} = W_{ypl}\sigma_Y$ (15.24).

Ühtlaselt jaotatud koormuse q_{lim} puhul saame tala (joonis 15.9(b)) välisjõudude virtuaaltöö W^v ja rajajõudude virtuaaltöö W^s summa

$$q_{lim} \underbrace{\frac{1}{2}L \frac{L}{2} \delta\varphi}_{\Delta - \text{pindala}} - 4M_{pl} \delta\varphi = 0 \tag{15.38}$$



Joonis 15.9. Jäikade tugelega tala

Avaldisest (15.38) leiame piirkoormuse q_{lim} (15.39) jäikade tugegeda talale (joonis 15.9(b))

$$q_{lim} = \frac{16M_{pl}}{L^2} = \frac{16W_{ypl}\sigma_Y}{L^2} \quad (15.39)$$

Jälgime ühtlaselt jaotatud koormuse kasvu Δq jäikade tugegeda talal (joonis 15.9(b)). Paindemomendi epüürlilt näeme, et tala keskel on paindemoment poole väiksem kui tugeedel. Kui tugeedel tekivad plastsed liigendid M_{pl} , siis tala keskel on moment $1/2M_{pl}$. Edasisel koormuse kasvu Δq töötab tala kui lihttala kahel toel, mille otstes on momendid M_{pl} . Momendi juurdekasv on $\Delta qL^2/8$. Tala keskel plastse liigendi tekkimisel on moment

$$M_{max} = \frac{1}{2}M_{pl} + \frac{\Delta qL^2}{8} = M_{pl} \quad (15.40)$$

Avaldisest (15.40) leiame koormuse juurdekasvu Δq

$$\Delta q = \frac{4M_{pl}}{L^2} \quad (15.41)$$

Tähistame tugeedel plastse liigendi tekitanud koormuse q_{pl} -ga, siis jooniselt 15.9(b) saame

$$q_{pl} = \frac{12M_{pl}}{L^2} \quad (15.42)$$

Piirkoormuse q_{lim} leiame avaldisega (15.43)

$$q_{lim} = q_{pl} + \Delta q = \frac{12M_{pl}}{L^2} + \frac{4M_{pl}}{L^2} = \frac{16M_{pl}}{L^2} \quad (15.43)$$

Leitud piirkoormus q_{lim} (15.43) langeb ühte kinemaatilise meetodiga leituga (15.39).

Tala 15.9(b) siirde arvutamisel kuni plastse liigendi tekkimiseni kasutame staatiliselt määramatut tala siirde w arvutamise valemist

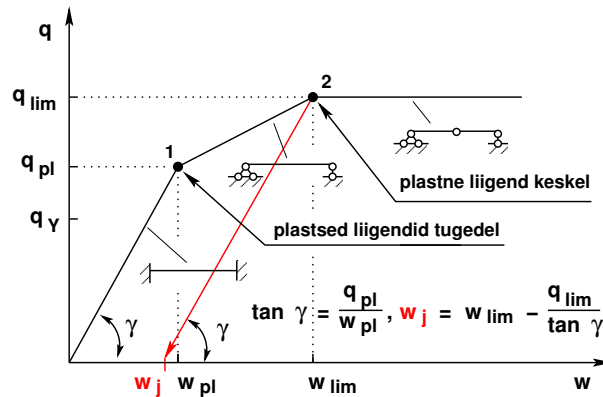
$$w_{pl} = \frac{q_Y L^4}{384EI} = \frac{M_{pl} L^2}{32EI} \quad (15.44)$$

Pärast plastsete liigendite tekkimist tugeedel arvutame siirde juurdekasvu Δw kui lihttala siiret valemiga

$$\Delta w_{pl} = \frac{5\Delta q L^4}{384EI} = \frac{5q_{pl} L^4}{3 * 384EI} = \frac{5M_{pl} L^2}{96EI} \quad (15.45)$$

Piirkoormusega q_{lim} saame tala siirdeks w_{lim}

$$w_{lim} = w_{pl} + \Delta w_{pl} = \frac{M_{pl} L^2}{32EI} + \frac{5M_{pl} L^2}{96EI} = \frac{M_{pl} L^2}{12EI} \quad (15.46)$$

Joonis 15.10. Piirkoormuse q ja siirde w diagramm

Joonisel 15.10 on toodud jäikade tugelega tala piirkoormuse q ja tala keskpunkti siirde w diagramm. Piirkoormuse väärtused diagrammis q_{pl} , q_{lim} on toodud avaldistes (15.42), (15.43) ja vastavad siirde väärtused w_{pl} , w_{lim} avaldistes (15.44), (15.46). Joonisel 15.10 on näidatud suurus q_Y . Selle väärtuse saame, kui leiame tugeitel välimistes kiududes voolavuspiiri tekitava koormuse, mis on α_{pl} (15.28) korda väiksem w_{pl} -st

$$q_Y = \frac{q_{pl}}{\alpha_{pl}} = \frac{12M_{pl}}{\alpha_{pl}L^2} \quad (15.47)$$

Vahemik $q_Y - q_{pl}$ on ristlõike tugevusvaru ja vahemik $q_{pl} - q_{lim}$ süsteemi tugevusvaru.

Piirkoormuse lossimisel (joonis 15.10) leiame jääkdeformatsiooni w_j avaldisega (15.48)

$$w_j = w_{lim} - \frac{q_{lim}}{\tan \gamma} = \frac{M_{pl}L^2}{12EI} - \frac{M_{pl}L^2}{24EI} = \frac{M_{pl}L^2}{24EI} \quad (15.48)$$

siin $\tan \gamma$ avaldises q_{pl} saame avaldisest (15.42) ja w_{pl} avaldisest (15.44)

$$\tan \gamma = \frac{q_{pl}}{w_{pl}} = \frac{\frac{12M_{pl}}{L^2}}{\frac{M_{pl}L^2}{32EI}} = \frac{384EI}{L^4} \quad (15.49)$$

ning suhtes (15.50) q_{lim} saame avaldisest (15.43)

$$\frac{q_{lim}}{\tan \gamma} = \frac{16M_{pl}}{L^2} \frac{L^4}{384EI} = \frac{M_{pl}L^2}{24EI} \quad (15.50)$$

Tala vasakul toel, elastse olukorra järgi arvutades, on moment $qL^2/12$ ja tala keskel $qL^2/24$ (joonis 15.9(b)). Tala koormuse lossimisel (joonis 15.10) $\Delta q = -q_{lim}$ muutub moment tala toel ja keskel (15.51).

$$\Delta M_{vasakul\ toel} = \frac{-q_{lim}L^2}{12} = -\frac{16M_{pl}}{L^2} \frac{L^2}{12} = -\frac{4M_{pl}}{3} \quad (15.51)$$

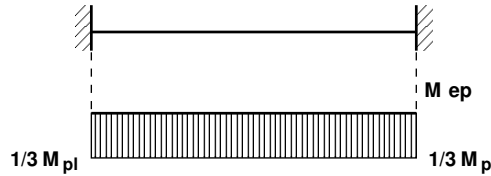
$$\Delta M_{keskel} = \frac{-q_{lim}L^2}{24} = -\frac{16M_{pl}}{L^2} \frac{L^2}{24} = -\frac{2M_{pl}}{3} \quad (15.52)$$

Talas toel ja keskel oleva momendi saame, kui lähtume seal olnud momendist M_{pl} .

$$M_{vasakul\ toel} = M_{pl} + \Delta M_{vasakul\ toel} = M_{pl} - \frac{4M_{pl}}{3} = -\frac{1}{3}M_{pl} \quad (15.53)$$

$$M_{keskel} = M_{pl} + \Delta M_{keskel} = M_{pl} - \frac{2M_{pl}}{3} = \frac{1}{3}M_{pl} \quad (15.54)$$

Leitud momendid vastavad teisele märgikokkuleppele. Saadud tulemuste põhjal koostame jääkmomendi eüüüri.



Joonis 15.11. Jääkmoment

15.6 Jäiga ja liigendtoega tala

Vaatleme konstantse ristlõikega tala, mille ühes otsas on liigendtugi ja teises otsas jäik kinnitus (joonis 15.12(a)). Tala on koormatud koondatud jõuga F . Piirkoormusel F_{lim} muutub tala mehhanismiks. Talas tekib kaks plastset liigendit, milles on rakendatud plastne moment $M_{pl} = W_{pl}\sigma_Y$ (15.24).

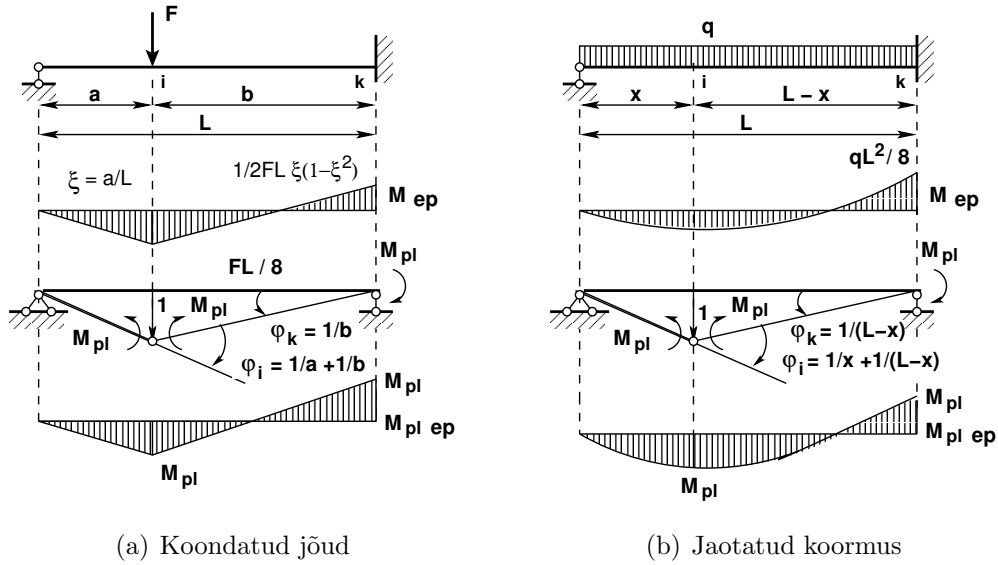
Piirkoormuse F_{lim} leiame kinemaatilise meetodiga. Anname jõu F rakenduspunktis i siirde δw_i , mille lihtsuse mõttes oleme joonisel võtnud üheks. Plastse liigendi tekkimisel on punktis i võimalik murdumise nurk $\delta\varphi_i = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\delta w_i$ (joonis 15.12(a)). Toel k saame võimalikuks murdumise nurgaks $\delta\varphi_k = \frac{1}{b}\delta w_i$. Välisjõudude ja kontaktjõudude (rajaajõudude) virtuaaltöök (kontaktjõudude töö on miinusmärgiga, joonis (15.16) lk 481) saame

$$F_{lim}\delta w_i - M_{pl}\delta\varphi_i - M_{pl}\delta\varphi_k = M_{pl}\frac{2a+b}{ab}\delta w_i \quad (15.55)$$

Siit saame piirkoormuseks F_{lim} (15.56)

$$F_{lim} = M_{pl}\frac{2a+b}{ab} \quad (15.56)$$

Joonisel 15.12(b) on sama tala koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega q . Piirkoormuse q_{lim} leiame kinemaatilise meetodiga. Siin ei ole teada tala avas tekkiva plastse liigendi asukoht. Tähistame selle asukoha kauguse vasakust toest x -ga. Välisjõudude ja kontaktjõudude (rajaajõudude) virtuaaltöök (kontaktjõudude töö on miinusmärgiga,



Joonis 15.12. Jäiga ja liigendtoega tala

joonis (15.16) lk 481) saame

$$q_{lim} \underbrace{\frac{L}{2} \delta w_i}_{\Delta - \text{pindala}} - M_{pl} \delta \varphi_i - M_{pl} \delta \varphi_k = 0$$

$$q_{lim} \underbrace{\frac{L}{2} \delta w_i}_{\Delta - \text{pindala}} = M_{pl} \left(\frac{2}{L-x} + \frac{1}{x} \right) \delta w_i \quad (15.57)$$

Piirkoormuseks q_{lim} saame

$$q_{lim} = \frac{2M_{pl}}{L} \left(\frac{2}{L-x} + \frac{1}{x} \right) \quad (15.58)$$

Plastse liigendi asukoha leiame tingimusest, et q_{lim} oleks minimaalne

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{L-x} + \frac{1}{x} \right) = 0 \quad (15.59)$$

Avaldisest (15.59) saame liigendi asukoha

$$x = L (\sqrt{2} - 1) \quad (15.60)$$

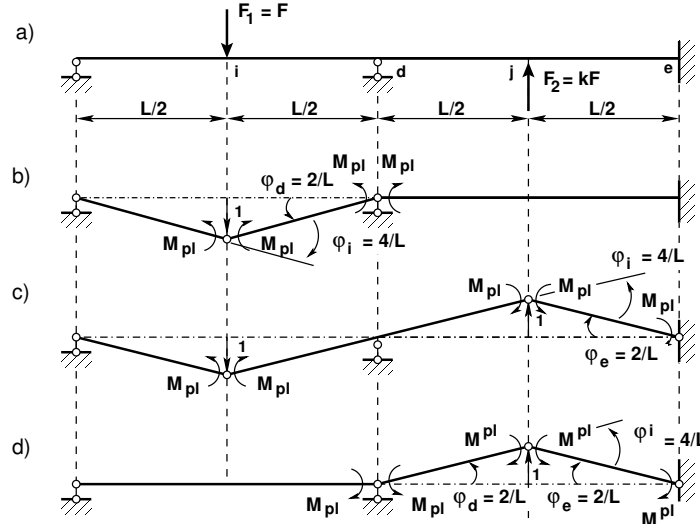
Asetame leitud x väärtuse piirkoormuse q_{lim} avaldisse (15.58):

$$q_{lim} = \frac{2M_{pl}}{L^2} \frac{1}{3\sqrt{2} - 4} = 8.2426 \frac{M_{pl}}{L^2} = 8.2426 \frac{W_{pl}}{L^2} \sigma_Y \quad (15.61)$$

Piirkoormusele vastav paindemomendi epüür $M_{pl ep}$ on toodud joonisel 15.12(b).

15.7 Jätkuvtala piirkoormus

Kui jätkuvtalale mõjub sildes ühesuunaline koormus ja tala ristlõiked on ühesugused, siis võib piirkoormuse määramisel vaadelda iga sillet eraldi.



Joonis 15.13. Jätkuvtala piirkoormus

Leiame kahesildelisele talale (joonis 15.13) piirkoormuse F_{lim} . Tala on koormatud esimese ava keskel koondatud jõuga $F_1 = F$ ja teise ava keskel koondatud jõuga $F_2 = kF$. Piirkoormuse F_{lim} leiame kinemaatilise meetodiga. Plastsete liigendite tekkimiseks on võimalik kolm olukorda, mis on näidatud joonisel 15.13 b), c) ja d). Piirkoormuseks on nendest väikseim koormus.

Purunemispildil 15.13 b) anname esimese ava keskel punktis i siirde δw_i . Siis plastse liigendi tekkimisel on punktis i võimalik murdumise nurk $\delta \varphi_i = \frac{4}{L} \delta w_i$ ja toel d $\delta \varphi_d = \frac{2}{L} \delta w_i$. Välisjõudude ja kontaktjõudude (raja jõudude) virtuaaltöök (kontaktjõudude töö on miinusmärgiga, joonis (15.16) lk 481) saame

$$F_{lim1} \delta w_i - M_{pl} \left(\frac{4}{L} + \frac{2}{L} \right) \delta w_i = 0 \quad (15.62)$$

Siit leiame esimesele purunemispildile vastava piirkoormuse F_{lim1}

$$F_{lim1} = \frac{6M_{pl}}{L} \quad (15.63)$$

Teise purunemispildi puhul (joonis 15.13 c)) on võimalik murdumise nurk punktis i , $\delta \varphi_i = \frac{4}{L} \delta w_i$, $\delta \varphi_j = \frac{4}{L} \delta w_i$ ja toel e $\delta \varphi_e = \frac{2}{L} \delta w_i$. Välisjõudude ja kontaktjõudude (raja jõudude) virtuaaltöök (kontaktjõudude töö on miinusmärgiga, joonis (15.16) lk 481) saame

$$(1+k) F_{lim2} \delta w_i - M_{pl} \left(\frac{4}{L} + \frac{4}{L} + \frac{2}{L} \right) \delta w_i = 0 \quad (15.64)$$

Leiame teisele purunemispildile vastava piirkoormuse F_{lim2}

$$F_{lim2} = \frac{10M_{pl}}{(1+k)L} \quad (15.65)$$

Kolmanda purunemispildi puhul (joonis 15.13 d)) on võimalik murdumise nurk tagedel d, e $\delta\varphi_d = \frac{2}{L}\delta w_j$, $\delta\varphi_e = \frac{2}{L}\delta w_j$ ja punktis j $\delta\varphi_j = \frac{4}{L}\delta w_j$. Välisjõudude ja kontaktjõudude (raajajõudude) virtuaaltöök (kontaktjõudude töö on miinusmärgiga, joonis (15.16) lk 481) saame

$$kF_{lim3}\delta w_j - M_{pl} \left(\frac{2}{L} + \frac{4}{L} + \frac{2}{L} \right) \delta w_j = 0 \quad (15.66)$$

Siit leiame teisele purunemispildile vastava piirkoormuse F_{lim3}

$$F_{lim3} = \frac{8M_{pl}}{kL} \quad (15.67)$$

Leitud kolme piirkoormuse väärtus sõltub parameetrist k:

- kui $k < \frac{2}{3}$ annab väikseima piirkoormuse F_{lim1} (15.63),
- kui $\frac{2}{3} < k < 4$ annab väikseima piirkoormuse F_{lim2} (15.65),
- kui $k > 4$ annab väikseima piirkoormuse F_{lim3} (15.67).

15.8 Raami piirkoormus

Raamide arvutus piirolukorra järgi on tülikas, kuna ei ole teada, kus tekivad plastsed liigendid. Plastsete liigendite asukoht võib olla erinev, kui ei võeta arvesse pikideformatsioone (normaaljõudu) (vt näidet õpikus [Beer04] lk 77–81). Järgnev näide 15.3 on lehekülgedel lk 479–494.

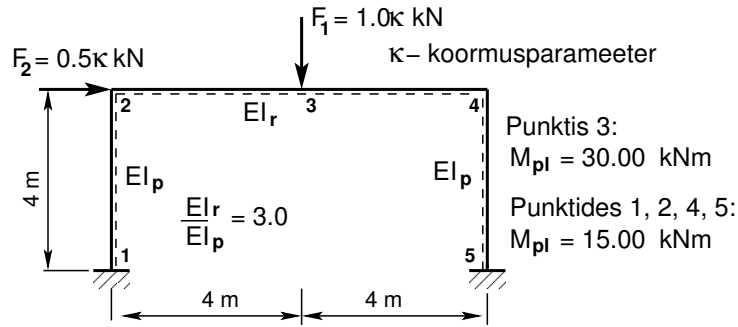
15.8.1 Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 15.3

Näide 15.3 Leida joonisel 15.14 näidatud raamile piirkoormus. Raami kõrgus $h = 4$ m ja ava $l = 8$ m. Raami riivile keskele on rakendatud jõud $F_1 = 1.0\kappa$ kN (siin κ on parameeter, mille muutmisega saavutatakse täisplastne paindemoment). Raami sõlme 2 on rakendatud horisontaalne jõud $F_2 = 0.5\kappa$ kN.

Raami posti ristlõike paindejäikus on $EI_p = 210^4$ kNm² ja raami riivi ristlõike paindejäikus $EI_r = 3.0EI_p$, posti ristlõike pikijäikus $EA_p = 4.6 \cdot 10^6$ kN, $EA_r = 8.8 \cdot 10^6$ kN, posti ristlõike lõikejäikus $GA_{rp} = 0.4EA_p$, $GA_{rr} = 0.4EA_r$.

Arvutame järkjärgulise koormuse suurendamise meetodiga³ (vt lõik lk 471). Erinevate staatikaga määramatute ülesannete lahendamiseks kasutame EST-meetodit. Joonisel 15.15

³http://www.statik.tu-berlin.de/fileadmin/a363112/Lehre/Statik3_Dipl/Vorlesung/ST3-8.pdf

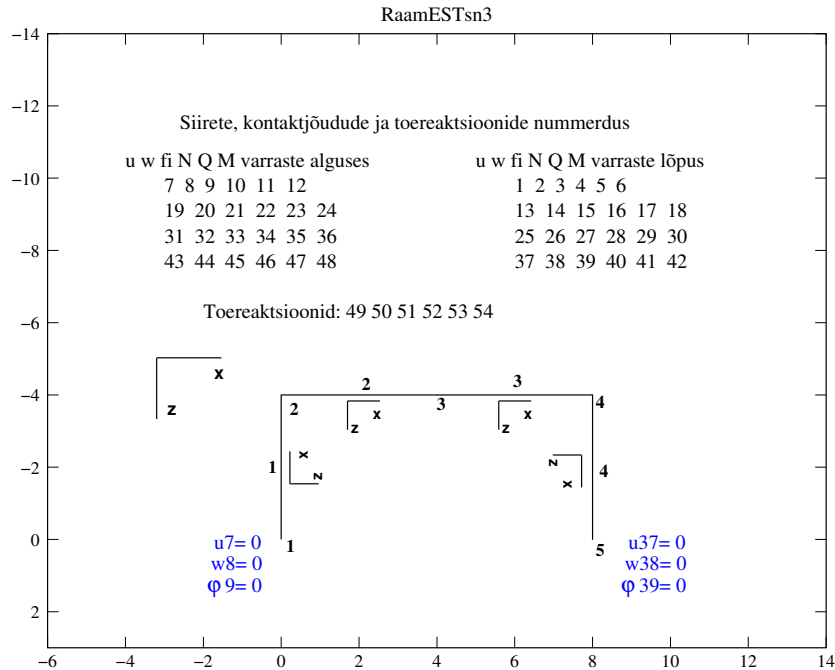


Joonis 15.14. Kahe avaga raam

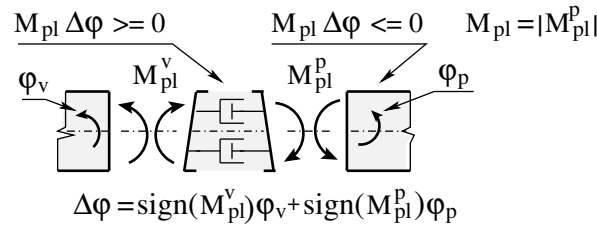
on toodud raami siirete, kontaktjõudude ja toereaktsioonide nummerdus. Arvutusskeemi lisame plastseid liigendeid kasutades kontaktjõude (rajajõude). Plastsetes liigendites ei oletata pöördenurga pidevust. Kontaktjõud lisame kõrvaltingimuste kaudu. EST-meetodis peame jälgima kontaktjõudude (rajajõudude) tööd $W^{(r)}$ plastses liigendis. Näitame, et rajajõudude töö plastses liigendis on $W^{(r)} \leq 0$ (joonis 15.16). Plastses liigendis erinevad plastsete momentide M_{pl} suunad kontaktjõudude M_{pl} suundadest (vt joonis 15.16). Plastses liigendis on plastse momendi $M_{pl}^{sõlmes}$ töö:

$$M_{pl}^{sõlmes} \Delta\varphi = M_{pl}^{sõlmes} \left(\text{sign} \left(M_{pl}^{(p)} \right) \varphi_p + \text{sign} \left(M_{pl}^{(v)} \right) \varphi_v \right) = D \geq 0 \quad (15.68)$$

siin D on dissipatsioonienergia, $M_{pl}^{sõlmes} = |M_{pl}^{(p)}|$, $\Delta\varphi = \text{sign} \left(M_{pl}^{(p)} \right) \varphi_p + \text{sign} \left(M_{pl}^{(v)} \right) \varphi_v$, φ_p ja φ_v - varda otsa pöörded vastavalt sõlmest paremal ja vasakul.



Joonis 15.15. Raami siirete ja kontaktjõudude numbrid



Joonis 15.16. Kontaktjõudude M_{pl} töö sõlmes. Teine märgikokkulepe

Varraste kontaktjõudude (rajajõudude) tööd $W^{(r)}$ plastses liigendis teise märgikokkuleppe puhul on negatiivne

$$W^{(r)} = M_{pl}\Delta\varphi = -M_{pl}^{sõlmes}\Delta\varphi = -D \leq 0 \tag{15.69}$$

Energiateoreemis (15.29) peab olema täidetud tingimus (15.69) kõigis plastsetes liigendites. Pärast ülesande lahendamist kontrollime selle tingimuse täitmist kõigis plastsetes liigendites (vt arvutuspäevik 15.1).

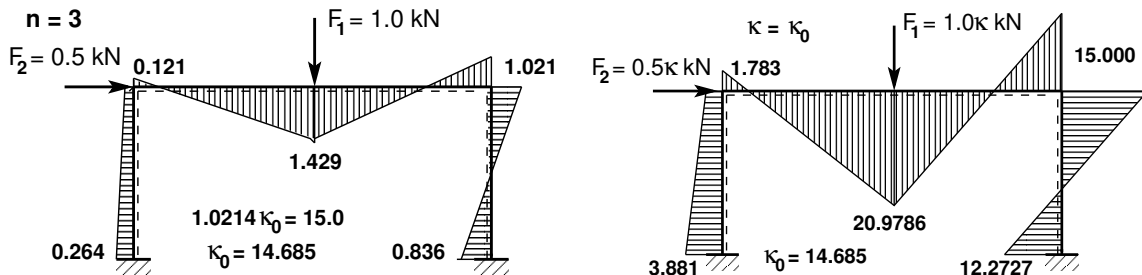
Raamskeem (joonis 15.14) on kolmekordselt staatikaga määramatu ($n = 3$). Koostame arvutusskeemi (joonis 15.17(a)), kus sõlme 3 on rakendatud jõud $F_1 = 1.0 \text{ kN}$ ja sõlme 2 jõud $F_2 = 0.5 \text{ kN}$. Siirded ja sisejõud määrame EST meetodiga – programm *spRaamEST-sn3.m* lk 739. Joonisel 15.15 on toodud siirete ja kontaktjõudude järjekorranumbrid varraste otstes. Siirete ja sisejõudude väärtused (esimene märgikokkulepe, 1. koormusvariant) on esitatud arvutuspäevikus 15.2 (lk 486). Koostame arvutustulemuse põhjal paindemomendi epüüri (joonis 15.17(a)).

Raami riivis täisplastse liigendi tekkimiseks on vaja kaks korda suuremat paindemomenti ($M_{pl}^{(riiv)}/M_{pl}^{(post)} = 2$). Epüürit (joonis 15.17(a)) näeme, et plastne liigend tekib sõlme 4, kus ühikkoormusest on paindemoment $M_4^{(ühik)} = -1.0214 \text{ kN}$. Raami postis sõlmes 4 tekib plastne liigend, kui moment saavutab väärtuse $M_{pl}^{(post)} = 15.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Selleks tuleb suurendada jõude F_1 ja F_2 κ_0 korda, et saavutada sõlmes 4 moment $M_{pl}^{(post)}$

$$M_4^{(ühik)}\kappa_0 = M_{pl}, \quad \kappa_0 = \frac{M_{pl}}{M_4^{(ühik)}} = \frac{-15.0}{-1.0214} = 14.685 \tag{15.70}$$

Nüüd suurendame jõude F_1 ja F_2 κ korda

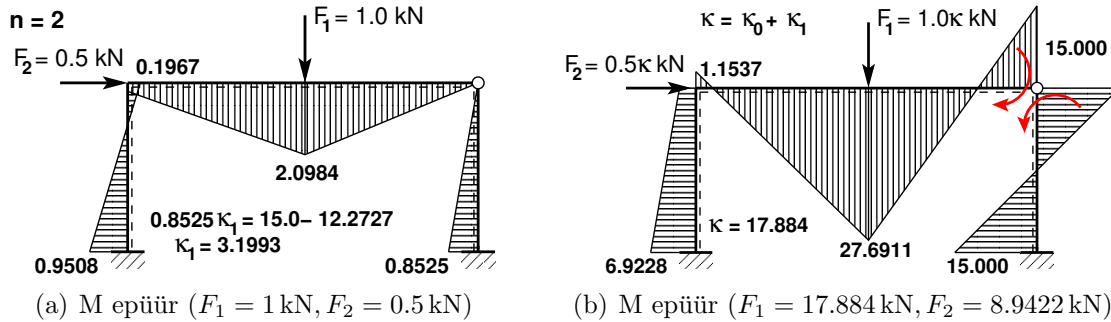
$$F_1 = 1.0\kappa_0 = 1.0 \cdot 14.685 = 14.685 \text{ kN}, \quad F_2 = 0.5 \cdot 14.685 = 7.3427 \text{ kN} \tag{15.71}$$



(a) M epüür ($F_1 = 1 \text{ kN}, F_2 = 0.5 \text{ kN}$)

(b) M epüür ($F_1 = 14.685 \text{ kN}, F_2 = 7.3427 \text{ kN}$)

Joonis 15.17. Paindemomentide epüürid staatikaga määramatus raamis ($n = 3$)



Joonis 15.18. Paindemomentide epüürid staatikaga määramatus raamis ($n = 2$)

Siirded ja sisejõud määrame EST-meetodiga – programm *spRaamESTsn3.m* lk 739. Siirete ja sisejõudude väärtused (esimene märgikokkulepe, 2. koormusvariant) on esitatud arvutuspäevikus 15.2 (lk 486). Koostame arvutustulemuse põhjal paindemomendi epüüri (joonis 15.17(b)). Epüürit (joonis 15.17(b)) näeme, et järgmine plastne liigend tekib sõlme 5 ($M_5^{(n=3)} = 12.2727 \text{ kN}$). Sõlmes 3 on küll kõige suurem paindemoment, kuid riivis plastses liigendis on moment $M_{pl}^{(riiv)} = 30.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Koostame kahekordselt staatikaga määramatu ($n = 2$) arvutusskeemi (joonis 15.18(a)), kus sõlmes 3 on liigend ja sõlme 3 on rakendatud jõud $F_1 = 1.0 \text{ kN}$ ja sõlme 2 jõud $F_2 = 0.5 \text{ kN}$. Siirded ja sisejõud määrame EST-meetodiga – programm *spRaamESTsn2.m* lk 740. Siirete ja sisejõudude väärtused (esimene märgikokkulepe, 1. koormusvariant) on esitatud arvutuspäevikus 15.3 (lk 488). Koostame arvutustulemuse põhjal paindemomendi epüüri (joonis 15.18(a)). Raami postis sõlmes 5 tekib plastne liigend, kui moment saavutab väärtuse $M_{pl}^{(post)} = 15.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Raami posti sõlmes 5 tuleb momenti suurendada $\Delta M_5 = M_{pl} - M_5^{(n=3)}$ võrra.

Arvutusskeemil (joonis 15.18(a)) sõlmes 5 olevat momenti ($M_5^{(ühik)} = 0.8525 \text{ kN}$) suurendame κ_1 korda, et saavutada ΔM_5

$$M_5^{(ühik)} \kappa_1 = \Delta M_5, \quad 0.8525 \kappa_1 = 15.0 - 12.2727, \quad \kappa_1 = \frac{15.0 - 12.2727}{0.8525} = 3.1993 \quad (15.72)$$

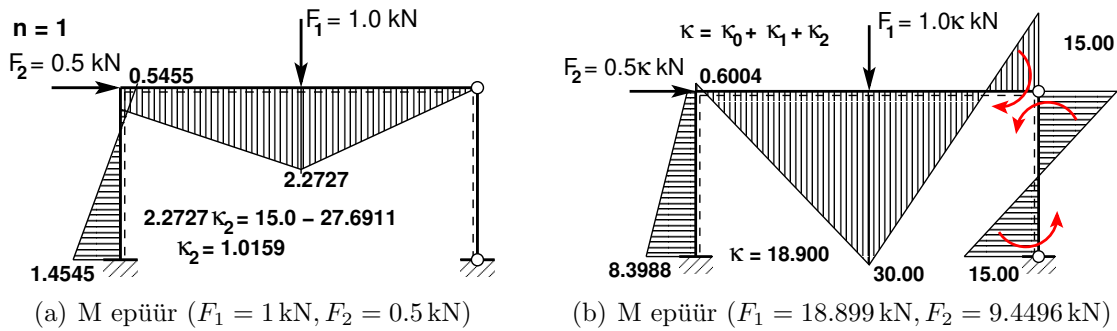
Suurendame jõude F_1 ja F_2 $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1$ korda

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 = 14.685 + 3.199 = 17.884 \quad (15.73)$$

Siis saame

$$F_1 = 1.0 \kappa = 1.0 \cdot 17.884 = 17.884 \text{ kN}, \quad F_2 = 0.5 \kappa = 0.5 \cdot 17.884 = 8.9422 \text{ kN} \quad (15.74)$$

Rakendame need jõud raami arvutusskeemile (joonis 15.18(b)) ja kõrvalttingimustega anname sõlme 4 momendiliigendis momendi väärtuseks M_{pl} . Siirded ja sisejõud määrame EST-meetodiga – programm *spRaamESTsn2.m* lk 740. Siirete ja sisejõudude väärtused (esimene märgikokkulepe, 2. koormusvariant) on esitatud arvutuspäevikus 15.3 (lk 488). Koostame arvutustulemuse põhjal paindemomendi epüüri (joonis 15.18(b)). Sellelt epüürit on näha, et koormuse suurendamisel järgmine momendiliigend tekib sõlme 3, milles on paindemoment ($M_3^{(n=2)} = 27.6917 \text{ kN}$).

Joonis 15.19. Paindemomentide epüürid staatikaga määramatus raamis ($n = 1$)

Koostame ühekordselt staatikaga määramatu ($n = 1$) arvutusskeemi (joonis 15.19(a)), kus sõlmedes 4 ja 5 on liigendid, sõlme 3 on rakendatud jõud $F_1 = 1.0 \text{ kN}$ ja sõlme 2 jõud $F_2 = 0.5 \text{ kN}$. Siirded ja sisejõud määrame EST-meetodiga – programm *spRaamESTsn1.m* lk 740. Siirete ja sisejõudude väärtused (esimene märgikokkulepe, 1. koormusvariant) on esitatud arvutuspäevikus 15.4 (lk 490). Koostame arvutustulemuse põhjal paindemomendi epüüri (joonis 15.19(a)). Raami riivi sõlmes 3 tekib plastne liigend, kui moment saavutab väärtuse $M_{pl}^{(riiv)} = 30.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Raami riivi sõlmes 3 tuleb momenti suurendada $\Delta M_3 = M_{pl} - M_3^{(n=2)}$ võrra.

Arvutusskeemil (joonis 15.19(a)) sõlmes 3 olevat momenti ($M_3^{(ühik)} = 2.2727 \text{ kN}$) suurendame κ_2 korda, et saavutada ΔM_3

$$M_3^{(ühik)} \kappa_1 = \Delta M_3, \quad 2.2727 \kappa_2 = 30.0 - 27.6911, \quad \kappa_2 = \frac{30.0 - 27.6911}{2.2727} = 1.0159 \quad (15.75)$$

Suurendame jõude F_1 ja F_2 $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2$ korda

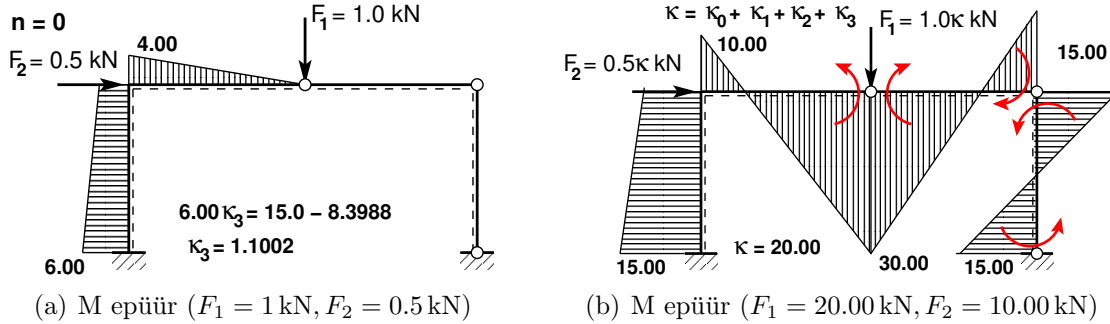
$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 = 14.685 + 3.199 + 1.0159 = 18.900 \quad (15.76)$$

Süüsaame

$$F_1 = 1.0 \kappa = 1.0 \cdot 18.900 = 18.900 \text{ kN}, \quad F_2 = 0.5 \cdot 18.900 = 9.450 \text{ kN} \quad (15.77)$$

Rakendame need jõud raami arvutusskeemile (joonis 15.19(b)) ja kõrvaltingimustega anname sõlme 4 ja 5 momendiliigendites momendi väärtuseks M_{pl} . Siirded ja sisejõud määrame EST-meetodiga – programm *spRaamESTsn1.m* lk 740. Siirete ja sisejõudude väärtused (esimene märgikokkulepe, 2. koormusvariant) on esitatud arvutuspäevikus 15.2 (lk 486). Koostame arvutustulemuse põhjal paindemomendi epüüri (joonis 15.19(b)). Sellelt epüürialt on näha, et koormuse suurendamisel järgmine momendiliigend tekib sõlme 1, milles on paindemoment ($M_1^{(n=1)} = 8.3988 \text{ kN}$).

Koostame staatikaga määratud ($n = 0$) arvutusskeemi (joonis 15.20(a)), kus sõlmedes 4, 5 ja 3 on liigendid ja sõlme 3 on rakendatud jõud $F_1 = 1.0 \text{ kN}$ ja sõlme 2 jõud $F_2 = 0.5 \text{ kN}$. Siirded ja sisejõud määrame EST-meetodiga – programm *spRaamESTsn0.m* lk 740. Siirete ja sisejõudude väärtused (esimene märgikokkulepe, 1. koormusvariant) on esitatud arvutuspäevikus 15.5 (lk 492). Koostame arvutustulemuse põhjal paindemomendi epüüri (joonis 15.20(a)). Raami posti sõlmes 1 tekib plastne liigend, kui moment saavutab väärtuse $M_{pl}^{(post)} = 15.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ja raam muutub kinemaatiliseks ahelaks. Raami posti sõlmes 1 tuleks momenti suurendada $\Delta M_1 = M_{pl} - M_1^{(n=1)}$ võrra. Arvutusskeemil (joonis 15.20(a)) sõlmes 1 olevat momenti



Joonis 15.20. Paindemomentide epüürid staatikaga määratus raamis ($n = 0$)

$(M_1^{(ühik)}) = 6.000 \text{ kN}$ suurendame κ_3 korda, et saavutada ΔM_1

$$M_1^{(ühik)} \kappa_3 = \Delta M_1, \quad 6.000 \kappa_3 = 15.0 - 8.3988, \quad \kappa_3 = \frac{15.0 - 8.3988}{6.000} = 1.1002 \quad (15.78)$$

Suurendame jõude F_1 ja F_2 $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$ korda

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 14.685 + 3.199 + 1.0159 + 1.1002 = 20.000 \quad (15.79)$$

Siis saame

$$F_1 = 1.0 \kappa = 1.0 \cdot 20.00 = 20.00 \text{ kN}, \quad F_2 = 0.5 \cdot 20.00 = 10.00 \text{ kN} \quad (15.80)$$

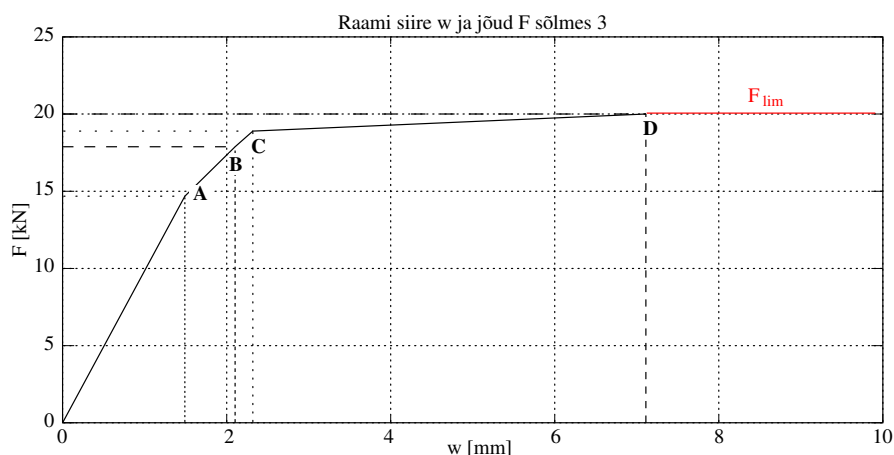
Rakendame need jõud raami arvutusskeemile (joonis 15.20(b)) ja kõrvaltingimustega anname sõlme 4, 5 ja 3 momendiliigendites momendi väärtuseks M_{pl} . Siirded ja sisejõud määrame EST-meetodiga – programm *spRaamESTsn0.m* lk 740. Siirete ja sisejõudude väärtused (esimene märgikokkulepe, 2. koormusvariant) on esitatud arvutuspäevikus 15.2 (lk 486). Koostame arvutustulemuse põhjal paindemomendi epüüri (joonis 15.20(b)). Sellelt epüürit on näha, et selle koormuse puhul tekib sõlme 1 plastne momendiliigend ja raam muutub kinemaatiliseks ahelaks.

Oleme leidnud piirkoormuse $F_1 \leq F_{lim} = 20.00 \text{ kN}$.

Kontrollime plastsetes liigendites dissipatsioonienergiat ($\mathbf{D} \geq \mathbf{0}$), mis peab olema positiivne. Selle kontrollimiseks arvutame varraste kontaktjõudude (rajajõudude) töö $W^{(r)}$ plastses liigendis teise märgikokkuleppe puhul. See töö on negatiivne (vt avaldis (15.69) ja joonis 15.16 lk 481)

$$W^{(r)} = M_p^{(pl.liigend)} \varphi_p + M_v^{(pl.liigend)} \varphi_v = -D \leq 0 \quad (15.81)$$

siin $M_p^{(pl.liigend)}$ ja $M_v^{(pl.liigend)}$ on kontaktmomendid plastses liigendis ning φ_p , φ_v pöördenurgad vastavalt paremal ja vasakul. Need pöördenurgad plastses liigendis ei ole võrdsed, deformatsiooni pidevust ei ole. Arvutuse tulemused on arvutuspäevikus 15.1. Siit näeme, et staatiliselt määratud arvutusskeemi ($n=0$) sõlmedes 3, 4 ja 5 on vastavad kontaktjõudude tööd: $W_3^{(r)} = -1.1667 \cdot 10^{-03} \cdot 30.0000 + 1.2778 \cdot 10^{-03} \cdot (-30.0000) = -0.073335 < 0$
 $W_4^{(r)} = 1.7778 \cdot 10^{-03} \cdot (-15.0000) + (-6.6667 \cdot 10^{-04}) \cdot 15.0000 = -0.036667 < 0$
 $W_5^{(r)} = -6.6667 \cdot 10^{-04} \cdot 15.0000 = -0.010000 < 0$

Joonis 15.21. Raami 3. sõlme siirde w ja jõu F diagramm

Koostame raami 3. sõlme siirde w ja jõu F diagrammi. Vastavad siirded ja jõud saame arvutuspäevikutest 15.2, 15.3, 15.4 ja 15.5. Need suurused kanname joonisele 15.21. Esimese plastse liigendi tekkimine on tähistatud tähega A. Järgmiste liigendite tekkimised on märgitud tähtedega B ja C. Piirkoormuseni jõudmine on märgitud tähega D.

Arvutuspäevik 15.1 (Plastses liigendis dissipatsiooni arvutus)

```
octave-3.2.4:2> diary on
```

```
octave-3.2.4:3> WplRaam
```

```
=====
```

```
Kontaktjõudude (rajajõudude) töö: Wr
```

```
Arvutusteks kasutame EST-meetodit
```

```
Arvutame varda alguses ja lõpus olevate rajajõudude (kontaktjõudude) töö Wr
```

```
Töö arvutamisel kasutame II-märgikokkulepet.
```

```
I-märgikokkuleppe ja II-märgikokkuleppe puhul on varda algul
```

```
sisejõudude märgid vastupidised
```

```
-----
```

```
n = 2
```

```
Sõlmes 4 on kõrvaltingimustega lisatud moment M=15 kN
```

```
3. lõpp ja 4. algus
```

```
Wr=4.9996e-04*(-15.0000)+3.0164e-08*15.0000
```

```
Wr = -0.0074989
```

```
-----
```

```
n = 1
```

```
Sõlme 4 on kõrvaltingimustega lisatud moment M=15 kN
```

```
Sõlme 5 on kõrvaltingimustega lisatud moment M=15 kN
```

```
3. lõpp ja 4. algus
```

```
Wr=5.7992e-04*(-15.0000)+(-7.9932e-05)*15.0000
```

```
Wkontakt = -0.0098978
```

```
4. lõpp
```

```
Wr=-7.9932e-05*15.0000
```

```
Wr = -0.0011990
```

```
-----
```

```
n = 0
```

Sõlme 3 on kõrvaltingimustega lisatud moment $M=30$ kN
 2. lõpp ja 3. algus
 $Wr = -1.1667e-03 * 30.0000 + 1.2778e-03 * (-30.0000)$
 $Wr = -0.073335$
 Sõlme 4 on kõrvaltingimustega lisatud moment $M=15$ kN
 3. lõpp ja 4. algus
 $Wr = 1.7778e-03 * (-15.0000) + (-6.6667e-04) * 15.0000$
 $Wr = -0.036667$
 Sõlme 5 on kõrvaltingimustega lisatud moment $M=15$ kN
 4. lõpp
 $Wr = -6.6667e-04 * 15.0000$
 $Wr = -0.010000$

 Rajajõudude töö on kõigil vaadeldud juhtudel negatiivne
 Energiateoreem: $W_v + W_r + W_s = 0$
 Kui välisjõudude töö $W_v \geq 0$
 siis sel juhul $W_r < 0$
 Dissipatsioonienergia $D \geq 0$
 Selles näites $W_r = -D$

octave-3.2.4:4> diary off

Arvutuspäevik 15.2 (Programm **spRaamESTsn3.m** lk 739)

octave-3.0.1:1> diary spRaamESTsn3.out
 octave-3.0.1:2> diary on
 octave-3.0.1:3> spRaamESTsn3
 Koormusvariant 1.

=====

Sisejõud vardas	1	varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
moment	M -	-0.2643	-0.2286	-0.1929 -0.1571 -0.1214

Sisejõud vardas	2	varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
moment	M -	-0.1214	0.2661	0.6536 1.0411 1.4286

Sisejõud vardas	3	varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
moment	M -	1.4286	0.8161	0.2036 -0.4089 -1.0214

Sisejõud vardas	4	varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
moment	M -	-1.0214	-0.5571	-0.0929 0.3714 0.8357

Sisejõud vardas	3	kohal x =	4.0000000
moment	M -	-1.02143	

Koormusvariant 1. Staatiline kontroll

toereaktsioonid=[X(49) X(50) X(51) X(52) X(53) X(54)]

toereaktsioonid =

-0.035714 -0.387500 0.264286 -0.464286 -0.612500 0.835714

sumZ=F3s+X(50)+X(53)

sumZ = 1.1102e-16

sumX=F2s+X(49)+X(52)

sumX = 0

Momentide summa sõlme 1 suhtes:

sumM1=X(51)+ X(54)-h*F2s-l1*F3s-(l1+l2)*X(53)
sumM1 = -8.8818e-16

Momentide summa sõlme 5 suhtes:

sumM5=X(51)+ X(54)-h*F2s+l1*F3s+(l1+l2)*X(50)
sumM5 = 0

Koormusvariant 1. Koormuse suurendamine DeltaF1 ja DeltaF2 võrra,
et sõlme 4 tekiks plastne liigend Mp=15.0 kNm

=====

Fkordaja0=15/X(48,1)
Fkordaja0 = 14.685

DeltaF1=Fkordaja0*F3s
DeltaF1 = 14.685
DeltaF2=Fkordaja0*F2s
DeltaF2 = 7.3427

=====

Koormusvariant 2.

=====

Sisejõud vardas	1	varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
normaaljõud N	-	-5.6904	-5.6904	-5.6904 -5.6904 -5.6904
põikjõud Q	-	0.5246	0.5246	0.5246 0.5246 0.5246
moment M	-	-3.8813	-3.3567	-2.8321 -2.3076 -1.7830

Sisejõud vardas	2	varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
siire w	-	4.9482e-15	5.6548e-04	1.0658e-03 1.4062e-03 1.4918e-03
normaaljõud N	-	-6.8181	-6.8181	-6.8181 -6.8181 -6.8181
põikjõud Q	-	5.6904	5.6904	5.6904 5.6904 5.6904
moment M	-	-1.7830	3.9074	9.5978 15.2882 20.9786

Sisejõud vardas	3	varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
siire w	-	4.9482e-15	5.6548e-04	1.0658e-03 1.4062e-03 1.4918e-03
normaaljõud N	-	-6.8181	-6.8181	-6.8181 -6.8181 -6.8181
põikjõud Q	-	-8.9946	-8.9946	-8.9946 -8.9946 -8.9946
moment M	-	20.9786	11.9840	2.9894 -6.0053 -14.9999

Sisejõud vardas	4	varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
normaaljõud N	-	-8.9946	-8.9946	-8.9946 -8.9946 -8.9946
põikjõud Q	-	6.8181	6.8181	6.8181 6.8181 6.8181
moment M	-	-14.9999	-8.1817	-1.3636 5.4545 12.2727

Sisejõud vardas 3 kohal x = 4.0000000
normaaljõud N - -6.81814
põikjõud Q - -8.99461
moment M - -14.99986

Koormusvariant 2. Staatiline kontroll

toereaktsioonid=[X(49) X(50) X(51) X(52) X(53) X(54)]

toereaktsioonid =

-0.52456 -5.69039 3.88126 -6.81814 -8.99461 12.27268

sumZ=F3sv2+X(50)+X(53)
sumZ = 0

```

sumX=F2sv2+X(49)+X(52)
sumX = 0
Momentide summa sõlme 1 suhtes:
sumM1=X(51)+ X(54)-h*F2sv2-l1*F3sv2-(l1+l2)*X(53)
sumM1 = 0
Momentide summa sõlme 5 suhtes:
sumM5=X(51)+ X(54)-h*F2sv2+l1*F3sv2+(l1+l2)*X(50)
sumM5 = 7.1054e-15

```

```

Koormusvariant 2. Koormuse suurendamisega DeltaF1 ja DeltaF2 võrra on nüüd
sõlmes 4 moment X(48,1), sõlmes 3 moment X(18,1) ja sõlmes 5 moment X(42,1)
M48 = X(48,1)
M48 = 15.000 % sõlme 4 tekib plastne liigend Mpl = 15.0 kNm
M18 = X(18,1)
M18 = 20.979
M42 = X(42,1)
M42 = 12.273
Edaspidi näitame, et järgmine plastne liigend tekib sõlme 5
octave-3.0.1:4> diary off

```

Arvutuspäevik 15.3 (Programm **spRaamESTsn2.m** lk 740)

```

octave-3.0.1:1> diary spRaamESTsn2.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spRaamESTsn2
Koormusvariant 1.

```

```

=====
Sisejõud vardas 1   varda pikkus on 4.00000   varras on jaotatud neljaks
moment            M -   -0.9508   -0.6639   -0.3770   -0.0902   0.1967
-----

```

```

Sisejõud vardas 2   varda pikkus on 4.00000   varras on jaotatud neljaks
moment            M -   0.1967   0.6721   1.1475   1.6230   2.0984
-----

```

```

Sisejõud vardas 3   varda pikkus on 4.00000   varras on jaotatud neljaks
moment            M -   2.0984   1.5738   1.0492   0.5246   0.0000
-----

```

```

Sisejõud vardas 4   varda pikkus on 4.00000   varras on jaotatud neljaks
moment            M -   0.0000   0.2131   0.4262   0.6393   0.8525
-----

```

```

Koormusvariant 1. Staatiline kontroll
Koormusvariant 1. Staatiline kontroll
toereaktsioonid=[X(49) X(50) X(51) X(52) X(53) X(54)]
toereaktsioonid =
-0.28689 -0.47541 0.95082 -0.21311 -0.52459 0.85246

```

```

sumZ=F3s+X(50)+X(53)
sumZ = 0
sumX=F2s+X(49)+X(52)
sumX = 0
Momentide summa sõlme 1 suhtes:
sumM1=X(51)+ X(54)-h*F2s-l1*F3s-(l1+l2)*X(53)
sumM1 = 0
Momentide summa sõlme 5 suhtes:

```

sumM5=X(51)+ X(54)-h*F2s+l1*F3s+(l1+l2)*X(50)
sumM5 = 0

Koormusvariant 1. Koormuse suurendamine DeltaF1 ja DeltaF2 võrra
et sõlme 5 tekiks plastne liigend Mp=15.0 kNm

=====

Fkordaja0=14.685 eelmisest skeemist
Fkordaja0 = 14.685
Fkordaja1=(15.0-12.2727)/X(42,1)
Fkordaja1 = 3.1993

DeltaF1=(Fkordaja0+Fkordaja1)*F3s
DeltaF1 = 17.884
DeltaF2=(Fkordaja0F+kordaja1)*F2s
DeltaF2 = 8.9422

=====

Koormusvariant 2.

=====

Sisejõud vardas 1 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
pööre fi - 0.0000e+00 -3.1008e-04 -5.4806e-04 -7.1391e-04 -8.0766e-04
normaaljõud N - -7.2112 -7.2112 -7.2112 -7.2112 -7.2112
põikjõud Q - 1.4423 1.4423 1.4423 1.4423 1.4423
moment M - -6.9228 -5.4806 -4.0383 -2.5960 -1.1537

Sisejõud vardas 2 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
siire w - 6.2706e-15 7.9724e-04 1.4935e-03 1.9687e-03 2.1025e-03
pööre fi - -8.0766e-04 -7.6679e-04 -6.0574e-04 -3.2450e-04 7.6924e-05
normaaljõud N - -7.4999 -7.4999 -7.4999 -7.4999 -7.4999
põikjõud Q - 7.2112 7.2112 7.2112 7.2112 7.2112
moment M - -1.1537 6.0575 13.2687 20.4799 27.6911

Sisejõud vardas 3 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
siire w - 2.1025e-03 1.8244e-03 1.2628e-03 5.9531e-04 9.2800e-15
pööre fi - 7.6924e-05 4.4950e-04 6.4420e-04 6.6102e-04 4.9996e-04
normaaljõud N - -7.4999 -7.4999 -7.4999 -7.4999 -7.4999
põikjõud Q - -10.6728 -10.6728 -10.6728 -10.6728 -10.6728
moment M - 27.6911 17.0184 6.3456 -4.3272 -15.0000

Sisejõud vardas 4 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
pööre fi - 3.0164e-08 -5.6247e-04 -7.4998e-04 -5.6249e-04 -1.0376e-19
normaaljõud N - -10.6728 -10.6728 -10.6728 -10.6728 -10.6728
põikjõud Q - 7.4999 7.4999 7.4999 7.4999 7.4999
moment M - -15.0000 -7.5001 -0.0002 7.4998 14.9997

Koormusvariant 2. Staatiline kontroll

toereaktsioonid=[X(49) X(50) X(51) X(52) X(53) X(54)]

toereaktsioonid =

-1.4423 -7.2112 6.9228 -7.4999 -10.6728 14.9997

sumZ=F3sv2+X(50)+X(53)

sumZ = 1.7764e-15

sumX=F2sv2+X(49)+X(52)

```

sumX = -8.8818e-16
Momentide summa sõlme 1 suhtes:
sumM1=X(51)+ X(54)-h*F2sv2-l1*F3sv2-(l1+l2)*X(53)
sumM1 = 0
Momentide summa sõlme 5 suhtes:
sumM5=X(51)+ X(54)-h*F2sv2+l1*F3sv2+(l1+l2)*X(50)
sumM5 = 7.1054e-15

```

```

Koormusvariant 2. Koormuse suurendamisega DeltaF1 ja DeltaF2 võrra on nüüd
sõlmes 5 moment X(42,1) ja sõlmes 3 moment X(18,1)
M42 = X(42,1)
M42 = 15.000 % sõlme 5 tekib plastne liigend Mpl = 15.0 kNm
M18 = X(18,1)
M18 = 27.691
Edaspidi näitame, et järgmine plastne liigend tekib sõlme 3
octave-3.0.1:4> diary off

```

Arvutuspäevik 15.4 (Programm **spRaamESTsn1.m** lk 740)

```

octave-3.0.1:1> diary spRaamESTsn1.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spRaamESTsn1
Koormusvariant 1.

```

```

=====
Sisejõud vardas 1 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
moment M - -1.4545 -0.9545 -0.4545 0.0455 0.5455
-----

```

```

Sisejõud vardas 2 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
moment M - 0.5455 0.9773 1.4091 1.8409 2.2727
-----

```

```

Sisejõud vardas 3 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
moment M - 2.2727 1.7045 1.1364 0.5682 0.0000
-----

```

```

Sisejõud vardas 4 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
moment M - 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
-----

```

```

Koormusvariant 1. Staatiline kontroll
toereaktsioonid=[X(49) X(50) X(51) X(52) X(53)]
toereaktsioonid =
-0.50000 -0.43182 1.45455 -0.00000 -0.56818

```

```

sumZ=F3s+X(50)+X(53)
sumZ = 0
sumX=F2s+X(49)+X(52)
sumX = 0
Momentide summa sõlme 1 suhtes:
sumM1=X(51)-h*F2s-l1*F3s-(l1+l2)*X(53)
sumM1 = 0
Momentide summa sõlme 5 suhtes:
sumM5=X(51)-h*F2s+l1*F3s+(l1+l2)*X(50)
sumM5 = 4.4409e-16

```

Koormusvariant 1. Koormuse suurendamine DeltaF1 ja DeltaF2 võrra

et sõlme 3 tekiks plastne liigend $M_p=30.0$ kNm

=====

Fkordaja0=14.685 eelmisest skeemist

Fkordaja0 = 14.685

Fkordaja1=3.1993 eelmisest skeemist

Fkordaja1 = 3.1993

Fkordaja2=(30.0-27.6932)/X(18,1)

Fkordaja2 = 1.0150

DeltaF1=(Fkordaja0+Fkordaja1+Fkordaja2)*F3s

DeltaF1 = 18.899

DeltaF2=(Fkordaja0F+kordaja1+Fkordaja2)*F2s

DeltaF2 = 9.4496

=====

Koormusvariant 2.

=====

Sisejõud vardas 1		varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
pööre	fi	-	0.0000e+00	-3.7120e-04 -6.4492e-04 -8.2116e-04 -8.9992e-04
normaaljõud	N	-	-7.6495	-7.6495 -7.6495 -7.6495 -7.6495 -7.6495
põikjõud	Q	-	1.9496	1.9496 1.9496 1.9496 1.9496 1.9496
moment	M	-	-8.3988	-6.4492 -4.4996 -2.5500 -0.6004

Sisejõud vardas 2		varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
siire	w	-	6.6518e-15	8.8367e-04 1.6499e-03 2.1711e-03 2.3198e-03
pööre	fi	-	-8.9992e-04	-8.4618e-04 -6.6494e-04 -3.5622e-04 7.9998e-05
normaaljõud	N	-	-7.5000	-7.5000 -7.5000 -7.5000 -7.5000 -7.5000
põikjõud	Q	-	7.6495	7.6495 7.6495 7.6495 7.6495 7.6495
moment	M	-	-0.6004	7.0492 14.6987 22.3483 29.9978

Sisejõud vardas 3		varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
siire	w	-	2.3198e-03	2.0211e-03 1.4099e-03 6.7368e-04 9.7812e-15
pööre	fi	-	7.9998e-05	4.8622e-04 7.0494e-04 7.3618e-04 5.7992e-04
normaaljõud	N	-	-7.5000	-7.5000 -7.5000 -7.5000 -7.5000 -7.5000
põikjõud	Q	-	-11.2495	-11.2495 -11.2495 -11.2495 -11.2495 -11.2495
moment	M	-	29.9978	18.7484 7.4989 -3.7505 -15.0000

Sisejõud vardas 4		varda pikkus on	4.00000	varras on jaotatud neljaks
pööre	fi	-	-7.9932e-05	-6.4243e-04 -8.2993e-04 -6.4243e-04 -7.9932e-05
normaaljõud	N	-	-11.2495	-11.2495 -11.2495 -11.2495 -11.2495 -11.2495
põikjõud	Q	-	7.5000	7.5000 7.5000 7.5000 7.5000 7.5000
moment	M	-	-15.0000	-7.5000 0.0000 7.5000 15.0000

Koormusvariant 2. Staatiline kontroll

toereaktsioonid=[X(49) X(50) X(51) X(52) X(53)]

toereaktsioonid =

-1.9496 -7.6495 8.3988 -7.5000 -11.2495

sumZ=F3sv2+X(50)+X(53)

sumZ = 0

sumX=F2sv2+X(49)+X(52)

sumX = 0

Momentide summa sõlme 1 suhtes:

```

sumM1=X(51)+15-h*F2sv2-l1*F3sv2-(l1+l2)*X(53)
sumM1 = 0
Momentide summa sõlme 5 suhtes:
sumM5=X(51)+15-h*F2sv2+l1*F3sv2+(l1+l2)*X(50)
sumM5 = 0

```

```

Koormusvariant 2. Koormuse suurendamisega DeltaF1 ja DeltaF2 võrra on nüüd
sõlmes 5 moment X(42,1) ja sõlmes 3 moment X(18,1)
M42 = X(42,1)
M42 = 15 % sõlme 5 on plastne liigend Mpl = 15.0 kNm
M18 = X(18,1)
M18 = 29.998 % sõlme 3 tekib plastne liigend Mpl = 30.0 kNm
Edaspidi näitame, et järgmine plastne liigend tekib sõlme 1

```

Arvutuspäevik 15.5 (Programm **spRaamESTsn0.m** lk 740)

```

octave-3.0.1:1> diary spRaamESTsn0.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> spRaamESTsn0
Koormusvariant 1.

```

```

=====
Sisejõud vardas 1 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
moment M - -6.0000 -5.5000 -5.0000 -4.5000 -4.0000
-----

```

```

Sisejõud vardas 2 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
moment M - -4.0000 -3.0000 -2.0000 -1.0000 0.0000
-----

```

```

Sisejõud vardas 3 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
moment M - 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
-----

```

```

Sisejõud vardas 4 varda pikkus on 4.00000 varras on jaotatud neljaks
moment M - 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
-----

```

```

Koormusvariant 1. Staatiline kontroll
toereaktsioonid=[X(49) X(50) X(51) X(52) X(53)]
toereaktsioonid =
-0.50000 -1.00000 6.00000 -0.00000 -0.00000

```

```

sumZ=F3s+X(50)+X(53)
sumZ = 0
sumX=F2s+X(49)+X(52)
sumX = 0
Momentide summa sõlme 1 suhtes:
sumM1=X(51)-h*F2s-l1*F3s-(l1+l2)*X(53)
sumM1 = 0
Momentide summa sõlme 5 suhtes:
sumM5=X(51)-h*F2s+l1*F3s+(l1+l2)*X(50)
sumM5 = 0

```

```

Koormusvariant 1. Koormuse suurendamine DeltaF1 ja DeltaF2 võrra
et sõlme 1 tekiks plastne liigend Mp=15.0 kNm

```

```

=====
Fkordaja0=14.685 eelmisest skeemist

```

```

Fkordaja0 = 14.685
Fkordaja1=3.1993 eelmisest skeemist
Fkordaja1 = 3.1993
Fkordaja2=1.0150 eelmisest skeemist
Fkordaja2 = 1.0150
Fkordaja3=(-15.0-(-8.3988))/X(12,1)
Fkordaja3 = 1.1002

```

```

-----
DeltaF1=(Fkordaja0+Fkordaja1+Fkordaja2+Fkordaja3)*F3s
DeltaF1 = 20.000
DeltaF2=(Fkordaja0+Fkordaja1+Fkordaja2+Fkordaja3)*F2s
DeltaF2 = 9.9998

```

```

=====
Koormusvariant 2.

```

```

-----
Sisejõud vardas 1   varda pikkus on 4.00000   varras on jaotatud neljaks
pööre fi - 0.0000e+00 -6.8750e-04 -1.2500e-03 -1.6875e-03 -2.0000e-03
normaaljõud N - -8.7500 -8.7500 -8.7500 -8.7500 -8.7500
põikjõud Q - 2.5000 2.5000 2.5000 2.5000 2.5000
moment M - -15.0000 -12.5000 -10.0000 -7.5000 -5.0000

```

```

-----
Sisejõud vardas 2   varda pikkus on 4.00000   varras on jaotatud neljaks
siire w - 7.6087e-15 2.0174e-03 3.9722e-03 5.7188e-03 7.1111e-03
pööre fi - -2.0000e-03 -2.0104e-03 -1.8750e-03 -1.5938e-03 -1.1667e-03
normaaljõud N - -7.5000 -7.5000 -7.5000 -7.5000 -7.5000
põikjõud Q - 8.7500 8.7500 8.7500 8.7500 8.7500
moment M - -5.0000 3.7500 12.5000 21.2500 30.0000

```

```

-----
Sisejõud vardas 3   varda pikkus on 4.00000   varras on jaotatud neljaks
siire w - 7.1111e-03 5.6146e-03 3.8056e-03 1.8715e-03 9.7838e-15
pööre fi - 1.2778e-03 1.6840e-03 1.9028e-03 1.9340e-03 1.7778e-03
normaaljõud N - -7.5000 -7.5000 -7.5000 -7.5000 -7.5000
põikjõud Q - -11.2500 -11.2500 -11.2500 -11.2500 -11.2500
moment M - 30.0000 18.7500 7.5000 -3.7500 -15.0000

```

```

-----
Sisejõud vardas 4   varda pikkus on 4.00000   varras on jaotatud neljaks
pööre fi - -6.6667e-04 -1.2292e-03 -1.4167e-03 -1.2292e-03 -6.6667e-04
normaaljõud N - -11.2500 -11.2500 -11.2500 -11.2500 -11.2500
põikjõud Q - 7.5000 7.5000 7.5000 7.5000 7.5000
moment M - -15.0000 -7.5000 0.0000 7.5000 15.0000

```

```

-----
Koormusvariant 2. Staatiline kontroll
toereaktsioonid=[X(49) X(50) X(51) X(52) X(53)]
toereaktsioonid =
-2.5000 -8.7500 15.0000 -7.5000 -11.2500

```

```

sumZ=F3sv2+X(50)+X(53)
sumZ = 0
sumX=F2sv2+X(49)+X(52)
sumX = 0
Momentide summa sõlme 1 suhtes:
sumM1=X(51)+15-h*F2sv2-11*F3sv2-(11+12)*X(53)

```

$$\text{sumM1} = 0$$

Momentide summa sõlme 5 suhtes:

$$\text{sumM5} = X(51) + 15 - h \cdot F_2 \cdot s_v2 + l_1 \cdot F_3 \cdot s_v2 + (l_1 + l_2) \cdot X(50)$$

$$\text{sumM5} = 0$$

Koormusvariant 2. Koormuse suurendamisega ΔF_1 ja ΔF_2 võrra on nüüd sõlmes 5 moment $X(42,1)$ ja sõlmes 3 moment $X(18,1)$

$$M_{42} = X(42,1)$$

$$M_{42} = 15$$

$$M_{18} = X(18,1)$$

$$M_{18} = 30$$

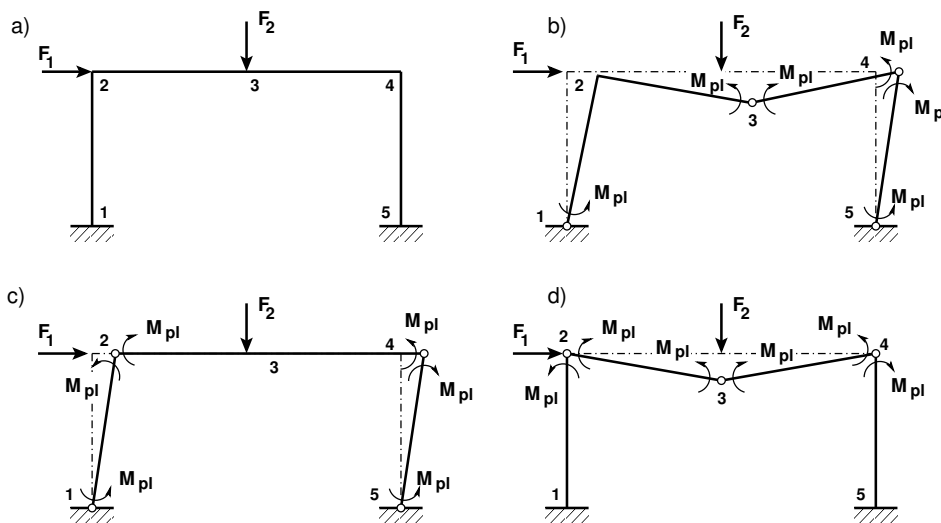
$$M_{36} = 30$$

Sõlmes 1 tekib plastne liigend

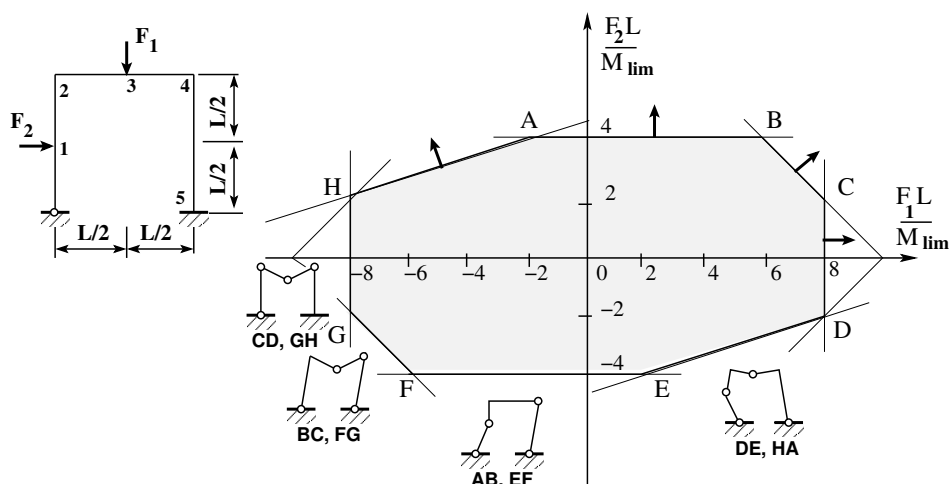
Näite lõpp

Joonisel 15.22 on näidatud kolmekordselt staatikaga määramatu raam kahe koondatud jõuga. Raam muutub kinemaatiliseks varrasahelaks, kui on tekkinud neli plastset liigendit (joonis 15.22 b) ja 15.22 c)). Joonisel 15.22 d) on näidatud olukord, kus piirulukord saabub kolme plastse liigendi tekkimisel. Piirulukord sõltub jõudude F_1/F_2 suhtest, raami mõõtudest. Ehitusinseneride täiendusõppe kursuse materjalis (vt [MA99] lk 43 (lk 49) on kirjeldatud tasandraamis piirkoormuse tekkimist kahe koondatud jõuga koormamisel. Joonisel 15.23 on raami kaheparameetiline koormamine.

Joonisel 15.22 b) on varrasahel, mida on analüüsitud õpikus [Beer04] arvutiprogrammi RuckZuck 4.0 kasutades. Kõik võimalikud variandid tuleb läbi vaadata ja leida väikseim piirkoormus, sellepärast on otstarbekas kasutada arvutiprogramme. Õpikus [EP67] on loetelu asjaoludest, mida tuleb silmas pidada varraskonstruksioonide arvutamisel piirulukorrale:



Joonis 15.22. Raami piirkoormus



Joonis 15.23. Raami kaheparameetriline koormamine

1. Kõik tegelike materjalide deformatsioonidiagrammid on piiratud pikkusega. Sellepärast võib materjalide juures, mille purunemisega kaasnevad ainult väikesed deformatsioonid, mõni ristlõige täielikult puruneda enne piirolukorrale vastavate deformatsioonide väljaarenemist.
2. Mitmekordsel koormamisel, eriti siis, kui koormustüübid on erinevad, võib tegelik piirkoormus olla teoreetilisest väiksem, kuna sel juhul on deformatsioonidel kalduvus summeeruda; samuti võivad muutuda materjali mehaanilised omadused ja tekkida mikropraod.
3. Surutud elemendid võivad kaotada stabiilsuse juba materjali osalisel voolamisel. Voolavusolukord survele on üldse ebastabiilne, nii näiteks I-tala, mille üks vöö on surutud, kaotab oma tasandilise paindekujuga juba enne, kui pinged surutud vöös jõuavad voolavuspiirini.
4. Deformatsioonidiagrammi kuju oleneb koormamise kiirusest; kiirel koormamisel on ta lähedasem ideaalelastse materjali diagrammile (voolavuspiirkond on lühem).
5. Arvutustel piirolukorrale ei arvestata materjali kalestumist, mis suurendab tegeliku piirkoormuse väärtust ja mõningal määral kompenseerib eeltoodud negatiivsete tegurite mõju.
6. Raudbetoonkonstruktsioonide juures võib erisuunalisele paindemomendile vastav piirmoment olla erinev.
7. Temperatuuri muutumine ja tugede järelandmine piirolukorda ei mõjuta.

Osa III

Teist järku teooria

16. Arvutus teist järku teooria järgi

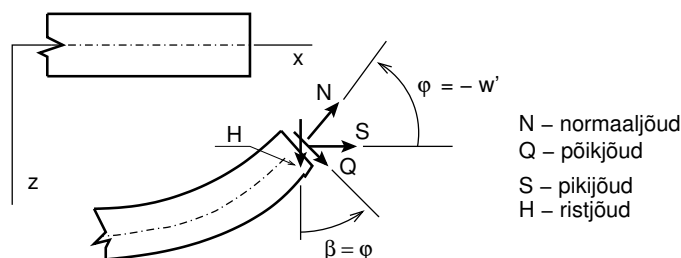
Loeng 1 ¹ Deformeerunud elemendi tasakaaluvõrrandid. Näide 16.1. Raami kriitiline koormus.

Loeng 2 ² Näide 16.1. Näide 16.4. Raami kriitiline koormus.

16.1 Deformeerunud elemendi tasakaaluvõrrandid

Varda paindeteooria liigitamist esimest ja teist järku teooriaks vaatlesime lõigus 1.9 lk 44. Teist järku teorias võetakse arvesse varda deformeerunud kuju. Varda deformeerunud kuju arvestatakse pikipõikpaindel (vt [MR99] lk 22).

Esimest järku teorias vaadeldakse väikseid deformatsioone (kehtib algmõõtmete printsiip) ja *normaaljõud* langeb kokku pikijõuga ning *ristjõud* ühtib põikjõuga. **Teist järku teorias** tuleb nende sisejõudude puhul vahet teha. Vaatleme joonist 16.1, kus N on normaaljõud ja S pikijõud. Normaaljõud N on varda telje suunaline jõud. Pikijõud



Joonis 16.1. Pikijõud, ristjõud, normaaljõud ja põikjõud

S on jõud varda ristlõikes, mille suund ühtib normaaljõu N suunaga enne deformeerumist. Joonisel 16.1 on Q põikjõud, mis on risti varda teljega ja H ristjõud, mille suund ühtib põikjõu suunaga enne deformeerumist.

Teist järku teorias võtame kasutusele Bernoulli³ vardateooria, mille puhul varda kõverus ψ_y on

$$\psi_y = \frac{-w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} \approx -w'' \quad (16.1)$$

¹ [./videod/def01ukrdLoeng1.html](#)

² [./videod/def01ukrdLoeng2.html](#)

³Jacob Bernoulli, šveitsi matemaatik, 1655–1705.

Parema käe teljestiku puhul vektori projektsioonid teisenduvad järgmiselt:

$$\begin{bmatrix} S \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \end{bmatrix} \quad (16.2)$$

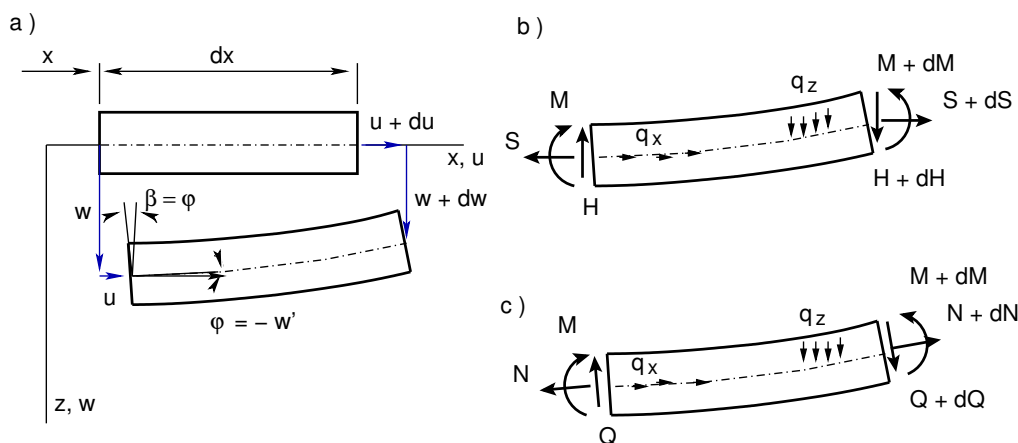
Teist järku teoorias vaatleme väikseid pöördenurki φ nii, et

$$\cos \varphi \approx 1, \quad \sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi = -w' \quad (16.3)$$

Oletuse (16.3) rakendamisel seoses (16.2), saame pikijõu S ja ristjõu H (sks *Transversalkraft*) [RH95]) (ingl *transverse force*) [PW94]) seose normaaljõu N ning põikjõuga Q

$$\begin{bmatrix} S \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \end{bmatrix} \quad (16.4)$$

Deformeerunud elemendi tasakaaluvõrrandite koostamiseks vaatame joonist 16.2 c. Koostame tasakaalu avaldise z -telje sihis:



Joonis 16.2. Deformeerunud varda element

$$\begin{aligned} \Sigma Z = 0 : \quad & + N \underbrace{\sin \varphi}_{\approx \varphi} - Q \underbrace{\cos \varphi}_{\approx 1} + q_z dx - \\ & - (N + dN) \underbrace{\sin(\varphi + d\varphi)}_{\approx \varphi + d\varphi} + (Q + dQ) \underbrace{\cos(\varphi + d\varphi)}_{\approx 1} = 0 \end{aligned} \quad (16.5)$$

Arvestades oletust (16.3), saame

$$\begin{aligned} \Sigma Z = 0 : \quad & + N\varphi - Q + q_z dx - \\ & - N\varphi - Nd\varphi - dN\varphi - \underbrace{dNd\varphi}_{\approx 0} + Q + dQ = 0 \end{aligned} \quad (16.6)$$

Pärast avaldise (16.6) taandamist saame

$$-N \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{dN}{dx} + \frac{dQ}{dx} + q_z(x) = 0 \quad (16.7)$$

ehk

$$\frac{d}{dx}(-N\varphi + Q) + q_z(x) = 0 \quad (16.8)$$

Vektori komponentide teisendamise avaldisest (16.4) saame

$$-N\varphi + Q = H \quad (16.9)$$

Kasutades saadud seost (16.9), esitame tasakaaluvõrrandi (16.8) kujul

$$\frac{d}{dx}H + q_z(x) = 0 \quad (16.10)$$

Koostame tasakaalu avaldise x -telje sihis:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 : \quad & -N \underbrace{\cos \varphi}_{\approx 1} - Q \underbrace{\sin \varphi}_{\approx \varphi} + q_x dx + \\ & + (N + dN) \underbrace{\cos(\varphi + d\varphi)}_{\approx 1} + (Q + dQ) \underbrace{\sin(\varphi + d\varphi)}_{\approx \varphi + d\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (16.11)$$

Arvestades oletust (16.3) saame:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 : \quad & -N - Q\varphi + q_x dx + \\ & + N + dN + Q\varphi + dQ\varphi + \varphi dQ + \underbrace{dQd\varphi}_{\approx 0} = 0 \end{aligned} \quad (16.12)$$

Pärast taandamist avaldises (16.12) saame

$$\frac{d}{dx}N + Q \frac{d}{dx}\varphi + \varphi \frac{d}{dx}Q + q_x(x) = 0 \quad (16.13)$$

ehk

$$\frac{d}{dx}(N + Q\varphi) + q_x(x) = 0 \quad (16.14)$$

Vektori komponentide teisendamise avaldisest (16.4) saame

$$N + \underbrace{Q\varphi}_{\ll N} = S_x \cong N \quad (16.15)$$

Kasutades saadud seost (16.15), esitame tasakaaluvõrrandi (16.14) kujul

$$\frac{d}{dx}S_x + q_x(x) = 0 \quad (16.16)$$

Koostame momentide tasakaaluavaldise varda elemendi lõpus y -telje suhtes

$$\Sigma M_y = 0 : \quad M + dM - M - Qds = 0 \quad (16.17)$$

siin ds on varda elemendi telgjoone pikkus; $ds \approx dx$. Pärast taandamist avaldises (16.17) saame

$$\frac{d}{dx}M - Q = 0 \quad (16.18)$$

Avaldise (16.4) pöördavaldise saamisel arvestame, et teisendusmaatriks on ortogonaalne maatriks, st ühtib pöördmaatriks transponeeritud maatriksiga:

$$\begin{bmatrix} N \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ H \end{bmatrix} \quad (16.19)$$

Põikjõu Q saame avaldada ristjõu H ja pikijõu S kaudu:

$$Q = S\varphi + H \quad (16.20)$$

Asetades seose (16.20) momentide tasakaaluavaldisse (16.18), saame

$$\frac{d}{dx}M - S\varphi - H = 0 \quad (16.21)$$

Deformeerunud varda elemendi põhivõrrandid on esitatud tabelis 16.1. Tabelis kasutame seost (joonis 16.2)

$$\varphi = \beta = -w' \quad (16.22)$$

Pikijõu tasakaaluvõrrandi võime asendada normaaljõu tasakaaluvõrrandiga, kuna $S_x \cong N$ ($Q\varphi \ll N$)

$$N' + q_x(x) = 0 \quad (16.23)$$

Võrrandit (16.21) diferentseerime ühe korra x järgi

$$M'' - (S_x\varphi)' - H' = 0 \quad (16.24)$$

Ristjõu H tuletise saame võrrandist (16.10), pöördenurga φ avaldisest (16.22). Momentide tasakaaluvõrrand

$$M'' + (S_x w')' + q_z(x) = 0 \quad (16.25)$$

ehk

$$M'' + S'_x w' + (S_x w')' + S_x w' + q_z(x) = 0 \quad (16.26)$$

Diferentsiaalvõrrandi (16.26) lahendid sõltuvad sellest, kuidas muutub pikijõud S_x . Konstantse pikijõu S_x korral on konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrand. Liineaarselt muutuva pikijõu ($q_x = const$) puhul avaldub lahend Besseli⁴ funktsioonide kaudu [Vol67] (lk 133).

⁴Friedrich Wilhelm Bessel, saksa matemaatik, 1784–1846.

Tabel 16.1. Põhivõrrandid

	Piirkond	Raja
Staatika	$S'_x + q_x = 0; \quad N' + q_z = 0$	$S_x = \overline{S_x}$
	$H'_z + q_z = 0; \quad (Q - N\beta)' + q_z = 0$	$H_z = \overline{H_z}$
	$M'_y - H_z - S\beta = 0; \quad M'_y - Q_z = 0$	$M_y = \overline{M_y}$
Elastsusseosed	$N = EA\epsilon$	
	$M_y = EI\psi_y$	
Geomeetria	$\epsilon = u' + \frac{1}{2}(u')^2$	$u = \overline{u}$
	$\beta' = \psi_y$	$\beta = -w' = \overline{\beta}$
	$w' = -\beta$	$w = \overline{w}$

Järgnevalt vaatleme juhtu, kus pikijõud S_x on konstantne. Sellisel juhul on võrrand (16.26) järgmine:

$$M'' + S_x w'' + q_z(x) = 0 \quad (16.27)$$

Paindemoment M avaldub siirde w teise tuletise kaudu

$$M = -EIw'' \quad (16.28)$$

Varda *pikipõikpaine diferentsiaalvõrrand momentides*, milles pikijõud on konstantne ($S_x = \text{const}$)

$$M_y'' \mp \left| \frac{S_x}{EI} \right| M_y + q_z(x) = 0 \quad (16.29)$$

siin tõmbel ($S \geq 0$) on märk $-$ ja survel ($S \leq 0$) on märk $+$.

Siiretes (w) avaldub võrrand (16.29) järgmiselt:

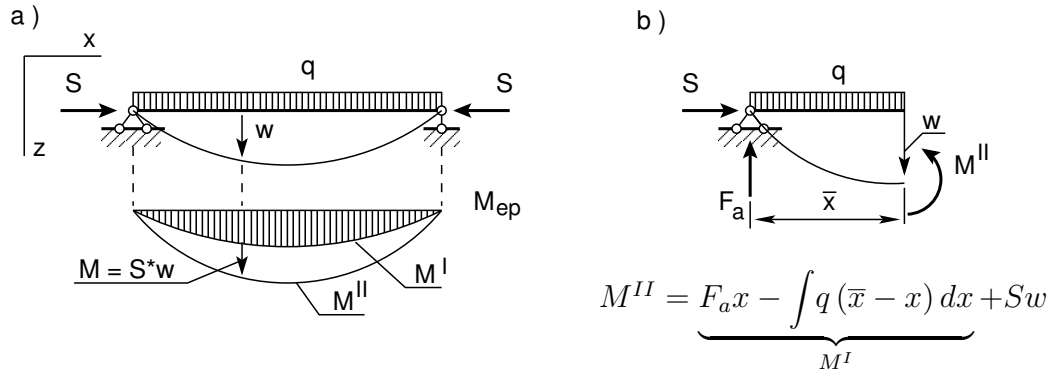
$$[EIw''']'' \mp |S_x| w'' - q_z(x) = 0 \quad (16.30)$$

Juhul kui $EI = \text{const}$, saame

$$[w''']'' \mp \left| \frac{S_x}{EI} \right| w'' - \frac{q_z(x)}{EI} = 0 \quad (16.31)$$

siin tõmbel ($S \geq 0$) on märk $-$ ja survel ($S \leq 0$) on märk $+$.

Võrrand (16.31) on *varda elastse joone diferentsiaalvõrrand pikipõikpainedel*.



Joonis 16.3. Jõud ja deformatsiooni mõõdud

Teist järku teorias saab paindemomendi M^{II} avaldada esimest järku teooria paindemomendi M^I pikijõu S ja siirde w (joonis 16.3) kaudu:

$$M^{II} = M^I + S_x w \quad (16.32)$$

Pikijõud S avaldub siirde u ja w kaudu:

$$S \approx N = -EA \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right] \quad (16.33)$$

siin kasutatakse von Kármáni tüüpi deformatsiooni mõõtu $\left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right]$, EA on varda pikijäikus. Varda pikipõikpaine tasakaaluvõrrand pikiteljele, siiretes [RH95]

$$\left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]' + q_x(x) = 0 \quad (16.34)$$

Varda pikipõikpaine tasakaaluvõrrand ristiteljele, siiretes:

$$[EIw'''] - \left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} w' \right]' - q_x(x) = 0 \quad (16.35)$$

16.2 Töö varda pikipõikpaindel

Järgnevalt vaatleme virtuaaltööd pikipõikpaindel. Selleks korrutame võrrandi (16.34) virtuaalsiirdega \hat{u} , võrrandi (16.35) virtuaalsiirdega $(-\hat{w})$ nii, et virtuaaltöö ($q_x(x) \hat{u}$) oleks positiivne ja integreerime varda pikkusel ning liidame need virtuaaltööd:

$$\int_a^b \left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]' \hat{u} dx + \int_a^b \left\{ -[EIw'''] \hat{w} + \left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} w' \right]' \hat{w} \right\} dx + \int_a^b [q_x(x) \hat{u} dx + q_z(x) \hat{w}] dx = 0 \quad (16.36)$$

Võrrandi (16.36) viimane integraal väljendab välisjõudude q_x , q_z virtuaaltööd virtuaalsetelsiretel \hat{u} ja \hat{w} , viimaseid võib vaadelda ka kaalufunktsioonidena. Võrrandi (16.36) esimest liiget integreerime ositi valemi

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (16.37)$$

järgi, võttes u ja dv järgmiselt:

$$\int_a^b \underbrace{\hat{u}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right)}_{dv} dx$$

Saame avaldise

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]' \hat{u} dx &= \underbrace{\left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]}_{N_x} \hat{u} \Big|_a^b - \\ &- \int_a^b \underbrace{\left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]}_{N_x} \underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{u}'} dx \end{aligned} \quad (16.38)$$

Võrrandi (16.36) teise liikme ositi integreerimisel saame

$$\begin{aligned} \int_a^b \left\{ -[EIw'''] \hat{w} + \left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} w' \right]' \hat{u} \right\} dx &= \\ = \underbrace{-EI[w'''] \hat{w}}_{Q_z} \Big|_a^b + \underbrace{\left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]}_{N_x} w' \hat{w} \Big|_a^b + \\ + \int_a^b \underbrace{\left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]}_{N_x} w' \hat{w}' dx \end{aligned} \quad (16.39)$$

Võrrandi (16.39) eelviimast liiget integreerime ositi:

$$\int_a^b \underbrace{EI[w''']}_{-M_y'} \underbrace{[\hat{w}']}_{-\hat{\varphi}} dx = \underbrace{EI[w'']}_{-M_y} \underbrace{[\hat{w}']}_{-\hat{\varphi}} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{EI[w'']}_{-M_y} \underbrace{[\hat{w}'']}_{-\hat{\varphi}'} dx \quad (16.40)$$

Võrrandi (16.36) saame avaldise (16.38)–(16.40) kasutades kirjutada kujul

$$\underbrace{\left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]}_{N_x} \hat{u} \Big|_a^b - \underbrace{EI[w''']}_{-Q_z} \hat{w} \Big|_a^b + \underbrace{\left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]}_{N_x} w' \hat{w} \Big|_a^b +$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{EI [w'']}_{-M_y} \underbrace{[\hat{w}']}_{-\hat{\varphi}} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]}_{N_x} \hat{u}' dx - \\
& - \int_a^b \underbrace{\left[EA \left\{ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} \right]}_{N_x} w' \hat{w}' dx - \int_a^b \underbrace{EI [w'']}_{-M_y} \underbrace{[\hat{w}'']}_{-\hat{\psi}_0} dx + \\
& + \int_a^b [q_x(x) \hat{u} + q_z(x) \hat{w}] dx = 0 \quad (16.41)
\end{aligned}$$

Arvestades seost (16.4), saame avaldise (16.41) esitada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{N_x}_{\approx S_x} \hat{u} \Big|_a^b + \underbrace{[-Q_z + N_x w']}_{H_z} \hat{w} \Big|_a^b + M_y \hat{\varphi} \Big|_a^b - \\
& - \int_a^b N_x \hat{u}' dx - \int_a^b N_x w' \hat{w}' dx - \int_a^b \underbrace{EI [w'']}_{-M_y} \underbrace{[\hat{w}'']}_{-\hat{\psi}} dx + \\
& + \int_a^b [q_x(x) \hat{u} + q_z(x) \hat{w}] dx = 0 \quad (16.42)
\end{aligned}$$

Avaldises (16.42) kirjeldavad kolm esimest liiget rajajõudude passiivtööd W_r :

$$W_r = \underbrace{N_x}_{\approx S_x} \hat{u} \Big|_a^b + \underbrace{[-Q_z + N_x w']}_{H_z} \hat{w} \Big|_a^b + M_y \hat{\varphi} \Big|_a^b \quad (16.43)$$

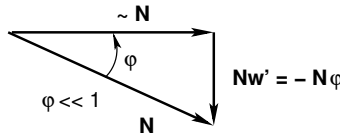
Rajatingimustest antakse ette kas rajajõud või rajasiire. Kui ette antakse rajajõud, siis räägitakse *staatilistest rajatingimustest*, kui rajasiire, siis *kinemaatilistest rajatingimustest*. Avaldise (16.42) kolm viimast liiget kirjeldavad välisjõudude passiivtööd:

$$W_v = \int_a^b [q_x(x) \hat{u} + q_z(x) \hat{w}] dx \quad (16.44)$$

Avaldises (16.42) sisejõudude N , M passiivtöö W_s on

$$W_s = - \int_a^b N_x \hat{u}' dx - \int_a^b N_x w' \hat{w}' dx - \int_a^b \underbrace{EI [w'']}_{-M_y} \underbrace{[\hat{w}'']}_{-\hat{\psi}} dx \quad (16.45)$$

Sisejõudude passiivtöö avaldises (16.45) vaatleme teise liikme olemuse selgitamiseks joonist 16.4 Bernoulli vardateoorias nihkedeformatsioon ($\gamma \approx 0$) hüljatakse. Sellega



Joonis 16.4. Normaaljõu komponendid

seoses ka põikjõu Q_z osa sisejõudude passiivtöös puudub. Arvesse võetakse ristjõu H_z osa (16.4), mis tuleb normaaljõu N projektsioonist Nw' (sisejõudude virtuaaltöö) avaldis siiretes

$$W_s = - \int_0^l \left\{ EI w'' \delta w'' + EA \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right] [\delta u' + w' \delta w'] \right\} dx \quad (16.46)$$

Virtuaaltöö avaldis

$$\int_0^l \delta \psi \underbrace{M_y}_{EI\psi} dx + \int_0^l \delta \epsilon \underbrace{N}_{EA\epsilon} dx = \int_0^l \delta w q_z dx + \int_0^l \delta u q_x dx + [S_x \delta u + H_z \delta w + M_y \delta (-w')]_0^l \quad (16.47)$$

kus

$$\delta \psi = -\delta w'', \quad \delta \epsilon = \delta u' + w' \delta w' \quad (16.48)$$

Kui jõududel on potentsiaal, siis jõudude töö vastupidise märgiga annab potentsiaalenergia. Varda täielik potentsiaalenergia ⁵ (ingl *total potential energy*), (sks *gesamt potentielle Energy* ⁶ lk 23 (lk 17)) $\Pi(u, w)$ pikipõikpindel (vt [RH95] lk 68 ja Z.P. Bažant and L. Cedolin. *Stability of Structures* ⁷, lk 220):

$$\Pi(u, w) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \underbrace{\psi^2}_{(-w'')^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \underbrace{N_x}_{\cong S_x} \epsilon dx - \int_0^l q_z w dx - [S_x u + H_z w' - M_y w']_0^l \quad (16.49)$$

kus

$$\psi = -w'', \quad \epsilon = u' + \frac{1}{2} (w')^2 \quad (16.50)$$

$$M_y = EI\psi, \quad N = EA\epsilon \quad (16.51)$$

$\Pi(u, w)$ – varda täieliku potentsiaalenergia funktsionaal ^{8 9}.

⁵<http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/AFEM.Ch04.d/AFEM.Ch04.pdf>

⁶http://www.structures.ethz.ch/education/vertiefung/kernfaecher/strukturanalyse/FEM_Skript.pdf

⁷<http://www.scribd.com/doc/89712241/Stability-of-Structures>

⁸ *funktsionaal* – Muutuvat suurust v nimetatakse funktsionaaliks, mis sõltub funktsioonist $y(x)$, mida tähistatakse $v = v[y(x)]$. Igale funktsioonile $y(x)$ (funktsioonide $y(x)$ klassist) vastab väärtus v , st igale funktsioonile $y(x)$ vastab arv v .

⁹[http://en.wikipedia.org/wiki/Functional_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Functional_(mathematics))

16.3 Homogeenne diferentsiaalvõrrand varda surve

Tuletame momentide M_{ik}, M_{ki} (joonis 16.5) avaldised

$$M_{ik} = M_{ik}^o + M_{ik}(\varphi_i, \varphi_k, \vartheta_{ik}) \tag{16.52}$$

$$M_{ki} = M_{ki}^o + M_{ki}(\varphi_i, \varphi_k, \vartheta_{ik}) \tag{16.53}$$

diferentsiaalvõrrandi (16.31) lahendist. Siin

φ_i ja φ_k positiivne suund on vastupidine kellaosutite liikumisele,

$\vartheta_{ik} = \vartheta_{ki}$ positiivne suund on kellaosutite liikumise suunas ($w_k \geq w_i$)

Võtame kasutusele parameetri

$$\nu = l \sqrt{\mp | \frac{S}{EI} |} \tag{16.54}$$

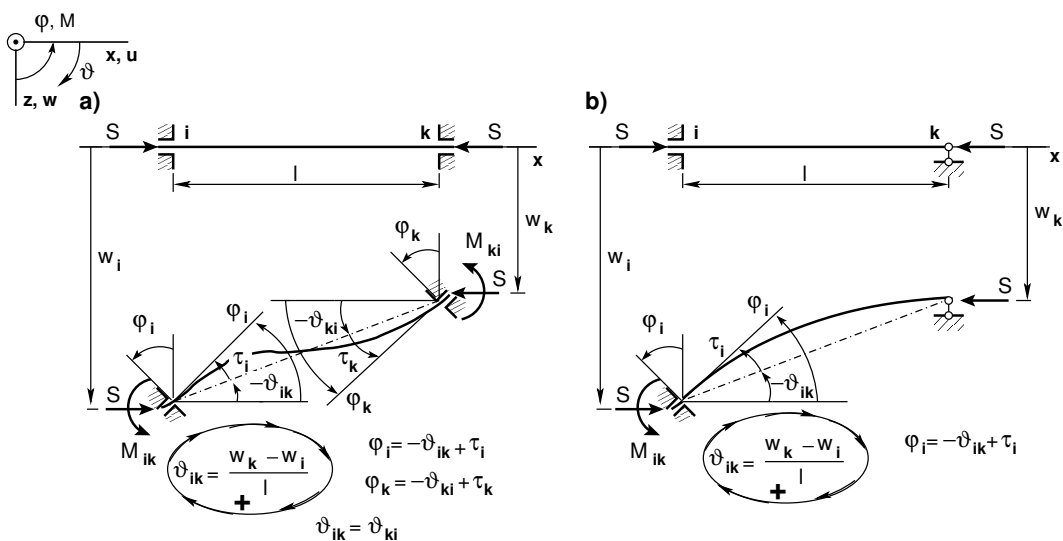
mida edaspidi nimetame *varda tunnusarvuks* (sks *Stabkennzahl*), siin tõmbel ($S \geq 0$) on märk $-$ ja surve ($S \leq 0$) on märk $+$.

Diferentsiaalvõrrand (16.31) surve

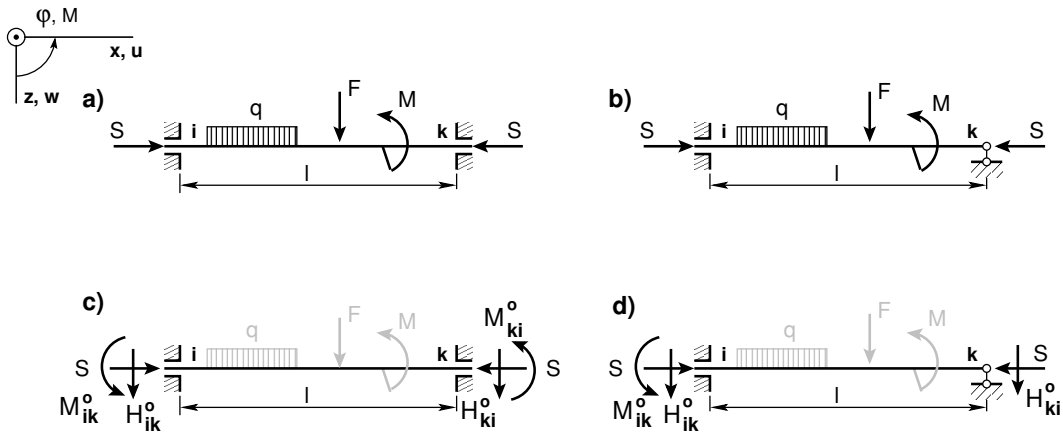
$$[w''']'' + \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 w'' - \frac{q_z(x)}{EI} = 0 \tag{16.55}$$

Diferentsiaalvõrrandi (16.55) vastav homogeenne diferentsiaalvõrrand on

$$[w_H''']'' + \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 w_H'' = 0 \tag{16.56}$$



Joonis 16.5. Momendid sõlmede ja varraste pöõretest



Joonis 16.6. Momendid koormusest

mille lahendit otsime kujul $w_H = e^{\lambda x}$. Parameetri λ väärtused saame karakteristikust võrrandist

$$\lambda^4 + \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \lambda^2 = 0 \quad (16.57)$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \frac{\nu}{l} \quad (16.58)$$

Diferentsiaalvõrrandi (16.56) lahend

$$w_H = C_1 + C_2 \frac{\nu x}{l} + \overline{C}_3 e^{i \frac{\nu x}{l}} + \overline{C}_4 e^{-i \frac{\nu x}{l}} \quad (16.59)$$

Järgmiste teisendustega

$$\begin{aligned} e^{\pm i \frac{\nu x}{l}} &= \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) \pm \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) \\ \overline{C}_3 + \overline{C}_4 &= C_3 \\ i(\overline{C}_3 - \overline{C}_4) &= C_4 \end{aligned} \quad (16.60)$$

saame diferentsiaalvõrrandi lahendi (16.59) kujul

$$w_H = C_1 + C_2 \nu \frac{x}{l} + C_3 \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) + C_4 \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) \quad (16.61)$$

Lahendi (16.61) esimene ja teine tuletis

$$w'_H = C_2 \frac{\nu}{l} - C_3 \frac{\nu}{l} \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) + C_4 \frac{\nu}{l} \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) \quad (16.62)$$

$$w''_H = -C_3 \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) - C_4 \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) = -\frac{M_H}{EI} \quad (16.63)$$

Seostame joonisel 16.5 varda otstes mõjuvad momendid M_{ik} , M_{ki} diferentsiaalvõrrandi lahendiga (16.63), kui

- $x = 0$, *siis* $M_{ik,H} = -M_{H(x=0)}$
- $x = l$, *siis* $M_{ki,H} = M_{H(x=l)}$

Saame

$$\begin{aligned} M_{ik,H} &= -EI \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 C_3 \\ M_{ki,H} &= EI \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 (C_3 \cos \nu + C_4 \sin \nu) \end{aligned} \quad (16.64)$$

16.4 Homogeenne diferentsiaalvõrrand varda tõmbel

Diferentsiaalvõrrand (16.31) tõmbel

$$[w'']'' - \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 w'' - \frac{q_z(x)}{EI} = 0 \quad (16.65)$$

kus ν on varda tunnusarv (16.54). Diferentsiaalvõrrandi (16.65) vastav homogeenne diferentsiaalvõrrand on

$$[w''_H]'' + \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 w''_H = 0 \quad (16.66)$$

ning tema karakteristik võrrand

$$\lambda^4 - \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \lambda^2 = 0 \quad (16.67)$$

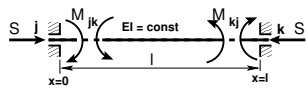
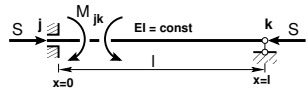
$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{\nu}{l} \quad (16.68)$$

Diferentsiaalvõrrandi (16.65) lahendi saame surve diferentsiaalvõrrandi lahendist (16.61), kui teeme järgmised asendused:

$$\begin{aligned} -S &= S \\ (i\nu)^2 &= -\nu^2 \\ \cos(i\nu) &= \cosh \nu \\ \sin(i\nu) &= \sinh \nu \\ \tan(i\nu) &= \tanh \nu \end{aligned} \quad (16.69)$$

kus trigonomeetrilised funktsioonid lähevad üle hüperboolseteks funktsioonideks.

Tabel 16.2. Rajatingimused pöõretest

Skeem	$x = 0$	$x = l$
	$w = 0$	$w = l\vartheta_{ik}$
	$\frac{dw}{dx} = -\varphi_i$	$\frac{dw}{dx} = -\varphi_k$
	$w = 0$	$w = l\vartheta_{ik}$
	$\frac{dw}{dx} = -\varphi_i$	$M_{ik} = 0$

16.5 Momendid varda otste pöõretest ja siiretest

Varda otste pöõretest ja siiretest tekkivate momentide leidmiseks varda otstes vaatleme järgmisi rajatingimusi (tabel 16.2)

Rajatingimuste (tabel 16.2) asetamisel võrranditesse (16.61), (16.62), (16.63) leiame konstandid C_1, C_2, C_3, C_4 .

Varda mõlemad otsad jäigalt kinnitatud

Rajal $x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{l} & 0 & \frac{\nu}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\varphi_i \end{bmatrix} \quad (16.70)$$

Rajal $x = l$

$$\begin{bmatrix} 1 & \nu & \cos \nu & \sin \nu \\ 0 & \frac{\nu}{l} & -\frac{\nu}{l} \sin \nu & \frac{\nu}{l} \cos \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\vartheta_{ik} \\ -\varphi_k \end{bmatrix} \quad (16.71)$$

Võrrandisüsteemist (16.70) avaldame C_2 ja C_3 vt avaldised ((16.76) ja (16.77)) ja asetame võrrandisüsteemi (16.71):

$$\begin{bmatrix} 1 - \cos \nu & \sin \nu - \nu \\ \frac{\nu}{l} \sin \nu & -\frac{\nu}{l} (1 - \cos \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\vartheta_{ik} - \varphi_i) \\ \varphi_i - \varphi_k \end{bmatrix} \quad (16.72)$$

Võrrandisüsteemi (16.72) determinant $\det V_j$

$$\det V_j = \frac{\nu}{l} \{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu\} \quad (16.73)$$

Konstandid C_1 ja C_4 leiame võrrandisüsteemi (16.72) kordajatest moodustatud maatriksi pöördmaatriksi abil. 2×2 pöördmaatriksi kirjutamiseks on järgmine eeskiri: vahetame

peadiagonaalil olevad elemendid, kõrvaldiagonaalil olevate elementide märgid muudame vastupidisteks ja jagame matriksi determinandiga. Saame

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det V_j} \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{l}(1 - \cos \nu) & -(\sin \nu - \nu) \\ -\frac{\nu}{l} \sin \nu & 1 - \cos \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l(\vartheta_{ik} - \varphi_i) \\ \varphi_i - \varphi_k \end{bmatrix} \quad (16.74)$$

Leitud konstandid C_1 ja C_4 on toodud avaldistega (16.75) ja (16.78)

$$C_1 = -\frac{l(\varphi_i - \varphi_k)(\nu - \sin \nu) - \nu(\vartheta_{ik} - \varphi_i)(1 - \cos \nu)}{\nu(2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu)} \quad (16.75)$$

$$C_2 = -\frac{l}{\nu} \varphi_i - C_4 \quad (16.76)$$

$$C_3 = C_1 \quad (16.77)$$

$$C_4 = -\frac{l(\varphi_i - \varphi_k)(1 - \cos \nu) - \nu(\vartheta_{ik} - \varphi_i) \sin \nu}{\nu(2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu)} \quad (16.78)$$

Varda üks ots järgalt kinnitatud, teises liigend

Rajatingimuste (tabel 16.2) asetamisel võrranditesse (16.61), (16.62), (16.63) leiame konstandid C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 .

Rajal $x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{l} & 0 & \frac{\nu}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\varphi_i \end{bmatrix} \quad (16.79)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \nu & \cos \nu & \sin \nu \\ 0 & 0 & -\left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \cos \nu & -\left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \sin \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\vartheta_{ik} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.80)$$

Võrrandisüsteemist (16.79) avaldame konstandid C_3 , C_2 (vt avaldised (16.86) ja (16.85)) ja asetame võrrandisüsteemi (16.80):

$$\begin{bmatrix} 1 - \cos \nu & \sin \nu - \nu \\ \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \cos \nu & -\left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \sin \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\vartheta_{ik} - \varphi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.81)$$

Võrrandisüsteemi (16.81) determinant $\det V_j$

$$\det V_j = -\left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \cos \nu \{\tan \nu - \nu\} \quad (16.82)$$

Konstandid C_1 ja C_4 leiame võrrandisüsteemi (16.81) kordajatest moodustatud maatriksi pöördmaatriksi abil. 2×2 pöördmaatriksi kirjutamiseks on järgmine eeskiri: *vahetame peadiagonaalil olevad elemendid, kõrvaldiagonaalil olevate elementide märgid muudame vastupidisteks ja jagame maatriksi determinandiga*

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det V_j} \begin{bmatrix} -\left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \sin \nu & -(\sin \nu - \nu) \\ -\left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \cos \nu & 1 - \cos \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l(\vartheta_{ik} - \varphi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.83)$$

Leitud konstandid C_1 ja C_4 on toodud avaldistega (16.84) ja (16.87)

$$C_1 = \frac{l(\vartheta_{ik} - \varphi_i) \tan \nu}{\tan \nu - \nu} \quad (16.84)$$

$$C_2 = -\frac{l}{\nu} \varphi_i - C_4 \quad (16.85)$$

$$C_3 = -C_1 \quad (16.86)$$

$$C_4 = \frac{C_1}{\tan \nu} \quad (16.87)$$

Asetades leitud konstandid momendi avaldisse (16.63), saame varda otstes tekkivad momendid varda otste pööretest φ_i , φ_k ja varda pöördest $\vartheta_{ik} = \vartheta_{ki}$.

Varda mõlemad otsad jäigalt kinnitatud

$$M_{ik}(\varphi_i, \varphi_k, \vartheta_{ik}) = \frac{EI}{l} [A^* \varphi_i + B^* \varphi_k + (A^* + B^*) \vartheta_{ik}] \quad (16.88)$$

$$M_{ki}(\varphi_i, \varphi_k, \vartheta_{ik}) = \frac{EI}{l} [A^* \varphi_k + B^* \varphi_i + (A^* + B^*) \vartheta_{ik}] \quad (16.89)$$

kus teise märgikokkuleppe puhul

- jäikade sõlmede pöörded φ_j , φ_k (joonis 16.5) on positiivsed vastupidi kellaosutite liikumise suunale
- varda pöörde (saks *der Stabdrehwinkel*) ϑ_{jk} (joonis 16.5) positiivne suund on kellaosutite liikumise suunas.

Varda üks ots jäigalt kinnitatud, teises liigend

$$M_{ik}(\varphi_i, \vartheta_{ik}) = \frac{EI}{l} [C^*(\varphi_i + \vartheta_{ik})] \quad (16.90)$$

Avaldistes (16.88) ja (16.90) nimetame suurusi A^* , B^* ning C^* eesarvudeks (sks *Vorzahlen*)

$$\begin{aligned} A^* &\equiv 4\varphi_2(\nu) = \frac{\nu \sin \nu - \nu^2 \cos \nu}{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu} \\ B^* &\equiv 2\varphi_3(\nu) = \frac{\nu^2 - \nu \sin \nu}{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu} \\ C^* &\equiv 3\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \sin \nu}{\sin \nu - \nu \cos \nu} \end{aligned} \quad (16.91)$$

Eesarvude avaldised survel on toodud tabelis H.5. Eesarvude sõltuvus survel varda tunnusarvust ν on näidatud joonisel H.3 lk 706. Eesarvude graafika koostab GNU

```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järjehoidjad Seadistused Abi
octave-3.0.1:1> eesarvud
      EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL
Sisesta varda pikkus l=6
Sisejõud S
Survel:märk - ( S<=0, N<=0 ); Tõmbel:märk + ( S>=0, N>=0 )
Ütle kas + või - märk= -
Ütle S-i väärtus. S=70
Ütle varda paindejäikus EJ=30000

-----
Pikijõud survel : S= -70 Varda ristlõike paindejäikus EJ= 30000
-----
      nu   |   A   |   B   |  A+B  |   C   |  A-B  |   V
-----
      0.28983  3.98879  2.00281  5.99159  2.98316  1.98598  1.008
-----

Varda pikkus l=6
-----
      ALFA   |   BETA   |
-----
      0.33522  0.16831
octave-3.0.1:2>
  
```

Joonis 16.7. Varda eesarvude arvutamine GNU Octave'iga.

Octave'i programm [eesagraf.m](#) lk 741.

Eesarvude leidmiseks saab kasutada GNU Octave'i programmi [eesarvud.m](#) lk 740.

Varda tunnusarvu

$$\nu = l\sqrt{\left|\frac{S}{EI}\right|} \quad (16.92)$$

leidmiseks kasutame GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni [tnnusarv.m](#) lk 741.

Eesarve saab leida ka GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni [eesarv.m](#) lk 741 abil.

Funktsioonid $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ja $\varphi_4(\nu)$ on tabuleeritud õpikus [EP67] lk 599. Nende funktsioonide leidmiseks saab kasutada GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni [fi_ja_eta.m](#) lk 741.

Kui puudub pikijõud, st $S = 0$, siis eesarvude avaldistes (16.91) piirile minnes saame deformatsioonimeetodis tuntud suurused

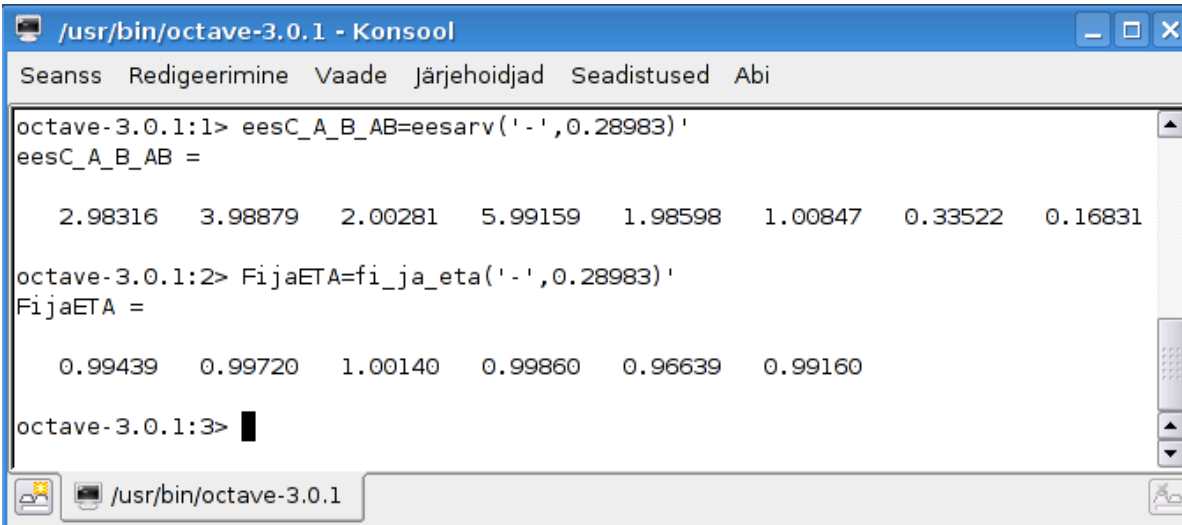
$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow 0} A^* &= 4, & \lim_{\nu \rightarrow 0} B^* &= 2, & \lim_{\nu \rightarrow 0} C^* &= 3 \\ \lim_{\nu \rightarrow 0} \varphi_1(\nu) &= 1, & \lim_{\nu \rightarrow 0} \varphi_2(\nu) &= 1, & \lim_{\nu \rightarrow 0} \varphi_3(\nu) &= 1 \end{aligned} \quad (16.93)$$

Eesarvud tõmbel on esitatud tabelis H.5 ja nende leidmiseks võib kasutada GNU Octave'i programmi [eesarvud.m](#).

Eesarvude sõltuvus tõmbel varda tunnusarvust ν on näidatud joonisel H.4.

Eesarvude tõmbel leidmiseks võib kasutada GNU Octave'i programmi [eesarvud.m](#) (I.93) ja [eesarv.m](#) (I.96).

Joonisel 16.7 on näidatud arvude sisestamine programmi [eesarvud.m](#). Joonisel 16.7 olevas näites on sisestatud varda pikkus $l=6$, surve märk '-' (tõmbel '+'), pikijõud $S=70$



```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss  Redigeerimine  Vaade  Järjehoidjad  Seadistused  Abi
octave-3.0.1:1> eesC_A_B_AB=eesarv('-',0.28983)'
eesC_A_B_AB =

    2.98316    3.98879    2.00281    5.99159    1.98598    1.00847    0.33522    0.16831

octave-3.0.1:2> FijaETA=fi_ja_eta('-',0.28983)'
FijaETA =

    0.99439    0.99720    1.00140    0.99860    0.96639    0.99160

octave-3.0.1:3>

```

Joonis 16.8. Eesarvude arvutamine GNU Octave'iga.

ja varda paindejäikus $EJ=30000$.

Programm arvutab ja väljastab: ν , A^* , B^* , $A^* + B^*$, C^* , $A^* - B^*$, V^* , α^* , β^* . Viimaseid kahte kasutatakse jõumeetodi puhul.

Joonisel 16.8 olevas näites on sisestatud funktsioonile *eesarv.m* järgmised parameetrid: surve märk '-' ja varda tunnusarv ν ($\nu = 0.28983$). Arvutifunktsioon *eesarv(' ', 0.28983)* arvutab ja väljastab eesarvud järgmises järjekorras: C^* , A^* , B^* , $A + B^*$, $A - B^*$, V^* , α^* , β^* .

Joonisel 16.8 on näidatud ka funktsioonide $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$, $\varphi_4(\nu)$ ja $\eta_1(\nu)$, $\eta_2(\nu)$ arvutamist arvutifunktsiooniga *fil_ja_eta.m*.

Arvutiprogramm väljastab need funktsioonid loetletud järjekorras. Need funktsioonid on ka tabuleeritud õpikus [EP67] lk 599 ja neid kasutatakse analoogiliselt trigonomeetriliste funktsioonide tabelitega.

16.6 Varda otste momendid põikkoormusest

Vaatleme ühtlaselt jaotatud põikkoormust $q_z = const$. Diferentsiaalvõrrandi (16.91) erilahendiks w_E valime lahendi

$$w_E = \frac{q_z}{EI} \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \frac{x^2}{2}, \quad M_E = -q_z \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \quad (16.94)$$

Valitud erilahendi õigsust saame kontrollida diferentsiaalvõrrandiga (16.55). Diferentsiaalvõrrandi (16.55) lahend koosneb homogeenest lahendist w_H (16.61) ja erilahendist w_E (16.94), st $w = w_H + w_E$

$$w(x) = C_1 + C_2 \nu \frac{x}{l} + C_3 \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) + C_4 \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) + \frac{q_z}{EI} \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \frac{x^2}{2} \quad (16.95)$$

Lahendi esimene ja teine tuletis

$$w'(x) = C_2 \frac{\nu}{l} - C_3 \frac{\nu}{l} \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) + C_4 \frac{\nu}{l} \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) + \frac{q_z}{EI} \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 x \quad (16.96)$$

$$M(x) = -EIw''(x) = EIC_3 \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) + EIC_4 \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) - q_z \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \quad (16.97)$$

Varda põikkoormusest tekkivate momentide leidmiseks varda otstes vaatleme rajatingimusi (tabel 16.3).

Rajatingimuste (tabel 16.3) asetamisel võrranditesse (16.95), (16.96), (16.97) leiame konstandid C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 .

Varda mõlemad otsad jäigalt kinnitatud

$$C_1 = -\frac{q_z}{EI} \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \frac{1 + \cos \nu}{\sin \nu} \quad (16.98)$$

Tabel 16.3. Rajatingimused põikkoormusega

Skeem	$x = 0$	$x = l$
	$w = 0$	$w = 0$
	$\frac{dw}{dx} = 0$	$\frac{dw}{dx} = 0$
	$w = 0$	$w = 0$
	$\frac{dw}{dx} = 0$	$M_{ki} = 0$

$$C_2 = -\frac{q_z}{EI} \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \frac{l}{2} \tag{16.99}$$

$$C_3 = -C_1 \tag{16.100}$$

$$C_4 = -C_2 \tag{16.101}$$

Põikkoormusest $q_z = const$ tekkiva momendi arvutamiseks vardas saame avaldise

$$M(x) = \frac{q_z}{2} \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \left[\frac{\nu(1 + \cos \nu)}{\sin \nu} \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) + \nu \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) - 2 \right] \tag{16.102}$$

Põikkoormusest $q_z = const$ momendid varda otstes

$$M_{ik}^0 = -\frac{q_z}{2} \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \left[\frac{\nu(1 + \cos \nu)}{\sin \nu} - 1 \right] \tag{16.103}$$

$$M_{ik}^0 = -M_{ki}^0 \tag{16.104}$$

Varda mõlemad otsad kinnitatud jäigalt

$$M_{ik}^0 = -M_{ki}^0 = (A^* - B^*) V^* \frac{q_z l^2}{24} \tag{16.105}$$

kus eesarv V^* ja $(A^* - B^*)$ on

$$V^* = 12 \frac{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu}{\nu^3 \sin \nu} \tag{16.106}$$

$$A^* - B^* = \frac{\nu(1 + \cos \nu)}{\sin \nu} \tag{16.107}$$

Eesarvu V^* sõltuvus tunnusarvust ν survel on näidatud joonisel H.5. Eesarvu V^* saab leida ka GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni [eesarv.m](https://www.gnu.org/software/octave/doc/essays/eesarv.m) lk 741 abil.

Kui varda üks ots on jäigalt kinnitatud ja teises otsas on liigend, siis vastavate rajatingimuste (tabel 16.3) asetamisel võrranditesse (16.95), (16.96), (16.97) leiame konstandid C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 .

Varda üks ots jäigalt kinnitatud, teises liigend

$$C_1 = -\frac{q_z}{EI} \left(\frac{l}{\nu}\right)^4 \frac{2(\nu - \sin \nu) - \nu^2 \sin \nu}{\nu \cos \nu - \sin \nu} \quad (16.108)$$

$$C_2 = -\frac{q_z}{EI} \left(\frac{l}{\nu}\right)^4 \frac{2(\cos \nu - 1) + \nu^2 \cos \nu}{\nu \cos \nu - \sin \nu} \quad (16.109)$$

$$C_3 = -C_1 \quad (16.110)$$

$$C_4 = -C_2 \quad (16.111)$$

Põikkoormusest tekkiva momendi avaldis

$$M(x) = -\frac{q_z}{2} \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \left[\frac{2(\nu - \sin \nu) - \nu^2 \sin \nu}{\nu \cos \nu - \sin \nu} \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) + \frac{2(\cos \nu - 1) + \nu^2 \cos \nu}{\nu \cos \nu - \sin \nu} \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) - 2 \right] \quad (16.112)$$

Varda otstes tekkivad momendid

$$M_{ik}^0 = -\frac{q_z}{2} \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \frac{2(\nu - \sin \nu) - \nu^2 \sin \nu}{\nu \cos \nu - \sin \nu} \quad (16.113)$$

$$M_{ki}^0 = 0 \quad (16.114)$$

Varda üks ots jäigalt kinnitatud, teises liigend

$$M_{ik}^0 = C^* V^* \frac{q_z l^2}{24} \quad (16.115)$$

kus C^* on avaldis (16.91) ja V^* avaldis (16.106).

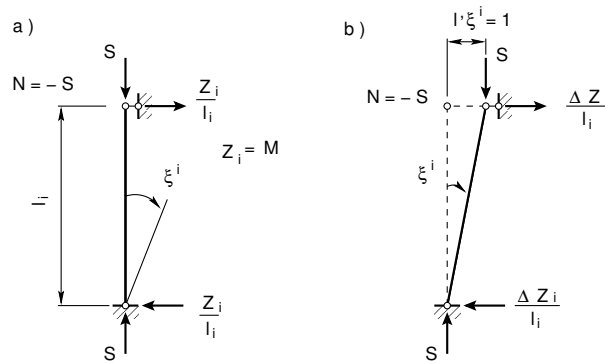
16.7 Täiendav moment varda pöördest

Varda pöördest tekib täiendav moment ΔM . Vaatleme joonisel 16.9 näidatud varda tasakaalu. Täiendava momendi ΔZ_i esitame jõupaarina $\frac{\Delta Z_i}{l}$ (joonis 16.9 b). Koostame momentide tasakaaluvõrrandi varda alumise otsa suhtes:

$$\frac{\Delta Z_i^i}{l} l + Sl\xi^i = 0 \tag{16.116}$$

$$Sl\xi^i = Sl1 = \Delta M \tag{16.117}$$

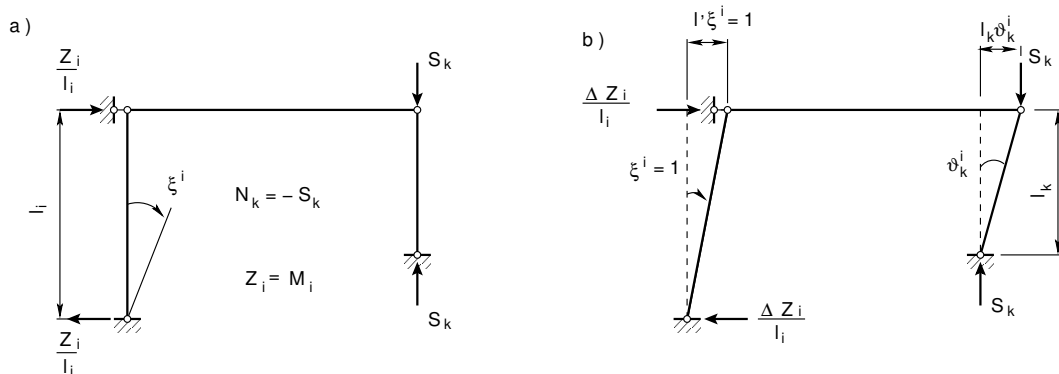
$$\Delta Z_i^i = -Sl1 \tag{16.118}$$



Joonis 16.9. Täiendav moment varda pöördest

Avaldis (16.118) on saadud, kui varda pööre on $\xi^i = 1$. Raamil, millel varraste pöördenurgad on erinevad (joonis 16.10), tekib varda k pöördest täiendav moment ΔM_k

$$\Delta M_k = S_k l_k \vartheta_k^i \tag{16.119}$$



Joonis 16.10. Täiendavad momendid

$$\Delta M_k \delta \vartheta_k^i + \Delta Z_i^i \delta \xi^i = 0 \tag{16.120}$$

Virtuaalsed siirded $\delta \vartheta_k^i$ ja $\delta \xi^i$ on sõltuvad

$$l_i \delta \xi^i = l_k \delta \vartheta_k^i \tag{16.121}$$

Arvestades avaldise (16.119) ja (16.121), kirjutame avaldise (16.120) kujul

$$\left[S_k l_k \vartheta_k^i + \Delta Z_i^i \frac{l_k}{l_i} \right] \delta \vartheta_k^i = 0 \tag{16.122}$$

Avaldisest (16.122) saame täiendava momendi

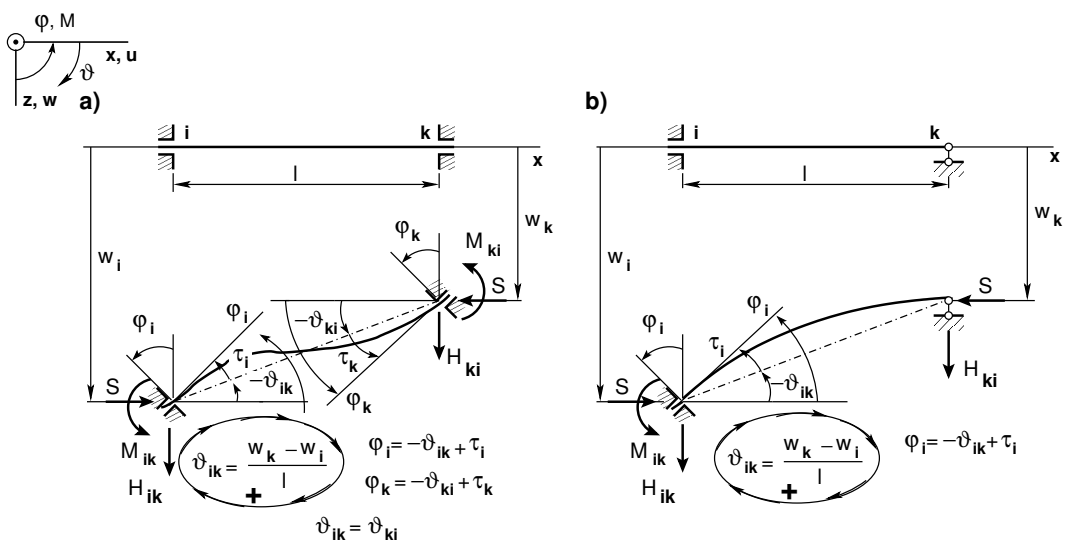
$$\Delta Z_i^i = -S_k l_k \vartheta_k^i \frac{l_i}{l_k} = -S_k l_k \left(\vartheta_k^i \right)^2, \quad \left(\vartheta_k^i = \frac{l_i}{l_k}, \quad k \neq i \quad \xi^i = 1 \right) \tag{16.123}$$

siin $S_k = -N_k$ on survejõud.

Mitme (n) jõu S_k olemasolu korral summeerime

$$\Delta Z_i^i = - \sum_{k=1}^n S_k l_k (\vartheta_{ik})^2 = - \sum_{k=1}^n i_k \nu_k^2 \vartheta_k^2 \tag{16.124}$$

siin $i_k = \frac{EI}{l}$ on varda k paindejäikus.



Joonis 16.11. Ristjõud H_{ik} , pikijõud S_{ik} ja paindemoment M_{ik}

16.8 Ristjõud H_{ik} , pikijõud S_{ik} ja paindemoment M_{ik}

Ristjõu H_{ik} , pikijõu S_{ik} ja paindemomendi M_{ik} vahelise seose tuletamiseks vaatleme joonist 16.11. Koostame momentide tasakaaluvõrrandi toe k suhtes:

$$H_{ik}l_{ik} + M_{ik} + M_{ki} - S_{ik}l_{ik}\vartheta_{ik} = 0 \quad (16.125)$$

$$H_{ik} = -\frac{M_{ik} + M_{ki}}{l_{ik}} - S_{ik}\vartheta_{ik} \quad (16.126)$$

Koormates varrast põikkoormusega q ja jõuga F (joonis 16.6) saame täiendavad ristjõud H_{ik}^0 , H_{ki}^0 . Täielikud ristjõud II-märgikokkuleppe puhul:

$$\begin{aligned} H_{ik} &= H_{ik}^0 - \frac{M_{ik} + M_{ki}}{l_{ik}} - S_{ik}\vartheta_{ik} \\ H_{ki} &= H_{ki}^0 + \frac{M_{ik} + M_{ki}}{l_{ik}} - S_{ik}\vartheta_{ik} \end{aligned} \quad (16.127)$$

Alustades arvutust esimest järku teooriaga, saame pikijõu $S_{ik}^{(0)}$. Ristjõu arvutamiseks kasutame järgmist seost:

$$H_{ik}^{(1)} = H_{ik}^0 - \frac{M_{ik}^{(1)} + M_{ki}^{(1)}}{l_{ik}} - S_{ik}^{(1)}l_{ik}\vartheta_{ik}^{(1)} \quad (16.128)$$

Täpsustatud pikijõu saame sõlme tasakaalust.

16.9 Paindemomendi epüüri koostamine

Paindemomendi epüür koostatakse esimest järku teorias lihttala epüüride liitmisega (joonis 16.12)

$$M(x) = M_0^R + M_0^q \quad (16.129)$$

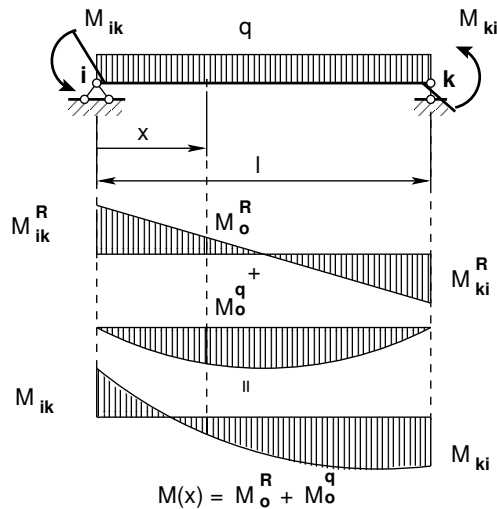
kus

$$M_0^R(x) = M_{ki}\frac{x}{l} + M_{ik}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (16.130)$$

Teist järku teorias osutub selline superpositsioon¹⁰ samuti võimalikuks. Tala otstes mõjuvate momentide korral ei ole aga momendi epüür sirge nagu joonisel 16.12. Momendi jaotuse saamiseks tuleb lahendada järgmine diferentsiaalvõrrand:

$$\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{S}{EI}M = 0, \quad (S - \text{survejõud}, \quad q_z = 0) \quad (16.131)$$

¹⁰**Superpositsioon** – liitfunktsiooni moodustamine antud funktsioonide kaudu.



Joonis 16.12. Paindemomentide epüür

mille lahend on

$$M_0(x) = C_1 \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) + C_2 \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) \quad (16.132)$$

kus

$$\nu = l \sqrt{\frac{S}{EI}} \quad (16.133)$$

Rajatingimustest määrame konstandid C_1 ja C_2 :

$$\begin{aligned} x = 0; \quad M_{ik} = -m(x = 0); \quad &\Rightarrow \quad C_2 = -M_{ik} \\ x = l; \quad M_{ki} = M(x = l); \quad &\Rightarrow \quad M_{ki} = C_1 \sin \nu - M_{ik} \cos \nu \\ &\Rightarrow \quad C_1 = -\frac{l}{\sin \nu} [M_{ik} + M_{ki} \cos \nu] \end{aligned} \quad (16.134)$$

Kasutades leitud konstantide avaldise, kirjutame avaldise (16.132) kujul

$$M_0(x) = M_{ki} \frac{\sin\left(\nu \frac{x}{l}\right)}{\sin \nu} + M_{ik} \cos \nu \frac{\sin\left(\nu \frac{x}{l}\right)}{\sin \nu} + M_{ik} \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) \quad (16.135)$$

ehk

$$M_0^R(x) = M_{ki} \frac{\sin\left(\nu \frac{x}{l}\right)}{\sin \nu} + M_{ik} \frac{\sin\left(\nu \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right)}{\sin \nu} \quad (16.136)$$

Siit selgub, et otstes mõjuvaid momente M_{ik} , M_{ki} ei ühenda sirgjoon nii nagu esimest järku teooria puhul (joonis 16.12). Momendi M_0^R varda pikipõikpaindel saab leida ka

GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni `mxrikki.m` lk 741 abil. Asetades avaldisse (16.136) piirväärtused

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\nu \frac{x}{l}\right)}{\sin \nu} = \frac{x}{l} \quad (16.137)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\nu \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right)}{\sin \nu} = 1 - \frac{x}{l} \quad (16.138)$$

saame avaldise (16.130).

Põikkoormuse korral on diferentsiaalvõrrand järgmine:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 M + q_z = 0 \quad (16.139)$$

Selle lahend on

$$M(x) = C_1 \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) + C_2 \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) + M_E \quad (16.140)$$

Konstantse koormuse puhul ($q_z = \text{const}$) on erilahend

$$M_E = -\left(\frac{l}{\nu}\right)^2 q_z \quad (16.141)$$

Järgmistest rajatingimustest saame integreerimiskonstandid C_1, C_2 :

$$\begin{aligned} x = 0 \\ M = 0 = C_2 + M_E; & \Rightarrow C_2 = \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 q_z \\ x = l; & \\ M = 0 = C_1 \sin \nu + C_2 \cos \nu + M_E = C_1 \sin \nu + \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 q_z (\cos \nu - 1); & \\ \Rightarrow C_1 = -\left(\frac{l}{\nu}\right)^2 q_z \frac{(\cos \nu - 1)}{\sin \nu} & \end{aligned} \quad (16.142)$$

Asetades leitud integreerimiskonstandid C_1, C_2 avaldisse (16.140), saame

$$M_0^q = -q_z \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \left[\frac{(\cos \nu - 1)}{\sin \nu} \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) - \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) + 1 \right] \quad (16.143)$$

ehk

$$M_0^q(x) = q_z \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \left[\frac{\sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) + \sin\left(\nu \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right)}{\sin \nu} - 1 \right] \quad (16.144)$$

Momendi M_0^q varda pikipõikpindel saab leida ka GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni `mxq.m` lk 741 abil.

16.10 Kriitilise koormuse määramine

Varrassüsteemi *kriitilise koormuse* määramiseks moodustatakse teist järku teoorias deformatsioonimeetodi kanooniline võrrandisüsteem

$$\mathbf{KV} = \mathbf{F} \quad (16.145)$$

Võrrandisüsteemi determinant $\det \mathbf{K} = 0$ võrdsustatakse nulliga. Kanoonilise võrrandisüsteemi kordajates esinevad varda tunnusarvud ν_i sisaldavad erinevaid pikijõude S_i . Varda tunnusarvude ν_i leidmisel võtame kasutusele *varda baastunnusarvu* ν_i , mille kaudu avaldame kõikide varraste tunnusarvud. Varraste eesarvud on siis funktsioonid varda baastunnusarvust ν_0 . Kanoonilise võrrandisüsteemi determinandi nullisuse tingimusest leiame baastunnusarvu ν_0 . Varrassüsteemi kriitilised koormused

$$S_{kr} = \nu_0^2 \frac{EI_0}{l_0^2}, \quad \left(\nu = l \sqrt{\frac{S}{EI}} \right) \quad (16.146)$$

avaldame baastunnusarvu kaudu.

16.11 Raami kriitilise koormuse arvutamise näited

16.11.1 Raami I kriitiline koormus. Näide 16.1

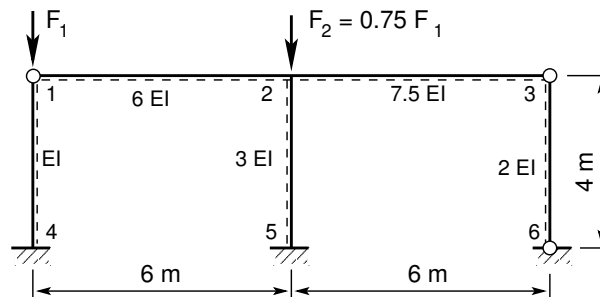
Näide 16.1 Vaatleme joonisel 16.13 kujutatud raami, mis on koormatud sõlmes 1 koondatud jõuga $F_1 = F$ ja sõlmes 2 koondatud jõuga $F_2 = 0.75F$. Ülesandeks on leida raami koormuse F kriitiline suurus deformatsioonimeetodiga. Raami ristlõigete jäikused ja raami mõõtmed on toodud joonisel.

Erinevalt õpikus [EP67] toodud raami arvutusest kasutatakse kõnesolevas näites arvutiprogramme ja teist märgikokkulepet (vt jaotis 1.12 lk 47).

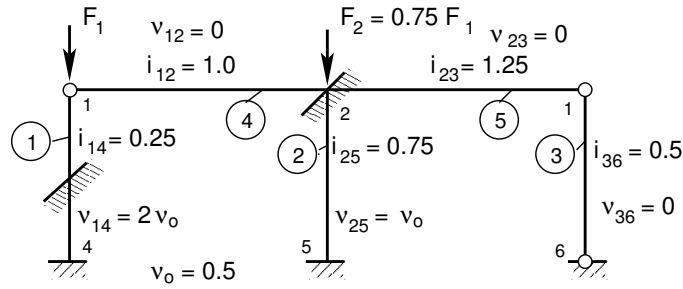
Joonisel 16.14 on esitatud raami geomeetriliselt määratud põhiskeem koos lisasidemetega. Joonisel on esitatud ka varda jäikus i_k ja varda tunnusarv ν_k .

Varraste jäikused

$$i_{12} = \frac{6EI}{6} = i_0 = 1$$



Joonis 16.13. Raami stabiilsus



Joonis 16.14. Raami geomeetriselt määratud põhiskeem

$$\begin{aligned}
 i_{23} &= \frac{7.5EI}{6} = 1.25i_0 = 1.25 \\
 i_{14} &= \frac{EI}{4} = 0.25i_0 = 0.25 \\
 i_{25} &= \frac{3EI}{4} = 0.75i_0 = 0.75 \\
 i_{36} &= \frac{2EI}{4} = 0.5i_0 = 0.5
 \end{aligned} \tag{16.147}$$

Varraste tunnusarvud. Varda baastunnusarvuks ν_0 võib võtta varda 2–5 tunnusarvu ν_{25} (avaldises (16.148) vasakul) või varda 1–4 tunnusarvu ν_{14} (avaldises (16.148) paremal).

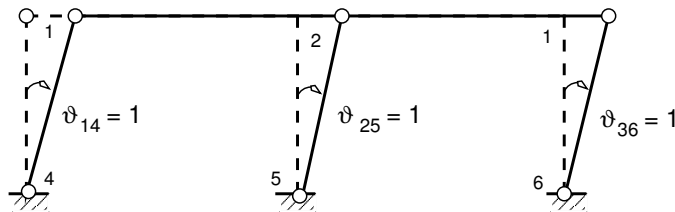
$$\begin{aligned}
 \nu_{25} &= 4\sqrt{\frac{0.75F_1}{3EI}} = \nu_0, & \nu_1 &= \nu_0 \\
 \nu_{14} &= 4\sqrt{\frac{F_1}{EI}} = 4\sqrt{\frac{0.75F_1}{3EI}} \sqrt{\frac{3}{0.75}} = 2\nu_0, & \nu_2 &= 0.5\nu_0 \\
 \nu_{12} &= \nu_{23} = \nu_{36} = 0, & \nu_4 &= \nu_5 = \nu_3 = 0
 \end{aligned} \tag{16.148}$$

Deformatsioonimeetodi kanooniline võrrandisüsteem

$$\mathbf{r}\xi = \mathbf{r}^\ominus \tag{16.149}$$

ehk

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} + \Delta r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1p} \\ r_{2p} \end{bmatrix} \tag{16.150}$$



Joonis 16.15. Raami varrasahel

Võtame varda 1–4 tunnusarvu ν_{14} baastunnusarvuks ν_0 .

Võrrandisüsteemi (16.150) kordajatest moodustatud determinant

$$\det \mathbf{r} = \begin{vmatrix} r_{11}(\nu_0) & r_{12}(\nu_0) \\ r_{21}(\nu_0) & r_{22}(\nu_0) + \Delta r_{22}(\nu_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (16.151)$$

Järgnevalt leiame determinandi elemendi $r_{11}(\nu_0)$

$$\begin{aligned} r_{11}(\nu_0) &= 3i_4 \varphi_1(\nu_4) + 4i_2 \varphi_2(\nu_i) + 3i_5 \varphi_1(\nu_5) = \\ &= 3i_4 f_i(1,4) + 4i_2 f_i(2,2) + 3i_5 f_i(1,5) \end{aligned} \quad (16.152)$$

kus

$$\begin{aligned} f_i(1,i) &= \varphi_1(\nu_i) & f_i(4,i) &= \varphi_4(\nu_i) \\ f_i(2,i) &= \varphi_2(\nu_i) & f_i(5,i) &= \eta_1(\nu_i) \\ f_i(3,i) &= \varphi_3(\nu_i) & f_i(6,i) &= \eta_2(\nu_i) \end{aligned} \quad (16.153)$$

on i -nda varda pikipõikpaine tegurid (eesarvud), nende arvude tabelid leiab õpikus [EP67] lk 598 ja [SALŠ84] lk 407.

Pikipõikpaine parandustegurite arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `fi_ja_eta.m` lk 741. Siin funktsiooni `fi_ja_eta(mark,nu)` argument „mark” on survel '-' ja tõmbel '+' ning „nu” – varda tunnusarvu arvuline väärtus.

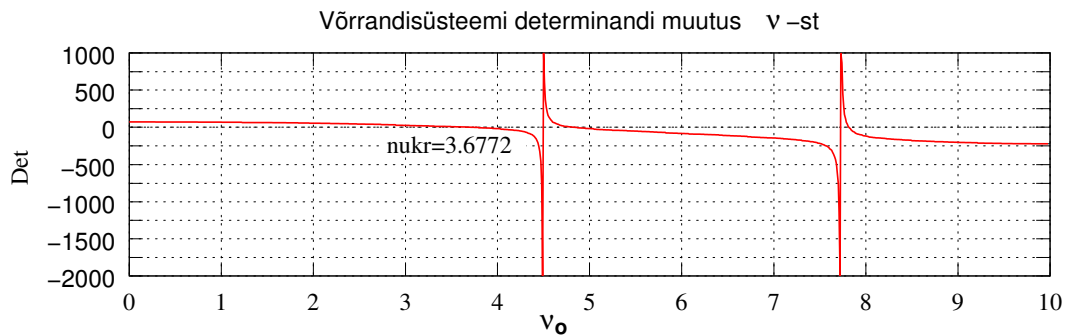
Funktsioon väljastab parandustegurid järjekorras: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \eta_1, \eta_2$.

Arvutuspäevik 16.1 Näide parandustegurite: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \eta_1$ ja η_2 arvutamisest.

```
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> nu = 2.5
nu = 2.5000
octave-3.0.1:4> fiJAeta=fi_ja_eta('-',nu)
fiJAeta =

    0.47930    0.77196    1.12858    0.89083   -1.60403    0.37000

octave-3.0.1:5> diary off
```



Joonis 16.16. Determinandi nullkohad I

Determinandi elemendid $r_{ij}(\nu_0)$

$$r_{12}(\nu_0) = 6 i_2 \varphi_4(\nu_2) \vartheta_2 = 6 i_2 fi(4, 2) \vartheta_2 \quad (16.154)$$

$$r_{21}(\nu_0) = r_{12}(\nu_0) \quad (16.155)$$

$$\begin{aligned} r_{22}(\nu_0) &= 3 i_1 \eta_1(\nu_1) \vartheta_1^2 + 12 i_2 \eta_2(\nu_2) \vartheta_2^2 = \\ &= 3 i_1 fi(5, 1) \vartheta_1^2 + 12 i_2 fi(6, 2) \vartheta_2^2 \end{aligned} \quad (16.156)$$

Determinandi (16.151) elemendi r_{12} (16.154) ees ei ole miinusmärki, sest näites kasutame teist märgikokkulepet (vt 11 lk 281).

Determinandi elemendi $\Delta r_{22}(\nu_0)$ arutamisel lähtume avaldisest (16.124) lk 520 ja avaldisest (16.146)

$$\Delta r_i^i = - \sum_{k=1}^n S_k l_k (\vartheta_k^i)^2 = - \sum_{k=1}^n \nu_k^2 \frac{EI_k}{l_k^2} l_k (\vartheta_k^i)^2 = - \sum_{k=1}^n i_k (\nu_k \vartheta_k^i)^2 \quad (16.157)$$

Avaldis (16.157) on juba arvesse võetud funktsioonidega $\eta_1(\nu_1)$ ja $\eta_2(\nu_2)$.

$$\eta_1(\nu_1) = C/3 - (\nu^2)/3, \quad \eta_2(\nu_2) = (A+B)/6 - (\nu^2)/12 \quad (16.158)$$

Determinandi element

$$\Delta r_{22}(\nu_0) = -i_3 (\nu_3 \vartheta_3)^2 = 0 \quad (16.159)$$

Determinandi $\det \mathbf{r}$ (16.151) arutamiseks kasutame GNU Octave'i programmi *naide3ep.m*¹¹ lk 742. Arvutuse tulemused on toodud arvutuse päevikus 16.2.

Determinandi graafik (ν_0 -st) on toodud joonisel 16.16.

Varda 1–4 kriitiline jõud

$$S_{14kr} = \nu_{1kr}^2 \frac{EI_1}{l_1^2} = 3.6772^2 \frac{EI}{4^2} = 0.8451 EI \quad (16.160)$$

Siin leiame varda kriitilise tunnusarvu ν_{1kr} arvutiprogrammiga *naide3ep.m*. Arvutuse tulemused on arvutuse päevikus 16.2. Siit näeme, et $\nu_{1kr} = 3.6772$ ja $\nu_{2kr} = 1.8386$.

Varda 2–5 kriitiline jõud

$$S_{25kr} = \nu_{2kr}^2 \frac{EI_2}{l_2^2} = 1.8386^2 \frac{E3I}{4^2} = 0.6338 EI \quad (16.161)$$

Kriitiline jõud F_{1kr}

$$\begin{aligned} F_{1kr} &= S_{14kr} = 3.6772^2 \frac{EI}{4^2} = 0.8451 EI \\ F_{1kr} &= S_{25kr}/0.75 = 1.8386^2 \frac{E3I}{4^2 \cdot 0.75} = 0.8451 EI \end{aligned} \quad (16.162)$$

Siin 0.75 on tegur, mis arvestab pikijõu jaotust $F_2 = 0.75 F_1$ ($F_1 = F_2/0.75$).

¹¹ ./octaveProgrammid/naide3ep.Kommentaariid.pdf

Arvutuspäevik 16.2 *Kriitilise jõu arvutus*

```

octave-3.0.1:1> diary naide3ep.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> naide3ep
Arvutuse algus.
varraste_pikkused_l =

    4    4    4    6    6

varraste_ristloigete_jaikused_EI =

    1.0000    3.0000    2.0000    6.0000    7.5000

varraste_poordenurgad_deta =

    1    1    1    0    0

varraste_sisejoud =

    1.00000    0.75000    0.00000    0.00000    0.00000

varraste_redutseeritud_jaikused_i =

    0.25000    0.75000    0.50000    1.00000    1.25000

varraste_redutseeritud_tunnusarvud_nured =

    1.00000    0.50000    0.00000    0.00000    0.00000

Läheme esimest Determinandi nulli täpsustama.
nu_enne = 3.6700
nu_parast = 3.6800
Oota! Arvutan.
Läheme esimest Determinandi nulli täpsustama.
nu_enne = 3.6772
nu_parast = 3.6773
Oota! Arvutan.
Varraste_kriitilised_tunnusarvud =

    3.67720    1.83860    0.00000    0.00000    0.00000

Varraste_sisejoudude_jagunemine =

    1.00000    0.75000    0.00000    0.00000    0.00000

*****
( Kriitiline pikijõud S_kr on arvutatud 1. vardale
  = EI_1/l^2_1)

S_1_kr = 3.6772^2 * EI_1/l^2_1

```

Raami kriitilise koormusparameetri F_{kr} leidmiseks tuleb S_{kr} jagada varraste_sisejoudude_jagunemisega (s-iga).

$$F_{kr} = S_{1_kr} / 1.0000$$

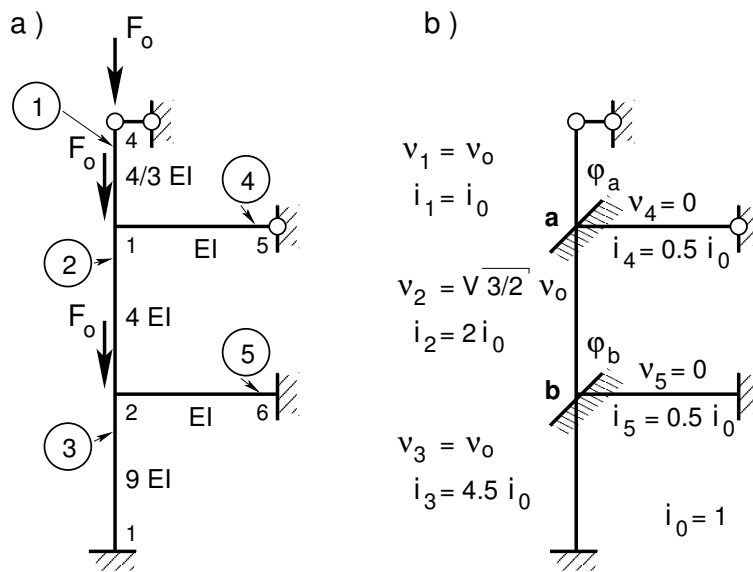
```
*****
Arvutus on lõppenud.
octave-3.0.1:4> diary off
```

16.11.2 Raami II kriitiline koormus. Näide 16.2

Näide 16.2 Leida joonisel 16.17 kujutatud raami koormuse kriitiline suurus deformatsiooni-meetodiga. Raami mõõtmed ja üksikute varraste ristlõigete jäikused on toodud joonisel 16.17 a. Sõlmedes 4, 1 ja 2 mõjuvad vertikaaljõud F_0 . Ringikestes on toodud varraste numbrid. Tundmatuteks on sõlmede 1 ja 2 pöörded φ_a ning φ_b . Varraste pöörded (siirdeid; ϑ) ei ole.

Võtame $l_0 = a$ ja $S_0 = F_0$.

Erinevalt näidisülesannete kogus [ER77] toodud raami arvutusest kasutatakse selles näites arvutiprogramme ja teist märgikokkulepet (vt jaotis 1.12 lk 47).



Joonis 16.17. Raam ja geomeetriliselt määratud põhiskeem

Pikijõudude lähendiks $S^{(0)}$ võtame varrasahela (sõlmedes on liigendid) pikijõud

$$\begin{aligned} S_1^{(0)} &= F_0 = 0 \\ S_2^{(0)} &= 2F_0 = 2S_0 \\ S_3^{(0)} &= 3F_0 = 3S_0 \\ S_4^{(0)} &= 0 \\ S_5^{(0)} &= 0 \end{aligned} \tag{16.163}$$

Varda jäikused

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{4/3EI}{2/3l_0} = \frac{2EI}{l_0} = i_0 = 1.0 \\
 i_2 &= \frac{4EI}{l_0} = 2.0i_0 = 2.0 \\
 i_3 &= \frac{9EI}{l_0} = 4.5i_0 = 4.5 \\
 i_4 &= \frac{EI}{l_0} = i_0 = 0.5 \\
 i_5 &= \frac{EI}{l_0} = i_0 = 0.5
 \end{aligned} \tag{16.164}$$

Varda jäikused i_k on toodud joonisel 16.17 b.

Varda baastunnusarvuks ν_0 võtame

$$\nu_0 = l_0 \sqrt{\frac{S_2^0}{4EI}} = a \sqrt{\frac{2S_0}{4EI}} \tag{16.165}$$

siis

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= \frac{2}{3} l_0 \sqrt{\frac{S_1}{\frac{4}{3}EI}} = l_0 \sqrt{\frac{S_0}{3EI}} = \frac{2}{3} \nu_0 \\
 \nu_2 &= l_0 \sqrt{\frac{S_2}{4EI}} = l_0 \sqrt{\frac{S_0}{3EI} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}} = \nu_0 \\
 \nu_3 &= l_0 \sqrt{\frac{S_3}{9EI}} = l_0 \frac{S_0}{3EI} = \frac{2}{3} \nu_0 \\
 \nu_4 &= 0.0 \\
 \nu_5 &= 0.0
 \end{aligned} \tag{16.166}$$

Varda tunnusarvud ν_k on joonisel 16.17 b.

Deformatsioonimeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi vasaku poole maatriks \mathbf{r}

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} + \Delta r_{2,2} \end{bmatrix} \tag{16.167}$$

Võtame varda 1–2 tunnusarvu ν_2 baastunnusarvuks ν_0 .

Võrrandisüsteemi (16.167) kordajatest moodustatud determinant $\det \mathbf{r}$

$$\det \mathbf{r} = \begin{vmatrix} r_{1,1}(\nu_0) & r_{1,2}(\nu_0) \\ r_{2,1}(\nu_0) & r_{2,2}(\nu_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{16.168}$$

Järgnevalt leiame determinandi elemendi $r_{11}(\nu_0)$

$$\begin{aligned}
 r_{1,1}(\nu_0) &= 3i_1 \varphi_1(\nu_1) + 4i_2 \varphi_2(\nu_2) + 3i_4 \varphi_1(\nu_4) = \\
 &= 3eli_1 fi(1,1) + 4eli_2 fi(2,2) + 3eli_4 fi(1,4)
 \end{aligned} \tag{16.169}$$

kus

$$\begin{aligned} f_i(1, i) &= \varphi_1(\nu_i) & f_i(4, i) &= \varphi_4(\nu_i) \\ f_i(2, i) &= \varphi_2(\nu_i) & f_i(5, i) &= \eta_1(\nu_i) \\ f_i(3, i) &= \varphi_3(\nu_i) & f_i(6, i) &= \eta_2(\nu_i) \end{aligned} \quad (16.170)$$

on i -nda varda pikipõikpaine tegurid (eesarvud), nende arvude tabelid leiab õpikus [EP67] lk 598 ja [SALŠ84] lk 407.

Pikipõikpaine parandustegurite arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `fi_ja_eta.m` lk 741. Siin funktsiooni `fi_ja_eta(mark, nu)` argument „mark” on survel '-' ja tõmbel '+' ning „nu” – varda tunnusarvu arvuline väärtus.

Funktsioon väljastab parandustegurid järgmises järjekorras: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \eta_1, \eta_2$. Näide pikipõikpaine parandustegurite arvutamisest on toodud arvutuspäevikus 16.5 lk 539 ja joonisel 16.8 515. Determinandi elemendid $r_{21}(\nu_0)$

$$\begin{aligned} r_{12}(\nu_0) &= r_{21}(\nu_0) = 2i_2\varphi_3(\nu_2) = \\ &= 2i_2f_i(3, 2) \end{aligned} \quad (16.171)$$

Determinandi element

$$\begin{aligned} r_{22}(\nu_0) &= 4i_2\varphi_2(\nu_2) + 4i_3\varphi_2(\nu_3) + 4i_5\varphi_2(\nu_5) = \\ &= 4eli_2f_i(2, 2) + 4eli_3f_i(2, 3) + 4eli_5f_i(1, 5) \end{aligned} \quad (16.172)$$

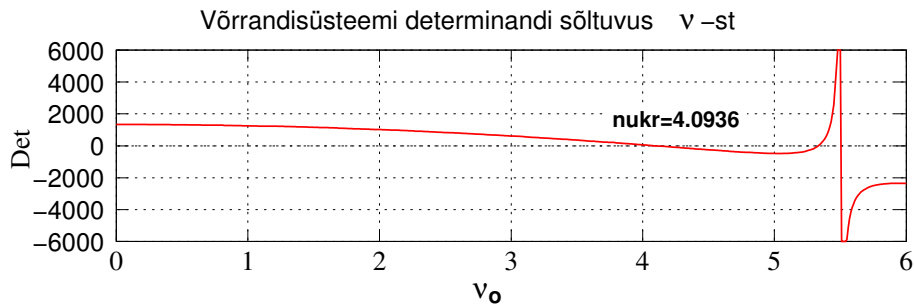
Varda kriitilise tunnusarvu ν_{2kr} leiame GNU Octave'is kirjutatud arvutiprogrammiga `naide1er.m` lk 741. Arvutuse tulemused on toodud arvutuse päevikus 16.3. Determinandi graafik (ν_0 -st) on joonisel 16.18.

Arvutuspäevik 16.3 Kriitilise jõu arvutus

```
octave-3.0.1:1> diary naide1er.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> naide1er
Arvutuse algus.
varraste_pikkused_l =

    0.66667    1.00000    1.00000    1.00000    1.00000

varraste_ristloigete_jaikused_EI =
```



Joonis 16.18. Determinandi nullkohad II

```

1.3333  4.0000  9.0000  1.0000  1.0000

varraste_poordenurgad_deta =

  0  0  0  0  0

varraste_sisejoud =

  1  2  3  0  0

varraste_redutseeritud_jaikused_i =

  1.00000  2.00000  4.50000  0.50000  0.50000

varraste_tunnusarvud_nu =

  0.57735  0.70711  0.57735  0.00000  0.00000

varraste_redutseeritud_tunnusarvud_nured =

  0.81650  1.00000  0.81650  0.00000  0.00000

  Läheme esimest Determinandi nulli täpsustama.
nu_enne = 4.0900
nu_parast = 4.1000
Oota! Arvutan.
  Läheme esimest Determinandi nulli täpsustama.
nu_enne = 4.0936
nu_parast = 4.0937
Oota! Arvutan.
Varraste_kriitilised_tunnusarvud =

  3.34241  4.09360  3.34241  0.00000  0.00000

Varraste_sisejoudude_jagunemine =

  1  2  3  0  0

```

```

*****
( Kriitiline pikijõud S_kr on arvatatud 2. vardale
  = EI_2/l^2_2)

```

$$S_{2_kr} = 4.0936^2 * EI_2/l^2_2$$

Raami kriitilise koormusparameetri F_{kr} leidmiseks tuleb S_{kr} jagada varraste_sisejoudude_jagunemisega (s-iga).

$$F_{kr} = S_{2_kr} / 2.0000$$

```

*****

```

Arvutus on lõppenud.

octave-3.0.1:4> diary off

Varda kriitiline tunnusarv $\nu_{1kr} = 3.34241$, $\nu_{2kr} = 4.0936$ ja $\nu_{3kr} = 3.34241$.

Varda 2–5 kriitiline jõud

$$S_{2kr} = \nu_{2kr}^2 \frac{EI_2}{l_2^2} = 4.0936^2 \frac{EI}{a^2} = 67.03024 \frac{EI}{a^2} \quad (16.173)$$

Kriitiline jõud F_{0kr}

$$F_{0kr} = S_{2kr}/2.0 = \frac{67.03024 EI}{2 a^2} = 33.5152 \frac{EI}{a^2} = 5.7892^2 \frac{EI}{a^2} \quad (16.174)$$

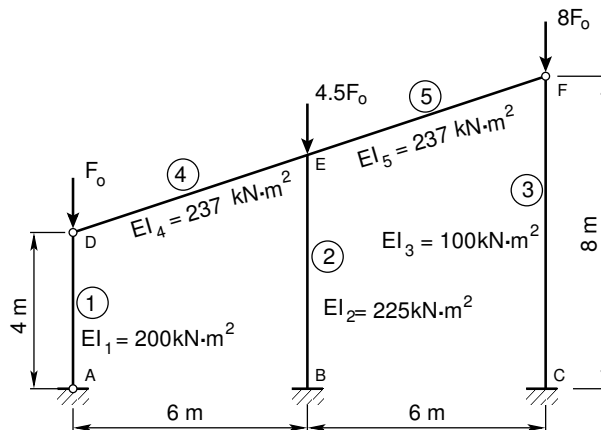
Siin on 2.0 tegur, mis arvestab pikijõu jaotust (Varraste_sisejoudude_jagunemine).

See tulemus on kooskõlas näidisülesannete kogus [ER77] lk 5 oleva tulemusega ($5.80^2 \frac{EI}{a^2}$).

16.11.3 Raami III kriitiline koormus. Näide 16.3

Näide 16.3 Määrata joonisel 16.19 kujutatud raami kriitiline koormus deformatsioonimeetodiga. Raami mõõtmed ja varraste ristlõigete jäikused ning koormused on joonisel 16.19. Sõlmedes D, E ja F mõjuvad vertikaaljõud F_0 , $4.5F_0$ ja $8F_0$. Ringikestes on toodud varraste numbrid.

Raam on kinemaatiliselt kahekordselt määramatu. Tundmatuteks on sõlme E pööre ja varrasahela siire. Varrasahela skeem ja geomeetriselt määratud põhiskeem on toodud joonisel 16.20. Erinevalt näidisülesannete kogus [ER77] toodud raami arvutusest, kasutatakse kõnesolevas näites arvutiprogramme ja teist märgikokkulepet (vt jaotis 1.12 lk 47).

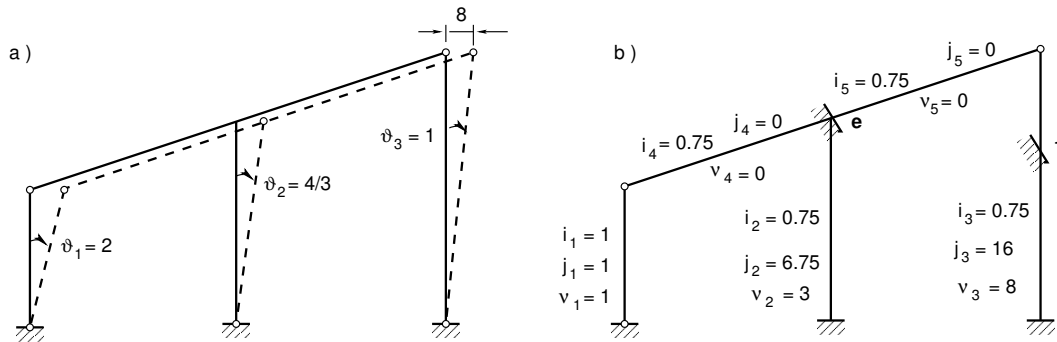


Joonis 16.19. Raami skeem kriitilise koormuse määramiseks

Võtame varda AD jäikuse baasjäikuseks $l_0 = l_1 = 4\text{ m}$, $EI_0 = EI_1 = 200\text{ kN}\cdot\text{m}^2$, ja $S_0 = S_1 = F_0$.

Pikijõudude lähendiks $S^{(0)}$ võtame varrasahela (sõlmedes on liigendid) pikijõud

$$\begin{aligned} S_1^{(0)} &= F_0 = S_0 \\ S_2^{(0)} &= 4.5F_0 = 4.5S_0 \end{aligned}$$



Joonis 16.20. Raami varrasahel ja geomeetriselt määratud põhiskeem

$$S_3^{(0)} = 8F_0 = 8S_0 \quad (16.175)$$

$$S_4^{(0)} = 0$$

$$S_5^{(0)} = 0$$

Varraste jäikused

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{200}{4} = 50 \text{ kN}\cdot\text{m} = 1.0 i_0 \\ i_2 &= \frac{225}{6} = 37.5 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0.75 i_0 \\ i_3 &= \frac{100}{8} = 12.5 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0.25 i_0 \\ i_4 &= \frac{237}{6.3246} = 37.4727 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0.749 i_0 \\ i_5 &= \frac{237}{6.3246} = 37.4727 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0.749 i_0 \end{aligned} \quad (16.176)$$

Varraste jäikused i_k on joonisel 16.20.

Varda baastunnusarvuks ν_0 võtame

$$\nu_0 = l_0 \sqrt{\frac{S_0}{l_0 i_0}} \quad (16.177)$$

siis

$$\begin{aligned} \nu_1 &= l_1 \sqrt{\frac{S_1}{l_1 i_1}} = l_0 \sqrt{\frac{S_0}{l_0 i_0}} = \nu_0 \\ \nu_2 &= l_2 \sqrt{\frac{S_2}{l_2 i_2}} = 1.5 l_0 \sqrt{\frac{S_0}{1.5 l_0 0.75 i_0}} = 3 \nu_0 \\ \nu_3 &= l_3 \sqrt{\frac{S_3}{l_3 i_3}} = 2 l_0 \sqrt{\frac{S_0}{2 l_0 0.25 i_0}} = 8 \nu_0 \\ \nu_4 &= 0 \\ \nu_5 &= 0 \end{aligned} \quad (16.178)$$

Varraste tunnusarvud ν_k on esitatud joonisel 16.20.

Võrrandisüsteemi (16.145) kordajatest moodustatud determinant $\det \mathbf{r}$

$$\det \mathbf{r} = \begin{vmatrix} r_{1,1}(\nu_0) & r_{1,2}(\nu_0) \\ r_{2,1}(\nu_0) & r_{2,2}(\nu_0) + \Delta r_{2,2}(\nu_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (16.179)$$

Järgnevalt leiame determinandi elemendi $r_{11}(\nu_0)$

$$\begin{aligned} r_{1,1}(\nu_0) &= 3 i_4 \varphi_1(\nu_4) + 4 i_2 \varphi_2(\nu_i) + 3 i_5 \varphi_1(\nu_5) = \\ &= 3 i_4 f_i(1, 4) + 4 i_2 f_i(2, 2) + 3 i_5 f_i(1, 5) \end{aligned} \quad (16.180)$$

kus

$$\begin{aligned} f_i(1, i) &= \varphi_1(\nu_i) & f_i(4, i) &= \varphi_4(\nu_i) \\ f_i(2, i) &= \varphi_2(\nu_i) & f_i(5, i) &= \eta_1(\nu_i) \\ f_i(3, i) &= \varphi_3(\nu_i) & f_i(6, i) &= \eta_2(\nu_i) \end{aligned} \quad (16.181)$$

on i -nda varda pikipõikpainde tegurid ((eesarvud), nende arvude tabelid leiab õpikus [EP67] lk 598 ja [SALŠ84] lk 407.

Pikipõikpainde parandustegurite arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `fi_ja_eta.m` lk 741. Siin funktsiooni `fi_ja_eta(mark, nu)` argument „mark” on survel ‘-’ ja tõmbel ‘+’ ning „nu” – varda tunnusarvu arvuline väärtus.

Funktsioon väljastab parandustegurid järgmises järjekorras: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \eta_1, \eta_2$. Näide pikipõikpainde parandustegurite arvutamisest on toodud arvutuspäevikus 16.5 lk 539 ja joonisel 16.8 515. Determinandi elemendid $r_{12}(\nu_{12})$ ja $r_{21}(\nu_{12})$

$$\begin{aligned} r_{12}(\nu_0) &= r_{21}(\nu_0) = -6 i_2 \varphi_4(\nu_2) \vartheta_2 = \\ &= -6 i_2 f_i(4, 2) \vartheta_2 \end{aligned} \quad (16.182)$$

Determinandi element

$$\begin{aligned} r_{22}(\nu_0) &= 3 i_3 \eta_1(\nu_3) \vartheta_3^2 + 12 i_2 \eta_2(\nu_2) \vartheta_2^2 = \\ &= 3 i_3 f_i(5, 3) \vartheta_3^2 + 12 i_2 f_i(6, 2) \vartheta_2^2 \end{aligned} \quad (16.183)$$

Determinandi elemendi $\Delta r_{22}(\nu_0)$ arvutamisel lähtume avaldisest (16.124) lk 520 ja avaldisest (16.146)

$$\Delta r_i^i = - \sum_{k=1}^n S_k l_k (\vartheta_k^i)^2 = - \sum_{k=1}^n \nu_k^2 \frac{EI_k}{l_k^2} l_k (\vartheta_k^i)^2 = - \sum_{k=1}^n i_k (\nu_k \vartheta_k^i)^2 \quad (16.184)$$

Avaldis (16.184) on osaliselt juba arvesse võetud funktsioonidega $\eta_1(\nu_1)$ ja $\eta_2(\nu_2)$. Ainult pendelvardad lähevad eraldi arvesse. Determinandi element

$$\Delta r_{22}(\nu_0) = -i_1 (\nu_1 \vartheta_1)^2 \quad (16.185)$$

Determinandi $\det \mathbf{r}$ (16.151) arvutamiseks kasutame GNU Octave'i programmi `naide2er.m` lk 742. Arvutuse tulemused on toodud arvutuse päevikus 16.4.

Determinandi graafik (ν_0 -st) on toodud joonisel 16.21.

Varda 1–4 kriitiline jõud

$$S_{14kr} = \nu_{1kr}^2 \frac{EI_1}{l_1^2} = 0.5139^2 \frac{EI}{4^2} = 0.016506 EI \quad (16.186)$$

Siin leiame varda kriitilise tunnusarvu ν_{1kr} arvutiprogrammiga *naide2er.m* lk 742, kus $\nu_{1kr} = 0.5139$, $\nu_{2kr} = 1.5417$ ja $\nu_{3kr} = 4.1112$.

Varda A–D kriitiline jõud

$$S_{1kr} = \nu_{1kr}^2 \frac{EI_1}{l_1^2} = 0.5139^2 \frac{200}{4^2} = 3.3812 \text{ kN} \quad (16.187)$$

Kriitiline jõud $F_{1kr} = S_{1kr} = 3.3812 \text{ kN}$ See tulemus on kooskõlas näidisülesannete kogus [ER77] lk 13 saadud tulemusega ($0.52^2 \frac{200}{4^2} = 3.38 \text{ kN}$).

Arvutuspäevik 16.4 Kriitilise jõu arvutus

```
octave-3.0.1:1> diary naide2er.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> naide2er
Arvutuse algus.
varraste_pikkused_l =

    4.0000    6.0000    8.0000    6.3246    6.3246

varraste_ristloigete_jaikused_EI =

    200    225    100    237    237

varraste_poordenurgad_deta =

    2.00000    1.33333    1.00000    0.00000    0.00000

varraste_sisejoud =

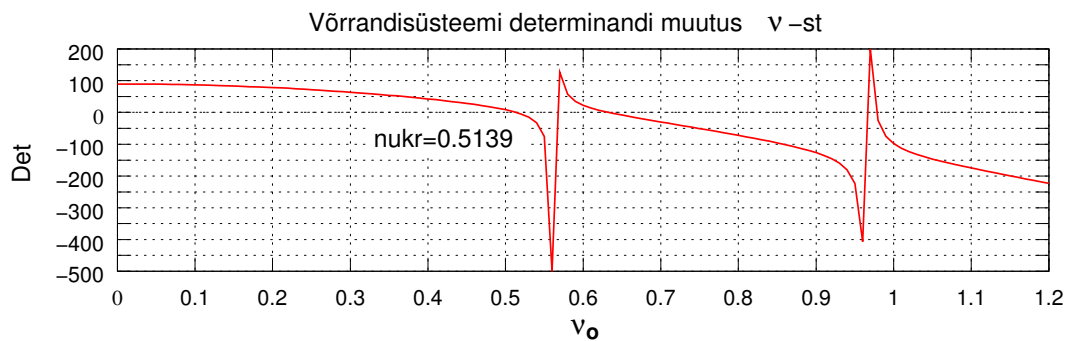
    1.00000    4.50000    8.00000    0.00000    0.00000

varraste_redutseeritud_jaikused_i =

    1.00000    0.75000    0.25000    0.74946    0.74946

varraste_redutseeritud_tunnusarvud_nured =

    1    3    8    0    0
```



Joonis 16.21. Determinandi nullkohad III

```

Läheme esimest Determinandi nulli täpsustama.
nu_enne = 0.51000
nu_parast = 0.52000
Oota! Arvutan.
Läheme esimest Determinandi nulli täpsustama.
nu_enne = 0.51390
nu_parast = 0.51400
Oota! Arvutan.
Varraste_kriitilised_tunnusarvud =

    0.51390   1.54170   4.11120   0.00000   0.00000

Varraste_sisejoudude_jagunemine =

    1.00000   4.50000   8.00000   0.00000   0.00000

*****
( Kriitiline pikijõud S_kr on arvatatud 1. vardale
  = EI_1/l^2_1)

S_1_kr = 0.5139^2 * EI_1/l^2_1

Raami kriitilise koormusparameetri F_kr leidmiseks tuleb S_kr jagada
varraste_sisejoudude_jagunemisega (s-iga).

F_kr = S_1_kr/ 1.0000

*****
Arvutus on lõppenud.
octave-3.0.1:4> diary off

```

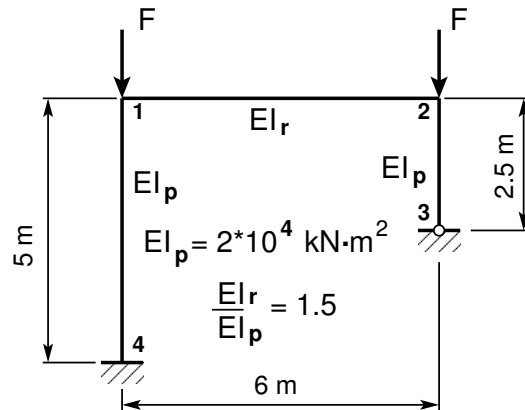
16.11.4 Raami IV kriitiline koormus. Näide 16.4

Näide 16.4 Leida joonisel 16.22 kujutatud raami koormuse F kriitiline suurus deformatsioonimeetodiga. Raam on koormatud kahe vertikaalse jõuga F . Raami posti ristlõike jäikus $EI_p = 2 \cdot 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ja raami riivi ristlõike jäikus $EI_r = 1.5EI_p$. Raami ava on 6 m, postide pikkused 5 m ja 2.5 m.

Käesolevas näites kasutame teist märgikokkulepet (vt jaotis 1.12 lk 47).

Joonisel 16.23 on esitatud raami geomeetriliselt määratud põhiskeem koos lisasidemetega. Varraste jäikused

$$\begin{aligned}
 i_{14} &= EI_p/5.0 = i_0 = 1 \\
 i_{23} &= EI_p/2.5 = 2.0i_0 = 2.0 \\
 i_{12} &= EI_r/6.0 = 1.25i_0 = 1.25
 \end{aligned}
 \tag{16.188}$$



Joonis 16.22. Raami IV stabiilsus

Varraste tunnusarvud

$$\begin{aligned}
 \nu_{14} &= 5\sqrt{\frac{F}{EI_p}} = \nu_0, & \nu_1 &= \nu_0 \\
 \nu_{12} &= \nu_{23} = \nu_{36} = 0, & \nu_2 &= 0 \\
 \nu_{23} &= 2.5\sqrt{\frac{F}{EI_p}} = 0.5\nu_0, & \nu_3 &= 0.5\nu_0
 \end{aligned}
 \tag{16.189}$$

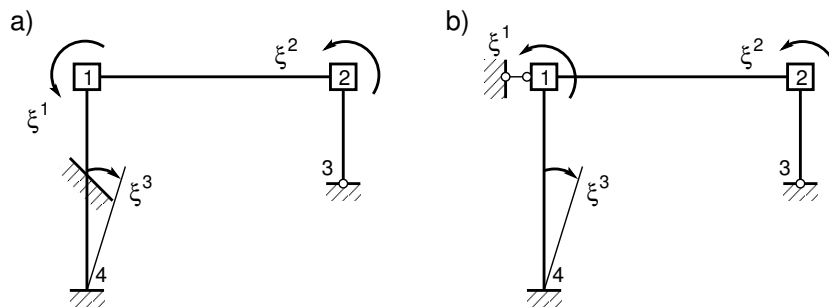
Võtame varda 1–4 tunnusarvu ν_{14} baastunnusarvuks ν_0 .

Deformatsioonimeetodi kanooniline võrrandisüsteem (16.190).

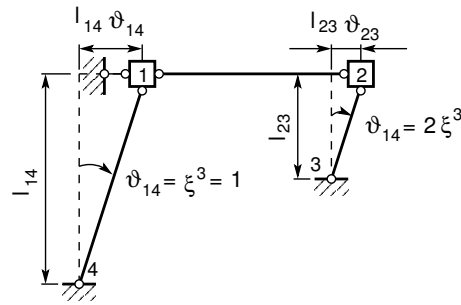
$$\mathbf{r}\xi = \mathbf{r}^\ominus \tag{16.190}$$

ehk

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} + \Delta r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1p} \\ r_{2p} \\ r_{3p} \end{bmatrix} \tag{16.191}$$



Joonis 16.23. Raami IV põhiskeem



Joonis 16.24. Raami IV varrasahel

Võrrandisüsteemi (16.191) kordajatest moodustatud determinant $\det \mathbf{r}$

$$\det \mathbf{r} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{213} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} + \Delta r_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (16.192)$$

Järgnevalt leiame determinandi elemendi $r_{11}(\nu_0)$

$$\begin{aligned} r_{11}(\nu_0) &= 4 i_1 \varphi_2(\nu_1) + 4 i_2 \varphi_2(\nu_2) = \\ &= 4 i_1 f_i(2, 1) + 4 i_2 f_i(2, 2) \end{aligned} \quad (16.193)$$

kus

$$\begin{aligned} f_i(1, i) &= \varphi_1(\nu_i) & f_i(4, i) &= \varphi_4(\nu_i) \\ f_i(2, i) &= \varphi_2(\nu_i) & f_i(5, i) &= \eta_1(\nu_i) \\ f_i(3, i) &= \varphi_3(\nu_i) & f_i(6, i) &= \eta_2(\nu_i) \end{aligned} \quad (16.194)$$

on i -nda varda pikipõikpaande tegurid ((eesarvud), nende arvude tabelid leiab õpikus [EP67] lk 598 ja [SALŠ84] lk 407.

Funktsioonid η_1 ja η_2 avalduvad eesarvude kaudu

$$\eta_1(\nu_i) = (C^*/3) - \nu^2/3 \quad (16.195)$$

$$\eta_2(\nu_i) = [(A^* + B^*)/6] - \nu^2/12 \quad (16.196)$$

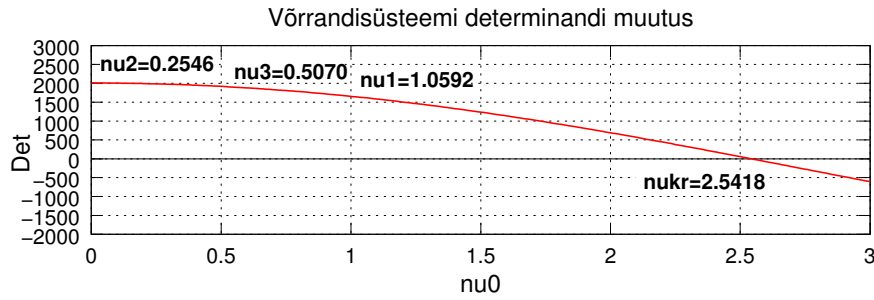
Funktsioonid η_1 ja η_2 võtavad juba arvesse liikme $\Delta r_{3,3}$ võrrandis (16.192), mis arvestab varda pööret. Kui kasutatakse funktsioone η_1 ja η_2 , siis $\Delta r_{3,3} = 0$.

Pikipõikpaande parandustegurite arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `fi_ja_eta.m` lk 741. Siin funktsiooni `fi_ja_eta(mark, nu)` argument „mark” on survel '-' ja tõmbel '+' ning „nu” – varda tunnusarvu arvuline väärtus.

Funktsioon väljastab parandustegurid järgmises järjekorras: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \eta_1, \eta_2$.

Arvutuspäevik 16.5 Näide parandustegurite: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \eta_1$ ja η_2 arvutamisest.

```
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> nu = 1.0592
nu = 1.0592
octave-3.0.1:4> fiJAeta=fi_ja_eta('-', nu)
fiJAeta =
```



Joonis 16.25. Determinandi nullkohad IV

0.92268 0.96204 1.01937 0.98115 0.54871 0.88766

octave-3.0.1:5> diary off

Determinandi elemendid $r_{ij}(\nu_0)$:

$$r_{12}(\nu_0) = 2i_2 \varphi_3(\nu_2) = 2i_2 fi(3, 2) \quad (16.197)$$

$$r_{13}(\nu_0) = 6i_1 \varphi_4(\nu_1) \vartheta_1 = 6i_1 fi(4, 1) \vartheta_1 \quad (16.198)$$

$$r_{21}(\nu_0) = r_{12}(\nu_0) \quad (16.199)$$

$$r_{22}(\nu_0) = 4i_2 \varphi_2(\nu_2) + 3i_3 \varphi_1(\nu_3) = 4i_2 fi(2, 2) + 3i_3 fi(1, 3) \quad (16.200)$$

$$r_{23}(\nu_0) = 3i_3 \varphi_1(\nu_3) \vartheta_3 = 3i_3 fi(1, 3) \vartheta_3 \quad (16.201)$$

$$r_{31}(\nu_0) = r_{13}(\nu_0) \quad (16.202)$$

$$r_{32}(\nu_0) = r_{23}(\nu_0) \quad (16.203)$$

$$\begin{aligned} r_{33}(\nu_0) &= 3i_1 \eta_1(\nu_1) \vartheta_1^2 + 12i_2 \eta_2(\nu_2) \vartheta_2^2 = \\ &= 3i_1 fi(5, 1) \vartheta_1^2 + 12i_2 fi(6, 2) \vartheta_2^2 \end{aligned} \quad (16.204)$$

Determinandi (16.192) elemendi r_{13} (16.198) ja r_{23} (16.201) ees ei ole miinusmärki, sest näites kasutame teist märgikokkulepet (vt 11 lk 281).

Determinandi (16.192) elementi $\Delta r_{33}(\nu_0)$ arvutatakse avaldisest (16.124) lk 520 ja avaldisest (16.146).

$$\Delta r_{33}^i = - \sum_{k=1}^n S_k l_k (\vartheta_k^i)^2 = - \sum_{k=1}^n \nu_k^2 \frac{EI_k}{l_k^2} l_k (\vartheta_k^i)^2 = - \sum_{k=1}^n i_k (\nu_k \vartheta_k^i)^2 \quad (16.205)$$

Kõnesolevas näites funktsioonid η_1 ja η_2 võtavad arvesse täiendava liikme Δr_{33} , siis determinandi element võrdub nulliga, st

$$\Delta r_{33}(\nu_0) = -i_3 (\nu_3 \vartheta_3)^2 = 0 \quad (16.206)$$

Determinandi (16.192) arvutamiseks kasutame GNU Octave'i programmi [naide4al.m](#)¹² lk 742. Arvutuse tulemused on toodud arvutuse päevikus 16.6.

Determinandi graafik (ν_0 -st) on toodud joonisel 16.25.

¹² [./octaveProgrammide/naide4al.Kommentaariid.pdf](#)

Varda 1–4 kriitiline jõud

$$S_{14kr} = \nu_{1kr}^2 \frac{EI_1}{l_1^2} = 2.5418^2 \frac{EI}{5^2} = 0.2584 EI \quad (16.207)$$

Siin leiame varda kriitilise tunnusarvu ν_{1kr} arvutiprogrammiga *naide4al.m*. Arvutuse tulemused on arvutuspäevikus 16.6. Siit näeme, et $\nu_{1kr} = 2.5418$ ja $\nu_{2kr} = 1.2709$.

Varda 2–5 kriitiline jõud

$$S_{25kr} = \nu_{2kr}^2 \frac{EI_2}{l_2^2} = 1.2709^2 \frac{E3I}{2.5^2} = 0.2584 EI \quad (16.208)$$

Kriitiline jõud F_{1kr}

$$\begin{aligned} F_{1kr} &= S_{14kr} = 2.5418^2 \frac{EI}{5^2} = 0.2584 EI \\ F_{2kr} &= S_{23kr} = 1.2709^2 \frac{E3I}{2.5^2} = 0.2584 EI \end{aligned} \quad (16.209)$$

Raami posti ristlõike jäikus $EI = EI_p = 2.0 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ ja raami kriitiline jõud F_{kr}

$$F_{kr} = 5168.6 \text{ kN} \quad (16.210)$$

Arvutuspäevik 16.6 Kriitilise jõu arvutus

```
octave-3.0.1:1> diary naide4al.out
```

```
octave-3.0.1:2> diary on
```

```
octave-3.0.1:3> naide4al
```

Arvutuse algus.

```
varraste_pikkused_1 =
```

```
5.0000 6.0000 2.5000
```

```
varraste_ristloigete_jaikused_EI =
```

```
1.0000 1.5000 1.0000
```

```
varraste_poordenurgad_deta =
```

```
1 0 2
```

```
varraste_sisejoud =
```

```
1 0 1
```

```
varraste_jaikused_i =
```

```
0.20000 0.25000 0.40000
```

```
elir =
```

```
1.0000 1.2500 2.0000
```

```
varraste_redutseeritud_jaikused_i =
```

```
1.0000  1.2500  2.0000
```

```
varraste_redutseeritud_tunnusarvud_nured =
```

```
1.00000  0.00000  0.50000
```

```
Läheme esimest Determinandi nulli täpsustama.
```

```
nu_enne = 2.5400
```

```
nu_parast = 2.5500
```

```
Oota! Arvutan.
```

```
Läheme esimest Determinandi nulli täpsustama.
```

```
nu_enne = 2.5418
```

```
nu_parast = 2.5419
```

```
Oota! Arvutan.
```

```
Varraste_kriitilised_tunnusarvud =
```

```
2.54180  0.00000  1.27090
```

```
Varraste_sisejoudude_jagunemine =
```

```
1  0  1
```

```
*****
```

```
( Kriitiline pikijõud S_kr on arvatatud 1. vardale  
= EI_1/l^2_1)
```

```
S_1_kr = 2.5418^2 * EI_1/l^2_1
```

```
Raami kriitilise koormusparameetri F_kr leidmiseks tuleb S_kr jagada  
varraste_sisejoudude_jagunemisega (s-iga).
```

```
F_kr = S_1_kr/ 1.0000
```

```
*****
```

```
Kriitiline_F = 5168.6
```

```
Arvutus on lõppenud.
```

```
octave-3.0.1:4> diary off
```

Surutud varda Euleri kriitiline jõud on järgmine:

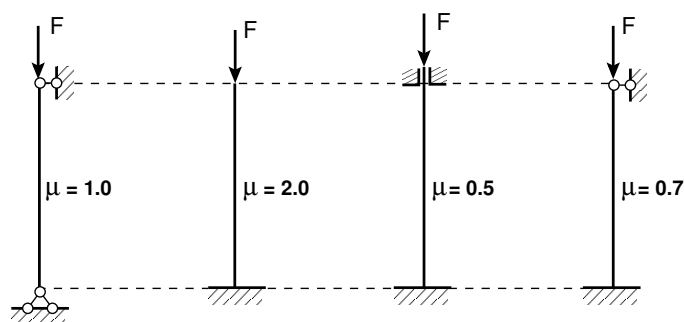
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (16.211)$$

kus μ – varda kinnitustegur,

l – varda pikkus.

Võrreldes kriitilise jõu avaldisi (16.146) ja (16.211), saame

$$\frac{\nu^2}{l^2} = \frac{\pi^2}{\mu^2 l^2}, \quad (16.212)$$



Joonis 16.26. Kinnitustegurid

millest kinnitustegur

$$\mu = \frac{\pi}{\nu}, \quad (16.213)$$

Vaadeldava raami (joonis 16.22) puhul on varda 1–4 kinnitustegur μ_{14}

$$\mu_{14} = \frac{\pi}{\nu} = \frac{3.14}{2.5418} = 1.236, \quad (16.214)$$

mis jääb vahemikku

$$1.0 < 1.236 < 2.0, \quad (16.215)$$

kus vasakpoolne arv vastab vardale, mille mõlemas otsas on liigendid ja parempoolne arv vastab vardale, mille ühes otsas on jäik kinnitus (vt joonis 16.26).

Kui suurendada raami riivi jäikust $EI_r = 3EI_{14}$ ja parempoolse posti jäikust $EI_{23} = 2EI_{14}$, siis GNU Octave'i arvutiprogrammiga [naide4alVR.m](#)¹³ lk 742 leiame $\nu_{14} = 3.1954$ (vt joonis 16.27) ja kinnitusteguri μ_{14}

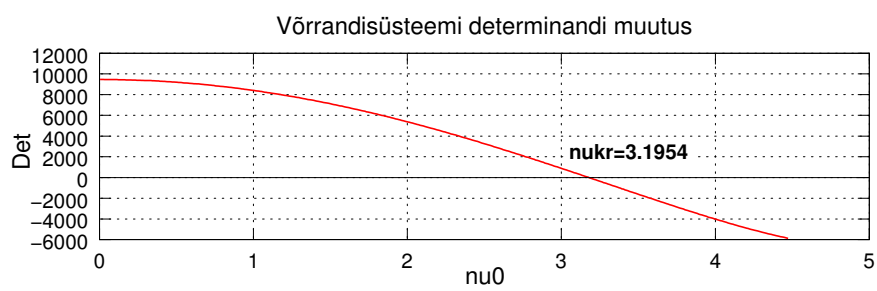
$$\mu_{14} = \frac{\pi}{\nu} = \frac{3.14}{3.1954} = 0.98, \quad (16.216)$$

mis jääb vahemikku

$$0.7 < 0.98 < 1.0, \quad (16.217)$$

kus vasakpoolne arv vastab vardale, mille ühes otsas on jäik kinnitus ja teises liigend, ning parempoolne arv vastab vardale, mille mõlemas otsas on liigend (vt joonis 16.26).

¹³ [./octaveProgrammide/naide4alVR.Kommentaariid.pdf](#)



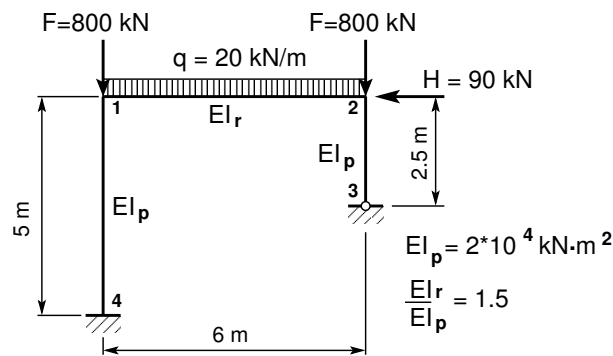
Joonis 16.27. Determinandi nullkoht pärast jäikuse suurendamist

16.12 Deformatsioonimeetod teist järku teoorias

16.12.1 Raami arvutus. Näide 16.5

Näide 16.5 Vaatleme näites 11.2 (joonisel 16.28) toodud raami sisejõudude arvutust deformatsioonimeetodiga teist järku teooria järgi. Raam on koormatud kahe vertikaalse jõuga $F = 800 \text{ kN}$ ja ühtlaselt jaotatud koormusega $q_z = 20 \text{ kN/m}$ ning horisontaalse jõuga $H = 90 \text{ kN}$. Raami posti ristlõike jäikus $EI_p = 2 \cdot 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ja raami riivi ristlõike jäikus $EI_r = 1.5EI_p$. Raami ava on 6 m , postide pikkused 5 m ja 2.5 m .

Kõnesolevas näites kasutame teist märgikokkulepet (vt lõik 11 lk 281).



Joonis 16.28. Raam

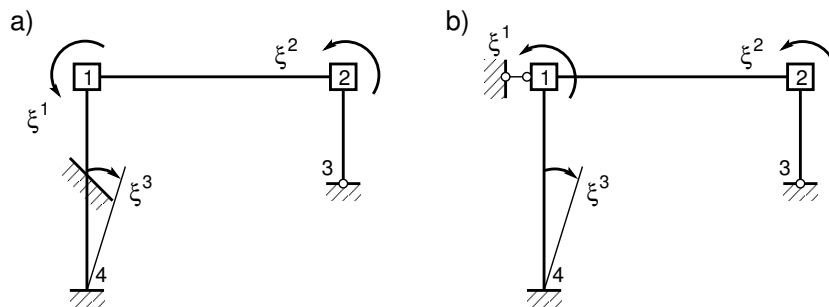
Raami geomeetriliselt määratud põhiskeem ja siirdeolukorra määravad pöörded ξ^1 , ξ^2 ja ξ^3 on näidatud joonisel 16.29.

Raami virtuaalsiirded (varrasahel) on toodud joonisel 16.30.

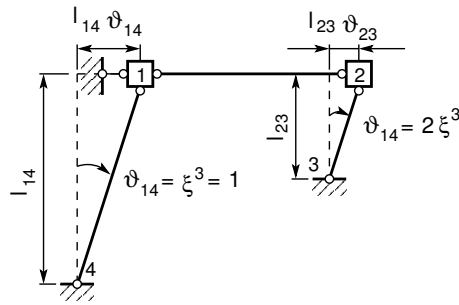
Varraste tunnusarvude ν ja eesarvude leidmiseks kasutame GNU Octave'i programmi eesarvud.m lk 740. Eesarvude arvutamiseks vajalikud lähteandmed on toodud tabelis 16.4. Nende lähteandmetega eesarvude arvutamine on näidatud joonisel 16.31 ja 16.33. Leitud eesarvud kanname tabelisse 16.5 lk 550.

Tabelis 16.5 viimases reas $x-x$ on eesarvud esimest järku teooria varda kohta (st pikijõud puudub ja $\nu = 0$).

Varraste koormusliikmed on näidatud joonisel 16.34. Nende kinnitusemomentide arvutamiseks



Joonis 16.29. Geomeetriliselt määratud põhiskeem



Joonis 16.30. Varrasahel

Tabel 16.4. Varraste andmed

Varras	l [m]	S^o [kN]	EI [kN·m ²]
1-2	6.0	-54.0	$3 \cdot 10^4$
1-4	5.0	-897.5	$2 \cdot 10^4$
2-3	2.5	-822.5	$2 \cdot 10^4$

vajalikud avaldised on toodud tabelis H.7 lk 710. Saame

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = (A^* - B^*) V^* \frac{q_z l^2}{24} = 1.98919 \cdot 1.00652 \frac{20 \cdot 6^2}{24} = 60.065 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (16.218)$$

```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järjehoidjad Seadistused Abi
octave-3.0.1:1> eesarvud
EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL
Sisesta varda pikkus l=6.0
Sisejõud S
Survel:märk - ( S<=0, N<=0 ); Tõmbel:märk + ( S>=0, N>=0 )
Ütle kas + või - märk= -
Ütle S-i väärtus. S=54.0
Ütle varda paindejäikus EJ=30000

-----
Pikijõud survel : S= -54 Varda ristlõike paindejäikus EJ= 30000
-----
nu | A | B | A+B | C | A-B | V
-----
0.25456 3.99135 2.00216 5.99352 2.98702 1.98919 1.00652
  
```

Joonis 16.31. Raami varraste eesarvud. Varras 1-2

```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järgehoidjad Seadistused Abi
octave-3.0.1:1> eesarvud
  EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL
Sisesta varda pikkus l=5.0
Sisejõud S
Survel:märk - ( S<=0, N<=0 ); Tõmbel:märk + ( S>=0, N>=0 )
Ütle kas + või - märk= -
Ütle S-i väärtus. S=897.5
Ütle varda paindejäikus EJ=20000

-----

Pikijõud survel : S= -897.5 Varda ristlõike paindejäikus EJ= 20000
-----
  nu | A | B | A+B | C | A-B | V
-----
 1.0592  3.8482  2.0387  5.8869  2.7681  1.8094  1.1266
-----
/usr/bin/octave-3.0.1

```

Joonis 16.32. Raami varraste eesarvud. Varras 1–4

$$M_{14}^0 = -M_{41}^0 = M_{23}^0 = 0 \quad (16.219)$$

Esitame varraste kinnitusemomendid veeruvektorina

$$M^0 = \begin{bmatrix} M_{12}^0 \\ M_{21}^0 \\ M_{14}^0 \\ M_{41}^0 \\ M_{23}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60.065 \\ -60.065 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.220)$$

Koormusliikme Z_1^0 leiame sõlme $\boxed{1}$ tasakaalust (joonis 16.34)

$$Z_1^0 = M_{12}^0 + M_{14}^0 = 60.065 + 0 = 60.065 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (16.221)$$

Koormusliikme Z_2^0 leiame sõlme $\boxed{2}$ tasakaalust (joonis 16.34)

$$Z_2^0 = M_{21}^0 + M_{23}^0 = -60.065 + 0 = -60.065 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (16.222)$$

Koormusliikme Z_3^0 leidmiseks vaatleme jõudude ja momentide virtuaaltööd varrasahela (joonis 16.30) süüretel. Posti pööret ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^0 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment Z_3^0 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 16.34). Varrasahela virtuaaltöö

$$Z_3^0 \delta \vartheta_{14} - H \delta (l_{23} \vartheta_{23}) = 0 \quad (16.223)$$

Kinnitusmomentide M_{12}^0 , M_{21}^0 virtuaaltöö on null, sest varras 1–2 ei pöördu. Ka vertikaalsete jõudude töö on null, kuna puudub vastav vertikaalne siire.

Virtuaalpööre $\delta\vartheta_{14}$ ja siire $\delta(l_{23}\vartheta_{23})$ avalduvad virtuaalpööride $\delta\xi^3$ kaudu

$$\delta\vartheta_{14} = \delta\xi^3, \quad \delta(l_{23}\vartheta_{23}) = 2.5 \cdot 2\delta\xi^3 \quad (16.224)$$

Arvestades virtuaalsiirete avaldisi (16.224), saame varrasahela virtuaaltöö

$$\left[Z_3^0 - H \cdot 5 \right] \delta\xi^3 = 0 \quad (16.225)$$

millest avaldame koormusliikme Z_3^0

$$Z_3^0 = H \cdot 5 = 90 \cdot 5 = 450.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (16.226)$$

Koormusliikmed esitame veeruvektorina $-Z^0$. Vastupidiseid märke kasutame eesmärgiga viia koormusliikmed võrrandisüsteemi paremale poole:

$$Z^\ominus = -Z^0 = \begin{bmatrix} -Z_1^0 \\ -Z_2^0 \\ -Z_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60.065 \\ 60.065 \\ -450.0 \end{bmatrix} \quad (16.227)$$

Varraste reaktsioonimomendid sõlme 1 pöördest (joonis 16.35):

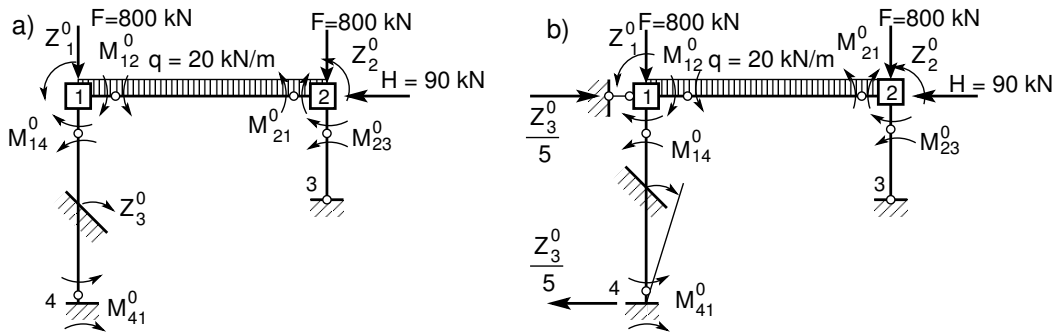
$$M_{12}^1 = A \cdot \frac{EI_r}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{12}^1 = 3.99135 \frac{1.5}{6} = 0.99784 \quad (16.228)$$

```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järjehoidjad Seadistused Abi
octave-3.0.1:1> eesarvud
  EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL
Sisesta varda pikkus l=2.5
Sisejõud S
Survel:märk - ( S<=0, N<=0 ); Tõmbel:märk + ( S>=0, N>=0 )
Ütle kas + või - märk= -
Ütle S-i väärtus. S=822.5
Ütle varda paindejäikus EJ=20000

-----
Pikijõud survel : S= -822.5 Varda ristlõike paindejäikus EJ= 20000
-----
  nu | A | B | A+B | C | A-B | V
-----
 0.50698  3.96561  2.00864  5.97425  2.94821  1.95698  1.02639
  
```

Joonis 16.33. Raami varraste eesarvud. Varras 2–3



Joonis 16.34. Kinnitusmomendid

$$M_{21}^1 = B^* \frac{EI_r}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{21}^1 = 2.00216 \frac{1.5}{6} = 0.50054 \quad (16.229)$$

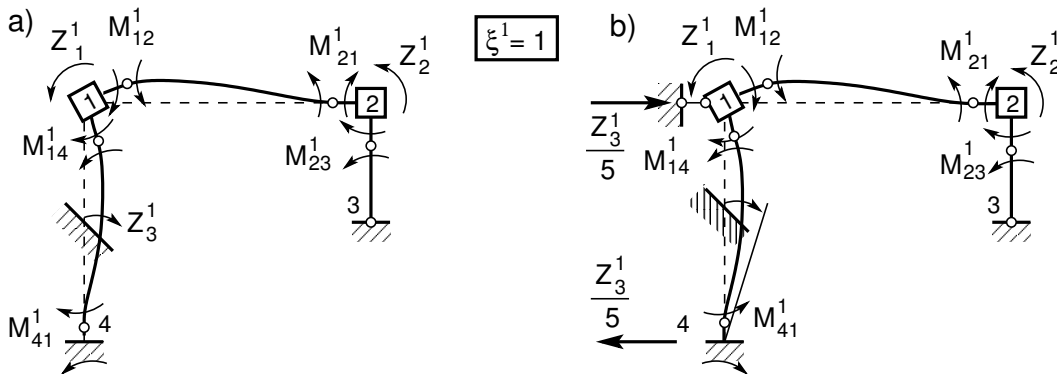
$$M_{14}^1 = A^* \frac{EI_r}{l_{14}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{14}^1 = 3.8482 \frac{1}{5} = 0.76964 \quad (16.230)$$

$$M_{41}^1 = B^* \frac{EI_r}{l_{14}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{41}^1 = 2.0387 \frac{1}{5} = 0.40774 \quad (16.231)$$

$$M_{23}^1 = 0 \quad (16.232)$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid sõlme 1 pöördest ξ^1 5×3 maatriksi M^{123} veeruna

$$M^{123} \xi = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & \cdot & \cdot \\ M_{21}^1 & \cdot & \cdot \\ M_{14}^1 & \cdot & \cdot \\ M_{41}^1 & \cdot & \cdot \\ M_{23}^1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99784 & \cdot & \cdot \\ 0.50054 & \cdot & \cdot \\ 0.76964 & \cdot & \cdot \\ 0.40774 & \cdot & \cdot \\ 0.0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.233)$$



Joonis 16.35. Reaktsioonimomendid sõlme 1 pöördest

Tabel 16.5. Varraste eesarvud

Varras	ν	A^*	B^*	$A^* + B^*$	C^*	$A^* - B^*$	V^*
1 – 2	0.2546	3.9914	2.0022	5.9935	2.9870	1.9892	1.0055
1 – 4	1.0592	3.8482	2.0387	5.8869	2.7681	1.8094	1.1266
2 – 3	0.5070	3.9656	2.0086	5.9743	2.9482	1.9570	1.0264
$x - x$	0.0	4.0	2.0	6.0	3.0	2.0	1.0

Sõlmede reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ pöördest (joonis 16.35) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme $\boxed{1}$ tasakaalust (joonis 16.35) saame

$$Z_1^1 = M_{12}^1 + M_{14}^1 = EI_p (0.99784 + 0.76964) = 1.7675EI_p \quad (16.234)$$

ja sõlme $\boxed{2}$ tasakaalust

$$Z_2^1 = M_{21}^1 + M_{23}^1 = EI_p (0.50054 + 0.0) = 0.50054EI_p \quad (16.235)$$

Reaktsioonimomendi Z_3^1 leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide tööd varrasahela (joonis 16.30) siiretel. Posti pöoret ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^1 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment Z_3^1 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 16.35).

Varraste reaktsioonimomentide virtuaaltöö sõlme $\boxed{1}$ pöördest

$$Z_3^1 \delta\vartheta_{14} - (M_{14}^1 + M_{41}^1) \delta\vartheta_{14} = [Z_3^1 - (M_{14}^1 + M_{41}^1)] \delta\vartheta_{14} = 0 \quad (16.236)$$

Võrrandist (16.236) saame

$$Z_3^1 = (M_{14}^1 + M_{41}^1) = EI_p (0.76964 + 0.40774) = 1.1774EI_p \quad (16.237)$$

Sõlmede ja varraste pöörete leidmiseks alustame võrrandisüsteemi koostamist. Võrrandisüsteemi tundmatute ees olevatest kordajatest moodustame 3×3 matriksi A , mille esimene veerg on

$$\mathbf{A}\xi = \begin{bmatrix} Z_1^1 & \cdot & \cdot \\ Z_2^1 & \cdot & \cdot \\ Z_3^1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} 1.7675 & \cdot & \cdot \\ 0.5005 & \cdot & \cdot \\ 1.1774 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.238)$$

Varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ pöördest (joonis 16.36):

$$M_{12}^2 = B^* \frac{EI_r}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{12}^2 = 2.0022 \frac{1.5}{6} = 0.50054 \quad (16.239)$$

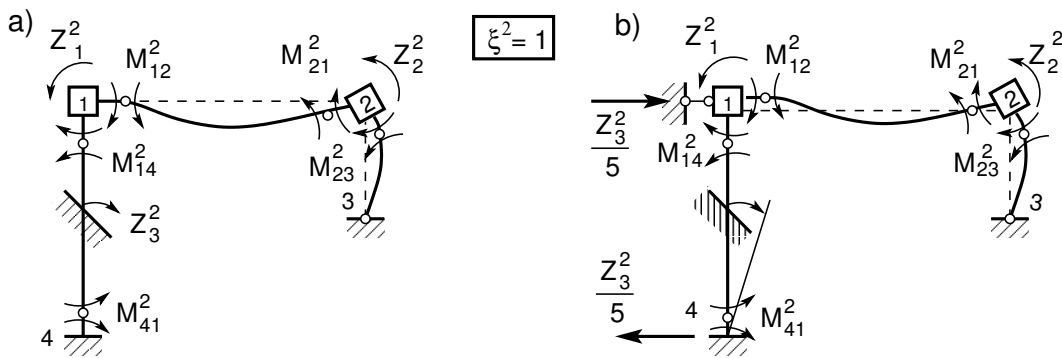
$$M_{21}^2 = A^* \frac{EI_r}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{21}^2 = 3.9914 \frac{1.5}{6} = 0.99784 \quad (16.240)$$

$$M_{14}^2 = M_{41}^2 = 0 \quad (16.241)$$

$$M_{23}^2 = C^* \frac{EI_p}{l_{23}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{23}^2 = 2.94821 \frac{1}{2.5} = 1.1793 \quad (16.242)$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid sõlme [2] pöördest ξ^2 5×3 matriksi M^{123} teise veeruna:

$$\mathbf{M}^{123} \xi = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & \cdot \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & \cdot \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & \cdot \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & \cdot \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99784 & 0.50054 & \cdot \\ 0.50054 & 0.99784 & \cdot \\ 0.76964 & 0.0 & \cdot \\ 0.40774 & 0.0 & \cdot \\ 0 & 1.17930 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.243)$$



Joonis 16.36. Reaktsioonimomendid sõlme 2 pöördest

Sõlmede reaktsioonid sõlme [2] pöördest (joonis 16.36) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme [1] tasakaalust (joonis 16.36) saame

$$Z_1^2 = M_{12}^2 + M_{14}^2 = EI_p (0.50054 + 0.0) = 0.50054 EI_p \quad (16.244)$$

ja sõlme [2] tasakaalust

$$Z_2^2 = M_{21}^2 + M_{23}^2 = EI_p (0.99784 + 1.17930) = 2.17719 EI_p \quad (16.245)$$

Reaktsioonimomendi Z_3^2 leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide tööd varrasahela (joonis 16.30) siiretel. Posti pöoret ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^2 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment Z_3^2 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 16.36).

Varraste reaktsioonimomentide virtuaaltöö sõlme [2] pöördest

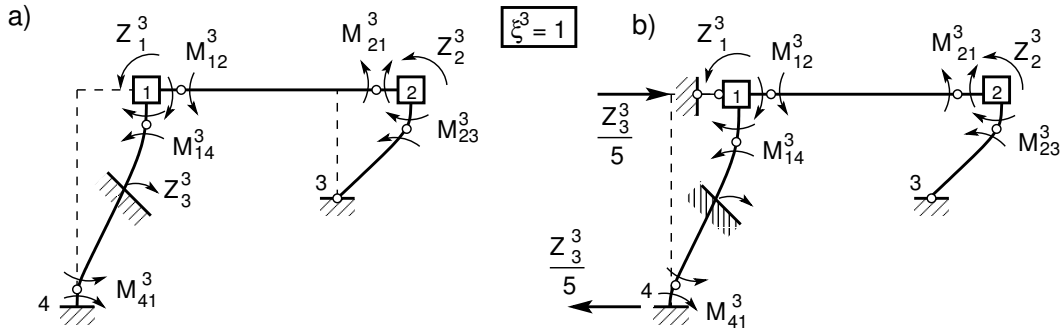
$$Z_3^2 \delta \vartheta_{14} - M_{23}^2 \delta \vartheta_{23} = [Z_3^2 - 2M_{23}^2] \delta \vartheta_{14} = 0 \quad (16.246)$$

Võrrandist (16.246) saame

$$Z_3^2 = 2M_{23}^2 = EI_p 2 \cdot 1.17930 = 2.3586 EI_p \quad (16.247)$$

Lisame võrrandisüsteemi tundmatute ees olevatest kordajatest matriksile \mathbf{A} teise veeru

$$\mathbf{A} \xi = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & \cdot \\ Z_2^1 & Z_2^2 & \cdot \\ Z_3^1 & Z_3^2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} 1.7675 & 0.5005 & \cdot \\ 0.5005 & 2.1771 & \cdot \\ 1.1774 & 2.3586 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.248)$$



Joonis 16.37. Reaktsioonimomendid varda pöördest

Varraste reaktsioonimomendid varda 1–2 siirdest (joonis 16.37):

$$M_{12}^3 = M_{21}^3 = 0.0 \quad (16.249)$$

$$M_{14}^2 = (A^* + B^*) \frac{EI_r}{l_{14}}, \quad \frac{1}{EI_p} M_{14}^3 = 5.8869 \frac{1}{5} = 1.1774 \quad (16.250)$$

$$M_{41}^3 = M_{14}^3 = 1.1774 \quad (16.251)$$

$$M_{23}^3 = C^* \frac{EI_p}{l_{23}} * 2, \quad \frac{1}{EI_p} M_{23}^3 * 2 = 2.94821 \frac{1}{2.5} * 2 = 2.3586 \quad (16.252)$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid varda pöördest ξ^2 5×3 matriksi M^{123} kolmanda veeruna

$$\mathbf{M}^{123} \xi = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & M_{12}^3 \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & M_{21}^3 \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & M_{14}^3 \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & M_{41}^3 \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & M_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99784 & 0.5005 & 0 \\ 0.50054 & 0.99784 & 0 \\ 0.76964 & 0 & 1.1774 \\ 0.40774 & 0 & 1.1774 \\ 0 & 1.1793 & 2.3586 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.253)$$

Sõlmede reaktsioonimomendid varda 1–2 siirdest (joonis 16.37) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme [1] tasakaalust (joonis 16.37) saame

$$Z_1^3 = M_{12}^3 + M_{14}^3 = EI_p (0.0 + 1.1774) = 1.1774 EI_p \quad (16.254)$$

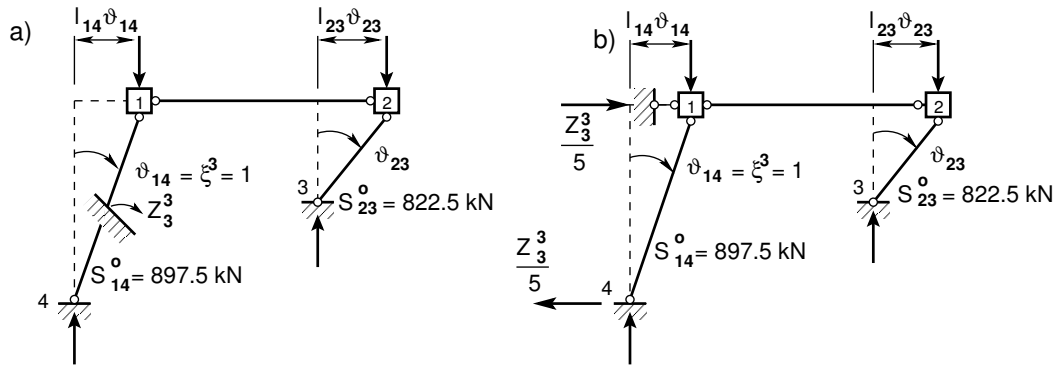
ja sõlme [2] tasakaalust

$$Z_2^3 = M_{21}^3 + M_{23}^3 = EI_p (0.0 + 2.3586) = 2.3586 EI_p \quad (16.255)$$

Reaktsioonimomendi Z_3^3 leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide tööd varrasahela (joonis 16.30) siiretel. Posti pöoret ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^3 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment Z_3^3 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 16.37).

Varraste reaktsioonimomentide virtuaaltöö varda [3] pöördest ($\vartheta_{23} = 2\vartheta_{14} = \xi^3$, joonis 16.30

$$Z_3^3 \delta\vartheta_{14} - (M_{14}^3 + M_{41}^3) \delta\vartheta_{14} - M_{23}^3 \delta\vartheta_{23} = [Z_3^3 - (M_{14}^3 + M_{41}^3) - 2M_{23}^3] \delta\vartheta_{14} = 0 \quad (16.256)$$



Joonis 16.38. Raami täiendav moment

Võrrandist (16.256) saame

$$Z_3^3 = (M_{14}^3 + M_{41}^3) + 2M_{23}^3 = EI_p [1.1774*1 + 1.1774*1 + 2*2.3586] = 7.0720EI_p \quad (16.257)$$

Lisame võrrandisüsteemi tundmatute ees olevatest kordajatest matriksile \mathbf{A} kolmanda veeru

$$\mathbf{A}\xi = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & Z_1^3 \\ Z_2^1 & Z_2^2 & Z_2^3 \\ Z_3^1 & Z_3^2 & Z_3^3 + \Delta Z_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} 1.7675 & 0.5005 & 1.1774 \\ 0.5005 & 2.1771 & 2.3586 \\ 1.1774 & 2.3586 & 7.0720 - 0.63562 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.258)$$

Võrrandisüsteemis (16.258) võtab liige ΔZ_3^3 arvesse täiendava momendi (16.124)

$$\Delta Z_i^i = - \sum_{k=1}^n S_k l_k (\vartheta_k^i)^2 \quad (16.259)$$

$$\frac{1}{EI_p} \Delta Z_3^3 = - \frac{1}{2*10^4} (822.5*2.5*2^2 + 897.5*5.0*1^2) = -0.63562 \quad (16.260)$$

Sõlmede ja varraste pöörete leidmiseks koostasime võrrandisüsteemi

$$\mathbf{A}\xi = \mathbf{Z}^\ominus \quad (16.261)$$

kus matriks \mathbf{A} on leitud avaldis (16.258) ja vektor \mathbf{Z}^\ominus (16.227) ning vektor ξ

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.262)$$

Võtame kasutusele uue muutuja $\mathbf{X} = EI_p \xi$ ja matriksi $\mathbf{a} = EI_p \mathbf{A}$ ning esitame võrrandisüsteemi (16.261) järgmisel kujul:

$$\mathbf{aX} = \mathbf{Z}^\ominus \quad (16.263)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 1.7675 & 0.5005 & 1.1774 \\ 0.5005 & 2.1771 & 2.3586 \\ 1.1774 & 2.3586 & 6.4364 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60.065 \\ 60.065 \\ -450.0 \end{bmatrix} \quad (16.264)$$

Võrrandisüsteemi (16.263) lahendame GNU Octave'iga:

$$\mathbf{X} = \mathbf{a} \setminus \mathbf{Z}^\ominus \quad (16.265)$$

Võrrandisüsteemi lahend on

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.7297 \\ 171.0100 \\ -133.8120 \end{bmatrix} \quad (16.266)$$

Momendid varraste otstes leiame avaldisega

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \mathbf{M}^{123} \xi \quad (16.267)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12}^0 \\ M_{21}^0 \\ M_{14}^0 \\ M_{41}^0 \\ M_{23}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & M_{12}^3 \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & M_{21}^3 \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & M_{14}^3 \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & M_{41}^3 \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & M_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.268)$$

kus maatriks \mathbf{M}^0 on toodud avaldisega (16.220) ja maatriks \mathbf{M}^{123} avaldisega (16.253). Momentide avaldise (16.267), (16.268) esitame leitud \mathbf{X} kaudu

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \frac{1}{EI_p} \mathbf{M}^{123} \mathbf{X} \quad (16.269)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60.065 \\ -60.065 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.99784 & 0.5005 & 0 \\ 0.50054 & 0.99784 & 0 \\ 0.76964 & 0 & 1.1774 \\ 0.40774 & 0 & 1.1774 \\ 0 & 1.1793 & 2.3586 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.7297 \\ 171.0100 \\ -133.8120 \end{bmatrix} \quad (16.270)$$

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152.38 \\ 113.94 \\ -152.37 \\ -154.81 \\ -113.94 \end{bmatrix} \quad (16.271)$$

Leitud momendid varraste otstes (16.271) kanname joonisele 16.39 a. Momendi positiivne ja negatiivne suund on näidatud joonisel 16.39 b.

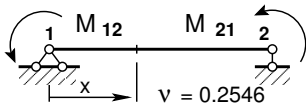
Tabel 16.6. Momentide võrdlus I ja II järku teoorias

Sõlm	M^I	M^{II}	Erinevus
1	135.00	152.37	12.9 %
2	90.00	113.94	26.6 %
4	135.00	154.81	14.7 %

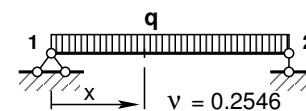
Teist järku teoriaga leitud momentide võrdlus esimest järku teoriaga (vt joonis 11.25) on toodud tabelis 16.6.

Varda 1–2 paindemomentide leidmiseks kasutame avaldise (16.272) ja (16.273) või GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni `mxriikki.m` lk 741 ja `mxq.m` lk 741. Arvutuse tulemused GNU Octave'i funktsiooniga on toodud joonisel 16.40.

Arvutustulemused kanname tabelisse 16.7. Tabelis olevad arvud vastavad esimesele märgikokkuleppele.



$$M^R(x) = M_{21} \frac{\sin \nu \frac{x}{l}}{\sin \nu} + M_{12} \frac{\sin \nu (1 - \frac{x}{l})}{\sin \nu} \quad (16.272)$$



$$M_0^q(x) = q_z \left(\frac{l}{\nu} \right)^2 \left[\frac{\sin(\nu \frac{x}{l}) + \sin(\nu (1 - \frac{x}{l}))}{\sin \nu} - 1 \right] \quad (16.273)$$

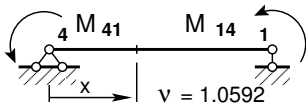
Varda 1–4 paindemomentide leidmiseks kasutame avaldist (16.274) või GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni `mxriikki.m` lk 741. Arvutuse tulemused GNU Octave'i funktsiooniga on toodud joonisel 16.41. Arvutuse tulemused kanname tabelisse 16.8.

Varda 2–3 paindemomentide leidmiseks kasutame avaldist (16.275) või GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni `mxriikki.m` lk 741. Arvutuse tulemused GNU Octave'i funktsiooniga on toodud joonisel 16.41. Arvutustulemused kanname tabelisse 16.9.

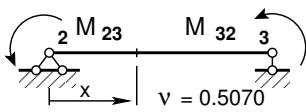
Leitud paindemomendid (tabelid 16.7–16.9) kanname joonisele 16.42. Joonisel 16.42 on

Tabel 16.7. Momendid vardas 1–2

x/l	0	1/4	2/4	3/4	1
$M^R(x)$	-152.3704	-86.0451	-19.3718	47.3801	113.9400
$M^q(x)$	0.0000	67.9358	90.6117	67.9358	0.0000
$M(x)$	-152.3700	-18.1093	71.2400	115.3159	113.9400



$$M^R(x) = M_{14} \frac{\sin \nu \frac{x}{l}}{\sin \nu} + M_{41} \frac{\sin \nu (1 - \frac{x}{l})}{\sin \nu} \quad (16.274)$$



$$M^R(x) = M_{32} \frac{\sin \nu \frac{x}{l}}{\sin \nu} + M_{23} \frac{\sin \nu (1 - \frac{x}{l})}{\sin \nu} \quad (16.275)$$

Tabel 16.8. Momendid vardas 1–4

x/l	0	1/4	2/4	3/4	1
$M^R(x)$	154.8100	80.9328	1.4137	-78.2040	-152.3700

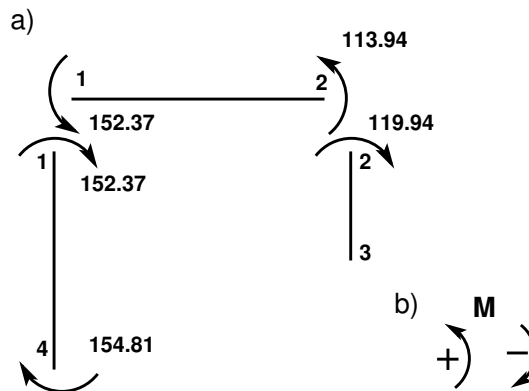
Tabel 16.9. Momendid vardas 2–3

x/l	0	1/4	2/4	3/4	1
$M^R(x)$	1139.9400	87.0941	58.8508	29.6634	0.0000

pideva joonega näidatud momendid, mis on leitud teist järku teooria järgi. Punktiirjoonega on momendid esimest järku teooria järgi.

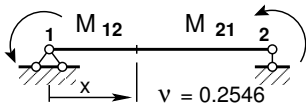
Raami varraste põikjõu määramisel arvestame, et teist järku teoorias on ka põikjõud võrdne paindemomendi tuletisega. Avaldisest (16.136) ja (16.144) tuletise võtmisel saame

$$Q^R(x) = \frac{dM^R(x)}{dx} = \frac{\nu}{l} \frac{1}{\sin \nu} \left[M_{ik} \cos \left(\nu \frac{x}{l} \right) + M_{ki} \cos \left(\nu \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right) \right] \quad (16.276)$$

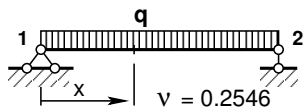


Joonis 16.39. Momendid varda otstes

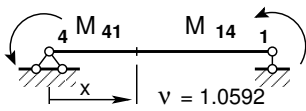
$$Q^q(x) = \frac{dM_0^q(x)}{dx} = \frac{ql}{\nu \sin \nu} \left[\cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) - \cos\left(\nu \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) \right] \quad (16.277)$$



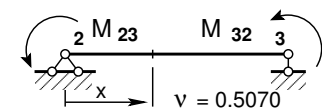
$$Q^R(x) = \frac{\nu}{l \sin \nu} \left[M_{21} \cos \nu \frac{x}{l} + M_{12} \cos \nu \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right] \quad (16.278)$$



$$Q^q(x) = \frac{ql}{\nu \sin \nu} \left[\cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) - \cos\left(\nu \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) \right] \quad (16.279)$$



$$Q^R(x) = \frac{\nu}{l \sin \nu} \left[M_{14} \cos \nu \frac{x}{l} + M_{41} \cos \nu \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right] \quad (16.280)$$



$$Q^R(x) = \frac{\nu}{l \sin \nu} \left[M_{32} \cos \nu \frac{x}{l} + M_{23} \cos \nu \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right] \quad (16.281)$$

Varda 1–2 põikjõu $Q(x)$ leidmisel kasutame avaldisi (16.278) ja (16.279) või GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni [maxrikki.m](#) lk 741. Arvutuse tulemused GNU Octave'i funktsiooniga on toodud joonisel 16.40. Arvutuste tulemused kanname tabelisse 16.10.

Varda 1–4 põikjõu leidmiseks kasutame avaldist (16.280) või GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni [maxrikki.m](#) lk 741. Arvutuse tulemused GNU Octave'i funktsiooniga on toodud joonisel 16.41.

Varda 2–3 põikjõu leidmiseks kasutame avaldist (16.281) või GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni [maxrikki.m](#) lk 741. Arvutuse tulemused GNU Octave'i funktsiooniga on toodud joonisel 16.41. Arvutuste tulemused kanname tabelisse 16.12.

Leitud põikjõud (tabelid 16.10–16.12) kanname joonisele 16.45.

Raami sõlmede tasakaalust (vt. joonis 16.43 ja 16.44 lk 561) saame pikijõud.

Eelnevalt leiame varda otstes mõjuvad ristjõud $H_{ik}^{(1)}$ (vt. avaldisi (16.127) (16.128)). Saame:

$$H_{ik}^{(1)} = H_{ik}^o - \frac{M_{ik}^{(1)} + M_{ik}^{(1)}}{l_{ik}} - S_{ik}^{(0)} \vartheta_{ik}^{(1)} \quad (16.282)$$

$$H_{ki}^{(1)} = H_{ki}^o + \frac{M_{ik}^{(1)} + M_{ik}^{(1)}}{l_{ik}} + S_{ik}^{(0)} \vartheta_{ik}^{(1)} \quad (16.283)$$

Tabel 16.10. Põikjõud vardas 1–2

x/l	0	1/4	2/4	3/4	1
$Q^R(x)$	44.0406	44.3627	44.5051	44.4673	44.2493
$Q^q(x)$	60.3262	30.2243	0.0000	-30.2243	-60.3262
$Q(x)$	104.3668	74.5870	44.5051	14.2430	-16.0769

Avaldised (16.282) ja (16.283) on kasutusel teine märgikokkulepe.

Varraste 1–4 ja 2–3 pöörded $\vartheta_{14}^{(1)}$ ja $\vartheta_{23}^{(1)}$ on

$$\begin{aligned}\vartheta_{14}^{(1)} &= \frac{X^3}{EI_p} = -\frac{133.812}{2 \cdot 10^4} = -6.6906 \cdot 10^{-3}, \\ \vartheta_{23}^{(1)} &= -2 \cdot \vartheta_{14}^{(1)} = -2 \cdot 6.6906 \cdot 10^{-3} = -1.3381 \cdot 10^{-2}\end{aligned}\quad (16.284)$$

Nüüd arvutame ristjõud

Tabel 16.11. Põikjõud vardas 1–4

x/l	0	1/4	2/4	3/4	1
$Q^R(x)$	-55.4306	-62.0815	-64.4047	-62.2383	-55.7332

```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool <2>
Seanss Redigeerimine Vaade järjehoidjad Seadistused Abi

octave-3.0.1:1> Mx1=mxrikki(4,0.2546,6.152.37,113.94)
Mx1 =

-152.37000  -86.04511  -19.37175   47.38007   113.94000
  44.04062   44.36270   44.50511   44.46727   44.24934
  0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000

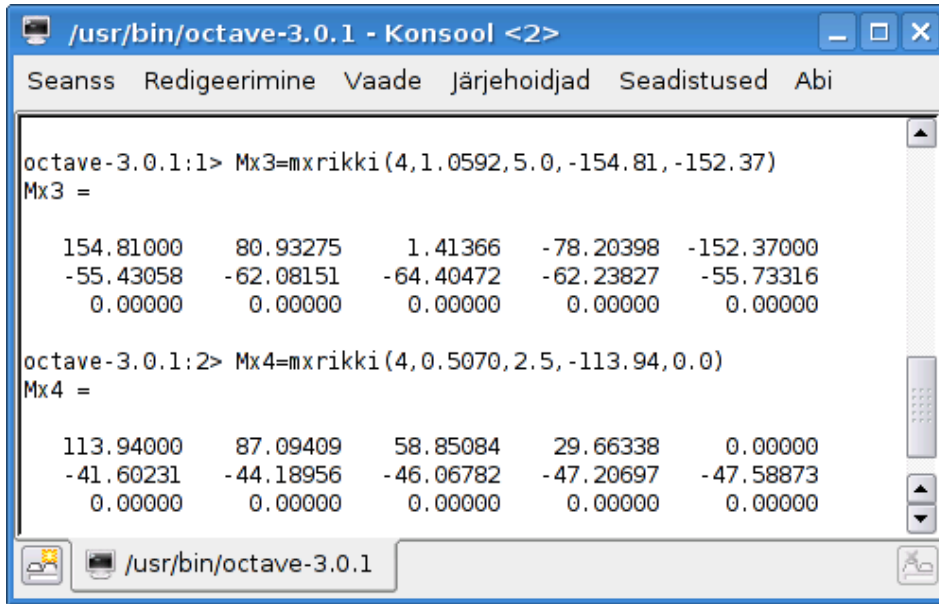
octave-3.0.1:2> Mx2=mxq(4,0.2546,6.0,6.0,20.0)
Mx2 =

 0.00000  67.93584  90.61173  67.93584  0.00000
 60.32622  30.22431  0.00000 -30.22431 -60.32622
 0.00000  1.50000  3.00000  4.50000  6.00000

octave-3.0.1:3> Mx=Mx1+Mx2
Mx =

-152.37000  -18.10928  71.23998  115.31591  113.94000
 104.36684  74.58701  44.50511  14.24296  -16.07688
 0.00000    1.50000  3.00000  4.50000  6.00000
  
```

Joonis 16.40. Momendi ja põikjõu arvutus vardas 2



Joonis 16.41. Momendi ja põikjõu arvutus vardas 1 ja 3

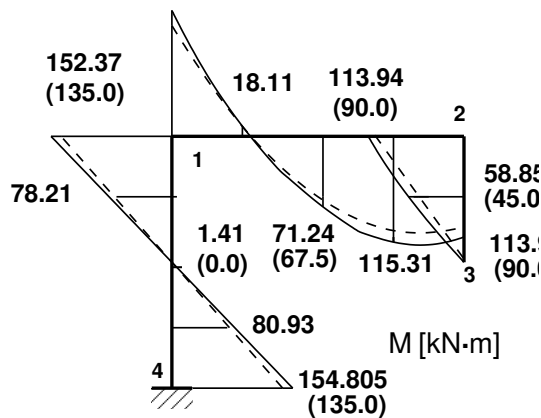
Tabel 16.12. Põikjõud vardas 2–3

x/l	0	1/4	2/4	3/4	1
$Q^R(x)$	-41.6023	-44.1896	-46.0678	-47.2070	-47.5887

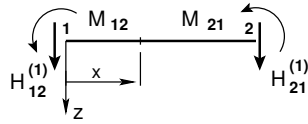
Raami varrastes mõjuva pikijõu leidmiseks lõikame välja sõlmed 1 ja 2 (joonis 16.43 ja 16.44). Kanname joonisele kõik sõlmele mõjuvad jõud. Pikijõud S_{12} , S_{14} , S_{21} , S_{23} , mida meie otsime, näitame positiivses suunas. Ristjõud kanname joonisele nende mõjumise suunas (joonis 16.43 ja 16.44).

Normaaljõud piki varrast muutub olenevalt ristlõike pöördest φ . Normaaljõu epüüri asemel on esitatud pikijõudude epüür.

Leitud pikijõu kanname joonisele 16.46

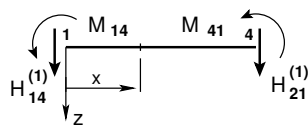


Joonis 16.42. Raami paindemomentide epüür

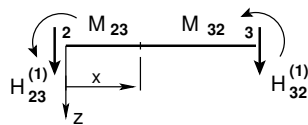


$$\begin{aligned} H_{12}^{(1)} &= -\frac{20 \cdot 6}{2} - \frac{152.38 + 113.94}{6.0} - 0 = \\ &= -60.0 - 44.387 = -104.39 \text{ kN} \end{aligned} \quad (16.285)$$

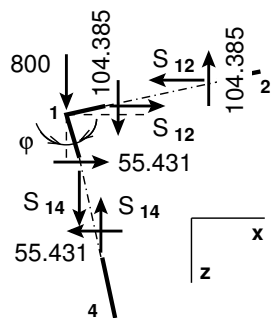
$$\begin{aligned} H_{21}^{(1)} &= -\frac{20 \cdot 6}{2} + \frac{152.38 + 113.94}{6.0} - 0 = \\ &= -60.0 + 44.387 = -15.613 \text{ kN} \end{aligned} \quad (16.286)$$



$$\begin{aligned} H_{14}^{(1)} &= -H_{41}^{(1)} = -\frac{-152.37 - 154.81}{5.0} - \\ &- 897.50 \cdot 6.6906 \cdot 10^{-3} = 61.436 - 6.0048 = \\ &= 55.431 \text{ kN} \end{aligned} \quad (16.287)$$



$$\begin{aligned} H_{23}^{(1)} &= -H_{32}^{(1)} = -\frac{-113.94 - 0.0}{2.5} - \\ &- 822.50 \cdot 1.3381 \cdot 10^{-2} = \\ &= 45.576 - 11.006 = 34.570 \text{ kN} \end{aligned} \quad (16.288)$$



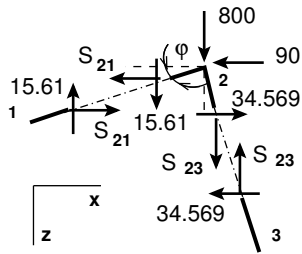
Joonisel 16.43 on näidatud sõlme $\boxed{1}$ mõjuvad jõud. Tasakaalutingimustega leiame

$$\sum X = 0, \quad S_{12} = -55.431 \text{ kN} \quad (16.289)$$

$$\sum Z = 0, \quad S_{14} = -800 - 104.385 = -904.385 \text{ kN} \quad (16.290)$$

Joonis 16.43. Sõlme $\boxed{1}$ tasakaal

Teise lähendi vajalikkuse selgitamiseks leiame eesarvud. Eesarvude teise lähendi arvutamiseks vajalikud lähteandmed on toodud tabelis 16.13. Nende andmete alusel arvutame varraste tunnusarvud ν ja eesarvud GNU Octave'i programmi *eesarvud.m* lk 740 abil. Arvutuse tulemusi näeme arvutuspäevikus 16.7.



Joonisel 16.44 on näidatud sõlme 2 mõjuvad jõud. Tasakaalutingimustega leiame

$$\sum X = 0, \quad S_{21} = -90 + 34.564 = -55.436 \text{ kN} \quad (16.291)$$

$$\sum Z = 0, \quad S_{23} = -800 - 15.615 = -815.615 \text{ kN} \quad (16.292)$$

Joonis 16.44. Sõlme 2 tasakaal

Tabel 16.13. Varraste lähteandmed teisel lähendil

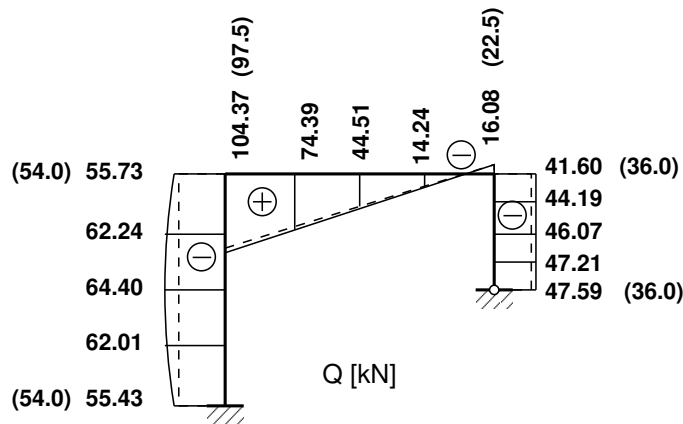
Varras	l [m]	S^o [kN]	EI [kN·m ²]
1-2	6.0	-55.431	$3 \cdot 10^4$
1-4	5.0	-904.385	$2 \cdot 10^4$
2-3	2.5	-815.615	$2 \cdot 10^4$

Arvutuspäevik 16.7 octave-3.0.1:5> diary on
 octave-3.0.1:6> eesarvud
 EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL
 Varda pikkus l=6.0

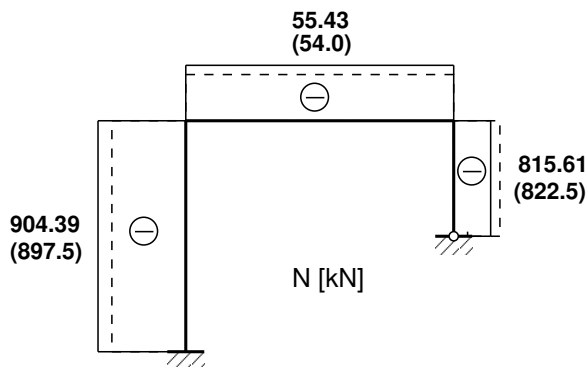
Pikijõud survel : S= -55.431 Varda ristlõike paindejäikus EJ= 30000

nu	A	B	A+B	C	A-B	V
0.25791	3.99112	2.00222	5.99335	2.98667	1.98890	1.00670

EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL



Joonis 16.45. Raami põikjõu epüür



Joonis 16.46. Raami pikijõu epüür

Varda pikkus $l=5.0$

Pikijõud survel : $S= -904.385$ Varda ristlõike paindejäikus $EJ= 20000$

nu	A	B	A+B	C	A-B	V
1.0632	3.8470	2.0390	5.8860	2.7662	1.8079	1.1277

EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL

Varda pikkus $l=2.5$

Pikijõud survel : $S= -815.615$ Varda ristlõike paindejäikus $EJ= 20000$

nu	A	B	A+B	C	A-B	V
0.50486	3.96590	2.00856	5.97447	2.94865	1.95734	1.02616

octave-3.0.1:9> diary off

Leitud varraste tunnusarvud ν ja eesarvud teises lähenduses kanname tabelisse 16.14. Selles tabelis eesarvud erinevad vähe esimeses lähenduses leitudetega (tabel 16.5). Seega võime loobuda teisest lähendamisest.

Raami staatiline kontroll.

Projitseerime kõik jõud horisontaalteljele X (joonis 16.47):

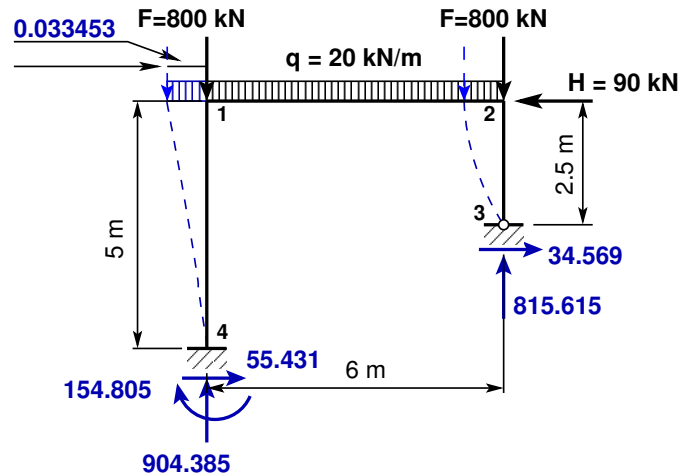
$$\Sigma X = 0; \quad 55.43057 + 34.56943 - 90 = 0.0 \quad (16.293)$$

Projitseerime kõik jõud vertikaalteljele Z (joonis 16.47):

$$\Sigma Z = 0; \quad -904.38504 - 815.61496 + 6 * 20 + 2 * 800 = 0.0 \quad (16.294)$$

Tabel 16.14. Varraste eesarvude teine lähend

Varras	ν	A^*	B^*	$A^* + B^*$	C^*	$A^* - B^*$	V^*
1-2	0.2579	3.9911	2.0022	5.9934	2.9867	1.9889	1.0067
1-4	1.0632	3.8470	2.0390	5.8840	2.7662	1.8079	1.1277
2-3	0.5049	3.9659	2.0086	5.9745	2.9487	1.9573	1.0262
x-x	0.0	4.0	2.0	6.0	3.0	2.0	1.0



Joonis 16.47. Raami toereaktsioonid

Momentide summaga kontrollimine on väga oluline kontroll. Paljudel juhtudel avastatakse arvutustes tehtud viga alles selle kontrolliga.

Arvutame momentide summa toe 3 suhtes.

Teist järku teoorias peame arvestama raami deformeerunud kujuga (joonis 16.47). Raami riivi siirde leiame varda 1–4 pöörde $\vartheta_{14} = 6.6906 \cdot 10^{-3}$ (16.284) ja varda pikkuse korrutisega

$$\Delta_{12} = l_{14} * \vartheta_{14} = 5.0 * 6.6906 \cdot 10^{-3} = 0.033453 \quad (16.295)$$

Leitud siire Δ_{12} ühtib näites 16.8 leituga. Täiendav moment varraste pöördest ΔM

$$\Delta M = 0.033453 * (2 * 800 + 20 * 6.0) = 59.340 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (16.296)$$

Järgnevas momentide summas arvestame täiendava momendiga (16.296). Saame

$$\begin{aligned} \Sigma M_3 = 0; \quad & -154.80531 - 904.38504 * 6.0 + 55.43057 * 2.5 + 800 * 6.0 + \\ & + 20 * 6.0 * 3.0 + 90 * 2.5 + 0.033453 * (2 * 800 + 20 * 6.0) = 3.5 * 10^{-5} \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (16.297)$$

Staatiline kontroll näitab, et raam on temale mõjuvate jõudude mõjul tasakaalus.

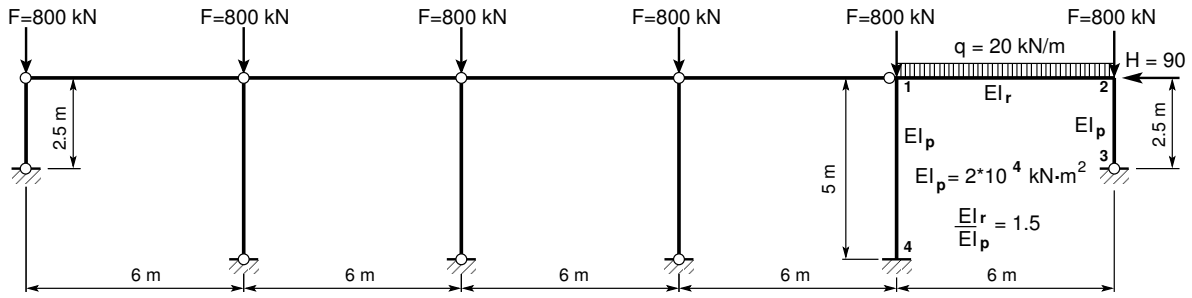
16.12.2 Raam ja pendelvardad. Näide 16.6

Näide 16.6 Vaatleme näites 16.5 (joonis 16.28) toodud raami sisejõudude arvutust deformatsioonimeetodiga II järku teooria järgi. Kõnesolevas näites kasutatakse parema käe teljestikku. Raam on koormatud kahe vertikaalse jõuga $F = 800 \text{ kN}$ ja ühtlaselt jaotatud koormusega $q_z = 20 \text{ kN/m}$ ning horisontaalse jõuga $H = 90 \text{ kN}$. Raami posti ristlõike jäikus on $EI_p = 2 * 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ja raami riivi ristlõike jäikus $EI_r = 1.5EI_p$. Raami ava on 6 m, postide pikkused 5 m ja 2.5 m. Raamiga on ühendatud pendelvardad (joonis 16.48).

Võrrandisüsteemi koostamine toimub nii nagu näites 16.5, välja arvatud lisaliige ΔZ_3^3 .

Võrrandisüsteemi tundmatute ees olevate kordajate maatriks A (16.258)

$$A = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & Z_1^3 \\ Z_2^1 & Z_2^2 & Z_2^3 \\ Z_3^1 & Z_3^2 & Z_3^3 + \Delta Z_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} =$$



Joonis 16.48. Pendelvarrastega raam

$$EI_p \begin{bmatrix} 1.7675 & 0.5005 & 1.1774 \\ 0.5005 & 2.1771 & 2.3586 \\ 1.1774 & 2.3586 & 7.0720 + \Delta Z_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.298)$$

Võrrandisüsteemi (16.298) liige ΔZ_3^3 võtab arvesse täiendava momendi (16.124)

$$\Delta Z_i^i = - \sum_{k=1}^n S_k l_k (\vartheta_k^i)^2 \quad (16.299)$$

Saame

$$\frac{1}{EI_p} \Delta Z_3^3 = - \frac{1}{2 \cdot 10^4} \left(822.5 \cdot 2.5 \cdot 2^2 + 897.5 \cdot 5.0 \cdot 1^2 + 3 \left(800.0 \cdot 5.0 \cdot 1^2 \right) + 800.0 \cdot 2.5 \cdot 2^2 \right) = -1.6356 \quad (16.300)$$

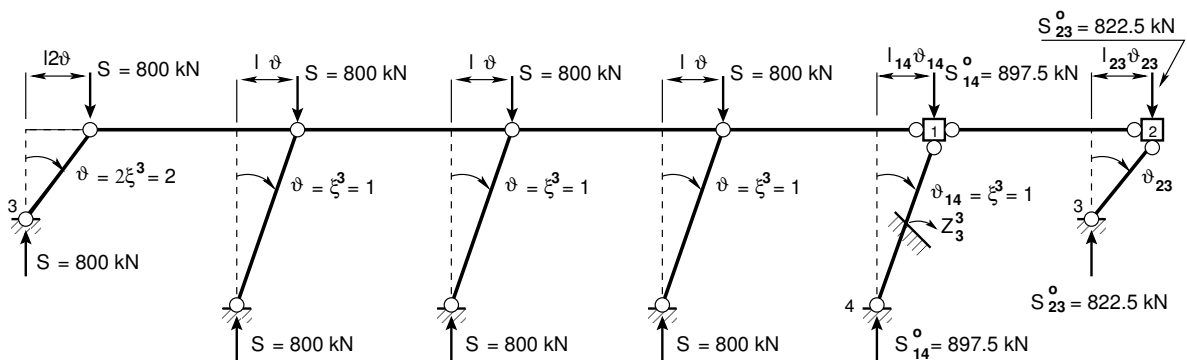
Raamil ilma pendelvarrasteta oli $\frac{1}{EI_p} \Delta Z_3^3 = -0.63562$.

Sõlmede ja varraste pöörete leidmiseks koostame võrrandisüsteemi

$$\mathbf{A}\xi = \mathbf{Z}^\ominus \quad (16.301)$$

kus maatriks \mathbf{A} on leitud avaldis (16.298) ja vektor \mathbf{Z}^\ominus (16.227) ning vektor ξ

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.302)$$



Joonis 16.49. Raami varrasahel

Võtame kasutusele uue muutuja $\mathbf{X} = EI_p \xi$ ja maatriksi $\mathbf{a} = EI_p \mathbf{A}$ ning esitame võrrandisüsteemi (16.301) järgmisel kujul:

$$\mathbf{a}\mathbf{X} = \mathbf{Z}^\ominus \quad (16.303)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 1.7675 & 0.5005 & 1.1774 \\ 0.5005 & 2.1771 & 2.3586 \\ 1.1774 & 2.3586 & 5.4364 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60.065 \\ 60.065 \\ -450.0 \end{bmatrix} \quad (16.304)$$

Lahendame võrrandisüsteemi (16.303) GNU Octave'iga:

$$\mathbf{X} = \mathbf{a} \backslash \mathbf{Z}^\ominus \quad (16.305)$$

Võrrandisüsteemi (16.303) lahend on

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} = EI_p \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.235 \\ 221.500 \\ -184.556 \end{bmatrix} \quad (16.306)$$

Momendid varraste otstes leiame avaldisega

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \mathbf{M}^{123} \xi \quad (16.307)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12}^0 \\ M_{21}^0 \\ M_{14}^0 \\ M_{41}^0 \\ M_{23}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & M_{12}^3 \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & M_{21}^3 \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & M_{14}^3 \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & M_{41}^3 \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & M_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (16.308)$$

kus maatriks \mathbf{M}^0 on toodud avaldisega (16.220) ja maatriks \mathbf{M}^{123} avaldisega (16.253). Momentide avaldise (16.267), (16.268) esitame leitud \mathbf{X} kaudu

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \frac{1}{EI_p} \mathbf{M}^{123} \mathbf{X} \quad (16.309)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60.065 \\ -60.065 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.99784 & 0.5005 & 0 \\ 0.50054 & 0.99784 & 0 \\ 0.76964 & 0 & 1.1774 \\ 0.40774 & 0 & 1.1774 \\ 0 & 1.1793 & 2.3586 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26.235 \\ 221.500 \\ -184.556 \end{bmatrix} \quad (16.310)$$

Momentide väärtused varraste otstes arvutame arvutiprogrammiga GNU Octave. Saame

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 197.11 \\ 174.09 \\ -197.10 \\ -206.60 \\ -174.08 \end{bmatrix} \quad (16.311)$$

Momentide võrdlus I ja II järku teoorias on toodud tabelis 16.15.

Tabelist näeme, et kõige suurem erinevus on 2. sõlmes – 93.4%.

Tabel 16.15. Momentide võrdlus I ja II järku teoorias

<i>Sõlm</i>	M^{II}	M^I	<i>Erinevus</i>
1	197.11	135.00	46.0 %
2	174.09	90.00	93.4 %
4	206.60	135.00	53.0 %

16.13 Teist järku teooria ülekanemaatriks

Teist järku teooria ülekanemaatriksi saamiseks lähtume diferentsiaalvõrrandist (16.31) survel

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{S}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{q(x)}{EI} = 0 \quad (16.312)$$

Diferentsiaalvõrrand tõmbel (16.313)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{S}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{q(x)}{EI} = 0 \quad (16.313)$$

Diferentsiaalvõrrandi (16.312) lahendit otsime kujul

$$w = w_0 w_1 + w_0' w_2 + w_0'' w_3 + w_0''' w_4 + e_e(x) \quad (16.314)$$

kus w_0, w_0', w_0'' ja w_0''' on otsitava funktsiooni väärtused kohal $x = x_0$, w_1, w_2, w_3 ja w_4 – homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{S}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (16.315)$$

normeeritud fundamentaalne lahendite süsteem. Homogeense diferentsiaalvõrrandi normeerimata lahendite süsteem survel

$$w_1^* = 1, \quad w_2^* = \frac{\nu}{l} x, \quad w_3^* = \cos\left(\frac{\nu}{l} x\right), \quad w_4^* = \sin\left(\frac{\nu}{l} x\right) \quad (16.316)$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi normeerimata lahendite süsteem tõmbel

$$w_1^* = 1, \quad w_2^* = \frac{\nu}{l} x, \quad w_3^* = ch\left(\frac{\nu}{l} x\right), \quad w_4^* = sh\left(\frac{\nu}{l} x\right) \quad (16.317)$$

kus $\nu = l\sqrt{\frac{S}{EI}}$.

Lahendite süsteemi (16.316) normeerimiseks kirjutame välja Wronski determinandi W

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\nu}{l} x & \cos\left(\frac{\nu}{l} x\right) & \sin\left(\frac{\nu}{l} x\right) \\ 0 & \frac{\nu}{l} & -\frac{\nu}{l} \sin\left(\frac{\nu}{l} x\right) & \frac{\nu}{l} \cos\left(\frac{\nu}{l} x\right) \\ 0 & 0 & -\left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{\nu}{l} x\right) & -\left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{\nu}{l} x\right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{\nu}{l}\right)^3 \sin\left(\frac{\nu}{l} x\right) & -\left(\frac{\nu}{l}\right)^3 \cos\left(\frac{\nu}{l} x\right) \end{vmatrix} \quad (16.318)$$

Wronski determinant W (Wronski¹⁴ determinant, kus iga järgmine rida on eelmise rea tuletis) väärtus kohal $x = 0$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{l} & 0 & \frac{\nu}{l} \\ 0 & 0 & -\left(\frac{\nu}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{\nu}{l}\right)^3 \end{vmatrix} \quad (16.319)$$

Selleks, et determinandi (16.319) väärtus oleks üks, teeme teisendused:

¹⁴Józef Maria Wronski, 1776–1853.

- kolmandast veerust lahutame esimese ning korrutame $\left(-\left(\frac{l}{\nu}\right)^2\right)$ -ga
- neljandast veerust lahutame teise ning korrutame $\left(-\left(\frac{l}{\nu}\right)^3\right)$ -ga
- teise veeru korrutame $\left(\frac{l}{\nu}\right)$ -ga.

Tulemuseks on ühikmaatriks

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (16.320)$$

Ühikmaatriksi saame ka siis, kui kolmandast veerust lahutame esimese ning korrutame $\left(\frac{l}{\nu}\right)^2$ -ga ja neljandast veerust lahutame teise ning korrutame $\left(\frac{l}{\nu}\right)^3$ -ga. Edaspidi lähtume esimesest moodusest.

Teeme sarnase teisenduse normeerimata lahendite süsteemiga (16.316)

- kolmandast veerust lahutame esimese ning korrutame $\left(-\left(\frac{l}{\nu}\right)^2\right)$ -ga:
 $-\left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \left[\cos\left(\frac{\nu}{l}x\right) - 1 \right]$
- neljandast veerust lahutame teise ning korrutame $\left(-\left(\frac{l}{\nu}\right)^3\right)$ -ga:
 $-\left(\frac{l}{\nu}\right)^3 \left[\sin\left(\frac{\nu}{l}x\right) - \left(\frac{\nu}{l}x\right) \right]$
- teise veeru korrutame $\left(\frac{l}{\nu}\right)$ -ga: x .

saame normeeritud lahendite süsteemi survel

$$\begin{aligned} w_1 &= 1, & w_2 &= x, \\ w_3 &= -\left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \left[\cos\left(\frac{\nu}{l}x\right) - 1 \right], & w_4 &= -\left(\frac{l}{\nu}\right)^3 \left[\sin\left(\frac{\nu}{l}x\right) - \left(\frac{\nu}{l}x\right) \right] \end{aligned} \quad (16.321)$$

ja normeeritud lahendite süsteemi tõmbel:

$$\begin{aligned} w_1 &= 1, & w_2 &= x, \\ w_3 &= \left(\frac{l}{\nu}\right)^2 \left[ch\left(\frac{\nu}{l}x\right) - 1 \right], & w_4 &= \left(\frac{l}{\nu}\right)^3 \left[sh\left(\frac{\nu}{l}x\right) - \left(\frac{\nu}{l}x\right) \right] \end{aligned} \quad (16.322)$$

Varraste sisejõudude leidmisel kasutatakse rajajõudude (kontaktjõudude) määramisel kahte erinevat märgikokkulepet (joonis 1.19).

Esimese märgikokkuleppe puhul on w_0 , w'_0 , w''_0 ja w'''_0 väärtused

$$w_0 = w_0, \quad w'_0 = -\varphi_0, \quad w''_0 = -\frac{M_y}{EI}, \quad w'''_0 = -\frac{Q_z}{EI} \quad (16.323)$$

ja teise märgikokkuleppe puhul

$$w_0 = w_0, \quad w'_0 = -\varphi_0, \quad w''_0 = \frac{M_y}{EI}, \quad w'''_0 = \frac{Q_z}{EI} \quad (16.324)$$

Diferentsiaalvõrrandi üldlahend esimese märgikokkuleppe puhul survel

$$w = w_0 - \varphi_0 x + \frac{M_y}{EI} \Big|_0 \left(\frac{l}{\nu} \right)^2 \left[\cos \left(\frac{\nu}{l} x \right) - 1 \right] - \\ + \frac{Q_z}{EI} \Big|_0 \left(\frac{l}{\nu} \right)^3 \left[\sin \left(\frac{\nu}{l} x \right) - \left(\frac{\nu}{l} x \right) \right] + w_e(x) \quad (16.325)$$

ning teise märgikokkuleppe puhul survel

$$w = w_0 - \varphi_0 x - \frac{M_y}{EI} \Big|_0 \left(\frac{l}{\nu} \right)^2 \left[\cos \left(\frac{\nu}{l} x \right) - 1 \right] + \\ - \frac{Q_z}{EI} \Big|_0 \left(\frac{l}{\nu} \right)^3 \left[\sin \left(\frac{\nu}{l} x \right) - \left(\frac{\nu}{l} x \right) \right] + w_e(x) \quad (16.326)$$

Diferentsiaalvõrrandi üldlahend esimese märgikokkuleppe puhul tõmbel

$$w = w_0 - \varphi_0 x - \frac{M_y}{EI} \Big|_0 \left(\frac{l}{\nu} \right)^2 \left[ch \left(\frac{\nu}{l} x \right) - 1 \right] - \\ \frac{Q_z}{EI} \Big|_0 \left(\frac{l}{\nu} \right)^3 \left[sh \left(\frac{\nu}{l} x \right) - \left(\frac{\nu}{l} x \right) \right] + w_e(x) \quad (16.327)$$

Erilahendi $w_e(x)$ leiame Cauchy valemi abil:

$$w_e(x) = \int_{x_0}^x w_n(x-t) f(t) dt \quad (16.328)$$

kus

$$w_n(x-t) = w_4(x-t) = - \left(\frac{l}{\nu} \right)^3 \left[\sin \left(\frac{\nu}{l} (x-t) \right) - \left(\frac{\nu}{l} (x-t) \right) \right] \quad (16.329)$$

ning

$$f(t) = \frac{q(t)}{EI} \quad (16.330)$$

Vaatleme juhtu, kui $\frac{q(t)}{EI} = const$. Erilahendi (16.328) saamiseks on vaja integreerida avaldis

$$w_e(x) = - \left(\frac{l}{\nu} \right)^3 \frac{q}{EI} \int_{x_0}^x \left[\sin \left(\frac{\nu}{l} (x-t) \right) - \left(\frac{\nu}{l} (x-t) \right) \right] dt \quad (16.331)$$

Integraali (16.331) esimene liige

$$\int_{x_0}^x \sin \left(\frac{\nu}{l} (x-t) \right) dt = \frac{l}{\nu} \left[1 - \cos \left(\frac{\nu}{l} (x-x_0) \right) \right] \quad (16.332)$$

Integraali (16.331) teine liige

$$\int_{x_0}^x \frac{\nu}{l} (x-t) dt = \frac{l \nu^2 (x-x_0)^2}{2\nu l^2} \quad (16.333)$$

Konstantse lauskoormuse puhul on erilahend (16.328)

$$w_e(x) = \frac{1}{2\nu^4} \left[\frac{\nu^2 (x-x_0)^2}{l^2} - 2 \left(1 - \cos \frac{\nu}{l} (x-x_0) \right) \right] \frac{ql^4}{EI} \quad (16.334)$$

Varda pikkuse $x - x_0 = l$ korral erilahend (16.334) ühtib teist järku teoorias tooduga [Krä91a] [Bor79b]

$$w_e(x) = \frac{1}{2\nu^4} \left[\nu^2 - 2(1 - \cos \nu) \right] \frac{ql^4}{EI} \quad (16.335)$$

Kui $x_0 = 0$ ja varda pikkus l , siis erilahendi w_e (16.334) saame esitada järgmisel kujul:

$$w_e(x) = \left[\frac{1}{2} \left(\nu \frac{x}{l} \right)^2 - 1 + \cos \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^4}{\nu^4 EI} \quad (16.336)$$

Pöördenurk

$$\varphi_e = -w_e'(x) = - \left[\nu \frac{x}{l} - \sin \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^3}{\nu^3 EI} \quad (16.337)$$

Paindemoment

$$M_e = -EIw_e''(x) = - \left[1 - \cos \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^2}{\nu^2} \quad (16.338)$$

Põikjõud

$$Q_e = -EIw_e'''(x) = - \left[\sin \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql}{\nu I} \quad (16.339)$$

Erilahenditest w_e , φ_e , Q_e ja M_e saab moodustada koormusvektori $[w_e \varphi_e Q_e M_e]'$.

Koondatud jõu F korral punktis a on erilahendis w_e (16.328) funktsiooniks

$$f(t) = \delta(t-a) \frac{F}{EI} \quad (16.340)$$

kus $\delta(t-a)$ on deltafunktsioon. Erilahendi koondatud jõu F puhul saame avaldise (16.328) integreerimisega

$$\begin{aligned} w_e(x) &= - \left(\frac{l}{\nu} \right)^2 \frac{F}{EI} \int_{x_0}^x \left[\cos \left(\frac{\nu}{l} (x-t) \right) - \left(\frac{\nu}{l} (x-t) \right) \right] \delta(t-a) dt = \\ &= - \left[\sin \left(\frac{\nu}{l} (x-a) \right) - \left(\frac{\nu}{l} (x-a) \right) \right] \frac{Fl^3}{\nu^3 EI} \end{aligned} \quad (16.341)$$

Võtame kasutusele järgmise Heaviside'i funktsiooni tähistuse

$$(x-a)_+ = \begin{cases} 0, & kui \ (x-a) < 0 \\ x-a, & kui \ (x-a) \geq 0 \end{cases} \quad (16.342)$$

Koondatud jõust koormusvektori $[w_e \varphi_e Q_e M_e]'$ leidmiseks võtame erilahendist

$$w_e(x) = - \left[\sin \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl^3}{\nu^3 EI} \quad (16.343)$$

tuletised.

Pöördenurk

$$\varphi_e = -w_e'(x) = \left[\cos \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - 1 \right] \frac{Fl^2}{\nu^2 EI} \quad (16.344)$$

Paindemoment

$$M_e = -EIw_e''(x) = - \left[\sin \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl}{\nu} \quad (16.345)$$

Põikjõud

$$Q_e = -EIw_e'''(x) = - \left[\cos \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] F \quad (16.346)$$

Koondatud momendi M korral punktis a on erilahendis w_e (16.328) funktsioonideks

$$f(t) = \delta(t-a) \frac{M}{EI} \quad (16.347)$$

$$w_n(x-t) = w_3(x-t) = \left(\frac{l}{\nu} \right)^2 \left[\cos \left(\frac{\nu}{l} (x-t) \right) - 1 \right] \quad (16.348)$$

Erilahendi koondatud momendi M puhul saame avaldise (16.328) integreerimisega:

$$\begin{aligned} w_e(x) &= - \left(\frac{l}{\nu} \right)^2 \frac{M}{EI} \int_{x_0}^x \left[\cos \left(\frac{\nu}{l} (x-t) \right) - 1 \right] \delta(t-a) dt = \\ &= - \left[\cos \left(\frac{\nu}{l} (x-a) \right) - 1 \right] \frac{Ml^2}{\nu^2 EI} \end{aligned} \quad (16.349)$$

Koondatud momendist koormusvektori $[w_e \varphi_e Q_e M_e]'$ leidmiseks võtame erilahendist

$$w_e(x) = - \left[\cos \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - 1 \right] \frac{Ml^2}{\nu^2 EI} \quad (16.350)$$

tuletised.
Pöördenurk

$$\varphi_e = -w'_e(x) = - \left[\sin \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Ml}{\nu EI} \quad (16.351)$$

Paindemoment

$$M_e = -EIw''_e(x) = - \left[\cos \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] M \quad (16.352)$$

Põikjõud

$$Q_e = -EIw'''_e(x) = \left[\sin \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{\nu}{l} M \quad (16.353)$$

Diferentseerides esimesele märgikokkuleppele vastavat diferentsiaalvõrrandi üldlahendi (16.325) homogeenise lahendi osa

$$\begin{aligned} w_h = w_0 - x\varphi_0 + \left[\sin \left(\frac{\nu}{l}x \right) - \left(\frac{\nu}{l}x \right) \right] \left(\frac{l}{\nu} \right)^3 \frac{Q_z}{EI} \Big|_o + \\ + \left[\cos \left(\frac{\nu}{l}x \right) - 1 \right] \left(\frac{l}{\nu} \right)^2 \frac{M_y}{EI} \Big|_o. \end{aligned} \quad (16.354)$$

saame ülekandemaatriksi koostamiseks teise võrrandi, mis vastab pöördenurgale

$$\begin{aligned} \varphi_h = -w'_h(x) = 0 \cdot w_0 - 1 \cdot \varphi_0 - \left[\cos \left(\frac{\nu}{l}x \right) - 1 \right] \left(\frac{l}{\nu} \right)^2 \frac{Q_z}{EI} \Big|_o + \\ + \left[\sin \left(\frac{\nu}{l}x \right) \right] \left(\frac{l}{\nu} \right) \frac{M_y}{EI} \Big|_o. \end{aligned} \quad (16.355)$$

Neljäs võrrand vastab paindemomendile

$$\begin{aligned} M_h = -EIw''_h(x) = 0 \cdot w_0 - 0 \cdot \varphi_0 + \\ + \left[\sin \left(\frac{\nu}{l}x \right) \right] \left(\frac{l}{\nu} \right) Q_z \Big|_o + \left[\cos \left(\frac{\nu}{l}x \right) \right] M_y \Big|_o. \end{aligned} \quad (16.356)$$

Kolmas võrrand vastab põikjõule

$$\begin{aligned} Q_h = -EIw'''_h(x) = 0 \cdot w_0 - 0 \cdot \varphi_0 + \\ + \left[\cos \left(\frac{\nu}{l}x \right) \right] Q_z \Big|_o - \left[\sin \left(\frac{\nu}{l}x \right) \right] \frac{l}{\nu} M_y \Big|_o. \end{aligned} \quad (16.357)$$

Võrrandites (16.354)–(16.357) leitud algarvameetrite $w_0, \varphi_0, Q_z \Big|_o$ ja $M_y \Big|_o$ kordajad kanname ülekandemaatriksisse $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\text{IN-}}$ (16.360).

Ülekandevõrrandid kirjutame sümboolsel kujul

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_v + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (16.358)$$

kus

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N_x \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N_x \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_v \quad (16.359)$$

$$\mathbf{U}^{\text{IN-}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & -\left[\nu \frac{x}{l} - \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{l^3}{\nu^3 EI} & -\left[1 - \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{l^2}{\nu^2 EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left[1 - \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{l^2}{\nu^2 EI} & \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) \frac{l}{\nu EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) & -\sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) \frac{\nu}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right) \frac{l}{\nu} & \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (16.360)$$

Ülekandemaatriks $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\text{IN-}}$ (16.360) survel vastab I märgikokkuleppele.

$$\mathbf{U}^{\text{IN+}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & \left[\nu \frac{x}{l} - \text{sh}\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{l^3}{\nu^3 EI} & \left[1 - \text{ch}\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{l^2}{\nu^2 EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\left[1 - \text{ch}\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{l^2}{\nu^2 EI} & \text{sh}\left(\nu \frac{x}{l}\right) \frac{l}{\nu EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{ch}\left(\nu \frac{x}{l}\right) & \text{sh}\left(\nu \frac{x}{l}\right) \frac{\nu}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sh}\left(\nu \frac{x}{l}\right) \frac{l}{\nu} & \text{ch}\left(\nu \frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (16.361)$$

Ülekandemaatriks $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\text{IN+}}$ (16.361) tõmbel vastab I märgikokkuleppele. Varraste sisejõudude leidmisel kasutatakse rajajõudude (kontaktjõudude) määramisel kahte erinevat märgikokkulepet (joonis 1.19). Teise märgikokkuleppe puhul korrutame -1 -ga ülekandemaatriksite (16.360) ja (16.361) veerud 4, 5, 6. Neid teise märgikokkuleppele vastavaid ülekandemaatrikseid saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [yfmII.m](#) lk 744.

Eriühenditest w_e , φ_e , Q_e ja M_e (16.336)–(16.339) moodustame koormusvektori

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ N_e \\ Q_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\frac{1}{2}\left(\nu \frac{x}{l}\right)^2 - 1 + \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{ql^4}{\nu^4 EI} \\ -\left[\nu \frac{x}{l} - \sin\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{ql^3}{\nu^3 EI} \\ 0 \\ -\left[\sin\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{ql}{\nu I} \\ -\left[1 - \cos\left(\nu \frac{x}{l}\right)\right] \frac{ql^2}{\nu^2} \end{bmatrix} \quad (16.362)$$

Koormusvektor $\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}$ (16.362) vastab survele, koormusvektor

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ N_e \\ Q_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left[\frac{1}{2}\left(\nu\frac{x}{l}\right)^2 - 1 - \operatorname{ch}\left(\nu\frac{x}{l}\right)\right] \frac{ql^4}{\nu^4 EI} \\ \left[\nu\frac{x}{l} - \operatorname{sh}\left(\nu\frac{x}{l}\right)\right] \frac{ql^3}{\nu^3 EI} \\ 0 \\ -\left[\operatorname{sh}\left(\nu\frac{x}{l}\right)\right] \frac{ql}{\nu I} \\ \left[1 - \operatorname{ch}\left(\nu\frac{x}{l}\right)\right] \frac{ql^2}{\nu^2} \end{bmatrix} \quad (16.363)$$

vastab tõmbele. Neid teisele kui ka esimesele märgikokkuleppele vastavaid koormusvektoreid (16.362), (16.363) saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [y1qII.m](#) lk 744. Koormusvektori avaldised survel on toodud tabelis G.3 ja tõmbel – tabelis G.4.

Koormusvektor

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ N_e \\ Q_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left[\sin\left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right) - \left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right)\right] \frac{Fl^3}{\nu^3 EI} \\ \left[\cos\left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right) - 1\right] \frac{Fl^2}{\nu^2 EI} \\ 0 \\ -\left[\cos\left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right)\right] F \\ -\left[\sin\left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right)\right] \frac{Fl}{\nu} \end{bmatrix} \quad (16.364)$$

vastab survele, koormusvektor

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ N_e \\ Q_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\operatorname{sh}\left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right) - \left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right)\right] \frac{Fl^3}{\nu^3 EI} \\ -\left[\operatorname{ch}\left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right) - 1\right] \frac{Fl^2}{\nu^2 EI} \\ 0 \\ -\left[\operatorname{ch}\left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right)\right] F \\ -\left[\operatorname{sh}\left(\nu\frac{(x-a)_+}{l}\right)\right] \frac{Fl}{\nu} \end{bmatrix} \quad (16.365)$$

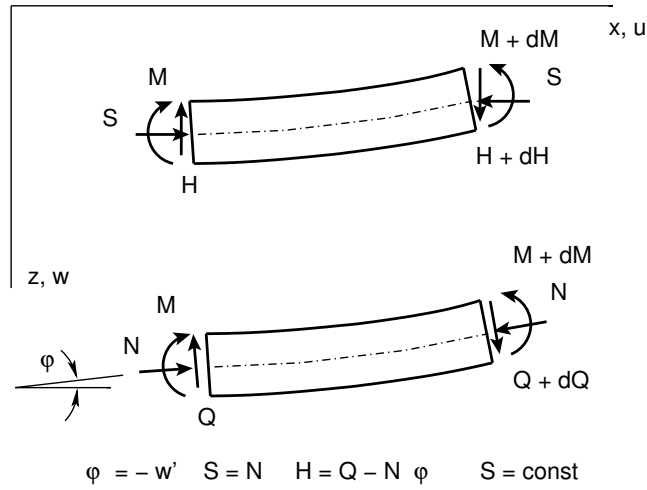
vastab tõmbele. Neid teisele kui ka esimesele märgikokkuleppele vastavaid koormusvektoreid (16.364), (16.365) saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [y1ffzII.m](#) lk 745.

Joonisel 16.50 on näidatud *pikijõud* S ja *ristjõud* H (sks *Transversalkraft*), mis enne varda deformatsiooni ühtisid normaaljõuga N ja põikjõuga Q (sks *Querkraft*). Ristjõu ja pikijõu seos põikjõu ning normaaljõuga

$$H = Q - N\varphi, \quad |S| = \mp N = \nu^2 \frac{EI}{l^2} \quad \text{siis kui} \begin{bmatrix} - \text{surve} \\ + \text{tõmme} \end{bmatrix} \quad (16.366)$$

kus *tunnusarv* ν

$$\nu^2 = l^2 \frac{|S|}{EI} \quad (16.367)$$



Joonis 16.50. Survejõud ja normaaljõud

Ristjõu seos põikjõuga

$$H = Q \mp \nu^2 \frac{EI}{l^2} \varphi \text{ siis kui } \begin{bmatrix} - \text{surve} \\ + \text{tõmme} \end{bmatrix} \quad (16.368)$$

ja põikjõu seos ristjõuga

$$Q = H \pm \nu^2 \frac{EI}{l^2} \varphi \text{ siis kui } \begin{bmatrix} - \text{surve} \\ + \text{tõmme} \end{bmatrix} \quad (16.369)$$

Suuruselt N, Q üleminek suurustele S, H toimub teisendusega [Krä91a]. Teisenduse $\tilde{\mathbf{T}}$ (16.370) võib teha GNU Octave'i funktsiooniga [ytransf.m](#) lk 745

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S \\ H \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & \pm \nu^2 \frac{EI}{l^2} & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N \\ Q \\ M_y \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{Z} \quad (16.370)$$

Vastupidist teisendust $\tilde{\mathbf{T}}^{-1}$ (16.371) võib teha GNU Octave'i funktsiooniga [ytransfp.m](#) lk 745

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N \\ Q \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & \mp \nu^2 \frac{EI}{l^2} & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S \\ H \\ M_y \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \quad (16.371)$$

Võrrandi (16.358) liikmed \mathbf{Z}_p , \mathbf{Z}_v avaldame $\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{Z}}_p$ ja $\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{Z}}_v$ kaudu

$$\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{Z}}_p = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{Z}}_v + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (16.372)$$

Korrutame võrrandi (16.372) $\tilde{\mathbf{T}}$ -ga. Nüüd avalduvad siirded, pööre, survejõud, ristjõud ja moment varda lõpus varda alguses olevate kaudu

$$\tilde{\mathbf{Z}}_p = \underbrace{\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{U}\tilde{\mathbf{T}}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{U}}} \tilde{\mathbf{Z}}_v + \underbrace{\tilde{\mathbf{T}}\overset{\circ}{\mathbf{Z}}}_{\overset{\circ}{\mathbf{Z}}} \quad (16.373)$$

Võrrandi (16.373) liikmed $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{U}\tilde{\mathbf{T}}^{-1}$ ja $\tilde{\mathbf{T}}\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ tähistame vastavalt $\tilde{\mathbf{U}}$ -ga ning $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ -ga. Ülekandevõrrandi (16.373) esitame järgmisel kujul:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_p = \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_v + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (16.374)$$

kus vektori $\tilde{\mathbf{Z}}_p$ ja $\tilde{\mathbf{Z}}_v$ elementide S_x , H_z (joonis 16.50) suunad ühtivad deformeerumata olukorra ristlõike normaali ja temaga risti oleva suunaga

$$\tilde{\mathbf{Z}}_p = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S_x \\ H_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_v = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S_x \\ H_z \\ M_y \end{bmatrix}_v \quad (16.375)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{\text{Is}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin\left(\frac{\nu x}{l}\right) \frac{l}{\nu} & 0 & \left[-\frac{\nu x}{l} + \sin\left(\frac{\nu x}{l}\right)\right] \frac{l^3}{\nu^3 EI} & \left[-1 + \cos\left(\frac{\nu x}{l}\right)\right] \frac{l^2}{\nu^2 EI} \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\nu x}{l}\right) & 0 & \left[1 - \cos\left(\frac{\nu x}{l}\right)\right] \frac{l^2}{\nu^2 EI} & \left[\sin\left(\frac{\nu x}{l}\right)\right] \frac{l}{\nu EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \sin\left(\frac{\nu x}{l}\right) \frac{EI}{l} & 0 & \sin\left(\frac{\nu x}{l}\right) \frac{l}{\nu} & \cos\left(\frac{\nu x}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (16.376)$$

Ülekandemaatriks $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^{\text{Is}}$ (16.376) survel vastab I märgikokkuleppele.

$$\tilde{\mathbf{U}}^{\text{It}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\text{sh}\left(\frac{\nu x}{l}\right) \frac{l}{\nu} & 0 & \left[\frac{\nu x}{l} - \text{sh}\left(\frac{\nu x}{l}\right)\right] \frac{l^3}{\nu^3 EI} & \left[1 + \text{ch}\left(\frac{\nu x}{l}\right)\right] \frac{l^2}{\nu^2 EI} \\ 0 & 0 & \text{ch}\left(\frac{\nu x}{l}\right) & 0 & \left[-1 + \text{ch}\left(\frac{\nu x}{l}\right)\right] \frac{l^2}{\nu^2 EI} & \left[\text{sh}\left(\frac{\nu x}{l}\right)\right] \frac{l}{\nu EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \text{sh}\left(\frac{\nu x}{l}\right) \frac{EI}{l} & 0 & \text{sh}\left(\frac{\nu x}{l}\right) \frac{l}{\nu} & \text{ch}\left(\frac{\nu x}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (16.377)$$

Ülekanemaatriks $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^{\text{It}}$ tõmbel (16.377) vastab I märgikokkuleppele.

Teise märgikokkuleppe puhul korrutame -1 -ga ülekanemaatriksite (16.376) ja (16.377) veerud 4, 5, 6. Neid teisele märgikokkuleppele vastavaid ülekanemaatrikseid saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [ylfmhvII.m](#) lk 743, kui võtame selles funktsioonis baasjäikuse (vt lõik G.3) võrdseks ühega ($baasi0 = 1.0$).

Koormusvektorid (16.362), (16.363) teisendame teisenduse (16.368) abil koormusvektoriteks (16.378), (16.379), mis vastavad suurustele S ja H . Koormusvektor

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\frac{1}{2} \left(\nu \frac{x}{l} \right)^2 - 1 + \cos \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^4}{\nu^4 EI} \\ - \left[\nu \frac{x}{l} - \sin \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^3}{\nu^3 EI} \\ 0 \\ -q \cdot x \\ - \left[1 - \cos \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^2}{\nu^2} \end{bmatrix} \quad (16.378)$$

vastab survele, koormusvektor

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}_t} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ - \left[\frac{1}{2} \left(\nu \frac{x}{l} \right)^2 - 1 - \text{ch} \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^4}{\nu^4 EI} \\ \left[\nu \frac{x}{l} - \text{sh} \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^3}{\nu^3 EI} \\ 0 \\ -q \cdot x \\ \left[1 - \text{ch} \left(\nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^2}{\nu^2} \end{bmatrix} \quad (16.379)$$

vastab tõmbele.

Neid teisele märgikokkuleppele vastavaid koormusvektoreid (16.378), (16.379) saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [yIqvII.m](#) lk 744, kui võtame selles funktsioonis baasjäikuse (vt lõik G.3) võrdseks ühega ($baasi0 = 1.0$). Koormusvektorid on toodud lisas G lõik G.3 avaldised (G.32) ja (G.33).

Koormusvektorid (16.364), (16.365) teisendame teisenduse (16.368) abil koormusvektoriteks (16.380), (16.381), mis vastavad suurustele S ja H . Koormusvektor

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ - \left[\sin \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl^3}{\nu^3 EI} \\ \left[\cos \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - 1 \right] \frac{Fl^2}{\nu^2 EI} \\ 0 \\ - (x-a)_+^0 F \\ - \left[\sin \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl}{\nu} \end{bmatrix} \quad (16.380)$$

vastab survele, koormusvektor

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_t = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\text{sh} \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl^3}{\nu^3 EI} \\ - \left[\text{ch} \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - 1 \right] \frac{Fl^2}{\nu^2 EI} \\ 0 \\ - (x-a)_+^0 F \\ - \left[\text{sh} \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl}{\nu} \end{bmatrix} \quad (16.381)$$

vastab tõmbele.

Need teisele kui ka esimesele märgikokkuleppele vastavad koormusvektorid (16.380), (16.381) on lisas G lõik G.3 avaldised (G.34) ja (G.35). Neid koormusvektoreid saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [yflhvzII.m](#) lk 743, kui võtame selles funktsioonis baasjäikuse (vt lõik G.3) võrdseks ühega ($baasi0 = 1.0$). Teise märgikokkuleppe puhul tuleb ülekandemaatriksite (16.376) ja (16.377) veerud 4, 5, 6 korrutada -1 -ga. Ülekandemaatriks $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^{\text{II}s}$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{\text{II}s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sin \nu \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & 0 & \frac{\frac{\nu x}{l} - \sin \frac{\nu x}{l}}{\nu^3} \frac{l^3}{EI} & \frac{1 - \cos \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \\ 0 & 0 & \cos \frac{\nu x}{l} & 0 & \frac{-1 + \cos \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} & \frac{-\sin \frac{\nu x}{l}}{\nu} \frac{l}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \sin \frac{\nu x}{l} \frac{l}{EI} & 0 & \frac{-\sin \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & -\cos \frac{\nu x}{l} \end{bmatrix} \quad (16.382)$$

survel vastab II märgikokkuleppele, ülekandemaatriks $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^{\text{II}t}$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{\text{II}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\text{sh} \nu \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & 0 & \frac{\frac{-\nu x}{l} + \text{sh} \frac{\nu x}{l}}{\nu^3} \frac{l^3}{EI} & \frac{-1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \\ 0 & 0 & \text{ch} \frac{\nu x}{l} & 0 & \frac{1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} & \frac{-\text{sh} \frac{\nu x}{l}}{\nu} \frac{l}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \text{sh} \frac{\nu x}{l} \frac{l}{EI} & 0 & \frac{-\text{sh} \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & -\text{ch} \frac{\nu x}{l} \end{bmatrix} \quad (16.383)$$

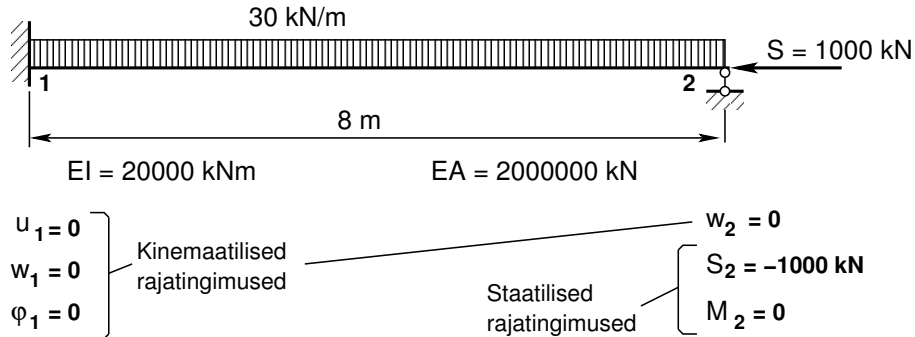
tõmbel vastab II märgikokkuleppele. Need ülekandemaatriksid (16.382), (16.383) saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [yflmII.m](#) lk 744. Koormusvektori jaotatud koormusest ja koondatud jõust saab arvutada GNU Octave'i funktsioonidega [yqlqII.m](#) lk 744 ning [yflfzII.m](#) lk 745.

16.14 Arvutusnäited ülekandemaatriksiga

16.14.1 Tala arvutus ülekandemaatriksiga. Näide 16.7

Näide 16.7 Leida joonisel 16.51 tala siirded ja sisejõud II järku teooria ülekandemaatriksiga. Tala on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega $q_z = 30 \text{ kN/m}$ ning pikijõuga $S =$

1000 kN. Tala ristlõike paindejäikus on $EI = 2 \cdot 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ja $EA = 2 \cdot 10^6 \text{ kN}$. Tala sille on 8 m. Koostame tala ülekandevõrrandisüsteemi,



Joonis 16.51. Tala arvutus ülekandemaatriksiga

$$\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \tilde{\mathbf{Z}}_2 - \tilde{\mathbf{U}}_{(x=1)} \tilde{\mathbf{Z}}_1 = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{(x=1)} \quad (16.384)$$

kus skaleeritud võrrandisüsteemi¹⁵ (16.384) kordajate maatriks teise märgikokkuleppe puhul on esitatud avaldistega (G.30), (G.31) ja vastav GNU Octave'i funktsioon selle arvutamiseks on [ylfmhvII.m lk 743](#). Varraste sisejõudude leidmisel kasutame rajajõudude (kontaktjõudude) määramisel teist märgikokkulepet (joonis 1.19). Võrrandisüsteemis on siirete ja sisejõudude arvvärtuste erinevus ca 10^3 korda. Korrutame siirete võrrandid baasjäikusega $i_0 = \frac{\max EI}{\min l}$. Sellist võrrandisüsteemi teisendust nimetatakse võrrandisüsteemi skaleerimiseks (ingl *k scaling*). Skaleeritud võrrandisüsteemi (16.384) koormusvektor (ühtlaselt jaotatud koormusel $q_z = \text{const}$) teise märgikokkuleppe puhul on esitatud avaldistega (G.32), (G.33) ja vastav GNU Octave'i funktsioon selle arvutamiseks on [ylqvII.m lk 744](#).

$\mathbf{I}_{(6 \times 6)}$ – 6×6 ühikmaatriks ja

$$\tilde{\mathbf{Z}}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ S_2 \\ H_2 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ S_1 \\ H_1 \\ M_1 \end{bmatrix} \quad (16.385)$$

Baasjäikus $i_0 = \frac{EI}{l} = \frac{2.0e+04}{8.0} = 2.5e + 03$, $\text{baas}0 = i_0$.
Tala ülekandevõrrandisüsteemi (16.384) esitame kujul

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (16.386)$$

kus esimesed kuus võrrandit leitakse avaldisega

$$\mathbf{A}_{(6 \times 12)} = \left[\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \quad \tilde{\mathbf{U}} \right] \quad (16.387)$$

¹⁵ Võrrandisüsteemi skaleerimine – võrrandisüsteemi teisendus, kus muutujad on asendatud uute muutujatega, mis on korrutatud konstandiga.

ja järgmised kuus rajatingimustest (16.390)–(16.393).

Varda lõpus olevaid rajasiirdeid ja rajajõude kirjeldab vektor $\tilde{\mathbf{Z}}_2$, varda algul olevaid – $\tilde{\mathbf{Z}}_1$, mis on ühtasi ka alparameetriteks:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_2 \\ \tilde{\mathbf{Z}}_1 \end{bmatrix} \quad (16.388)$$

Võrrandisüsteemi vabaliikmest \mathbf{B} esimesed kuus saame koormusvektorist $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{(x=1)}$ (16.384). Järgmised kuus – rajatingimustest:

$$\mathbf{B} = \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (16.389)$$

Võrrandisüsteem (16.386) koosneb kuuest võrrandist. Tundmatute X_i arv on kaksteist. Varda on veel 6 võrrandit, et määrata üheselt tundmatud. Need võrrandid saame rajatingimustest (vt joonis 16.51).

Rajatingimused

Esimese lisavõrrandi saame rajatingimusest $w_2 = 0$ (joonis 3.1). Tundmatu on teine (2) $X_2 = w_2$ ja võrrand on seitsmes (7)

$$A(7, 2) = 1, \quad B(7, 1) = 0 \quad (16.390)$$

Teise lisavõrrandi saame rajatingimusest $S_2 = -1000$. Tundmatu on neljas (4) $X_4 = S_2$ ja võrrand on kaheksas (8)

$$A(8, 4) = 1, \quad B(8, 1) = -1000 \quad (16.391)$$

Kolmanda lisatingimuse saame rajatingimusest $M_2 = 0$. Tundmatu on kuues (6) $X_6 = M_2$ ja võrrand on üheksas (9)

$$A(9, 6) = 1, \quad B(9, 1) = 0 \quad (16.392)$$

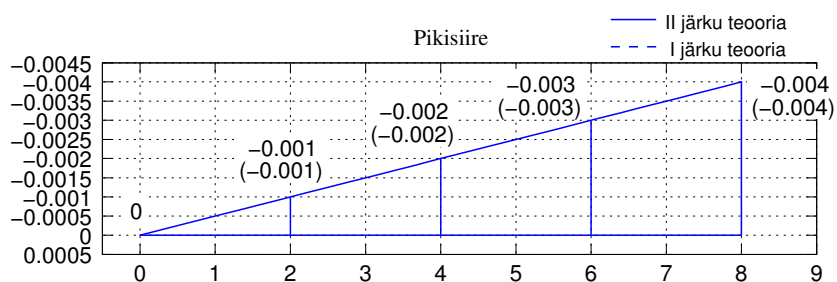
Viimased kolm lisavõrrandit saame rajatingimusest $u_1 = 0$, $w_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$. Tundmatuteks on $X_7 = u_1$, $X_8 = w_1$, $X_9 = \varphi_1$ ja võrrandid on 10 – 12:

$$\begin{aligned} A(10, 7) &= 1, & B(10, 1) &= 0 \\ A(11, 8) &= 1, & B(11, 1) &= 0 \\ A(12, 9) &= 1, & B(12, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (16.393)$$

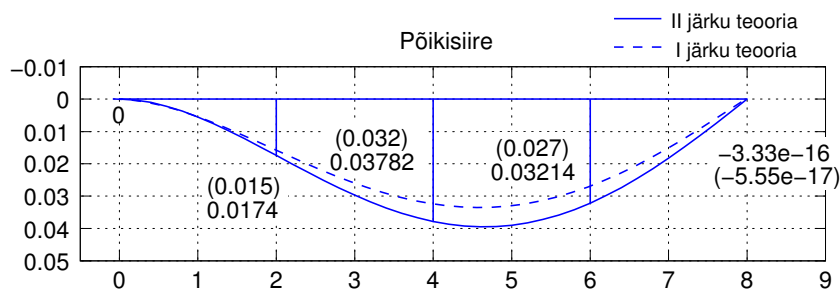
Võrrandisüsteemi koostame ja lahendame GNU Octave'i programmiga *ynadIII.m* lk 746.

Võrrandisüsteemi lahendamisel saame skaleeritud siirded ja sisejõud (16.394). Pärast siirete jagamist baasjäikusega $i_0 = 2.5e + 03$ saame tegelikud siirded (16.394).

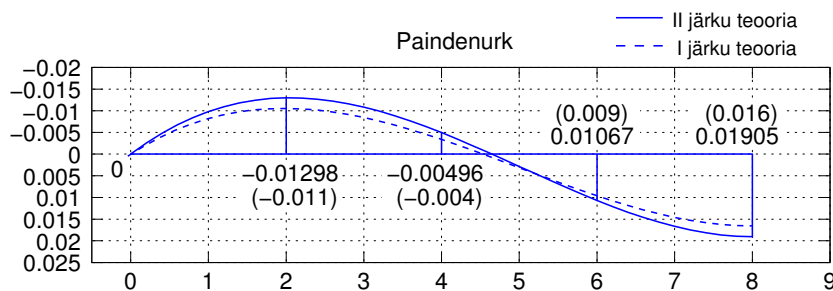
<i>Skaleeritud</i>	<i>Tegelikud</i>	
$X(1,1) = -10.0000,$	$X(1,1) = -0.0040$ m	
$X(2,1) = 0.0000,$	$X(2,1) = 0.0000$ m	
$X(3,1) = 47.6177,$	$X(3,1) = 0.0190$ rad	
$X(4,1) = -1000.0000,$	$X(4,1) = -1000.0000$ kN	
$X(5,1) = -86.2366,$	$X(5,1) = -86.2366$ kN	
$X(6,1) = -0.0000,$	$X(6,1) = -0.0000$ kN	(16.394)
$X(7,1) = 0.0000,$	$X(7,1) = 0.0000$ m	
$X(8,1) = 0.0000,$	$X(8,1) = 0.0000$ m	
$X(9,1) = 0.0000,$	$X(9,1) = 0.0000$ rad	
$X(10,1) = 1000.0000,$	$X(10,1) = 1000.0000$ kN	
$X(11,1) = -153.7634,$	$X(11,1) = -153.7634$ kN	
$X(12,1) = 270.1075,$	$X(12,1) = 270.1075$ kN·m	



(a) Tala pikisiire [m]

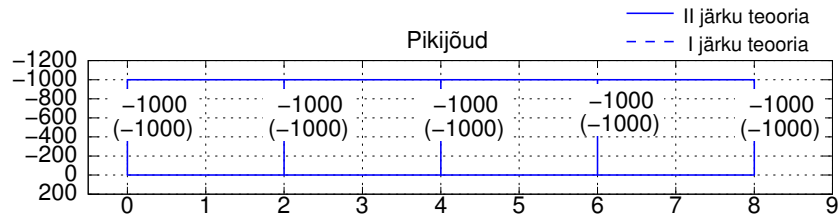


(b) Tala põikisiire [m]

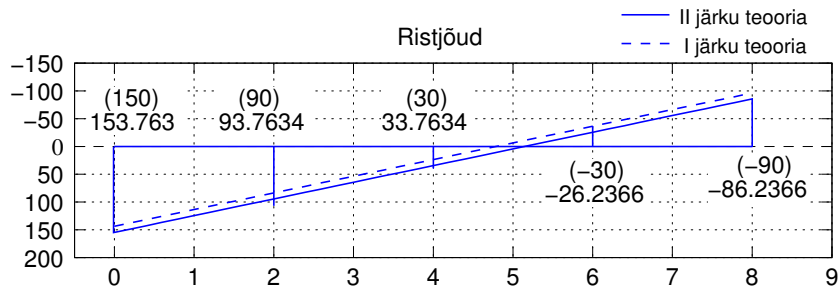


(c) Tala pöördenurk [rad]

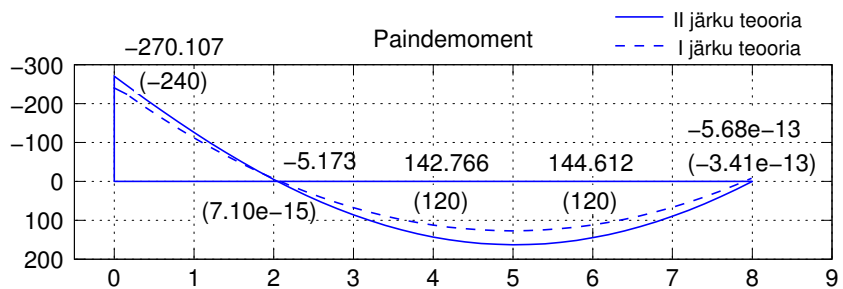
Joonis 16.52. Tala siirded



(a) Tala pikijõud [kN]



(b) Tala ristjõud [kN]



(c) Tala paindemoment [kN·m]

Joonis 16.53. Tala sisejõud

Süirete ja sisejõudude jaotuse leidmiseks kirjutame võrrandi (16.384) ringi järgmisel kujul:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_2(x) = \tilde{\mathbf{U}}(x) \tilde{\mathbf{Z}}_1 + \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}(x) \quad (16.395)$$

kus $\tilde{\mathbf{U}}(x)$ ja $\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}(x)$ arvutamisel GNU Octave'i funktsioonidega *ylfmhvII.m* ning *ylqvII.m* võtame skaleerimisteguriks ühe (baasi0 = 1.0).

Algpärametriteks $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ on tegelike rajasuuruste (16.394) viimased kuus väärtust

$$\tilde{\mathbf{Z}}_1 = \begin{bmatrix} u_1 = 0.0000 \text{ m} \\ w_1 = 0.0000 \text{ m} \\ \varphi_1 = 0.0000 \text{ rad} \\ S_1 = 1000.000 \text{ kN} \\ H_1 = -153.7634 \text{ kN} \\ M_1 = 270.1075 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix} \quad (16.396)$$

Süirete, pöörete ja sisejõudude jaotused leiame GNU Octave'i programmiga *ynadIII1.m* lk 746.

Joonistel 16.52(a)–16.53(c) on lineaarse teooria järgi arvutatud siirded ja sisejõud esitatud kriipsjoonega (arvulised väärtused on sulgudes) ning teist järku teooria järgi arvutatud siirded ja sisejõud pideva joonega.

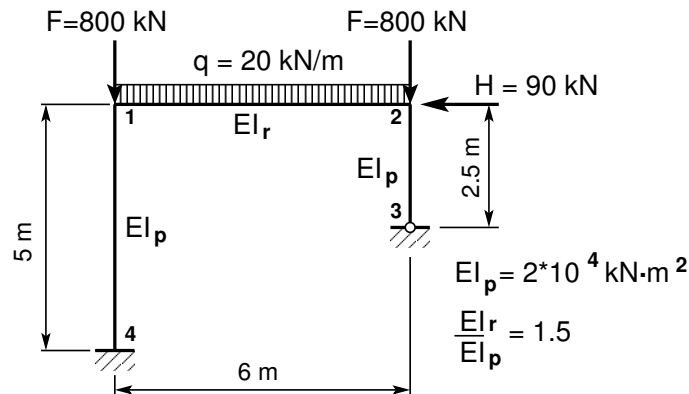
16.14.2 Raami arvutus ülekanematriksiga. Näide 16.8

Järgnevas näites vaadeldavat meetodit nimetame EST-meetodiks [Lah97b] [Lah98a], mis on üks rajaelementide meetoditest. Rajaelementide meetodi puhul rahuldatakse diferentsiaalvõrrandid (DV) määramispiirkondades (varrastes) täpselt (varda põhivõrrandid). Rajatingimused (kontaktjõud ja siirded) rahuldatakse ligikaudselt (kontaktjõud ja siirded leitakse võrrandisüsteemi lahendamisega).

Näide 16.8 Leida joonisel 16.54 toodud raami sisejõud. Arvutada EST-meetodiga II järku teooria järgi.

Raam on koormatud kahe vertikaalse jõuga $F = 800$ kN ja ühtlaselt jaotatud koormusega $q_z = 20$ kN/m ning horisontaalse jõuga $H = 90$ kN. Raami posti ristlõike paindejäikus on $EI_p = 2 \cdot 10^4$ kNm² ja raami riivi ristlõike paindejäikus $EI_r = 1.5EI_p$. Raami ava on 6 m, postide pikkused 5 m ja 2.5 m.

Baasjäikus $i_0 = EI_p/5$, baasi $0 = i_0$



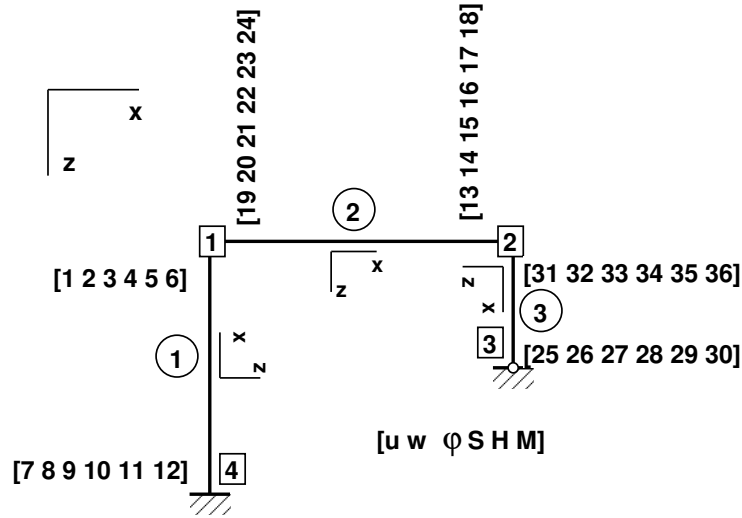
Joonis 16.54. Raam

Võtame kasutusele parema käe teljestiku ja II märgikokkuleppe. Üldteljestik on tähistatud X , Y , Z . Kohalik teljestik x , y , z on näidatud joonisel 16.55. Võrrandisüsteemi koostamisel EST-meetodiga on tundmatuteks siirded ja kontaktjõud varraste otstes (joonis 16.55). Siirete ja kontaktjõudude arv on 36. Ühel vardal siirete ja kontaktjõudude arv on $2 \times 6 = 12$. Vardaid on kolm. Varda otste siirete ja kontaktjõudude arv on $3 \times 12 = 36$. Varda otste siirete ja kontaktjõudude nummerdus on näidatud joonisel 16.55. Raami võrrandisüsteemi esitame kujul

$$\mathbf{AZ} = \mathbf{B} \quad (16.397)$$

Esimesed 18 võrrandit on varraste 1, 2, 3 põhivõrrandid

$$\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \tilde{\mathbf{Z}}_{12} - \tilde{\mathbf{U}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_{11} = \tilde{\mathbf{Z}}_1^0 \quad (16.398)$$



Joonis 16.55. Raami siirete ja kontaktjõudude nummerdus

$$\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \tilde{\mathbf{Z}}_{22} - \tilde{\mathbf{U}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_{21} = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_2 \quad (16.399)$$

$$\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \tilde{\mathbf{Z}}_{32} - \tilde{\mathbf{U}}_3 \tilde{\mathbf{Z}}_{31} = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_3 \quad (16.400)$$

kus varda otstes olevad siirded ja kontaktjõud on toodud avaldistega

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{12} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{Z}}_{11} = \begin{bmatrix} Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \\ Z_{10} \\ Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{Z}}_{22} = \begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{14} \\ Z_{15} \\ Z_{16} \\ Z_{17} \\ Z_{18} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{Z}}_{21} = \begin{bmatrix} Z_{19} \\ Z_{20} \\ Z_{21} \\ Z_{22} \\ Z_{23} \\ Z_{24} \end{bmatrix} \quad (16.401)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{32} = \begin{bmatrix} Z_{25} \\ Z_{26} \\ Z_{27} \\ Z_{28} \\ Z_{29} \\ Z_{30} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{Z}}_{31} = \begin{bmatrix} Z_{31} \\ Z_{32} \\ Z_{33} \\ Z_{34} \\ Z_{35} \\ Z_{36} \end{bmatrix} \quad (16.402)$$

Ülekandevõrrandite (16.398)–(16.400) koostamiseks kasutame teise märgikokkuleppe järgi koostatud GNU Octave'i funktsiooni *ybvfmhvII.m* lk 746, mis kasutab ülekandemaatriksit $\tilde{\mathbf{U}}$ ja koormusvektorit $\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}$. Neid funktsioone kasutame omakorda GNU Octave'i programmis *yRaam1.m* lk 747, millega arvutatud tulemused on toodud arvutuspäevikus 16.8 (lk 588). Samast arvutuspäevikust näeme sõlmede koordinaatide ja varraste topoloogilist kirjeldust.

Ülekandevõrrandid (16.398)–(16.400) sisestatakse topoloogilise kirjelduse alusel võrrandisüsteemi (16.397) maatriksisse \mathbf{A} ja vektorisse \mathbf{B} . Esimese 18 võrrandi vabaliikme \mathbf{B} arväärtust saame vaadata arvutuspäevikust 16.8. Esimese 18 võrrandi võrrandisüsteemi kordajate \mathbf{A} arväärtusi arvutuspäevikus 16.8 on raskem jälgida, sest need on esitatud hõreda maatriksina \mathbf{spA} . Võrrandisüsteemi kordajad moodustavad 36×36 maatriksi \mathbf{A} . Maatriksis \mathbf{A} on 90 nullist erinevat elementi. GNU Octave'i esitab hõreda maatriksi vektorina, mille elemendid on reastatud veeru indeksite järgi.

Võrrandisüsteemi järgmised 6 võrrandit (19–24) saame, kui sõlmedes 1 ja 2 võrdsustame siirded ja pöörded. Siirete ja pöörete võrdsustamiseks teisendame u, w, φ kohalikest koordinaatidest üldkoordinaatidesse. Siirete ja pöörete võrdsustamisel kasutame teist märgikokkulepet. Võrdsustamisel tuleb ühe varda otsa siiretest lahutada teise varda otsa siirded ja need võrdsustada nulliga (vt lõik vastastikused siirded 14.5 lk 399). Võrrandite (19–24) vabaliikme \mathbf{B} arväärtused võrduvad nulliga.

Siirete, pöörete ja kontaktjõudude teisendamiseks kohalikest koordinaatidest x, z, y üldkoordinaatidesse X, Z, Y kasutame teisendust (vt (1.46 lk 50)

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ y \end{bmatrix} \quad (16.403)$$

Varda lõpu ja alguse koordinaatide (joonis 16.55) X_L, Y_L, X_A, Y_A järgi saab arvutada suunakoosinused

$$\cos \alpha = \frac{X_L - X_A}{l} \quad (16.404)$$

$$\cos \alpha = \frac{Z_L - Z_A}{l} \quad (16.405)$$

kus l on varda pikkus

$$l = \sqrt{(Z_L - Z_A)^2 + (X_L - X_A)^2} \quad (16.406)$$

Teisendusmaatriksit T_0

$$T_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.407)$$

kasutame siirete $[u, w, \varphi]$ ja sisejõudude $[S, H, M]$ teisendamiseks üldkoordinaatidesse sõlmede pidevustingimuste ja tasakaaluvõrrandite koostamisel. Teisendusmaatriksit T

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.408)$$

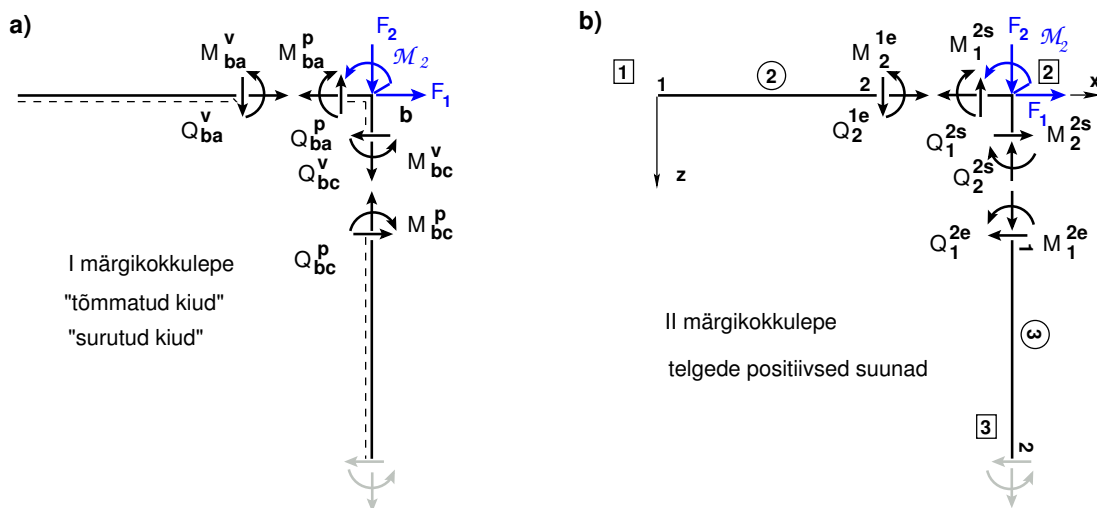
kasutame siirete ja sisejõudude $[u, w, \varphi, S, H, M]$ teisendamiseks üldkoordinaatidesse. Varraste 1, 2, 3 teisendusmaatriksid (joonis 16.55):

$$T_{10} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.409)$$

$$T_{20} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.410)$$

$$T_{30} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.411)$$

Võrrandisüsteemi järgmised 6 võrrandit (25–30) saame, kui koostame sõlmede 1 ja 2 tasakaaluvõrrandid. Tasakaaluvõrrandite koostamiseks teisendame S, H, M kohalikest koordinaatidest üldkoordinaatidesse. Varraste otstes mõjuvad kontaktjõud vastavad teisele märgikokkuleppele. Väljalõigatud sõlmele mõjuvate kontaktjõudude suunad on vastupidised varda otsas mõjuvatele kontaktjõududele (vt joonis 16.56). Väljalõigatud sõlmes telgede positiivses suunas mõjuvate välisjõudude ja teisele märgikokkuleppele vastavate positiivsete kontaktjõudude märgid on erinevad (vt joonis 16.56). Vabaliikmetesse \mathbf{B} minevate välisjõudude märgid vastavad telgede positiivsetele suundadele. Sõlmes 1 mõjuvad välisjõud on võrrandite (25–27) vabaliikmetes \mathbf{B} järgmiste arvvärtustega $[800; 0; 0]$. Sõlmes 2 mõjuvad välisjõud on võrrandites (28–30) – arvvärtustega $[800; -90; 0]$ (vaata arvutuspäevikus 16.8 (lk 588) vabaliikmeid \mathbf{B}).



Joonis 16.56. Kontaktjõud sõlmes

Võrrandisüsteemi järgmised 6 võrrandit (31–36) saame, kui anname ette rajatingimused. Toesõlmes 4 (joonis 16.55) on siirded u_7, w_8, φ_9 (Z_7, Z_8, Z_9) võrdsed nulliga. Toesõlmes 3 on siirded u_{25}, w_{26} ja moment M_{30} (Z_{25}, Z_{26}, Z_{30}) võrdsed nulliga.

Skaleeritud võrrandisüsteemi (16.397) lahendis \mathbf{Z} on siirded i_0 korda suuremad ja varraste kontaktjõud \mathbf{Z} vastavad teisele märgikokkuleppele (vaata arvutuspäevikus 16.8 (lk 589)). Tegelikke siirete leidmiseks jagame siirded baasjäikusega i_0 . Siirete indekseid saame jälgida jooniselt 16.55.

Siirete, pöörete ja sisejõudude väärtuste leidmiseks varrastes kasutame ülekandevõrrandit

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_v + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (16.412)$$

kus

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S_x \\ H_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S_x \\ H_z \\ M_y \end{bmatrix}_v \quad (16.413)$$

\mathbf{Z}_v on teisele märgikokkuleppele vastavad skaleerimata siirded ja kontaktjõud (algpameetrid) varraste alguses.

Teise märgikokkuleppele vastava ülekandemaatriksi \mathbf{U} arvutame GNU Octave'i funktsiooniga *ylfmhvII.m* (lk 743) ja koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ funktsiooniga *ylqvII.m* (lk 744).

Teine märgikokkuleppe erineb esimesest märgikokkuleppest selle poolest, et varda alguses olevate kontaktjõudude märgid on vastupidised (vt joonis 1.19). Varda lõpus on esimese ja teise märgikokkuleppe puhul kontaktjõudude märgid ühesugused. Võrrandiga (16.412) arvutamisel leiame siirded ja kontaktjõud ka kaugusel $x = 0$, siis saame vardas kõik kontaktjõud, mis vastavad nii esimesele kui ka teisele märgikokkuleppele.

Teist järku teoorias peame teadma varrastes mõjuvaid pikijõude S . Esimese lähendi saamiseks arvutame esmalt lineaarse teooria järgi. Valime pikijõud $S_i = 0$ ja GNU Octave'i programm *yRaam1.m* lk 747 leiab lineaarses lähenduses varraste pikijõud $[-897.50 \quad -54.00 \quad -822.50]$. Sisestades need pikijõudude väärtused programmi, leiame siirded ja kontaktjõud teises lähenduses (vt arvutuspäevik 16.8).

Vaatame pikijõu muutumist varrastes olenevalt lähendusest

$$\begin{aligned} [-897.500 \quad -54.000 \quad -822.500] &- \text{lineaarses ülesandes} \\ [-904.385 \quad -55.431 \quad -815.615] &- 2. \text{ järku teoorias 1. lähend} \\ [-904.364 \quad -55.362 \quad -815.636] &- 2. \text{ järku teoorias 2. lähend} \end{aligned}$$

Näeme, et 2. järku teoorias 1. lähend on piisav ülesande lahendamiseks.

Pikijõu S ja ristjõu H teisenduse (16.371) normaalkjõuks N ja põikjõuks Q teeme funktsiooniga *ytransfp.m* (lk 745).

Raami staatiline kontroll.

Projitseerime kõik jõud horisontaalteljele X (joonis 16.57)

$$\Sigma X = 0; \quad 55.43057 + 34.56943 - 90 = 0.0 \quad (16.414)$$

Projitseerime kõik jõud vertikaalteljele Z (joonis 16.57)

$$\Sigma Z = 0; \quad -904.38504 - 815.61496 + 6 * 20 + 2 * 800 = 0.0 \quad (16.415)$$

Momentide summaga kontrollimine on väga oluline kontroll. Paljudel juhtudel avastatakse arvutustes tehtud viga alles selle kontrolliga.

Momentide summa toe 3 suhtes

$$\begin{aligned} \Sigma M_3 = 0; \quad & -154.80531 - 904.38504 * 6.0 + 55.43057 * 2.5 + 800 * 6.0 + \\ & + 20 * 6.0 * 3.0 + 90 * 2.5 + 0.033453 * (2 * 800 + 20 * 6.0) = 3.5 * 10^{-5} \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (16.416) \end{aligned}$$

Staatiline kontroll näitab, et raam on temale mõjuvate jõudude mõjul tasakaalus.

Arvutuspäevik 16.8 octave:1> diary yRaam1.out

octave-3.0.1:2> diary on

octave-3.0.1:3> yRaam1

=====

Järgnev on raami arvutus: GNU octave 3.0

EI_r = 30000

baasi0 = 4000

SolmedeArv = 4

ElementideArv = 3

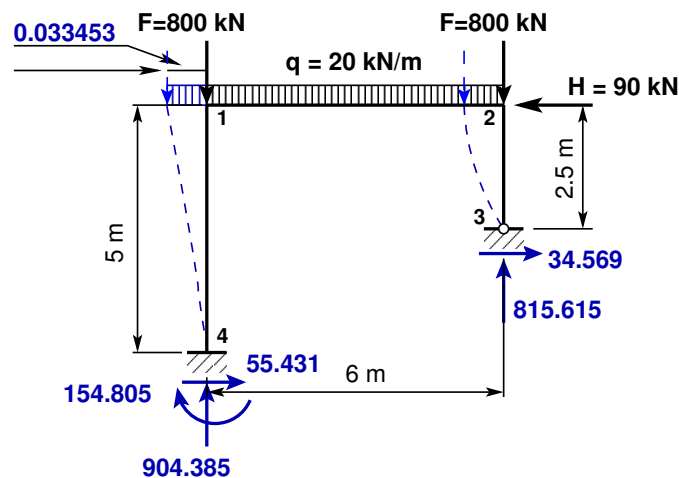
=====

B =

1.	0.00000	10.	0.00000	19.	0.00000	28.	-90.00000
2.	0.00000	11.	-120.00000	20.	0.00000	29.	800.00000
3.	0.00000	12.	-358.06019	21.	0.00000	30.	0.00000
4.	0.00000	13.	0.00000	22.	0.00000	31.	0.00000
5.	0.00000	14.	0.00000	23.	0.00000	32.	0.00000
6.	0.00000	15.	0.00000	24.	0.00000	33.	0.00000
7.	0.00000	16.	0.00000	25.	0.00000	34.	0.00000
8.	143.68932	17.	0.00000	26.	800.00000	35.	0.00000
9.	-95.68944	18.	0.00000	27.	0.00000	36.	0.00000

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 36, cols = 36, nnz = 90)



Joonis 16.57. Raami toereaktsioonid

```

(1, 1) -> 1          (22, 13) -> 1          (27, 24) -> 1
(20, 1) -> -1       (8, 14) -> 1           (13, 25) -> 1
(2, 2) -> 1         (23, 14) -> 1         (34, 25) -> 1
(19, 2) -> 1        (9, 15) -> 1          (14, 26) -> 1
(3, 3) -> 1         (24, 15) -> 1         (35, 26) -> 1
(21, 3) -> 1        (10, 16) -> 1         (15, 27) -> 1
(4, 4) -> 1         (28, 16) -> 1         (16, 28) -> 1
(26, 4) -> -1       (11, 17) -> 1         (17, 29) -> 1
(5, 5) -> 1         (29, 17) -> 1         (18, 30) -> 1
(25, 5) -> 1        (12, 18) -> 1         (36, 30) -> 1
(6, 6) -> 1         (30, 18) -> 1         (13, 31) -> -1
(27, 6) -> 1        (7, 19) -> -1         (23, 31) -> -1
(1, 7) -> -1        (19, 19) -> -1        (14, 32) -> -1
(31, 7) -> 1        (8, 20) -> -1         (22, 32) -> 1
(2, 8) -> -1        (20, 20) -> -1        (14, 33) -> 2.3943
(32, 8) -> 1        (8, 21) -> 5.9354     (15, 33) -> -0.87421
(2, 9) -> 4.1162    (9, 21) -> -0.96777  (18, 33) -> 0.49232
(3, 9) -> -0.48958 (12, 21) -> 0.080128  (24, 33) -> -1
(6, 9) -> 0.92356  (21, 21) -> -1         (13, 34) -> 5.0000e-17
(33, 9) -> 1        (7, 22) -> 1.2000e-16 (16, 34) -> 1
(1, 10) -> 1.0000e-16 (10, 22) -> 1         (29, 34) -> 1
(4, 10) -> 1        (25, 22) -> 1         (14, 35) -> -0.51418
(2, 11) -> -3.9391  (8, 23) -> -4.7845    (15, 35) -> 0.61173
(3, 11) -> 2.2748   (9, 23) -> 2.3871    (17, 35) -> 1
(5, 11) -> 1        (11, 23) -> 1         (18, 35) -> 2.3943
(6, 11) -> 4.1162  (12, 23) -> 5.9354    (28, 35) -> -1
(2, 12) -> -2.2748 (26, 23) -> 1         (14, 36) -> -0.61173
(3, 12) -> 0.82323 (8, 24) -> -2.3871    (15, 36) -> 0.47885
(6, 12) -> 0.48958 (9, 24) -> 0.79139    (18, 36) -> 0.87421
(7, 13) -> 1        (12, 24) -> 0.96777  (30, 36) -> 1

```

X =

```

1.  -8.5237e-14    10.  9.0439e+02    19.  -1.3381e+02    28.  -8.1561e+02
2.  -1.3381e+02   11.  5.5431e+01    20.  8.5237e-14    29.  -3.4569e+01
3.   1.3450e+00   12.  -1.5481e+02   21.  1.3450e+00    30.  -1.0894e-15
4.  -9.0439e+02   13.  -1.3381e+02   22.  5.5431e+01    31.  4.0781e-14
5.  -5.5431e+01   14.  5.8287e-14   23.  -1.0439e+02   32.  1.3381e+02
6.  -1.5237e+02   15.  3.4201e+01   24.  1.5237e+02    33.  3.4201e+01
7.   5.2011e-15   16.  -5.5431e+01   25.  1.4206e-30    34.  8.1561e+02
8.   1.0939e-30   17.  -1.5615e+01   26.  5.2493e-15    35.  3.4569e+01
9.  -1.3810e-14   18.  1.1394e+02   27.  6.3312e+01    36.  -1.1394e+02

```

```

=====
Algparameetrid skaleerimata
Varda Nr   u           w           fi           S           H           M
-----
1   1.300e-18   2.735e-34  -3.452e-18   904.385     55.431     -154.805
2  -3.345e-02   2.131e-17   3.363e-04    55.431     -104.385    152.372
3   1.020e-17   3.345e-02   8.550e-03    815.615     34.569     -113.939
-----

```

```

=====
Varda alguse/lõpu siirded (skaleerimata) kontaktjõud
Varda Nr   u           w           fi           S           H           M
-----
  1  1.300e-18  2.735e-34 -3.452e-18   904.385    55.431   -154.805
  1 -2.131e-17 -3.345e-02  3.363e-04  -904.385   -55.431  -152.372
  2 -3.345e-02  2.131e-17  3.363e-04    55.431   -104.385  152.372
  2 -3.345e-02  1.457e-17  8.550e-03   -55.431   -15.615  113.939
  3  1.020e-17  3.345e-02  8.550e-03   815.615    34.569  -113.939
  3  3.551e-34  1.312e-18  1.583e-02  -815.615   -34.569    -0.000
=====

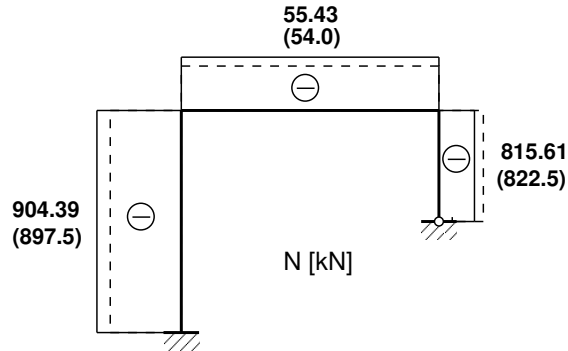
Varras Li on jaotatud neljaks
Li = 5
siire u -      1.300e-18  -4.352e-18  -1.000e-17  -1.566e-17  -2.131e-17
siire w -      2.735e-34  -5.113e-03  -1.651e-02  -2.802e-02  -3.345e-02
pööre fi -     -3.452e-18  7.410e-03  9.998e-03  7.584e-03  3.363e-04
pikijõud S -   -904.385  -904.385  -904.385  -904.385  -904.385
ristjõud H -   -55.431  -55.431  -55.431  -55.431  -55.431
moment M -     154.805  80.928  1.410  -78.207  -152.372
-----
normaaljõud N -  -904.385  -904.385  -904.385  -904.385  -904.385
põikjõud Q -    -55.431  -62.081  -64.404  -62.237  -55.732
moment M -     154.805  80.928  1.410  -78.207  -152.372
-----

Varras Li on jaotatud neljaks
Li = 6
siire u -     -3.345e-02  -3.345e-02  -3.345e-02  -3.345e-02  -3.345e-02
siire w -     2.131e-17  3.392e-03  8.423e-03  8.393e-03  6.939e-18
pööre fi -     3.363e-04  -3.740e-03  -2.223e-03  2.630e-03  8.550e-03
pikijõud S -   -55.431  -55.431  -55.431  -55.431  -55.431
ristjõud H -   104.385  74.385  44.385  14.385  -15.615
moment M -   -152.372  -18.111  71.238  115.314  113.939
-----
normaaljõud N -   -55.431  -55.431  -55.431  -55.431  -55.431
põikjõud Q -    104.367  74.587  44.505  14.243  -16.077
moment M -   -152.372  -18.111  71.238  115.314  113.939
-----

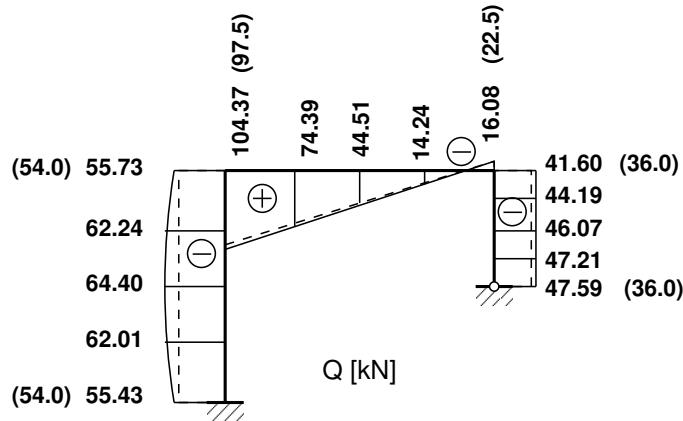
Varras Li on jaotatud neljaks
Li = 2.5000
siire u -     1.020e-17  7.646e-18  5.098e-18  2.549e-18  6.658e-34
siire w -     3.345e-02  2.708e-02  1.901e-02  9.796e-03  -2.897e-19
pööre fi -     8.550e-03  1.170e-02  1.398e-02  1.536e-02  1.583e-02
pikijõud S -   -815.615  -815.615  -815.615  -815.615  -815.615
ristjõud H -   -34.569  -34.569  -34.569  -34.569  -34.569
moment M -    113.939  87.093  58.850  29.663  -0.000
-----
normaaljõud N -   -815.615  -815.615  -815.615  -815.615  -815.615
põikjõud Q -    -41.602  -44.189  -46.067  -47.206  -47.588
moment M -    113.939  87.093  58.850  29.663  -0.000
=====
octave-3.0.1:4> diary off

```

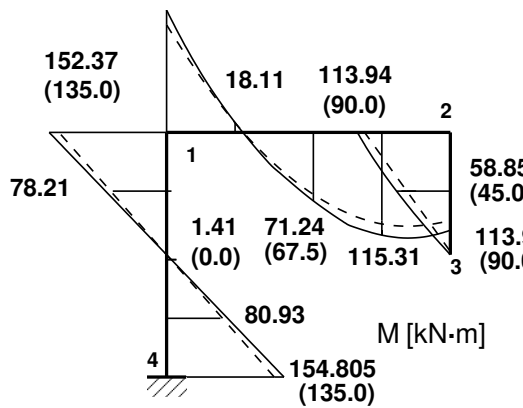

Raami sisejõudude epüürid on joonistel 16.58(c)–16.58(a). Kriipsjoonega on näidatud esimest järku teooria järgi arvutatud siire ja sisejõud (arvulised väärtused on sulgudes). Pideva joonega on toodud teist järku teooria järgi saadud tulemused.



(a) Raami normaaljõu epüür [kN]



(b) Raami põikjõu epüür [kN]



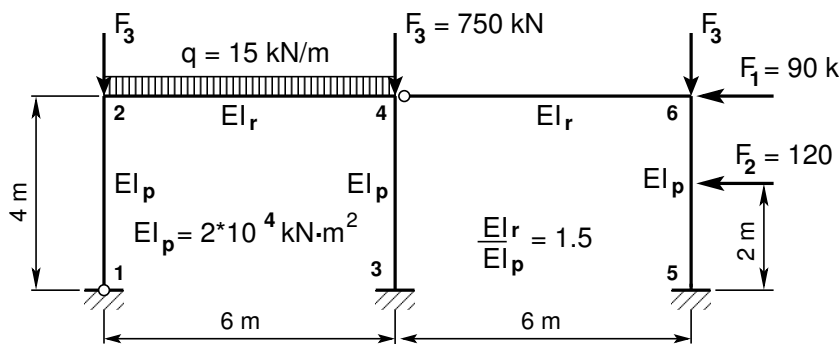
(c) Raami paindemomendi epüür [kN·m]

Joonis 16.58. Raami sisejõud

16.14.3 Raami arvutus EST-meetodiga. Näide 16.9 [slaidid]

Järgnevas näites vaadeldavat meetodit nimetame EST-meetodiks [Lah97b] [Lah98a], mis on üks rajaelementide meetoditest. Selle meetodi puhul rahuldatakse diferentsiaalvõrrandid (DV) määramispiirkondades (varrastes) täpselt (*varda põhivõrrandid*). Rajatingimused (kontaktjõud ja siirded) rahuldatakse ligikaudselt (kontaktjõud ja siirded leitakse võrrandisüsteemi lahendamisega).

Näide 16.9 Leida joonisel 16.59 toodud raami sisejõud. Arvutada EST meetodiga II järku teooria järgi. Raam on koormatud ühtlaselt jaotatud vertikaalse koormusega $q_z = 15 \text{ kN/m}$ ja vertikaalsete jõududega $F_3 = 750 \text{ kN}$ ning horisontaalsete jõududega $F_1 = 90 \text{ kN}$, $F_2 = 120 \text{ kN}$. Raami posti ristlõike paindejäikus on $EI_p = 2 \cdot 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ja raami ristlõike paindejäikus $EI_r = 1.5EI_p$, ristlõike pikijäikus $EA_p = 4.6 \cdot 10^6 \text{ kN}$, $EA_r = 8.8 \cdot 10^6 \text{ kN}$, ristlõike lõikejäikus $GA_p = 0.4EA_p$, $GA_r = 0.4EA_r$. Raami avad on 6 m ja postide pikkused 4 m . Baasjäikus $i_0 = EI/l = EI_p/4$, baasi $i_0 = i_0$.



Joonis 16.59. Kahe sildega raam

Raami arvutusskeemi kirjeldamisel võtame kasutusele parema käe teljestiku ja II märgikokkuleppe. Üldteljestik on tähistatud X, Y, Z (joonis 16.60). Kohalikud teljestikud x, y, z on näidatud samal joonisel.

Võrrandisüsteemi koostamisel EST-meetodiga on tundmatuteks siirded ja kontaktjõud varraste otstes (joonis 16.60). Kontaktjõudude ja siirete arv on 60. Nende leidmiseks koostame võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}, \quad (16.417)$$

kus \mathbf{spA} on hõre maatriks. Hõredate maatriksite tehetega saame tutvuda *lisas B lk 647*.

Varraste otste kontaktjõud ja siirded nummerdame. Nummerdus on näidatud joonisel 16.60. Kontaktjõudude ja siirete topoloogilist kirjeldust näeme tabelist 16.16 ja GNU Octave'i programmis *ySpRaamEST.m lk 747* ning arvutuspäevikust 16.9 (lk 605). Raami vardad ühendatakse kontaktjõudude ja liigenditega (vt lõik 3.3 joonis 3.2). Varda toed ja toereaktsioonid kirjeldame vastavalt jaotisele 3.2 ja joonisele 3.1.

Sõlmedes siirete pidevus- ja tasakaalvõrrandite koostamiseks leiame kohalike koordinaatide x, z, y teisenduse üldkoordinaatidesse X, Z, Y (joonis 16.60) (vt jaotis 1.14

Tabel 16.16. Raami varraste topoloogia

Elementide topoloogia														
Nr	Lõpus	u	w	fi	S	H	M	Alguses	u	w	fi	S	H	M
1	1	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11	12	
2	13	14	15	16	17	18		19	20	21	22	23	24	
3	25	26	27	28	29	30		31	32	33	34	35	36	
4	37	38	39	40	41	42		43	44	45	46	47	48	
5	49	50	51	52	53	54		55	56	57	58	59	60	

avaldis (1.46)):

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ y \end{bmatrix} \quad (16.418)$$

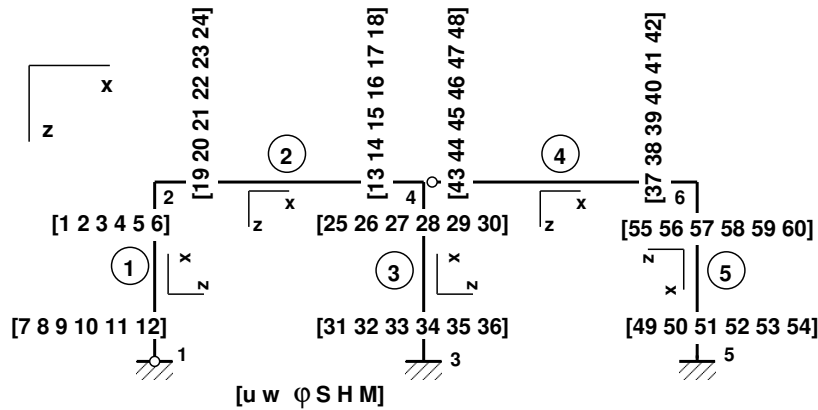
Varda lõpu ja alguse koordinaatide (joonis 16.60) X_L, Z_L, X_A, Z_A järgi saab suunakoosinused arvutada

$$\cos \alpha = \frac{X_L - X_A}{l}, \quad (16.419)$$

$$\cos \beta = \frac{Z_L - Z_A}{l}, \quad (16.420)$$

kus l on varda pikkus

$$l = \sqrt{(Z_L - Z_A)^2 + (X_L - X_A)^2}. \quad (16.421)$$



Joonis 16.60. Raami tundmatute nummerdus

Siirete $[u, w, \varphi]$ ja kontaktjõudude $[S, H, M]$ teisendamiseks üldkoordinaatidesse pidevustingimuste ja tasakaaluvõrrandite koostamisel sõlmedes kasutame teisendusmaatriksit (1.46)

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.422)$$

Varraste 1, 2, 3, 4, 5 (joonis 16.60) teisendusmaatriksid:

$$T_1 = T1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16.423)$$

$$T_2 = T2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16.424)$$

$$T_3 = T3 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16.425)$$

$$T_{32} = T32 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16.426)$$

$$T_4 = T4 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16.427)$$

$$T_{42} = T42 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16.428)$$

$$T_5 = T5 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.429)$$

Varraste ülekandevõrrandeid (16.430)–(16.434) on kokku 30 (ühel vardal on ülekandevõrrandeid 6 ja raamil on 5 varrast). Need võrrandid paigutame võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse vastavalt varraste järjekorranumbritele. Nende võrrandite järjekorranumbrid on näidatud avaldistes (16.430)–(16.434). Varraste otstes olevad siirded ja kontaktjõud Z_i (16.435)–(16.437) on nummerdatud vastavalt joonisele 16.60 ja tabelile 16.16. Varraste 1, 2, 3, 4, 5 ülekandevõrrandid on

$$\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \tilde{\mathbf{Z}}_{12} - \tilde{\mathbf{U}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_{11} = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_1, \quad \text{võrrandid, } 1 : 6 \quad (16.430)$$

$$\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \tilde{\mathbf{Z}}_{22} - \tilde{\mathbf{U}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_{21} = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_2, \quad \text{võrrandid, } 7 : 12 \quad (16.431)$$

$$\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \tilde{\mathbf{Z}}_{32} - \tilde{\mathbf{U}}_3 \tilde{\mathbf{Z}}_{31} = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_3, \quad \text{võrrandid, } 13 : 18 \quad (16.432)$$

$$\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \tilde{\mathbf{Z}}_{42} - \tilde{\mathbf{U}}_4 \tilde{\mathbf{Z}}_{41} = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_4, \quad \text{võrrandid, } 19 : 24 \quad (16.433)$$

$$\mathbf{I}_{(6 \times 6)} \tilde{\mathbf{Z}}_{52} - \tilde{\mathbf{U}}_5 \tilde{\mathbf{Z}}_{51} = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_5, \quad \text{võrrandid, } 25 : 30 \quad (16.434)$$

kus (vt joonist 16.60)

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{12} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{11} = \begin{bmatrix} Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \\ Z_{10} \\ Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{22} = \begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{14} \\ Z_{15} \\ Z_{16} \\ Z_{17} \\ Z_{18} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{21} = \begin{bmatrix} Z_{19} \\ Z_{20} \\ Z_{21} \\ Z_{22} \\ Z_{23} \\ Z_{24} \end{bmatrix}, \quad (16.435)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{32} = \begin{bmatrix} Z_{25} \\ Z_{26} \\ Z_{27} \\ Z_{28} \\ Z_{29} \\ Z_{30} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{31} = \begin{bmatrix} Z_{31} \\ Z_{32} \\ Z_{33} \\ Z_{34} \\ Z_{35} \\ Z_{36} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{42} = \begin{bmatrix} Z_{37} \\ Z_{38} \\ Z_{39} \\ Z_{40} \\ Z_{41} \\ Z_{42} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{41} = \begin{bmatrix} Z_{43} \\ Z_{44} \\ Z_{45} \\ Z_{46} \\ Z_{47} \\ Z_{48} \end{bmatrix}, \quad (16.436)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{52} = \begin{bmatrix} Z_{49} \\ Z_{50} \\ Z_{51} \\ Z_{52} \\ Z_{53} \\ Z_{54} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{51} = \begin{bmatrix} Z_{55} \\ Z_{56} \\ Z_{57} \\ Z_{58} \\ Z_{59} \\ Z_{60} \end{bmatrix}, \quad (16.437)$$

$\mathbf{I}_{(6 \times 6)}$ – ühikmaatriks,

$\tilde{\mathbf{U}}_i$ – ülekandemaatriks (16.376), mille skaleeritud kordajad hõredas maatriksis arvutame funktsiooniga *ysplvmhvII.m*,

$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_i$ – koormusvektor, mis koosneb jaotatud koormust arvestavast vektorist (16.378) ja koondataud jõudu arvestavast vektorist (16.380). Neid teise märgikokkuleppele vastavaid koormusvektoreid (16.378), (16.380) saab arvutada GNU Octave'i funktsioonidega *ylqvII.m* lk 744, *ylfhvzII.m* lk 743, kui võtame nendes funktsioonides baasjäikuse (vt lõik G.3) võrdseks ühega (baasi0 = 1.0).

Ühikvektorist $\mathbf{I}_{(6 \times 6)}$ ja maatriksist $\tilde{\mathbf{U}}_i$ moodustame võrrandisüsteemi koostamiseks maatriksi

$$\mathbf{U}_{(6 \times 12)} = \mathbf{I}_{(6 \times 6)} - \tilde{\mathbf{U}}_i \quad (16.438)$$

Selle võrrandisüsteemi koostamiseks moodustatud maatriksi \mathbf{U} leiame GNU Octave'i funktsiooni `ylvfmhvII.m` lk 746 abil. Sellest maatriksist moodustame hõreda maatriksi, mille skaleeritud kordajad leiame programmiga `ysplvfmhvII.m` lk 746.

Järgnevalt kirjeldame võrrandisüsteemi EST-meetodis:

1. *Võrrandid 1:30, 1:60 on ülekandevõrrandid (16.430)–(16.434).*

Nende võrrandite kontaktjõudude (tundmatute Z_{i_i}) skaleeritud kordajad leiame programmiga `ysplvfmhvII.m` lk 746 ja sisestame võrrandisüsteemi kordajatesse `spA` programmiga `spInsertBtoA.m`.

Ülekandevõrrandite vabaliikmed $\overset{\circ}{Z}_i$ (16.430)–(16.434) arvutame programmiga `ylqvII.m` ja `ylfhvzII.m` ning sisestame vabaliikmetesse B programmiga `InsertBtoA.m` lk 726. Ülekandevõrrandite sisestamist näeme arvutiprogrammist `yspRaamEST.m` (lk 747).

2. *Võrrandid 31:42 on siirete pidevuse võrrandid (vt kontaktitingimusi jaotis 3.3 ja joonis 3.2). Varraste siirete pidevuse kirjeldamisel sõlmes 4 kasutame seoste transitiivsust^{16 17}. Vaatleme varraste 2, 3 ja 4 siirete omavahelisi seoseid. Varraste 2 ja 3 ning varraste 3 ja 4 siirded on omavahel seotud, siis sellest järeldub, et varraste 2 ja 4 siirded on ka omavahel seotud ja nende seoste kirjeldamine on üleliigne. Lisaks kirjeldame neljanda varda algul olevat momenti, mis on null.*

Teisendame siirded kohalikest koordinaatidest üldkoordinaatidesse. Teisendusmaatriksid (16.423)–(16.429) teisendame käsuga `sparse(Ti)` hõredaks maatriksiks. Hõredad teisendusmaatriksid `spTi` paigutame funktsiooniga `spInsertBtoA.m` võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse `spA`:

- 2.1. *Võrrandid 31:33 väljendavad sõlmes 2 varraste 1 ja 2 siirete ja pöörde võrdsust. Varda 1 siirded on veergudes alates 1 ja varda 2 siirded on veergudes alates 19.*

Sõlmes 2 on varda 1 ja 2 siirded ning pöörded võrdsed. Võrrandisüsteemis ühele poole kirjutades tuleb ühele neist miinusmärk ette kirjutada. Teisendusmaatriksi T_1 abil teisendame siirded $Z_1 \equiv u_{lõpus}^{(1)}$, $Z_2 \equiv w_{lõpus}^{(1)}$, $Z_3 \equiv \varphi_{lõpus}^{(1)}$ üldkoordinaatidesse. Varda 2 siirded $Z_{19} \equiv u_{alguses}^{(2)}$, $Z_{20} \equiv w_{alguses}^{(2)}$, $Z_{21} \equiv \varphi_{alguses}^{(2)}$ teisendame maatriksi T_2 abil üldkoordinaatidesse. Nendest saame võrrandid 31, 32 ja 33:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{lõpus}^{(1)} \\ w_{lõpus}^{(1)} \\ \varphi_{lõpus}^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{alguses}^{(2)} \\ w_{alguses}^{(2)} \\ \varphi_{alguses}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.439)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{19} \\ Z_{20} \\ Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.440)$$

Avaldis $spA = spInsertBtoA(spA, 31, 1, spT1)$ paigutab varda 1 teisendusmaatriksi `spT1` võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse `spA` alates kordajatest

¹⁶transitiivsus – on binaarse seose omadus.

¹⁷<http://et.wikipedia.org/wiki/Transitiivsus>

$A(31,1)$, st aadressidesse $spA(31:33,1:3)$. Samadesse võrrandisüsteemi võrranditesse paigutame varda 2 teisendusmaatriksi $spT2m$, mis on '-1' läbi korrutatud $spA=spInsertBtoA(spA,31,19,spT2m)$. See teisendusmaatriks asub võrrandisüsteemis aadressidel $spA(31:33,19:21)$.

Varraste 1 ja 2 siirded võrdsustame. Selleks kirjutame võrrandisüsteemi vabaliikmetesse nullid $B(31:33,1)=0.0$.

- 2.2. **Võrrandid 34:36** väljendavad sõlmes 4 varraste 2 ja 3 siirete ja pöörde võrdsust. Varda 2 siirded on veergudes alates 13 ja varda 3 siirded on veergudes alates 25.

Varda 2 lõpu siirded on $Z_{13} \equiv u_{lõpus}^{(2)}$, $Z_{14} \equiv w_{lõpus}^{(2)}$, $Z_{15} \equiv \varphi_{lõpus}^{(2)}$. Varda 3 lõpu siirded $Z_{25} \equiv u_{lõpus}^{(3)}$, $Z_{26} \equiv w_{lõpus}^{(3)}$, $Z_{27} \equiv \varphi_{lõpus}^{(3)}$. Võrdsustame siirded varraste 2 ja 3 lõpus. Saame

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{lõpus}^{(2)} \\ w_{lõpus}^{(2)} \\ \varphi_{lõpus}^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{lõpus}^{(3)} \\ w_{lõpus}^{(3)} \\ \varphi_{lõpus}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.441)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{14} \\ Z_{15} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{25} \\ Z_{26} \\ Z_{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.442)$$

Avaldis $spA=spInsertBtoA(spA,34,13,spT2)$ paigutab varda 2 teisendusmaatriksi $spT2$ võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse spA alates kordajatest $spA(34,13)$, st aadressidesse $spA(34:36,13:15)$. Samadesse võrrandisüsteemi võrranditesse paigutame varda 3 teisendusmaatriksi $spT3m$, mis on '-1' läbi korrutatud $spA=spInsertBtoA(spA,34,25,spT3m)$. See teisendusmaatriks asub võrrandisüsteemis aadressidel $spA(34:36,25:27)$.

Varraste 2 ja 3 siirded võrdsustame. Selleks kirjutame võrrandisüsteemi vabaliikmetesse nullid $B(34:36,1)=0.0$.

- 2.3. **Võrrandid 37:38** väljendavad sõlmes 4 varraste 3 ja 4 siirete võrdsust. Varda 3 siirded on veergudes alates 25 ja varda 4 siirded on veergudes alates 43.

Varda 3 lõpu siirded $Z_{25} \equiv u_{lõpus}^{(3)}$, $Z_{26} \equiv w_{lõpus}^{(3)}$. Varda 4 alguse siirded on $Z_{43} \equiv u_{alguses}^{(4)}$, $Z_{44} \equiv w_{alguses}^{(4)}$. Varda 3 ja 4 siirded sõlmes 4 on võrdsed

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{lõpus}^{(3)} \\ w_{lõpus}^{(3)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{alguses}^{(4)} \\ w_{alguses}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.443)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{25} \\ Z_{26} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{43} \\ Z_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.444)$$

Avaldis $spA=spInsertBtoA(spA,37,25,spT32)$ paigutab varda 3 teisendusmaatriksi $spT32$ (2×2 – ainult siirded) võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse spA alates kordajatest $spA(37,25)$, st aadressidesse $spA(37:38,25:26)$. Samadesse

võrrandisüsteemi võrranditesse paigutame varda 4 teisendusmaatriksi $spT42m$, mis on '-1' läbi korrutatud $spA=spInsertBtoA(spA,37,43,spT42m)$. See teisendusmaatriks asub võrrandisüsteemis aadressidel $spA(37:38,43:44)$.

Varraste 3 ja 4 siirded võrdsustame. Selleks kirjutame võrrandisüsteemi vabaliikmetesse nullid $B(37:38,1)=0.0$.

- 2.4. **Võrrand 39** kirjeldab varda 4 algul olevat momenti 48, mis on null.

Sõlmes 4 kirjutame veel võrrandi varda 4 alguses oleva momendiliigendi kohta.

$$1 * Z_{48} \equiv M_{alguses}^{(4)} = 0 \quad (16.445)$$

Avaldis $spA=spSisestaArv(spA,39,48,1)$ paigutab 39. võrrandisse muutuja Z_{48} kordajaks 1. Vabaliige $B(39,1)=0.0$ võrdsustab momendi Z_{48} nulliga.

- 2.5. **Võrrandid 40:42** väljendavad sõlmes 6 varraste 4 ja 5 siirete ja pöörde võrdsust. Varda 4 siirded on veergudes alates 37 ja varda 5 siirded on veergudes alates 55.

Sõlmes 6 on kontaktis vardad 4 ja 5. Siirete pidevusest saame võrrandid 40, 41, 42. Varda 4 lõpus olevad siirded ja pöörded $Z_{37} \equiv u_{lõpus}^{(4)}$, $Z_{38} \equiv w_{lõpus}^{(4)}$, $Z_{39} \equiv \varphi_{lõpus}^{(4)}$ teisendame maatriksi T_4 abil üldkoordinaatidesse. Varda 5 alguses olevad siirded ja pöörded $Z_{55} \equiv u_{alguses}^{(2)}$, $Z_{56} \equiv w_{alguses}^{(2)}$, $Z_{57} \equiv \varphi_{alguses}^{(2)}$ teisendame maatriksi T_5 abil üldkoordinaatidesse. Varda 4 ja 5 siirded ning pöörded sõlmes 6 on võrdsed

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{lõpus}^{(4)} \\ w_{lõpus}^{(4)} \\ \varphi_{lõpus}^{(4)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{alguses}^{(5)} \\ w_{alguses}^{(5)} \\ \varphi_{alguses}^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.446)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{37} \\ Z_{38} \\ Z_{39} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{55} \\ Z_{56} \\ Z_{57} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.447)$$

Avaldis $spA=spInsertBtoA(spA,40,37,spT4)$ paigutab varda 4 teisendusmaatriksi $spT4$ võrrandisüsteemi kordajate maatriksisse spA alates kordajatest $spA(40,37)$, st aadressidesse $spA(40:42,37:39)$. Samadesse võrrandisüsteemi võrranditesse paigutame varda 5 teisendusmaatriksi $spT5m$, mis on '-1' läbi korrutatud $spA=spInsertBtoA(spA,40,55,spT5m)$. See teisendusmaatriks asub võrrandisüsteemis aadressidel $spA(40:42,55:57)$.

Varraste 4 ja 5 siirded võrdsustame. Selleks kirjutame võrrandisüsteemi vabaliikmetesse nullid $B(40:42,1)=0.0$.

3. **Võrrandid 43:51** on sõlmede tasakaaluvõrrandid (vt kontaktitingimusi lõik 3.3 ja joonis 3.2).

- 3.1. **Võrrandid 43:45** väljendavad sõlmes 2 varraste 1 ja 2 kontaktjõudude ja sõlmkoormuse tasakaalu. Varda 1 kontaktjõud algavad veerust 4 ja varda 2 kontaktjõud veerust 22.

Sõlme 2 tasakaalust saame võrrandid 43, 44, 45. Varda 1 lõpus olevad rajajõud $Z_4 \equiv S_{lõpus}^{(1)}$, $Z_5 \equiv H_{lõpus}^{(1)}$, $Z_6 \equiv M_{lõpus}^{(1)}$ teisendame maatriksi T_1 abil üldkoordinaatidesse. Varda 2 alguses olevad rajajõud $Z_{22} \equiv S_{alguses}^{(2)}$, $Z_{23} \equiv H_{alguses}^{(2)}$, $Z_{24} \equiv M_{alguses}^{(2)}$ teisendame maatriksi T_2 abil üldkoordinaatidesse. Z-telje suunaline koormus 750 kN annab koormusliikme.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{lõpus}^{(1)} \\ H_{lõpus}^{(1)} \\ M_{lõpus}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{alguses}^{(2)} \\ H_{alguses}^{(2)} \\ M_{alguses}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 750 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (16.448)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{22} \\ Z_{23} \\ Z_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 750 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (16.449)$$

Võrrandid 43, 44 ja 45 kirjeldavad sõlme 2 tasakaalu. Varraste 1 ja 2 teisendusmaatriksid paigutame maatriksi spA veergudesse 4 ning 22: $spA = spInsertBtoA(spA, 43, 4, spT1)$, $spA = spInsertBtoA(spA, 43, 22, spT2)$.

Võrrandisüsteemi vabaliikmesse paigutame sõlme 2 koormuse: $B(43, 1) = 0.0$, $B(44, 1) = 750.0$ ja $B(45, 1) = 0.0$.

3.2. **Võrrandid 46:48** kirjeldavad sõlmes 4 varraste 2, 3 ja 4 kontaktjõudude ja sõlmkoormuse tasakaalu. Varda 2 kontaktjõud algavad veerust 16, varda 3 kontaktjõud algavad veerust 28 ja varda 4 kontaktjõud algavad veerust 46.

Sõlme 4 tasakaaluks varda 2 lõpus olevad rajajõud $Z_{16} \equiv S_{lõpus}^{(2)}$, $Z_{17} \equiv H_{lõpus}^{(2)}$, $Z_{18} \equiv M_{lõpus}^{(2)}$ ja varda 3 lõpus olevad rajajõud $Z_{28} \equiv S_{lõpus}^{(3)}$, $Z_{29} \equiv H_{lõpus}^{(3)}$, $Z_{30} \equiv M_{lõpus}^{(3)}$ ning varda 4 alguses olevad rajajõud $Z_{46} \equiv S_{alguses}^{(4)}$, $Z_{47} \equiv H_{alguses}^{(4)}$ teisendusmaatriksite T_2 , T_3 ja T_4 abil saame võrrandid 46, 47, 48.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{lõpus}^{(2)} \\ H_{lõpus}^{(2)} \\ M_{lõpus}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{lõpus}^{(3)} \\ H_{lõpus}^{(3)} \\ M_{lõpus}^{(3)} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 & . \\ 0 & 1 & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{alguses}^{(4)} \\ H_{alguses}^{(4)} \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 750 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (16.450)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{16} \\ Z_{17} \\ Z_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{28} \\ Z_{29} \\ Z_{30} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 & . \\ 0 & 1 & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{46} \\ Z_{47} \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 750 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (16.451)$$

Võrrandid 46, 47 ja 48 kirjeldavad sõlme 4 tasakaalu. Varraste 2, 3 ja 4 teisendusmaatriksid paigutame maatriksi spA veergudesse 16, 28 ning 46:

$$spA = spInsertBtoA(spA, 46, 16, spT2),$$

$$spA = spInsertBtoA(spA, 46, 28, spT3),$$

$$spA = spInsertBtoA(spA, 46, 46, spT42).$$

Võrrandisüsteemi vabaliikmesse paigutame sõlme 4 koormuse: $B(46,1)=0.0$, $B(47,1)=750.0$ ja $B(48,1)=0.0$.

- 3.3. Võrrandid 49:51 kirjeldavad sõlmes 6 varraste 3 ja 4 kontaktjõudude ja sõlmkoormuse tasakaalu. Varda 4 kontaktjõud algavad veerust 40 ja varda 5 kontaktjõud algavad veerust 58.

Sõlme 6 tasakaalust saame võrrandid 49, 50, 51. Varda 4 lõpus olevad rajajõud $Z_{40} \equiv S_{lõpus}^{(4)}$, $Z_{41} \equiv H_{lõpus}^{(4)}$, $Z_{42} \equiv M_{lõpus}^{(4)}$ teisendame maatriksi T_4 abil üldkoordinaatidesse. Varda 5 alguses olevad rajajõud $Z_{58} \equiv S_{alguses}^{(5)}$, $Z_{59} \equiv H_{alguses}^{(5)}$, $Z_{60} \equiv M_{alguses}^{(5)}$ teisendame maatriksi T_5 abil üldkoordinaatidesse. X -telje suunaline koormus -90 annab koormusliikme $B_{49} = -90$ kN. Z -telje suunaline koormus 750 kN annab koormusliikme $B_{50} = 750$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{lõpus}^{(4)} \\ H_{lõpus}^{(4)} \\ M_{lõpus}^{(4)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{alguses}^{(5)} \\ H_{alguses}^{(5)} \\ M_{alguses}^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 \\ 750 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (16.452)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{40} \\ Z_{41} \\ Z_{42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{58} \\ Z_{59} \\ Z_{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 \\ 750 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (16.453)$$

Võrrandid 49, 50 ja 51 kirjeldavad sõlme 6 tasakaalu. Varraste 4 ja 5 teisendusmaatriksid paigutame maatriksi spA veergudesse 40 ning 58:

$$spA = spInsertBtoA(spA, 49, 40, spT4),$$

$$spA = spInsertBtoA(spA, 49, 58, spT5).$$

Võrrandisüsteemi vabaliikmesse paigutame sõlme 6 koormuse: $B(49,1)=-90.0$, $B(50,1)=750.0$ ja $B(51,1)=0.0$.

4. Võrrandid 52:60 on rajatingimused (vt toetingimusi lõik 3.2 ja joonis 3.1).

- 4.1. Võrrandid 52:53 kirjeldavad sõlmes 1 olevaid siirdeid. Siirete numbrid on 7 ja 8 (vt joonis 16.60).

Võrrandisüsteemis spA sisestame nende siirete kordajateks ühe. Kordajad sisestame GNU Octave'i funktsiooniga $spSisestaArv.m$ lk 726 ja vastavasse vabaliikmesse B kirjutame siirde väärtuse.

$$spA = spSisestaArv(spA, 52, 7, 1), \quad B(52,1)=0.0,$$

$$spA = spSisestaArv(spA, 53, 8, 1), \quad B(53,1)=0.0.$$

- 4.2. Võrrandisse 54 paigutame sõlmes 1 oleva momendi 12 väärtuseks nulli.

$$spA = spSisestaArv(spA, 54, 12, 1) \quad B(54,1)=0.0.$$

4.3. *Võrrandid 55:57 kirjeldavad sõlme 3 jäika kinnitust. Siirded ja pööre 31, 32, 33 on null.*

$$\begin{aligned} spA &= spSisestaArv(spA, 55, 31, 1), B(55, 1) = 0.0, \\ spA &= spSisestaArv(spA, 56, 32, 1), B(56, 1) = 0.0, \\ spA &= spSisestaArv(spA, 57, 33, 1), B(57, 1) = 0.0. \end{aligned}$$

4.4. *Võrrandid 58:60 kirjeldavad sõlme 5 jäika kinnitust. Siirded ja pööre 49, 50, 51 on null.*

$$\begin{aligned} spA &= spSisestaArv(spA, 58, 49, 1), B(58, 1) = 0.0, \\ spA &= spSisestaArv(spA, 59, 50, 1), B(59, 1) = 0.0, \\ spA &= spSisestaArv(spA, 60, 51, 1), B(60, 1) = 0.0. \end{aligned}$$

Esmalt koostame võrrandisüsteemi (16.417) lineaarsele ülesandele, st varrastes pikijõud S puudub ja varda tunnusarv $\nu = 0$. Lineaarse ülesande lahendamine annab viie varda pikijõud

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -824.978 \text{ kN} \\ -25.760 \text{ kN} \\ -775.104 \text{ kN} \\ -79.661 \text{ kN} \\ -739.918 \text{ kN} \end{bmatrix} \quad (16.454)$$

Järgmisel võrrandisüsteemi koostamisel leitakse eesarvud eelmisel lahendamisel leitud pikijõududega.

Pikijõududega (16.454) koostatud võrrandisüsteemi (16.417) lahendame GNU Octave'iga

$$\mathbf{Z} = spA \setminus \mathbf{B}, \quad (16.455)$$

Võrrandisüsteemi lahendis (16.455) on pikijõud S , ristjõud H ja momendid M varraste otstes. Siin arvestame, et teise märgikokkuleppe puhul on varda alguses mõjuvad jõud vastupidiste märkidega võrreldes esimese märgikokkuleppega. Võrrandisüsteemi lahendis (16.455) on siirded baasjäikuse (i_0) korda suuremad. Tegelike siirete leidmiseks jagame siirded baasjäikusega i_0 . Meid huvitavad tegelikud algparameetrid. Nende indekseid saame jälgida jooniselt 16.60 ja raami varraste topoloogiat kirjeldavast tabelist 16.16. GNU Octave'i programm *yspRaamEST.m* lk 747 leiab need skaleerimata algparameetrid (16.456)–(16.458):

$$\mathbf{Z}^a = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S \\ H \\ M_y \end{bmatrix}, \text{ II märgikokkulepe, } \mathbf{Z}_{11}^a = \begin{bmatrix} Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \\ Z_{10} \\ Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000e + 00 \\ 0.000e + 00 \\ 1.166e - 02 \\ 828.823 \\ 21.535 \\ 0.000 \end{bmatrix}, \quad (16.456)$$

$$\mathbf{Z}_{21}^a = \begin{bmatrix} Z_{19} \\ Z_{20} \\ Z_{21} \\ Z_{22} \\ Z_{23} \\ Z_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.057e - 02 \\ 7.207e - 04 \\ -1.308e - 04 \\ 21.535 \\ -78.823 \\ 111.354 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{31}^a = \begin{bmatrix} Z_{31} \\ Z_{32} \\ Z_{33} \\ Z_{34} \\ Z_{35} \\ Z_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000e + 00 \\ 0.000e + 00 \\ 0.000e + 00 \\ 773.182 \\ 56.251 \\ -157.125 \end{bmatrix}, \quad (16.457)$$

$$\mathbf{Z}_{41}^{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} Z_{43} \\ Z_{44} \\ Z_{45} \\ Z_{46} \\ Z_{47} \\ Z_{48} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.058e - 02 \\ 6.723e - 04 \\ -2.423e - 03 \\ 77.786 \\ -12.006 \\ 0.000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{51}^{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} Z_{55} \\ Z_{56} \\ Z_{57} \\ Z_{58} \\ Z_{59} \\ Z_{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.417e - 04 \\ 3.065e - 02 \\ 4.838e - 03 \\ 737.994 \\ 12.214 \\ -72.033 \end{bmatrix}. \quad (16.458)$$

Arvutuse tulemused on ka arvutuspäevikus [16.9](#) (lk [605](#)).

Varrastes sisejõudude (pikijõud S ja ristjõud H) leidmiseks kasutame võrrandit

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}} \mathbf{Z}_{i1}^{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{Z}}_{\mathbf{x}}^{\circ} \quad (16.459)$$

kus

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S_x \\ H_z \\ M_y \end{bmatrix}_x, \quad \mathbf{Z}_{i1}^{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} u^a \\ w^a \\ \varphi_y \\ S_x^a \\ H_{z^a} \\ M_y^a \end{bmatrix}_{i1} \quad (16.460)$$

$\mathbf{Z}_{\mathbf{x}}$ on sisejõud varda ristlõikes x . Siin on varda parempoolne ots, kus I märgikokkulepe ja II märgikokkulepe ühtivad ja $\mathbf{Z}_{i1}^{\mathbf{a}}$ on algparameetrite vektor, mille numbrilised väärtused on esitatud avaldistega [\(16.456\)](#)–[\(16.458\)](#) ja ülekandemaatriks $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}$ ([G.30](#)) vastab II märgikokkuleppele. Seda maatriksit saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [ylfmhvII.m](#) lk [743](#).

Koormusvektor $\tilde{\mathbf{Z}}_{\mathbf{x}}^{\circ}$ arvutamisel kasutame koormusvektorit (koormus $q_z = \text{const}$ ja $i_0 = 1$), mis on toodud avaldisega ([G.32](#)), ([G.33](#)). Neid koormusvektoreid saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [ylqvII.m](#) lk [744](#).

Kui varda koormuses on koondatud jõud, siis liidame juurde nii teisele kui ka esimesele märgikokkuleppele vastavad koormusvektorid ([G.34](#)), ([G.35](#)). Neid vektoreid saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [ylfhvzII.m](#) lk [743](#).

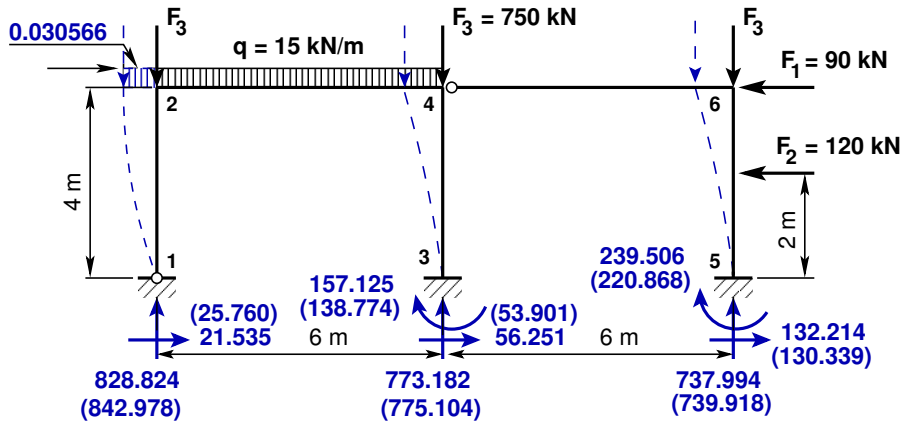
Teisendusega $\tilde{\mathbf{T}}^{-1}$ ([16.461](#)), ([16.371](#))

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N \\ Q \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mp \nu^2 \frac{EI}{l^2} & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S \\ H \\ M_y \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \quad (16.461)$$

saame pikijõult ja ristjõult üle minna normaaljõule ja põikjõule. Selle teisenduse võib teha GNU Octave'i funktsiooniga [ytransfp.m](#) lk [745](#).

Raami varrastes arvutame sisejõud ka kohal $x=0$, et saada kõigis arvutatavates ristlõigetel I märgikokkuleppele vastavad sisejõud (varda lõpus langevad sisejõud ühte I ja II märgikokkuleppe puhul). Arvutuspäevikus [16.9](#) (lk [605](#)) on sisejõu leidmisel varras jagatud neljaks.

Raami süirete, pöörete ja sisejõudude epüürid on joonistel [16.62](#)–[16.63\(c\)](#), kus pideva joonega on näidatud II järku teooriaga saadud tulemused. Kriipsjoon ja sulgudes olevad arvud näitavad I järku teooria järgi saadud tulemusi.



Joonis 16.61. Kahe sildega raami toereaktsioonid

Joonisel 16.62 saame võrrelda kahe sildega raami horisontaalseid siirdeid, mis on arvatatud II järku teooria (pidev joon) ning I järku teooria (kriipsjoon) järgi. Sulgudes olevad arvud vastavad I järku teorialele.

Raami sõlmede tasakaalu kontrollimisel peame arvestama normaaljõu N , põikjõu Q erinevust pikijõust S ning ristjõust H .

Paindemomentide epüüri staatiline kontroll ei ole sama, mis esimest järku teooria puhul.

Raami staatiline kontroll.

Projitseerime kõik jõud horisontaalteljele X (joonis 16.61).

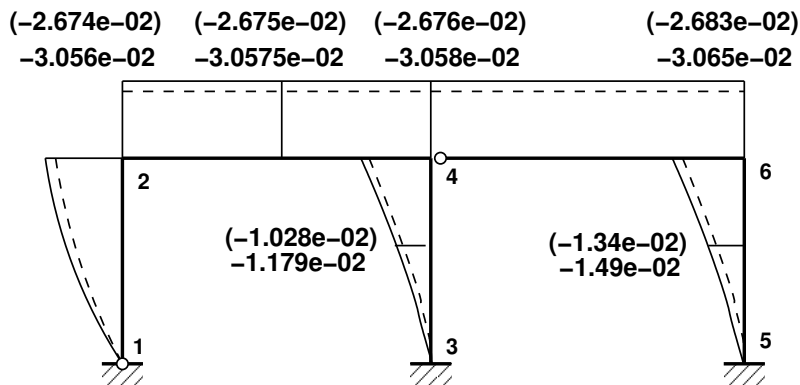
$$\Sigma X = 0; \quad 21.53459 + 56.25101 + 132.21440 - 90 - 120 = 0.0 \quad (16.462)$$

Projitseerime kõik jõud vertikaalteljele Z (joonis 16.61).

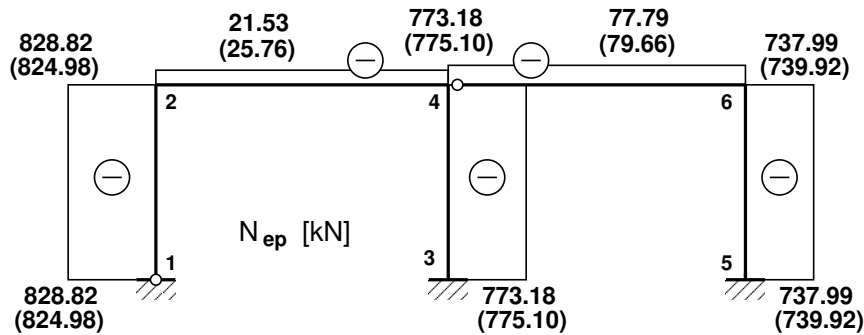
$$\Sigma Z = 0; \quad -828.82348 - 773.18237 - 737.99415 + 15 * 6.0 + 3 * 750 = 0.0 \quad (16.463)$$

Momentide summaga kontrollimine on väga oluline kontroll. Paljudel juhtudel avastatakse arvutustes tehtud viga alles selle kontrolliga.

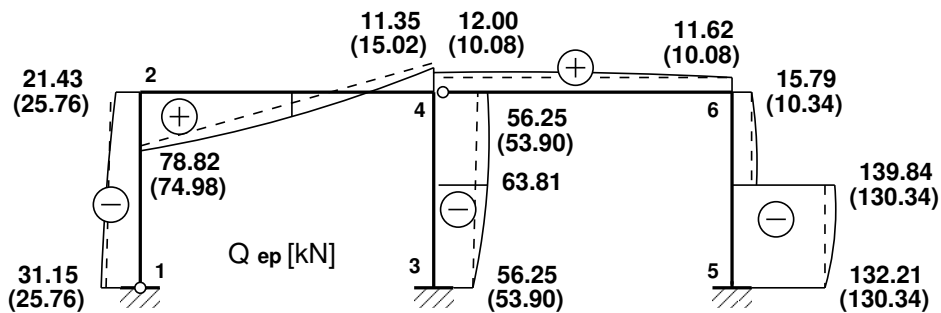
Momentide summa toe 1 suhtes.



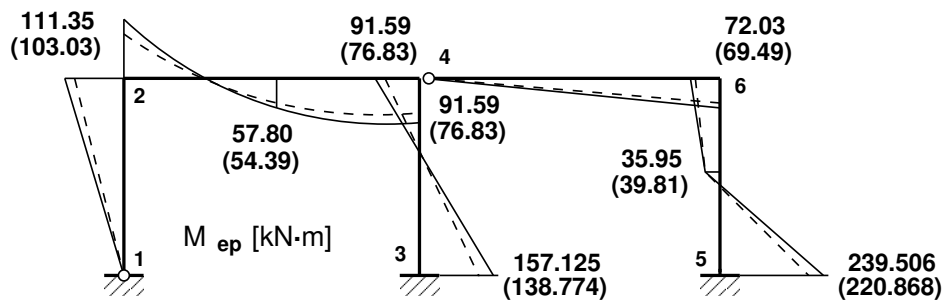
Joonis 16.62. Horisontaalsiirdeid kahe sildega raamis



(a) Kahe sildega raami normaaljõu epüür [kN]



(b) Kahe sildega raami põikjõu epüür [kN]



(c) Kahe sildega raami paindemomendi epüür [kN·m]

Joonis 16.63. Kahe sildega raami sisejõud

Teist järku teoorias peame arvestama raami deformeerunud kujuga (joonis 16.61). Raami riivi siire on $u_{24} = 3.06534 \cdot 10^{-2}$ (vt arvutuspäevik 16.9). Täiendav moment riivi siirdest ΔM :

$$\Delta M = 750.0 \cdot (-0.0305658) - 750.0 \cdot (-0.0305848) - 15 \cdot 6.0 \cdot (-0.0305753) + 0.0305848 \cdot 750.0 = 71.553 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (16.464)$$

Järgnevas momentide summas arvestame täiendava momendiga (16.464)

$$\begin{aligned} \Sigma M_3 = 0; & \quad -157.12519 - 239.50594 + 773.18237 \cdot 6 + 737.99415 \cdot 12 + \\ & + 120.0 \cdot 2.0 + 90.0 \cdot 4.0 - 750.0 \cdot (12.0 - 0.0305658) - 750.0 \cdot (6.0 - 0.0305848) - \\ & - 15 \cdot 6.0 \cdot (3.0 - 0.0305753) + 0.0305848 \cdot 750.0 = 0.004696 \end{aligned} \quad (16.465)$$

Staatiline kontroll näitab, et raam on temale mõjuvate jõudude mõjul tasakaalus.

Arvutuspäevik 16.9 Octave-3.0.1:1> diary yspRaamEST.out

Octave-3.0.1:2> diary on

Octave-3.0.1:3> yspRaamEST

=====

Järgnev on raami arvutus: GNU Octave'iga

EIp = 20000

EIr = 30000

baasi0 = 5000

SolmedeArv = 6

ElementideArv = 5

Pikijõud eelmisest arvutusest

SI =

Sõlme 2 koormus

s2F =

-824.978

0

-25.760

750

-775.104

0

-79.661

-739.918

Sõlme 4 koormus

Elemendi koormus

s4F =

qzZ =

0

0

750

15

0

0

0

Sõlme 6 koormus

0

s6F =

aLXx' = 4 6 4 6 2

-90

750

FZz' = 0 0 0 0 120

0

=====

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 60, cols = 60, nnz = 152)

(1, 1) -> 1

(2, 8) -> -1

(54, 12) -> 1

(32, 1) -> -1

(53, 8) -> 1

(7, 13) -> 1

(2, 2) -> 1

(2, 9) -> 3.5743

(34, 13) -> 1

(31, 2) -> 1

(3, 9) -> -0.68776

(8, 14) -> 1

(3, 3) -> 1

(6, 9) -> 0.58974

(35, 14) -> 1

(33, 3) -> 1

(1, 10) -> 0.0043478

(9, 15) -> 1

(4, 4) -> 1

(4, 10) -> 1

(36, 15) -> 1

(44, 4) -> -1

(2, 11) -> -2.5800

(10, 16) -> 1

(5, 5) -> 1

(3, 11) -> 1.8924

(46, 16) -> 1

(43, 5) -> 1

(5, 11) -> 1

(11, 17) -> 1

(6, 6) -> 1

(6, 11) -> 3.5743

(47, 17) -> 1

(45, 6) -> 1

(2, 12) -> -1.8924

(12, 18) -> 1

(1, 7) -> -1

(3, 12) -> 0.89358

(48, 18) -> 1

(52, 7) -> 1

(6, 12) -> 0.68776

(7, 19) -> -1

(31, 19) -> -1	(14, 33) -> 3.5992	(23, 47) -> 1
(8, 20) -> -1	(15, 33) -> -0.70565	(24, 47) -> 5.9049
(32, 20) -> -1	(18, 33) -> 0.55796	(47, 47) -> 1
(8, 21) -> 5.9691	(57, 33) -> 1	(20, 48) -> -2.9762
(9, 21) -> -0.98458	(13, 34) -> 0.0043478	(21, 48) -> 0.98414
(12, 21) -> 0.030753	(16, 34) -> 1	(24, 48) -> 0.95258
(33, 21) -> -1	(14, 35) -> -2.5852	(39, 48) -> 1
(7, 22) -> 0.0044118	(15, 35) -> 1.8988	(25, 49) -> 1
(10, 22) -> 1	(17, 35) -> 1	(58, 49) -> 1
(43, 22) -> 1	(18, 35) -> 3.5992	(26, 50) -> 1
(8, 23) -> -5.9907	(14, 36) -> -1.8988	(59, 50) -> 1
(9, 23) -> 2.9923	(15, 36) -> 0.89981	(27, 51) -> 1
(11, 23) -> 1	(18, 36) -> 0.70565	(60, 51) -> 1
(12, 23) -> 5.9691	(19, 37) -> 1	(28, 52) -> 1
(44, 23) -> 1	(40, 37) -> 1	(29, 53) -> 1
(8, 24) -> -2.9923	(20, 38) -> 1	(30, 54) -> 1
(9, 24) -> 0.99486	(41, 38) -> 1	(25, 55) -> -1
(12, 24) -> 0.98458	(21, 39) -> 1	(41, 55) -> -1
(45, 24) -> 1	(42, 39) -> 1	(26, 56) -> -1
(13, 25) -> 1	(22, 40) -> 1	(40, 56) -> 1
(35, 25) -> 1	(49, 40) -> 1	(26, 57) -> 3.6169
(38, 25) -> -1	(23, 41) -> 1	(27, 57) -> -0.71835
(14, 26) -> 1	(50, 41) -> 1	(30, 57) -> 0.53524
(34, 26) -> -1	(24, 42) -> 1	(42, 57) -> -1
(37, 26) -> 1	(51, 42) -> 1	(25, 58) -> 0.0043478
(15, 27) -> 1	(19, 43) -> -1	(28, 58) -> 1
(36, 27) -> -1	(37, 43) -> -1	(50, 58) -> 1
(16, 28) -> 1	(20, 44) -> -1	(26, 59) -> -2.5888
(47, 28) -> -1	(38, 44) -> -1	(27, 59) -> 1.9033
(17, 29) -> 1	(20, 45) -> 5.9049	(29, 59) -> 1
(46, 29) -> 1	(21, 45) -> -0.95258	(30, 59) -> 3.6169
(18, 30) -> 1	(24, 45) -> 0.094077	(49, 59) -> -1
(48, 30) -> 1	(19, 46) -> 0.0044118	(26, 60) -> -1.9033
(13, 31) -> -1	(22, 46) -> 1	(27, 60) -> 0.90422
(55, 31) -> 1	(46, 46) -> 1	(30, 60) -> 0.71835
(14, 32) -> -1	(20, 47) -> -5.9714	(51, 60) -> 1
(56, 32) -> 1	(21, 47) -> 2.9762	

B =

1	0.00000	13	0.00000	25	0.00000	37	0.00000
2	0.00000	14	0.00000	26	39.70146	38	0.00000
3	0.00000	15	0.00000	27	-29.62736	39	0.00000
4	0.00000	16	0.00000	28	0.00000	40	0.00000
5	0.00000	17	0.00000	29	-120.00000	41	0.00000
6	0.00000	18	0.00000	30	-234.05267	42	0.00000
7	0.00000	19	0.00000	31	0.00000	43	0.00000
8	134.92671	20	0.00000	32	0.00000	44	750.00000
9	-89.92672	21	0.00000	33	0.00000	45	0.00000
10	0.00000	22	0.00000	34	0.00000	46	0.00000
11	-90.00000	23	0.00000	35	0.00000	47	750.00000
12	-269.63365	24	0.00000	36	0.00000	48	0.00000

49	-90.00000	52	0.00000	55	0.00000	58	0.00000
50	750.00000	53	0.00000	56	0.00000	59	0.00000
51	0.00000	54	0.00000	57	0.00000	60	0.00000

X =

1	-3.60358	17	-11.17652	33	0.00000	49	0.00000
2	-152.82882	18	91.58520	34	773.18237	50	0.00000
3	-0.65401	19	-152.82882	35	56.25101	51	0.00000
4	-828.82348	20	3.60358	36	-157.12519	52	-737.99415
5	-21.53459	21	-0.65401	37	-153.26700	53	-132.21440
6	-111.35445	22	21.53459	38	3.20867	54	-239.50594
7	0.00000	23	-78.82348	39	24.19082	55	3.20867
8	0.00000	24	111.35445	40	-77.78560	56	153.26700
9	58.30194	25	-3.36166	41	12.00585	57	24.19082
10	828.82348	26	-152.92383	42	72.03268	58	737.99415
11	21.53459	27	34.57536	43	-152.92383	59	12.21440
12	0.00000	28	-773.18237	44	3.36166	60	-72.03268
13	-152.92383	29	-56.25101	45	-12.11520		
14	3.36166	30	-91.58520	46	77.78560		
15	34.57536	31	0.00000	47	-12.00585		
16	-21.53459	32	0.00000	48	0.00000		

=====

Algparameetrid skaleerimata

Varda Nr	u	w	fi	S	H	M
1	0.000e+00	0.000e+00	1.166e-02	828.823	21.535	0.000
2	-3.057e-02	7.207e-04	-1.308e-04	21.535	-78.823	111.354
3	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	773.182	56.251	-157.125
4	-3.058e-02	6.723e-04	-2.423e-03	77.786	-12.006	0.000
5	6.417e-04	3.065e-02	4.838e-03	737.994	12.214	-72.033

=====

Varda alguse/lõpu siirded (skaleerimata) kontaktjõud

Varda Nr	u	w	fi	S	H	M
1	0.000e+00	0.000e+00	1.166e-02	828.823	21.535	0.000
1	-7.207e-04	-3.057e-02	-1.308e-04	-828.823	-21.535	-111.354
2	-3.057e-02	7.207e-04	-1.308e-04	21.535	-78.823	111.354
2	-3.058e-02	6.723e-04	6.915e-03	-21.535	-11.177	91.585
3	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	773.182	56.251	-157.125
3	-6.723e-04	-3.058e-02	6.915e-03	-773.182	-56.251	-91.585
4	-3.058e-02	6.723e-04	-2.423e-03	77.786	-12.006	0.000
4	-3.065e-02	6.417e-04	4.838e-03	-77.786	12.006	72.033
5	6.417e-04	3.065e-02	4.838e-03	737.994	12.214	-72.033
5	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	-737.994	-132.214	-239.506

=====

Varras 1. Li on jaotatud neljaks

Li = 4

siire u -	0.00000e+00	-1.80179e-04	-3.60358e-04	-5.40537e-04	-7.20716e-04
siire w -	0.00000e+00	-1.14013e-02	-2.12609e-02	-2.81004e-02	-3.05658e-02

pööre fi	-	1.16604e-02	1.08842e-02	8.58757e-03	4.86489e-03	-1.30802e-04
pikijõud S	-	-828.82348	-828.82348	-828.82348	-828.82348	-828.82348
ristjõud H	-	-21.53459	-21.53459	-21.53459	-21.53459	-21.53459
moment M	-	0.00000	-30.94042	-60.60896	-87.78603	-111.35445

normaaljõud N	-	-828.82348	-828.82348	-828.82348	-828.82348	-828.82348
põikjõud Q	-	-31.15416	-30.51382	-28.61915	-25.54802	-21.42668
moment M	-	0.00000	-30.94042	-60.60896	-87.78603	-111.35445

Varras 2. Li on jaotatud neljaks

Li = 6

siire u	-	-3.05658e-02	-3.05705e-02	-3.05753e-02	-3.05800e-02	-3.05848e-02
siire w	-	7.20716e-04	3.71964e-03	7.67314e-03	7.50363e-03	6.72332e-04
pööre fi	-	-1.30802e-04	-3.02242e-03	-1.68463e-03	2.19278e-03	6.91507e-03
pikijõud S	-	-21.53459	-21.53459	-21.53459	-21.53459	-21.53459
ristjõud H	-	78.82348	56.32348	33.82348	11.32348	-11.17652
moment M	-	-111.35445	-9.91697	57.79510	91.65095	91.58520

normaaljõud N	-	-21.53459	-21.53459	-21.53459	-21.53459	-21.53459
põikjõud Q	-	78.82685	56.40134	33.86688	11.26700	-11.35465
moment M	-	-111.35445	-9.91697	57.79510	91.65095	91.58520

Varras 3. Li on jaotatud neljaks

Li = 4

siire u	-	0.00000e+00	-1.68083e-04	-3.36166e-04	-5.04249e-04	-6.72332e-04
siire w	-	0.00000e+00	-3.44761e-03	-1.17895e-02	-2.18999e-02	-3.05848e-02
pööre fi	-	0.00000e+00	6.40387e-03	9.75688e-03	9.92951e-03	6.91507e-03
pikijõud S	-	-773.18237	-773.18237	-773.18237	-773.18237	-773.18237
ristjõud H	-	-56.25101	-56.25101	-56.25101	-56.25101	-56.25101
moment M	-	157.12519	98.20193	35.48511	-28.60251	-91.58520

normaaljõud N	-	-773.18237	-773.18237	-773.18237	-773.18237	-773.18237
põikjõud Q	-	-56.25101	-61.21467	-63.81360	-63.94740	-61.61091
moment M	-	157.12519	98.20193	35.48511	-28.60251	-91.58520

Varras 4. Li on jaotatud neljaks

Li = 6

siire u	-	-3.05848e-02	-3.06019e-02	-3.06191e-02	-3.06362e-02	-3.06534e-02
siire w	-	6.72332e-04	4.07823e-03	6.11381e-03	5.41692e-03	6.41734e-04
pööre fi	-	-2.42304e-03	-1.96581e-03	-5.96850e-04	1.67566e-03	4.83816e-03
pikijõud S	-	-77.78560	-77.78560	-77.78560	-77.78560	-77.78560
ristjõud H	-	12.00585	12.00585	12.00585	12.00585	12.00585
moment M	-	0.00000	18.28010	36.45103	54.40429	72.03268

normaaljõud N	-	-77.78560	-77.78560	-77.78560	-77.78560	-77.78560
põikjõud Q	-	12.19887	12.16245	12.05340	11.87237	11.62044
moment M	-	0.00000	18.28010	36.45103	54.40429	72.03268

Varras 5. Li on jaotatud neljaks

Li = 4

siire u	-	6.41734e-04	4.81301e-04	3.20867e-04	1.60434e-04	-1.03179e-19
siire w	-	3.06534e-02	2.41513e-02	1.49074e-02	4.86946e-03	-3.46945e-18

```

pööre fi - 4.83816e-03  8.02399e-03  1.03050e-02  8.60641e-03  1.73472e-18
pikijõud S - -737.99415 -737.99415 -737.99415 -737.99415 -737.99415
ristjõud H - -12.21440 -12.21440 -132.21440 -132.21440 -132.21440
moment M - 72.03268 55.00729 35.95311 -103.68853 -239.50594
-----
normaaljõud N - -737.99415 -737.99415 -737.99415 -737.99415 -737.99415
põikjõud Q - -15.79425 -18.15150 -139.83929 -138.58244 -132.21440
moment M - 72.03268 55.00729 35.95311 -103.68853 -239.50594
-----
octave-3.0.1:4> diary off

```

Raami (joonis 16.59) lineaarne ülesanne on lahendatud ka deformatsioonimeetodiga, vt GNU Octave'i programmi *defNBAest.m* lk 736. Paindemomendi epüür on joonisel 16.63(c) lk 604.

Tabel 16.17. Kahe sildega raami sisejõudude võrdlus

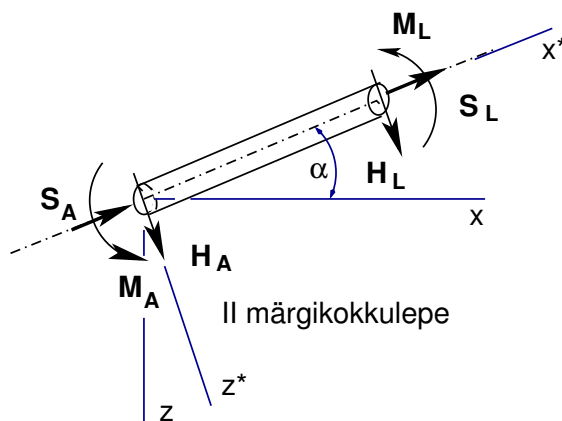
Lineaarne teooria					II järku teooria		
<i>Varda</i>	M_{def}	M_{est}^I	S_{est}^I	H_{est}^I	M_{est}^{II}	S_{est}^{II}	H_{est}^{II}
<i>nr a/l</i>	[kN·m]	[kN·m]	[kN]	[kN]	[kN·m]	[kN]	[kN]
1 alg.	0.0000	0.000	824.978	25.760	0.000	828.823	21.535
1 lõpp	-103.1977	-103.040	-824.978	-25.760	-111.354	-828.823	-21.535
2 alg.	103.1977	103.040	25.760	-74.978	111.354	21.535	-78.823
2 lõpp	76.9767	76.829	-25.760	-15.022	91.585	-21.535	-11.177
3 alg.	-138.8954	-138.774	775.104	53.901	-157.125	773.182	56.251
3 lõpp	-76.9767	-76.829	-775.104	-53.901	-91.585	-773.182	-56.251
4 alg.	0.0000	0.000	79.661	-10.082	0.000	77.786	-12.006
4 lõpp	60.3488	60.490	-79.661	10.082	72.033	-77.786	12.006
5 alg.	-60.3488	-60.490	739.918	10.339	-72.033	737.994	12.214
5 lõpp	-220.5814	-220.868	-739.918	-130.339	-239.506	-737.994	-132.214

Tabelis 16.17 on toodud sisejõudude võrdlus, mis on arvutatud esimest ja teist järku teooria järgi. Tabelis on võrdluseks toodud paindemomendid M_{def} , mis on arvutatud deformatsioonimeetodiga, kasutades GNU Octave'i programmi *defNBAest.m* lk 736. Tabelist näeme, et need erinevad väga vähe momentidest M_{est}^I , mis on leitud rajaelementide meetodiga (EST-meetodiga). Esimest ja teist järku teooria järgi arvutatud sisejõudude epüürid on joonistel 16.63 lk 604.

16.15 Lõplik element pikipõikpaindel

16.15.1 Jäikusmaatriks pikipõikpaindel

Lõplike elemendi meetodi (LEM) rakendamiseks vaatleme varda lõplikku elementi (joonis 16.64). Varda otstes mõjuvatest kontaktjõududest ja siiretest moodustame vektorid \mathbf{s}^* ja \mathbf{v}^*



Joonis 16.64. Varda lõplik element

$$\mathbf{s}^* = \begin{bmatrix} S_A \\ H_A \\ M_A \\ S_L \\ H_L \\ M_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ u_L \\ w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix} \quad (16.466)$$

Moodustame varda alguses ja lõpus olevatest siiretest vastavad vektorid \mathbf{v}_A ning \mathbf{v}_L :

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} u_L \\ w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix} \quad (16.467)$$

Varda alguses ja lõpus olevatest kontaktjõududest vastavad vektorid \mathbf{s}_A ning \mathbf{s}_L :

$$\mathbf{s}_A = \begin{bmatrix} S_A \\ H_A \\ M_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_L = \begin{bmatrix} S_L \\ H_L \\ M_L \end{bmatrix} \quad (16.468)$$

Jäikusmaatriksi leidmiseks vaatleme ülekandemaatriksit $\tilde{\mathbf{U}}^{\text{II}s}$ (16.382) ja võrrandit (16.374), mille struktuur on

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_L \\ \mathbf{s}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_A \\ \mathbf{s}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad (16.469)$$

Võrrandisüsteemi (16.469) teisendame kujule

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_A \\ \mathbf{s}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{12}^{-1}\mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12}^{-1} \\ \mathbf{U}_{21} - \mathbf{U}_{22}\mathbf{U}_{12}^{-1}\mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{22}\mathbf{U}_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_A \\ \mathbf{v}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{12}^{-1}\mathbf{f}_1 \\ -\mathbf{U}_{22}\mathbf{U}_{12}^{-1}\mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad (16.470)$$

ehk

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{K}^*\mathbf{v}^* - \mathbf{f} \quad (16.471)$$

kus \mathbf{K}^* on varda jäikusmaatriks pikipõikpaindel ja on toodud avaldisega (16.475). Võrrand (16.471) vastab teisele märgikokkuleppele. Pöörame tähelepanu, et \mathbf{f} on miinusmärgiga. Õpikus [PW94] lk 193 on \mathbf{f} võrrandis miinusmärgiga ja sellele vastavalt on toodud tabelid lk 194.

Ehituspraktikas on küllaldane, kui ritta arenduses (16.476), (16.477) arvestada kahte esimest liiget. Siis võime jäikusmaatriksi \mathbf{K} esitada lineaarse \mathbf{K}_E^* ja „geomeetrilise” mitelinearse osa \mathbf{K}_G^* summana

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_E^* + \mathbf{K}_G^* \quad (16.472)$$

kus

$$\mathbf{K}_E^* = EI_y \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{l} & 0 & 0 & \vdots & -\frac{\hbar}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \vdots & 0 & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ 0 & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \vdots & 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\hbar}{l} & 0 & 0 & \vdots & \frac{\hbar}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \vdots & 0 & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ 0 & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \vdots & 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (16.473)$$

on lineaarne jäikusmaatriks, milles $\hbar = \frac{EA}{EI}$ ja

$$\mathbf{K}_G^* = \frac{S_x}{30*l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3*l & \vdots & 0 & -36 & -3*l \\ 0 & -3*l & 4*l^2 & \vdots & 0 & 3*l & -l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 3*l & \vdots & 0 & 36 & 3*l \\ 0 & -3*l & -l^2 & \vdots & 0 & 3*l & 4*l^2 \end{bmatrix} \quad (16.474)$$

on *geomeetriline jäikusmaatriks* ($S_x < 0$).

Võrrand (16.471) lahtikirjutatuna on järgmine:

$$\begin{bmatrix} S_A \\ H_A \\ M_A \\ S_L \\ H_L \\ M_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ [2(A^* + B^*) \mp \nu^2] \frac{EI}{l^3} & -(A^* + B^*) \frac{EI}{l^2} & 0 & -[2(A^* + B^*) \mp \nu^2] \frac{EI}{l^3} & -(A^* + B^*) \frac{EI}{l^2} & 0 \\ \cdot & A^* \frac{EI}{l} & 0 & (A^* + B^*) \frac{EI}{l^2} & B^* \frac{EI}{l} & 0 \\ \cdot & \cdot & \frac{EI}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \text{Sümmeetriline} & \cdot & [2(A^* + B^*) \mp \nu^2] \frac{EI}{l^3} & (A^* + B^*) \frac{EI}{l^2} & A^* \frac{EI}{l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ u_L \\ w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix} \quad (16.475)$$

kus A^* ja B^* on varda eesarvud, siin valida märgist \mp survel ν ja tõmbel $-\nu$, ν on varda tunnusarv.

Eesarvude rittaarendus survel (vt. [Krä91c] ST 4-9.32, [PW94] lk 634 ja [ER77] lk 3):

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{\nu(\sin \nu - \nu \cos \nu)}{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu} = 4 - \frac{2}{15} \nu^2 - \frac{11}{6300} \nu^4 - \dots \\ B^* &= \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu} = 2 + \frac{1}{30} \nu^2 + \frac{13}{12600} \nu^4 - \dots \\ A^* + B^* &= \frac{\nu^2(1 - \cos \nu)}{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu} = 6 - \frac{1}{10} \nu^2 - \frac{1}{1400} \nu^4 - \dots \\ 2(A^* + B^*) - \nu^2 &= \frac{\nu^3 \sin \nu}{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu} = 12 - \frac{6}{5} \nu^2 - \frac{1}{700} \nu^4 - \dots \end{aligned} \quad (16.476)$$

Eesarvude rittaarendus tõmbel:

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{\nu(\operatorname{sh} \nu - \nu \operatorname{ch} \nu)}{2(\operatorname{ch} \nu - 1) - \nu \operatorname{sh} \nu} = 4 + \frac{2}{15} \nu^2 - \frac{11}{6300} \nu^4 + \dots \\ B^* &= \frac{\nu(\nu - \operatorname{sh} \nu)}{2(\operatorname{ch} \nu - 1) - \nu \operatorname{sh} \nu} = 2 - \frac{1}{30} \nu^2 + \frac{13}{12600} \nu^4 - \dots \\ A^* + B^* &= \frac{\nu^2(1 - \operatorname{ch} \nu)}{2(\operatorname{ch} \nu - 1) - \nu \operatorname{sh} \nu} = 6 + \frac{1}{10} \nu^2 - \frac{1}{1400} \nu^4 + \dots \\ 2(A^* + B^*) - \nu^2 &= \frac{-\nu^3 \operatorname{sh} \nu}{2(\operatorname{ch} \nu - 1) - \nu \operatorname{sh} \nu} = 12 + \frac{6}{5} \nu^2 - \frac{1}{700} \nu^4 + \dots \end{aligned} \quad (16.477)$$

Kirjutame võrrandisüsteemi (16.471) järgmisel kujul:

$$\mathbf{K}^* \mathbf{v}^* = \mathbf{S}^* + \mathbf{f} \quad (16.478)$$

Koormusvektori \mathbf{f} avaldise leiame raamatust [RH95] lk 77 ja 88, kuid seal on koormusvektori \mathbf{f} elemendid vastupidiste märkidega. Koormusvektori \mathbf{f} avaldise leiame õpikust [PW94] lk 194 toodud tabelitest

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{nA} \\ \tilde{f}_{qA} \\ \tilde{f}_{mA} \\ \tilde{f}_{nL} \\ \tilde{f}_{qL} \\ \tilde{f}_{mL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q_z l}{2} \\ -\frac{q_z l^2}{12} \left(1 \mp \frac{\nu^2}{60}\right) \\ 0 \\ \frac{q_z l}{2} \\ \frac{q_z l^2}{12} \left(1 \mp \frac{\nu^2}{60}\right) \end{bmatrix} \quad (16.479)$$

Tala elemendil, millel on momendiliigend paremal, puudub kontaktjõudude vektoris \mathbf{S}^* ja siirdevektoris \mathbf{v}^* M_L ning φ_L

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} H_A \\ M_A \\ H_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_L \end{bmatrix} \quad (16.480)$$

Tala elemendi, millel on momendiliigend paremal, jäikusmaatriksi arvutame maatriksite kondensatsiooni valemiga (A.69)

$$\tilde{\mathbf{K}}_{e\text{par}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} - \frac{1}{k_{44}} \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{41} & k_{42} & k_{43} \end{bmatrix} \quad (16.481)$$

Koormusvektoriks $\mathbf{f}_{e\text{par}}$ saame kondensatsiooni valemiga (A.70)

$$\tilde{\mathbf{f}}_{e\text{par}} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{qA} \\ \tilde{f}_{mA} \\ \tilde{f}_{qL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{qA} \\ f_{mA} \\ f_{qL} \end{bmatrix} - \frac{1}{k_{44}} \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} f_{mL} \quad (16.482)$$

Jäikusmaatriks \mathbf{K} üldkoordinaatides

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \quad (16.483)$$

Vektorite \mathbf{S}^* ja \mathbf{v}^* teisendamiseks kohalikest koordinaatidest üldkoordinaatidesse \mathbf{s} ja \mathbf{v} kasutame järgmist teisendusmaatriksit:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.484)$$

kus $c = \cos \alpha$ ja $s = \sin \alpha$

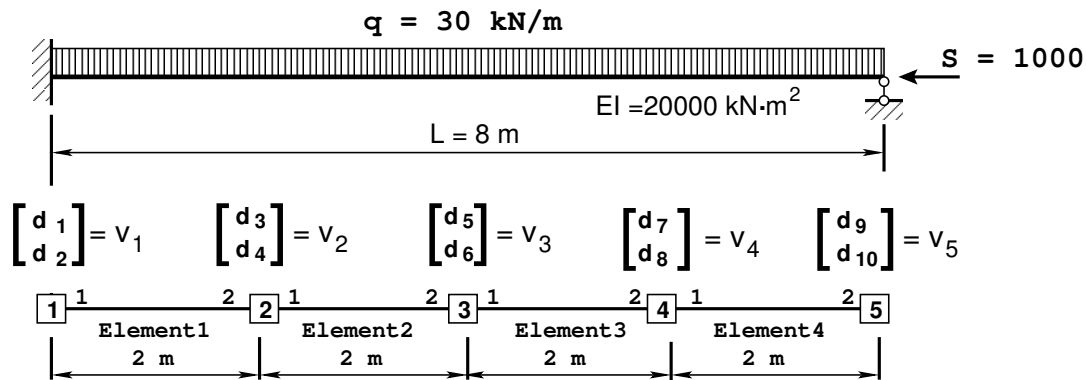
Vektorid \mathbf{S}^* ja \mathbf{v}^* üldkoordinaatides

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{v}^*, \quad \mathbf{s} = \mathbf{T}\mathbf{s}^* \quad (16.485)$$

16.15.2 Tala arvutus LEM-iga. Näide 16.10

Näide 16.10 Leida joonisel 16.65 toodud tala paindemomendid lõplike elementide meetodiga II järku teooria järgi. Tala on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega $q_z = 30 \text{ kN/m}$ ning pikijõuga $S = 1000 \text{ kN}$. Tala ristlõike jäikus on $EI = 2 \cdot 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$. Tala sille on 8 m.

Vaadeldava tala jagame neljaks võrdseks elemendiks pikkusega 2 m. Selle lineaarse ülesande lahendamiseks on kasutada GNU Octave'i programm *LemKelin.m* lk 738 ja II järku teooria järgi lahendamiseks programm *LemKe.m* lk 739.



Joonis 16.65. Tala arvutus lõplike elementide meetodiga

Koostame lõplike elementide meetodi tasakaalvõrrandi

$$\mathbf{K}^*\mathbf{v}^* = \mathbf{S}^* + \mathbf{f}^* \quad (16.486)$$

kus

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \\ d_5 \\ d_6 \\ \dots \\ d_7 \\ d_8 \\ \dots \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \dots \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ \dots \\ w_4 \\ \varphi_4 \\ \dots \\ w_5 \\ \varphi_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_3 \\ f_4 \\ \dots \\ f_5 \\ f_6 \\ \dots \\ f_7 \\ f_8 \\ \dots \\ f_9 \\ f_{10} \end{bmatrix} \quad (16.487)$$

Tala jäikusmaatriksi (16.488) koostamiseks kasutame indekstabeleid (16.489). Indekstabelid saame elemendi alguse ja lõpu siirete indeksitest koostatud vektorite diaad- ehk otsekorrutisena (vt lõik A.4 avaldis (A.14)). Koostatud elemendi indekstabel näitab tala jäikusmaatriksi rea ja veeru indekseid, kuhu tuleb lisada varda elemendi vastav jäikusmaatriksi element. Tala jäikusmaatriksi koostamiseks saab kasutada GNU Octave'is koostatud funktsiooni *InsertBtoA.m* lk 726. Indekstabelite (16.489) vasakust ülemisest nurgast saame aadressid ((1,1), (3,3), (5,5), (7,7)), kust alates tuleb lisada (liita) vastava tala jäikusmaatriksi elemendid.

Tala elemendi jäikusmaatriks \mathbf{K}_e^* koosneb lineaarsest jäikusmaatriksist \mathbf{K}_E^* ja geomeetrisest jäikusmaatriksist \mathbf{K}_G^* :

$$\mathbf{K}_e^* = \mathbf{K}_E^* + \mathbf{K}_G^* \quad (16.490)$$

kus

$$\mathbf{K}_E^* = EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \vdots & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \vdots & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \vdots & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \vdots & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (16.491)$$

$$\mathbf{K}_G^* = \frac{S_x}{30 * l} \begin{bmatrix} 36 & -3 * l & \vdots & -36 & -3 * l \\ -3 * l & 4 * l & \vdots & 3 * l & -l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -36 & 3 * l & \vdots & 36 & 3 * l \\ -3 * l & -l^2 & \vdots & 3 * l & 4 * l^2 \end{bmatrix} \quad (16.492)$$

Tala elemendi jäikusmaatriksi \mathbf{K}_E^* (16.491) ja \mathbf{K}_G^* (16.492) saab arvutada vastavalt GNU Octave'i funktsiooniga *lemTalaKe4x4.m* lk 737 ning funktsiooniga *lemTalaKg4x4.m* lk 737.

Tala elemendi jäikusmaatriks $\mathbf{K}_e^* = \mathbf{K}_E^* + \mathbf{K}_G^*$ on toodud avaldisega

$$\mathbf{K}_e^* = \begin{bmatrix} 29.40 & -29.90 & \vdots & -29.40 & -29.90 \\ -29.90 & 39.7333 & \vdots & 29.90 & 20.0667 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -29.40 & 29.90 & \vdots & 29.40 & 29.90 \\ -29.90 & 20.0667 & \vdots & 29.90 & 39.7333 \end{bmatrix} * 10^3 \quad (16.493)$$

Liigendiga tala elemendi jäikusmaatriksi \mathbf{K}_{par} saame sisemise vabadusastme (vabadusaste, mis ei ole seotud naaberelemendiga) väljalülitamisel. Vabadusastmete väljalülitamist vaadeldakse elementide staatilisel kondensatsioonil (vt jaotis A.12.1 avaldis (A.69)). Avaldisega (16.494) on toodud tala neljanda elemendi, millel on momendiliigend paremal, jäikusmaatriks

$$\mathbf{K}_{\text{par}} = \begin{bmatrix} 6.8997 & -14.7995 & \vdots & -6.8997 \\ -14.7995 & 29.5990 & \vdots & 14.7995 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -6.8997 & 14.7995 & \vdots & 6.8997 \end{bmatrix} * 10^3 \quad (16.494)$$

Liigendiga tala elemendi jäikusmaatriksi \mathbf{K} (16.494) saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga `lemTalaIIK3x3lpar.m` lk 737.

Elementidele vastavad koormusvektorid

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \frac{q_z l}{2} \\ -\frac{q_z l^2}{12} \left(1 \mp \frac{\nu^2}{60}\right) \\ \dots \\ \frac{q_z l}{2} \\ \frac{q_z l^2}{12} \left(1 \mp \frac{\nu^2}{60}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.030 \\ -0.010 \\ \dots \\ 0.03 \\ 0.010 \end{bmatrix} * 10^3 \quad (16.495)$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0.0375 \\ -0.015 \\ \dots \\ 0.0225 \end{bmatrix} * 10^3 \quad (16.496)$$

Koormusvektori \mathbf{f}_1 (16.495) ja \mathbf{f}_2 (16.496) saab arvutada vastavalt GNU Octave'i funktsiooniga `lemTalaIIq4x1.m` lk 738 ning funktsiooniga `lemTalaIIq3x1Lp.m` lk 738 .

Elementide jäikusmaatriksitest koostame tala jäikusmaatriksi $\overset{\circ}{\mathbf{K}}$ (joonis 16.66) ja elementide koormusvektoritest tala koormusvektori. Siin neljanda elemendi jäikusmaatriksile ja koormusvektorile teeme kondensatsiooni. Võrrandisüsteemist eemaldame pöördenurga φ_5 ja momenti M_5 . Kümneandast võrrandist määrame hiljem pöördenurga φ_5 . Võrrandisüsteemi koostamiseks ja ülesande lahendamiseks kasutame GNU Octave'i programmi `LemKe.m` lk 739.

Joonisel 16.66 näidatud maatriksist ja koormusvektorist moodustame võrrandisüsteemi 9×9

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}} * \overset{\circ}{\mathbf{v}} = \overset{\circ}{\mathbf{S}} + \overset{\circ}{\mathbf{f}} \quad (16.497)$$

kus $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$ (joonis 16.65)

$$\overset{\circ}{\mathbf{v}} = \left[d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8 \quad d_9 \right]^T \quad (16.498)$$

d1=0	d2=0	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9=0
29.4000	-29.9000	-29.4000	-29.9000					
-29.9000	39.7333	29.9000	20.0667					
-29.4000	-29.9000	58.8000	0.0000	-29.4000	-29.9000			
-29.9000	20.0667	0.0000	79.4667	29.9000	20.0667			
		-29.4000	29.9000	58.8000	0.0000	-29.4000	-29.9000	
		-29.9000	20.0667	0.0000	79.4667	29.9000	20.0667	
				-29.4000	29.9000	36.29975	15.1005	-6.89975
				-29.9000	20.0667	15.1005	69.3323	14.7995
						-6.89975	14.7995	6.89975

Joonis 16.66. Tala jäikusmaatriks

Võrrandisüsteemi (16.498) determinant võrdub nulliga. Kõrvaldame esimese, teise ja viimase veeru ning rea. Sellega kõrvaldasime jäiga keha liikumise. Esimest, teist ja üheksandat võrrandit kasutame toereaktsioonide määramiseks. Saame võrrandisüsteemi

$$\mathbf{K}_{6 \times 6} \mathbf{X} = \mathbf{B}_{6 \times 1} \quad (16.499)$$

kus

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 \end{bmatrix}^T \quad (16.500)$$

Võrrandisüsteemi (16.499) lahendit \mathbf{X} näeme arvutuspäevikust 16.10 lk 619. Avaldises

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \\ d_5 \\ d_6 \\ \dots \\ d_7 \\ d_8 \\ \dots \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix} = \begin{matrix} LEM [16.10] \\ \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ \dots \\ 0.0174 \\ -0.0130 \\ \dots \\ 0.0378 \\ -0.0050 \\ \dots \\ 0.0321 \\ 0.0107 \\ \dots \\ 0.0 \\ 0.0190 \end{bmatrix} \\ , \end{matrix} \begin{matrix} EST [16.7] \\ \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ \dots \\ 0.01740 \\ -0.01298 \\ \dots \\ 0.03782 \\ -0.00496 \\ \dots \\ 0.03214 \\ 0.01067 \\ \dots \\ 0.0 \\ 0.01906 \end{bmatrix} \\ , \end{matrix} \begin{matrix} Täpne [Thi90] \\ \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ \dots \\ 0.0174 \\ -0.0130 \\ \dots \\ 0.0378 \\ -0.0050 \\ \dots \\ 0.0321 \\ 0.0107 \\ \dots \\ 0.0 \\ 0.0191 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (16.501)$$

on kõnesolevas näites LEM-iga leitud lahend (vt arvutuspäevik 16.10 lk 619), EST-meetodiga (rajaelementide meetod) leitud lahend, mis on toodud näites 16.7 lk 578 ja lahend raamatust [Thi90], kus on sellele viide „täpne lahend”. Avaldises (16.501) toodud lahendite võrdlus näitab, et EST-meetod annab täpse tulemuse.

Tala elemendi otstes mõjuvad kontaktjõud \mathbf{S}^* (16.471) leiame elemendi jäikusmaatriksi \mathbf{S}^* korrutamisel elemendi siirdevektoriga \mathbf{v}^* ja elemendi koormusvektori \mathbf{f} lahutamisega

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{K}^* \mathbf{v}^* - \mathbf{f}^* \quad (16.502)$$

Tabelis 16.18 on toodud tala elemendi otstes mõjuvad momendid.

Tala paindemomendid leitakse sõlmes mõjuvate paindemomentide aritmeetilise keskmisena (tabel 16.19).

Tabeli 16.19 esimene veerg on leitud selles näites LEM-iga (vt arvutuspäevik 16.10 lk 619), teises veerus on arvutuse tulemused EST-meetodiga (rajaelementide meetod), mis on toodud näites 16.7 lk 578, kolmas veerg, kus viide „täpne lahend” on raamatust [Thi90]. Raamatust [Thi90] puudub kirjeldus, kuidas see täpne lahend on saadud. Neljanda veeru tulemused on arvutatud GNU Octave'i programmiga LemKelin.m lk 738.

Tabel 16.18. Tala elementide paindemomendid [kN·m]

<i>Element</i>	<i>Sõlm 1</i>	<i>Sõlm 2</i>
1	270.00	-5.095
2	5.095	142.81
3	-142.81	144.63
4	-144.63	0.0

Arvutuspäevik 16.10 octave-3.0.1:1> diary LemKe.out

octave-3.0.1:2> diary on

octave-3.0.1:3> LemKe

Tala arvutamise lähteandmed

L - tala sille, EI - ristlõike jäikus,

Se - pikijõud, q - ühtlaselt jaotatud koormus

II märgikokkulepe

L = 2

EI = 20000

Se = 1000

q = 30

Geomeetriline jäikusmaatriks Kg

Kg=lemTalaKg4x4(Se,L,EI) =

-600.000	100.000	600.000	100.000
100.000	-266.667	-100.000	66.667
600.000	-100.000	-600.000	-100.000
100.000	66.667	-100.000	-266.667

Tala elemendi jäikusmaatriks K

K=(Ke + Kg)/1.0e+03 =

29.400	-29.900	-29.400	-29.900
-29.900	39.733	29.900	20.067
-29.400	29.900	29.400	29.900
-29.900	20.067	29.900	39.733

Tala lineaarne jäikusmaatriks Ke

Ke=lemTalaKe4x4(L,EI) =

30000	-30000	-30000	-30000
-30000	40000	30000	20000
-30000	30000	30000	30000
-30000	20000	30000	40000

Tala liigendiga elemendi jäikusmaatriks

Kl=lemTalaIIK3x3lpar(Se,L,EI)/1.0e+03 =

6.8997	-14.7995	-6.8997
-14.7995	29.5990	14.7995
-6.8997	14.7995	6.8997

Tabel 16.19. Tala paindemomendid [kN·m]

<i>Sõlm</i>	<i>LEM</i>	<i>EST-meetod</i>	<i>Täpne lahend</i>	<i>I järku teooria</i>
1	-270.000	-270.101	-270.3	-240.0
2	-5.095	-5.179	-5.4	0.0
3	142.81	142.766	142.8	120.0
4	144.63	144.612	144.7	120.0
5	0.00	0.000	0.0	0.0

Elemendi koormusvektor S1

$$S1 = \text{lemTalafq4x1}(Se, L, q, EI) / 1.0e+03 =$$

0.0300000
 -0.0099667
 0.0300000
 0.0099667

Elemendi (liigend paremal) koormusvektor

$$S2 = \text{lemTalafq3x1Ip}(Se, L, q, EI) / 1.0e+03 =$$

0.037500
 -0.015000
 0.022500

Tala võrrandisüsteem A 9x9.

A9x9 =

Columns 1 through 7:

29.40000	-29.90000	-29.40000	-29.90000	0.00000	0.00000	0.00000
-29.90000	39.73333	29.90000	20.06667	0.00000	0.00000	0.00000
-29.40000	29.90000	58.80000	0.00000	-29.40000	-29.90000	0.00000
-29.90000	20.06667	0.00000	79.46667	29.90000	20.06667	0.00000
0.00000	0.00000	-29.40000	29.90000	58.80000	0.00000	-29.40000
0.00000	0.00000	-29.90000	20.06667	0.00000	79.46667	29.90000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-29.40000	29.90000	36.29975
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-29.90000	20.06667	15.10050
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-6.89975

Columns 8 and 9:

0.00000	0.00000
0.00000	0.00000
0.00000	0.00000
0.00000	0.00000
-29.90000	0.00000
20.06667	0.00000
15.10050	-6.89975
69.33233	14.79950
14.79950	6.89975

Tala võrrandisüsteemi parem pool S9x1
S9x1 =

0.030000
 -0.009967
 0.060000
 0.000000
 0.060000
 0.000000
 0.067500
 -0.005034
 0.022500

Tala võrrandisüsteemi vasak pool A 6x6. Siin 1., 2. ja 9. read ja veerud puuduvad rajatingimuste tõttu.

A =

58.80000	0.00000	-29.40000	-29.90000	0.00000	0.00000
0.00000	79.46667	29.90000	20.06667	0.00000	0.00000
-29.40000	29.90000	58.80000	0.00000	-29.40000	-29.90000
-29.90000	20.06667	0.00000	79.46667	29.90000	20.06667
0.00000	0.00000	-29.40000	29.90000	36.29975	15.10050
0.00000	0.00000	-29.90000	20.06667	15.10050	69.33233

Tala võrrandisüsteemi parem pool Ss 6x1
Ss =

0.060000
0.000000
0.060000
0.000000
0.067500
-0.005034

Võrrandisüsteemi lahend X=A\Ss
X =

0.0174041
-0.0129743
0.0378099
-0.0049582
0.0321277
0.0106708

4. elemendi vasaku otsa siire, pööre Xl
Xl56 = X(5:6,1) =

0.032128
0.010671

Valin esimesed kaks Kord

Kord = Vor4(1,1:2) =

0.75252 -0.50503

4. elemendi jäikusmaatriksi K viimases
võrrandis pöördenurga kordajaks 1

Vor4 = -K(4,:)/K(4,4) =

0.75252 -0.50503 -0.75252 -1.00000

4. elemendi parema otsa pööre Xxx

Xxx = Kord*Xl56

Xxx = 0.018788

=====

Siirded sõlmpunktides

Nr Siire

1 0.0000
2 0.0000
3 0.0174
4 -0.0130
5 0.0378
6 -0.0050
7 0.0321
8 0.0107
9 0.0000
10 0.0188

Element 1. Siirded, pöörded ja momendid
XL1 =

0.000000
0.000000
0.017404
-0.012974

Q1 = -153.75
M1 = 270.00
M2 = -5.0951

Element 2. Siirded, pöörded ja momendid
XL2 =

0.0174041
-0.0129743
0.0378099
-0.0049582

M2a = 5.0951
M3 = 142.81

Tabel 16.20. Tala ristjõud [kN]

Sõlm	LEM	EST-meetod	I järku teooria
1	153.75	153.763	150.0
2	93.75	93.763	90.0
3	33.75	33.763	30.0
4	-26.25	-26.237	-30.0
5	-86.25	-86.237	-90.0

Element 3. Siirded, pöörded ja momendid
XL3 =

0.0378099
-0.0049582
0.0321277
0.0106708

M3a = -142.81
M4 = 144.63

Element 4. Siirded, pöörded ja momendid
XL4 =

0.032128
0.010671
0.000000

M4a = -144.63
Q4b = -86.250

Momendid sõlmes arvutatakse aritmeetilise keskmisena I märgikokkuleppe järgi

Moment 1. sõlmes
M1k = -270.00
Moment 2. sõlmes
M2k = -5.0951
Moment 3. sõlmes
M3k = 142.81
Moment 4. sõlmes
M4k = 144.63

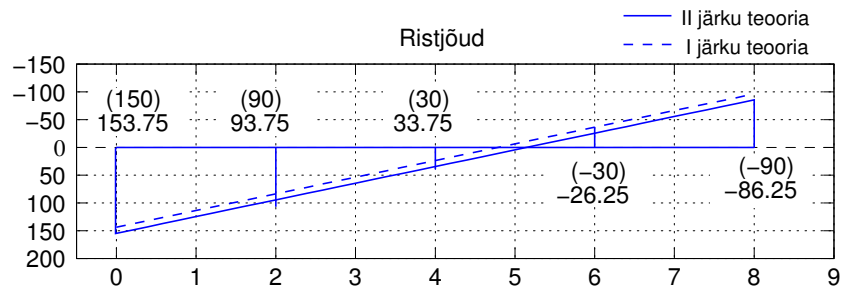
Moment 5. sõlmes
M5 = 0
Staatiline kontroll: q*8=240
SumZ=240+Q1+Q4b
SumZ = -2.2737e-13
octave-3.0.1:4> diary off

Lineaarse ülesande lahendamiseks kasutame GNU Octave'i programmi *LemKelin.m*. lk 738
Võrrandisüsteemi (16.486) viimasest võrrandist (16.488) avaldame sõlme 5 pöördenurga
 φ_5 (16.503).

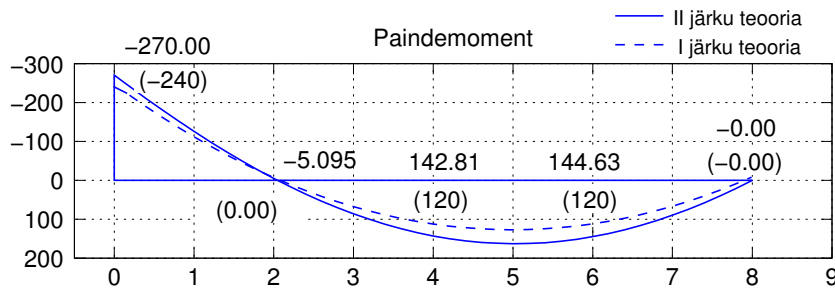
$$\varphi_5 = -\frac{1}{k_{44}^{(4)}} \begin{bmatrix} k_{41}^{(4)} & k_{42}^{(4)} & k_{43}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_7 \\ d_8 \\ d_9 \equiv w_5 = 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{k_{44}^{(4)}} \{(S_{10} \equiv M_5 = 0) + f_{10}\} \quad (16.503)$$

Leitud pikijõult S ja ristjõult H saame teisendusega üle minna normaaljõule N ning põikjõule Q . Teisendusest (16.2) saame pöördteisenduse (16.504) maatriksi transponeerimisega, sest see on ortogonaalne maatriks:

$$\begin{bmatrix} N \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ H \end{bmatrix} \quad (16.504)$$



(a) Tala ristjõud [kN]



(b) Tala paindemoment [kN·m]

Joonis 16.67. Tala sisejõud lõplike elementide meetodiga

Teist järku teoorias vaatleme väikseid pöördnurki φ nii, et ([PW94] lk 623)

$$\cos \varphi \approx 1, \quad \sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi = -\frac{dw}{dx} \quad (16.505)$$

Lõplike elementide meetodiga (LEM) saadud tulemused ei erine palju EST-meetodiga saadud tulemustest. EST-meetodiga (rajaelementide meetodiga) leitud tulemused on täpsemad.

Osa IV

Lisad

A. Maatriksid

A.1 Maatriksi mõiste

Maatriksiks nimetatakse ridadesse ja veergudesse korrastatud arvude (või nende sümboolite) massiivi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{A} = [a_{ij}], \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.2})$$

kus a_{ij} on maatriksi \mathbf{A} i -nda rea ja j -nda veeru element.

Arvutiprogrammis *GNU Octave*¹ (vt ka *Matlab*²) sisestatakse maatriks

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

järgmiselt: $a = [1\ 3\ 4; 2\ 1\ 5]$ (vt joonis A.1).

A.2 Rea- ja veeruvektor

Maatriksit, mis koosneb ainult ühest reast, nimetatakse reavektoriks

$$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] \quad (\text{A.4})$$

Maatriksit, mis koosneb ainult ühest veerust, nimetatakse veeruvektoriks

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

¹<http://www.network-theory.co.uk/docs/octave3/index.html>

²<http://users.powernet.co.uk/kienzle/octave/matcompat/>

```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järjehoidjad Seadistused Abi
octave-3.0.1:1> a=[1 3 4; 2 1 5]
a =
    1    3    4
    2    1    5
octave-3.0.1:2>
  
```

Joonis A.1. Maatriksi sisestamine *GNU Octave*'iga

Arvutiprogrammis *GNU Octave (Matlab)* sisestatakse reavektor b Arvutiprogrammis *GNU Octave (Matlab)* sisestatakse veervektor c

$$b = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

järgmiselt:
 $b=[4 \ 3 \ 5]$

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

järgmiselt:
 $c=[3; 8; 2]$

Üleminek reavektorilt veervektorile ja vastupidi tehakse *GNU Octave*'is (*Matlab*'is) ülakomaga. Näiteks

$d=b'$

ja reavektor b (A.6) muudetakse veervektoriks d

$$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A.3 Maatriksite liitmine ja lahutamine

Maatriksite liitmine (lahutamine) on võimalik siis ja ainult siis, kui nad on üht ja sama järku, st kui neil on ühesugune arv veergusid ja ühesugune arv ridu. Näiteks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Järgmise näite

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

puhul tähistame avaldise (A.10) vasakul pool olevad maatriksid a , b ja sisestame nad *GNU Octave*'is (*Matlab*'is) järgmiselt:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4; \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3; \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ning seejärel sisestame järgmise avaldise:

$$c = a + b$$

Tulemuseks saame

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

A.4 Vektorite ja maatriksite korrutamine

Reavektori \mathbf{b} (A.4) ja veeruvektori \mathbf{c} (A.5) korrutis on vektorite \mathbf{b} ja \mathbf{c} vastavate elementide korrutiste summa. Sellist korrutist nimetatakse *vektorite skalaarkorrutiseks*

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots + b_n c_n \quad (\text{A.12})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{bc} = b_i c_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.13})$$

Veeruvektori \mathbf{c} (A.5) ja reavektori \mathbf{b} (A.4) korrutis on maatriks, mille elementideks on vektori elementide korrutis. Sellist korrutist nimetatakse *vektorite diaad- ehk otsekorrutiseks*

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 b_1 & c_1 b_2 & \dots & c_1 b_n \\ c_2 b_1 & c_2 b_2 & \dots & c_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m b_1 & c_m b_2 & \dots & c_m b_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{c} \otimes \mathbf{b} = b_i c_j, \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.15})$$

Maatriksi \mathbf{A} korrutiseks veeruvektoriga \mathbf{c} nimetatakse veeruvektorit \mathbf{d} , mille elemendid on maatriksi \mathbf{A} ridade elementide ja veeruvektori \mathbf{c} vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n) \\ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n) \\ \vdots \\ (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{Ac} = a_{ij}c_j, \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.17})$$

Analoogiliselt leitakse reavektori \mathbf{b} korrutis maatriksiga \mathbf{A} , mis kujutab endast reavektorit \mathbf{r}

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

kus

$$\begin{aligned} r_1 &= (b_1a_{11} + b_2a_{21} + \dots + b_na_{n1}) \\ r_2 &= (b_1a_{12} + b_2a_{22} + \dots + b_na_{n2}) \\ \vdots &= \vdots \\ r_m &= (b_1a_{1m} + b_2a_{2m} + \dots + b_na_{nm}) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{bA} = b_ia_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{A.20})$$

Maatriksite omavahelist korrutamist võime vaadelda kui ühe maatriksi mitmekordset korrutamist vektoritega, milleks on jaotatud teine maatriks. Maatriksite \mathbf{A} ja \mathbf{B} korrutiseks \mathbf{C} nimetatakse maatriksit, mille elemendid on maatriksi \mathbf{A} i-nda rea ja maatriksi \mathbf{B} j-nda veeru vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{matrix} \mathbf{A}; \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}; \begin{matrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{3j} & \dots & b_{31k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1j} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2j} & \dots & c_{2k} \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mj} & \dots & c_{mk} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \end{matrix}$$

kus maatriksi element c_{ij} on järgmine:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (\text{A.21})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{AB} = a_{il}b_{lj}, \quad (l = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{A.22})$$

Oluline on, et maatriksite veergude ja ridade arvud oleksid omavahel kooskõlas. Sisestame *GNU Octave'is* (*Matlab'is*) järgmised maatriksid a ja b


```

/usr/bin/octave-3.0.1 - Konsool
Seanss Redigeerimine Vaade Järjehoidjad
Seadistused Abi

octave-3.0.1:1> m1=[2.3 4.5 6.7]
m1 =

    2.3000    4.5000    6.7000

octave-3.0.1:2> Mp=[12.4 16.2 8.7]
Mp =

    12.4000    16.2000    8.7000

octave-3.0.1:3> K=m1.*Mp
K =

    28.520    72.900    58.290

octave-3.0.1:4>

```

Joonis A.2. Maatriksite ja vektorite element-element korrutamine

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 3; \\ 2 & 0; \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0; \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ning seejärel korrutame

$$c = a * b$$

Tulemuseks saame

$$c = \begin{bmatrix} 11 & 13 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

A.5 Maatriksite element-element korrutamine

Maatriksite element-element^{3,4} kaupa korrutamine (ingl – *element-by-element multiplication*) on matemaatikas tuntud kui Hadamardi korrutamine⁵.

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = a_{ij} b_{ij} \quad (\text{siin ei ole summeerimist } i \text{ ja } j \text{ järgi}) \quad (\text{A.24})$$

Vektorite $m_1 = [2.3 \ 4.5 \ 6.7]$, $M_p = [12.4 \ 16.2 \ 8.7]$ element-elementi kaupa korrutamine $K = m_1 * M_p$ annab tulemuseks $K = [28.52 \ 72.90 \ 58.29]$ (vt joonis A.2). Seda korrutamist saab kasutada Simpsoni valemiga numbrilisel integreerimisel.

³<http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/Arithmetic-Ops.html>

⁴http://www.obihiro.ac.jp/~suzukim/masuda/octave/html3/octave_47.html#SEC89

⁵http://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_multiplication#Hadamard_product

A.6 Osamaatriksid

Üldjuhul võime $(m \times n)$ -maatriksi \mathbf{A} jaotada osamaatriksiteks \mathbf{A}_{ij}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

A.7 Maatriksite transponeerimine

Maatriksi \mathbf{A} transponeeritud maatriksiks on \mathbf{A}^T (*GNU Octave*'is (*Matlab*'is) \mathbf{A}'), mis saadakse maatriksist \mathbf{A} ridade ümbervahetamisel veergudeks, st maatriksi \mathbf{A} read ja veerud on ümber vahetatud.

Kui näiteks \mathbf{A} on $(m \times n)$ -maatriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad (\text{A.26})$$

$(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$

siis \mathbf{A} transponeeritud maatriks \mathbf{A}^T on $(n \times m)$ -maatriks

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ji}] \quad (\text{A.27})$$

$(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$

Maatriksite transponeerimisel kehtivad järgmised seaduspärasused:

- maatriksite transponeerimine on reflektiivne, st transponeeritud maatriksi \mathbf{A}^T transponeerimisel saame maatriksi \mathbf{A}

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \quad (\text{A.28})$$

- maatriksite transponeeritud summa on võrdne transponeeritud maatriksite summaga

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (\text{A.29})$$

- maatriksite korrutise transponeerimine on samane transponeeritud maatriksite korrutisega võetuna vastupidises järjekorras,

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{A.30})$$

A.8 Pöördmaatriksid

Pöördmaatriksiks \mathbf{A}^{-1} nimetatakse maatriksit \mathbf{A} korrutamisel neutraliseerivat maatriksit

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (\text{A.31})$$

st pöördmaatriks \mathbf{A}^{-1} on maatriks, millega maatriksi \mathbf{A} korrutamisel saame ühikmaatriksi \mathbf{I} .

Ühikmaatriksiks nimetatakse $(n \times n)$ -ruutmaatriksit, mille peadiagonaalil asetsevate elementide väärtus on 1, mujal asetsevate elementide väärtus aga 0. Näiteks

$$\mathbf{I}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Maatriksi \mathbf{A} pöördmaatriks \mathbf{A}^{-1} eksisteerib üksnes siis, kui on täidetud tingimused:

- maatriks \mathbf{A} peab olema ruutmaatriks
- maatriksi \mathbf{A} determinant ei tohi olla null.

Ruutmaatriksit, mille determinant on null, nimetatakse *singulaarseks maatriksiks*.

Pöördmaatriksite omadused:

- maatriksi \mathbf{A} pöördmaatriksi \mathbf{A}^{-1} pöördmaatriks on võrdne maatriksiga \mathbf{A} , st

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A} \quad (\text{A.33})$$

- kahe üht ja sama järku ruutmaatriksi korrutise pöördmaatriks on võrdne nende pöördmaatriksite korrutisega vastupidises järjekorras, st

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.34})$$

- transponeeritud maatriksi \mathbf{A}^T pöördmaatriks on võrdne pöördmaatriksi \mathbf{A}^{-1} transponeeritud maatriksiga, st

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \quad (\text{A.35})$$

Arvutiprogrammiga *GNU Octave (Matlab)* leitakse maatriksi a

$$a = \begin{bmatrix} 11/3 & -3 & 1/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

pöördmaatriks $a1$ funktsiooni $inv(\dots)$ abil
 $a1=inv(a)$
 Tulemuseks on

$$a1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Kontrolliks korrutame maatriksi a maatriksiga $a1$. Tulemuseks peab olema ühikmaatriks.

A.9 Maatriksi determinant

Ruutmaatriksi \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

n -järku determinandiks nimetatakse reaalarvu

$$D_A = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Teist ja kolmandat järku determinandi arvutame järgmiselt:

$$D_A = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12} \quad (\text{A.40})$$

$$D_A = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{13} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (\text{A.41})$$

Maatriksi \mathbf{A} determinanti saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga $det(A)$. Järgnevalt on toodud näide A.1 determinandi arvutamisest.

Näide A.1 octave:1> A=[3.45 12.60 8.64; 7.93 5.72 6.82; 25.42 17.44 2.94]
 A =

```

3.4500    12.6000    8.6400
7.9300     5.7200    6.8200
25.4200   17.4400    2.9400
```

```

octave-3.0.1:2> determinantA=det(A)
determinantA = 1476.9
octave:3>
```

A.10 Võrrandisüsteemi lahendamine

Vaatleme võrrandisüsteemi (A.42)

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (\text{A.42})$$

kus \mathbf{A} on võrrandisüsteemi tundmatute kordajate maatriks

\mathbf{X} – võrrandisüsteemi tundmatute veeruvektor

\mathbf{B} – võrrandisüsteemi vabaliikmete veeruvektor

Ehitusmehaanikas kasutatakse ka võrrandisüsteemi (A.43)

$$\mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{F} = 0 \quad (\text{A.43})$$

kus võrrandisüsteemi vabaliikmete veeruvektor \mathbf{B} on vasakul pool võrdusmärki.

Siin vaatleme võrrandisüsteemi esitust, kus võrrandisüsteemi vabaliikmete veeruvektor \mathbf{B} on paremal pool võrdusmärki.

GNU Octave'is lahendatakse võrrandisüsteemi Gaussi meetodiga järgmiselt:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}, \quad (\mathbf{X} = -\mathbf{K} \setminus \mathbf{F}) \quad (\text{A.44})$$

kus \setminus on Gaussi meetodiga lahendamise sümbol (backslash).

Suurt võrrandisüsteemi ei soovitata lahendada pöördmaatriksiga

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{A.45})$$

kus \mathbf{A}^{-1} on maatriksi \mathbf{A} pöördmaatriks.

Väikest võrrandisüsteemi saab lahendada determinantide (vt jaotis A.9) abil (Crameri⁶ valemiga)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

Võrrandisüsteemi (A.46) tundmatute kordajate determinant D_A on

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (\text{A.47})$$

Asendades võrrandisüsteemis (A.46) tundmatute kordajate maatriksis esimese veeru vabaliikmetega, saame determinandi D_1

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \quad (\text{A.48})$$

⁶ Gabriel Cramer, Šveitsi matemaatik, 1704–1752.

Võrrandisüsteemis (A.46) tundmatute kordajate maatriksis teise veeru asendamisel vabaliikmetega saame determinandi D_2

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \quad (\text{A.49})$$

Nüüd avaldub võrrandisüsteemi (A.46) lahend järgmiselt:

$$X_1 = \frac{D_1}{D_A}, \quad X_2 = \frac{D_2}{D_A} \quad (\text{A.50})$$

Suuremate võrrandisüsteemide kui 2×2 lahendamine Crameri valemiga ei ole otsustarbekas, kuna seda saab teha arvutiga. Järgnevalt esitame 3×3 võrrandisüsteemi lahendamise Crameri valemiga:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

Võrrandisüsteemi (A.51) tundmatute kordajate determinant

$$\begin{aligned} D_A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Asendades võrrandisüsteemis (A.51) tundmatute kordajate maatriksis esimese veeru vabaliikmetega, saame determinandi

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ &= b_1(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Võrrandisüsteemis (A.51) tundmatute kordajate maatriksis teise veeru asendamisel vabaliikmetega saame determinandi

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ &= -b_1(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + b_2(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - b_3(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Võrrandisüsteemis

(A.51) tundmatute kordajate maatriksis kolmanda veeru asendamisel vabaliikmetega saame determinandi

$$\begin{aligned}
 D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \\
 &= b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\
 &= b_1 (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) - b_2 (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) + b_3 (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \quad (\text{A.55})
 \end{aligned}$$

Nüüd avaldub võrrandisüsteemi (A.51) lahend järgmiselt:

$$X_1 = \frac{D_1}{D_A}, \quad X_2 = \frac{D_2}{D_A}, \quad X_3 = \frac{D_3}{D_A} \quad (\text{A.56})$$

A.11 Hõre maatriks

Hõredaks maatriksiks⁷ (ingl *sparse matrix*) nimetatakse maatriksit, mille ridades ja veergudes on üksikuid nullist erinevaid arve (või nende sümboleid).

Hõreda maatriksi vastandiks on tihe maatriks, mille ridades ja veergudes asetsevad nullist erinevad arvud (või nende sümبولid) tihedalt.

Täismaatriksiks (ingl *full matrix*) nimetatakse maatriksit, mille ridades ja veergudes on nii nulle kui ka nullist erinevaid arve (või nende sümboleid).

Hõredat maatriksit (A.57) saab moodustada (näiteks GNU Octave'is) käsuga *sparse*

$$\mathbf{spA} = \mathit{sparse}(in, jm, sv) \quad (\text{A.57})$$

kus

in – rea indekseid sisaldav vektor,

jm – veeru indekseid sisaldav vektor,

sv – nullist erinevaid maatriksielemente sisaldav vektor.

Näites A.2 sisestame GNU Octave'is hõreda maatriksi \mathbf{spA} .

Näide A.2

```

octave-3.0.1:1> diary spHõreMaatriks.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> % Sisestame in-rea-, jm-veeruindekseid sisaldav vektori ja nendele
octave-3.0.1:3> % vastava vektori sv
octave-3.0.1:3> in = [1 1 2 2 3 3 4 4 5 6 7 7 8 8]
in =

```

```

1 1 2 2 3 3 4 4 5 6 7 7 8 8

```

⁷http://en.wikipedia.org/wiki/Sparse_matrix

```

octave-3.0.1:4> jm = [1 6 6 2 7 3 7 6 8 7 8 4 8 5]
jm =

    1    6    6    2    7    3    7    6    8    7    8    4    8    5

octave-3.0.1:5> sv = [ 1  4  1 -1 -10  8  -2  -8  6  -6 -10  -8  -2  8]
sv =

    1    4    1   -1  -10    8   -2   -8    6   -6  -10   -8   -2    8

octave-3.0.1:6> % Vektorite in, jm ja sv abil moodustame hõreda maatriksi
octave-3.0.1:6> spA = sparse(in,jm,sv)
spA =

Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 14)

(1, 1) -> 1
(2, 2) -> -1
(3, 3) -> 8
(7, 4) -> -8
(8, 5) -> 8
(1, 6) -> 4
(2, 6) -> 1
(4, 6) -> -8
(3, 7) -> -10
(4, 7) -> -2
(6, 7) -> -6
(5, 8) -> 6
(7, 8) -> -10
(8, 8) -> -2

octave-3.0.1:7> % Kui hõre maatriks spA sisaldab 14 elementi, siis sellele vastav
octave-3.0.1:7> % täismaatriks A 8*8=64 elementi
octave-3.0.1:7> % Kontrolliks teisendame hõreda maatriksi spA täismaatriksiks A
octave-3.0.1:7> A=full(spA)
A =

    1    0    0    0    0    4    0    0
    0   -1    0    0    0    1    0    0
    0    0    8    0    0    0  -10    0
    0    0    0    0    0   -8   -2    0
    0    0    0    0    0    0    0    6
    0    0    0    0    0    0   -6    0
    0    0    0   -8    0    0    0  -10
    0    0    0    0    8    0    0   -2

octave-3.0.1:8> diary off

```

Võrrandisüsteemi \mathbf{spA} (A.58) kordajatest moodustatud hõre maatriks hoiab suurte võrrandisüsteemide puhul kokku mahtu ja aega

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (\text{A.58})$$

Hõredate võrrandisüsteemide lahendamisel ei tehta tehteid võrrandisüsteemi kordajatega, mis on nullid.

Avaldisega

$$\mathbf{X} = \text{spA} \setminus \mathbf{B} \quad (\text{A.59})$$

on näidatud võrrandisüsteemi (A.58) üks võimalikest lahendamise moodustest⁸.

Näites A.3 vaatleme GNU Octave'is kirjutatud hõredate maatriksite moodustamise funktsiooni `spIN.m`⁹ ja funktsiooni `spInsertBtoA.m`¹⁰ kasutamist.

Näide A.3

```
octave-3.0.1:1> diary HoredadMaatriksid.out
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> HoredadMaatriksid
  Globaalsed vektorid
  global svS; % vajalik spIN funktsioonile
  global ins; % vajalik spIN funktsioonile
  global jms; % vajalik spIN funktsioonile
  global jrknrS; % vajalik spIN funktsioonile
  Sisestame maatriksi S tavalisel moel

  S=[1 4 0; 0 1 -1; -10 0 8]
S =

    1    4    0
    0    1   -1
   -10    0    8

  Teisendame maatriksi S hõredate maatriksite formaati

  spSo=sparse(S)
spSo =

Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 3, nnz = 6)

(1, 1) -> 1
(3, 1) -> -10
(1, 2) -> 4
(2, 2) -> 1
(2, 3) -> -1
(3, 3) -> 8

  Järgmise maatriksi sisestamiseks tühjendame
  järgmised vektorid:
svS=[]; % muudab vektori tühjaks
ins=[]; % muudab vektori tühjaks
jms=[]; % muudab vektori tühjaks
jrknrS=[]; % muudab vektori tühjaks
```

⁸http://www.network-theory.co.uk/docs/octave3/octave_214.html

⁹`./octaveProgrammid/spIN.m`

¹⁰`./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`

```

Sisestame loodava hõreda maatriksi globaalsed
vektorid ins jms svS, need on funktsioonis spIN
spS2=spIN(1,1,1.0);
spS2=spIN(1,3,4.0);
spS2=spIN(2,2,7.0);
spS2=spIN(2,3,-1.0);
spS2=spIN(3,2,-10.0);
spS2=spIN(3,3,8.0)
spS2 =

    1    1    2    2    3    3
    1    3    2    3    2    3
    1    4    7   -1  -10   8
    1    2    3    4    5    6

Eraldame vektorid ins jms svS maatriksist spS2
spSoo1=spS2(1,:);
spSoo2=spS2(2,:);
spSoo3=spS2(3,:);
Moodustame hõreda maatriksi spSoo vektorite
spSoo1 spSoo2 spSoo3 abil

    spSoo=sparse(spSoo1,spSoo2,spSoo3)

spSoo =
Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 3, nnz = 6)

(1, 1) -> 1
(2, 2) -> 7
(3, 2) -> -10
(1, 3) -> 4
(2, 3) -> -1
(3, 3) -> 8

Hõreda maatriks spSoo täismaatriks Soo

    Soo=full(spSoo)
Soo =

    1    0    4
    0    7   -1
    0  -10    8

Hõreda maatriksist spSoo astak r2

    r2=rank(spSoo)
r2 = 3
Asetades hõredad maatriksid spSo ja spSoo
üksteise peale, liidame hõredad maatriksid
spSLs=spInsertBtoA(spSo,1,1,spSoo)
spSLs - hõremaatriks

```

```
spSLs=spInsertBtoA(spSo,1,1,spSoo)
spSLs =
```

Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 3, nnz = 8)

```
(1, 1) -> 2
(3, 1) -> -10
(1, 2) -> 4
(2, 2) -> 8
(3, 2) -> -10
(1, 3) -> 4
(2, 3) -> -2
(3, 3) -> 16
```

Täismaatriks SLs = S + Soo

```
SLs=full(spSLs)
SLs =
```

```
  2   4   4
  0   8  -2
 -10 -10  16
```

Asetades hõreda maatriksi spSo järele reale 4 ja veerule 4 maatriksi spSoo, saame hõreda maatriksi spSs (nzz = 8)

```
spSs=spInsertBtoA(spSo,4,4,spSoo)
spSs =
```

Compressed Column Sparse (rows = 6, cols = 6, nnz = 12)

```
(1, 1) -> 1
(3, 1) -> -10
(1, 2) -> 4
(2, 2) -> 1
(2, 3) -> -1
(3, 3) -> 8
(4, 4) -> 1
(5, 5) -> 7
(6, 5) -> -10
(4, 6) -> 4
(5, 6) -> -1
(6, 6) -> 8
```

ja tema 8 x 8 täismaatriksi Ss

```
Ss=full(spSs)
Ss =
```

```
  1   4   0   0   0   0
  0   1  -1   0   0   0
```

```

-10  0  8  0  0  0
  0  0  0  1  0  4
  0  0  0  0  7 -1
  0  0  0  0 -10  8

```

```
octave-3.0.1:4> diary off
```

Näite A.3 koostamisel kasutati GNU Octave'is kirjutatud programmi HoredadMaatriksid.m¹¹.

A.12 Maatriksi staatiline kondensatsioon

Lõplike elementide meetodis võib vabadusastmeid liigitada sisemisteks vabadusastmeteks ja kontakti vabadusastmeteks. Sisemine vabadusaste ei ole seotud naaberelemendiga. Kontakti vabadusaste on seotud naaberelemendiga. Sisemiste vabadusastmete väljalülitamist vaadeldakse superelementide staatilisel kondensatsioonil¹² (ingl static condensation).

Vaatleme jäikusmaatriksit \mathbf{K} , mille struktuur on

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ai} \\ \mathbf{K}_{ia} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.60})$$

kus \mathbf{d}_a on näiteks \mathbf{w}_A , φ_A , \mathbf{w}_L ,

\mathbf{d}_i – näiteks ristlõike pööre varda lõpus φ_L

Võrrandisüsteemi (A.60) teine võrrand on

$$\mathbf{K}_{ia}\mathbf{d}_a + \mathbf{K}_{ii}\mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i \quad (\text{A.61})$$

Kui \mathbf{K}_{ii} ei ole singulaarne, saame

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{K}_{ii}^{-1}(\mathbf{f}_i - \mathbf{K}_{ia}\mathbf{d}_a) \quad (\text{A.62})$$

Asetame avaldatud \mathbf{d}_i (A.62) võrrandisüsteemi (A.60) esimesse võrrandisse, saame

$$\tilde{\mathbf{K}}_{aa}\mathbf{d}_a = \tilde{\mathbf{f}}_a \quad (\text{A.63})$$

kus

$$\tilde{\mathbf{K}}_{aa} = \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ai}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ia} \quad (\text{A.64})$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_a = \mathbf{f}_a - \mathbf{K}_{ai}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{f}_i \quad (\text{A.65})$$

siin $\tilde{\mathbf{K}}_{aa}$ on kondenseeritud jäikusmaatriks,

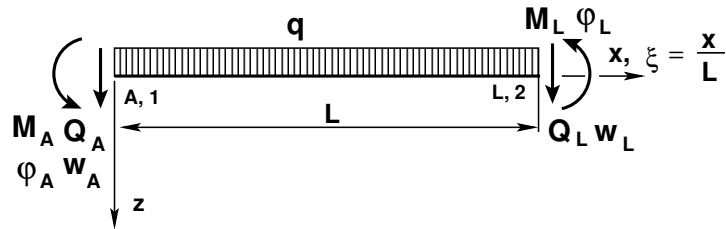
$\tilde{\mathbf{f}}_a$ – kondenseeritud jõuvektor.

¹¹ ./octaveProgrammide/HoredadMaatriksid.m

¹² <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/IFEM.Ch10.d/IFEM.Ch10.pdf>

A.12.1 Tala element liigendiga paremal

Avaldame tala elemendi (joonis A.3) tasakaaluvõrrandi



Joonis A.3. Tala element

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} + \mathbf{f} \quad (\text{A.66})$$

kus \mathbf{K} on jäikusmaatriks,

\mathbf{F} – sõlmpunktides mõjuva jõu vektor,

\mathbf{f} – elemendile mõjuva koormuse vektor,

järgmisel kujul:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_L \\ M_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{qA} \\ f_{mA} \\ f_{qL} \\ f_{mL} \end{bmatrix} \quad (\text{A.67})$$

Juhul kui $M_L = 0$, siis

$$\varphi_L = -\frac{1}{k_{44}} \begin{bmatrix} k_{41} & k_{42} & k_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_L \end{bmatrix} + \frac{1}{k_{44}} f_{mL} \quad (\text{A.68})$$

Asetades leitud pöörde φ_L võrrandisse (A.67), saame

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} - \frac{1}{k_{44}} \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{41} & k_{42} & k_{43} \end{bmatrix} \quad (\text{A.69})$$

Koormusvektor

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{qA} \\ \tilde{f}_{mA} \\ \tilde{f}_{qL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{qA} \\ f_{mA} \\ f_{qL} \end{bmatrix} - \frac{1}{k_{44}} \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} f_{mL} \quad (\text{A.70})$$

Tala elemendi, momendiliigendiga paremal, tasakaaluvõrrand on

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{f}} \quad (\text{A.71})$$

kus sõlmpunktide siirde vektor $\tilde{\mathbf{d}}$ ja sõlmpunktides mõjuva jõu vektor $\tilde{\mathbf{F}}$ on

$$\tilde{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_L \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_L \end{bmatrix} \quad (\text{A.72})$$

A.12.2 Tala element liigendiga paremal. Näide A.4

Järgnevas näites on kondenseeritud tala elemendi jäikusmaatriksit, millel on momendiliigend paremal [RH95] lk 253. Vaadeldakse elementi, kus kasutusel on parema käe teljestik (vt joonis A.3).

Näide A.4

Tala elemendi jäikusmaatriks

$$\mathbf{K}_E = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{Ep} = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 \\ -6l & 4l^2 & 6l \\ -12 & 6l & 12 \end{bmatrix} - \frac{EI_y}{l^3} \frac{l}{4} \begin{bmatrix} -6l \\ 2l^2 \\ 6l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6l & 2l^2 & 6l \end{bmatrix} \quad (\text{A.74})$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{Ep} = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & -3l & -3 \\ -3l & 3l^2 & 3l \\ -3l & 3l & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.75})$$

Elementidele vastavad koormusvektorid. Koormusvektori väärtused leiame õpikust [PW94] lk 194 toodud tabelist:

$$\mathbf{f} = \frac{q_z l}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -l \\ 6 \\ l \end{bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_p = \frac{q_z l}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -l \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{l^3} \frac{l}{4} \begin{bmatrix} -6l \\ 2l^2 \\ 6l \end{bmatrix} \frac{q_z l^2}{12} = \frac{q_z l}{8} \begin{bmatrix} 5 \\ -l \\ 3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.77})$$

A.12.3 Tala element liigendiga vasakul

Tala elemendi tasakaalvõrrandis (A.67) vaatleme juhtu, kui $M_A = 0$, siis

$$\varphi_A = -\frac{1}{k_{24}} \begin{bmatrix} k_{21} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix} + \frac{1}{k_{24}} f_{mA} \quad (\text{A.78})$$

Asetame leitud pöörde φ_A võrrandisse (A.67), saame tala elemendi, millel on momendiliigend vasakul, tasakaalvõrrandi

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{f}} \quad (\text{A.79})$$

kus elemendi, millel on momendiliigend vasakul, jäikusmaatriks on

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{13} & k_{14} \\ k_{31} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} - \frac{1}{k_{24}} \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{32} \\ k_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{21} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix} \quad (\text{A.80})$$

ja elemendi, millel on momendiliigend vasakul, koormusvektor

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{qA} \\ \tilde{f}_{qL} \\ \tilde{f}_{mL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{qA} \\ f_{qL} \\ f_{mL} \end{bmatrix} - \frac{1}{k_{24}} \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{32} \\ k_{42} \end{bmatrix} f_{mA} \quad (\text{A.81})$$

ning sõlmpunktide siirde vektor $\hat{\mathbf{d}}$ ja sõlmpunktides mõjuva jõu vektor $\hat{\mathbf{F}}$

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} w_A \\ w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} Q_A \\ Q_L \\ M_L \end{bmatrix} \quad (\text{A.82})$$

A.12.4 Tala element liigendiga vasakul. Näide A.5

Järgnevas näites on kondenseeritud tala elemendi jäikusmaatriksit, millel on momendiliigend vasakul.

Näide A.5

Tala elemendi jäikusmaatriksist \mathbf{K}_E (A.73) eemaldame teise rea ja teise veeru, mis vastab φ_A ja M_A -le, saame

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & -6l \\ -12 & 12 & 6l \\ -6l & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{EI_y}{l^3} \frac{l}{4} \begin{bmatrix} -6l \\ 6l \\ 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6l & 6l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.83})$$

Tala elemendi, millel on momendiliigend vasakul, jäikusmaatriks $\hat{\mathbf{K}}$ on toodud avaldisega

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3l \\ -3 & 3 & 3l \\ -3l & 3l & 3l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.84})$$

ja koormusvektor $\hat{\mathbf{f}}$ avaldisega (A.86)

$$\mathbf{f} = \frac{q_z l}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -l \\ 6 \\ l \end{bmatrix} \quad (\text{A.85})$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{q_z l}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ l \end{bmatrix} - \frac{1}{l^3} \frac{l}{4} \begin{bmatrix} -6l \\ 6l \\ 2l^2 \end{bmatrix} \left(-\frac{q_z l^2}{12} \right) = \frac{q_z l}{8} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ l \end{bmatrix} \quad (\text{A.86})$$

B. Hõredad maatriksid ja GNU Octave

Hõre maatriks on maatriks, millel on vähe nullist erinevaid elemente. Tehetel hõredate maatriksitega kasutame GNU Octave'it^{1 2}.

B.1 Maatriksi sisestamine

Hõreda maatriksi elemente saab sisestada funktsiooniga `spconvert(A)`, kus maatriksi **A** rida koosneb hõreda maatriksi rea- ja veeruindeksist ning maatriksi elemendi väärtusest

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 16 & 1 \\ 1 & 29 & 1 \\ 1 & 46 & 1 \\ 2 & 17 & 1 \\ 2 & 28 & 1 \\ 2 & 47 & 1 \\ 3 & 18 & 1 \\ 3 & 30 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Hõreda maatriksi sisestamist³ näeb arvutuspäevikust [B.1](#).

Hõreda maatriksi saab sisestada ka käsuga `sparse(iv, jv, sv)`, kus **iv** ja **jv** on rea- ja veeruvektorid ning **sv** maatriksi elementide väärtuste vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{iv} &= [1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3] \\ \mathbf{jv} &= [16 \ 29 \ 46 \ 17 \ 28 \ 47 \ 18 \ 30] \\ \mathbf{sv} &= [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Selle hõreda maatriksi sisestamist näeme arvutuspäevikust [B.2](#).

Nullise hõreda maatriksi saab sisestada käsuga `sparse(m, n)`, kus **m** on maksimaalne ridade arv ja **n** on maksimaalne veergude arv. Nullise hõreda maatriksi sisestamist näeme arvutuspäevikust [B.2](#).

¹http://www.obihiro.ac.jp/~suzukim/masuda/octave/html3/octave_112.html#SEC216

²http://www.network-theory.co.uk/docs/octave3/octave_205.html

³http://www.obihiro.ac.jp/~suzukim/masuda/octave/html3/octave_113.html#SEC219

Arvutuspäevik B.1 octave:1> diary horedad1.out

```
octave3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> % sisestan tasakaaluvõrrandid 46-48 sõlmes 2
octave-3.0.1:3> sA46k48=[1 16 1; 1 29 1; 1 46 1; 2 17 1; ...
 2 28 -1; 2 47 1; 3 18 1; 3 30 1]
sA46k48 =
```

```
 1 16 1
 1 29 1
 1 46 1
 2 17 1
 2 28 -1
 2 47 1
 3 18 1
 3 30 1
```

```
octave-3.0.1:4> spA46k48 = spconvert(sA46k48)
spA46k48 =
```

Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 47, nnz = 8)

```
(1, 16) -> 1
(2, 17) -> 1
(3, 18) -> 1
(2, 28) -> -1
(1, 29) -> 1
(3, 30) -> 1
(1, 46) -> 1
(2, 47) -> 1
```

```
octave-3.0.1:5> % loon nullise maatriksi 60x60
```

```
octave-3.0.1:5> AA=[60 60 0.0]
```

```
AA =
```

```
 60 60 0
```

```
octave-3.0.1:6> spAA = sparse(AA)
```

```
spAA =
```

Compressed Column Sparse (rows = 60, cols = 60, nnz = 0)

```
octave-3.0.1:7> spAA = spInsertBtoA(spAA,46,1,spA46k48)
```

```
spAA =
```

Compressed Column Sparse (rows = 48, cols = 47, nnz = 8)

```
(46, 16) -> 1
(47, 17) -> 1
(48, 18) -> 1
(47, 28) -> -1
(46, 29) -> 1
```

```
(48, 30) -> 1
(46, 46) -> 1
(47, 47) -> 1
```

```
octave-3.0.1:8> diary off
octave-3.0.1:10> B(46,1)=0.0;
octave-3.0.1:11> B(47,1)=750.0;
octave-3.0.1:12> B(48,1)=0.0;
octave-3.0.1:14> diary off
```

Arvutuspäevik B.2 octave:1> diary horedad2.out

```
octave-3.0.1:2> diary on
octave-3.0.1:3> iv=[ 1 1 1 2 2 2 3 3]
iv =

    1    1    1    2    2    2    3    3

octave-3.0.1:4> jv=[ 16 29 46 17 28 47 18 30]
jv =

    16    29    46    17    28    47    18    30

octave-3.0.1:5> sv=[ 1 1 1 1 1 1 1 1]
sv =

    1    1    1    1    1    1    1    1

octave-3.0.1:6> sA46k48 = sparse(iv,jv,sv)
sA46k48 =

Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 47, nnz = 8)

(1, 16) -> 1
(2, 17) -> 1
(3, 18) -> 1
(2, 28) -> 1
(1, 29) -> 1
(3, 30) -> 1
(1, 46) -> 1
(2, 47) -> 1

octave-3.0.1:7> spAnull = sparse(60,60)
spAnull =

Compressed Column Sparse (rows = 60, cols = 60, nnz = 0)

octave-3.0.1:8> diary off
```

B.2 Maatriksi teisendamine

Olgu \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_3 ja \mathbf{T}_4 koordinaatide teisendusmaatriksid:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Täismaatriksi (ingl full matrix) (vt jaotis [A.11](#)) \mathbf{T}_i saab teisendada hõredaks maatriksiks käsuga `sparse(Ti)` (vt arvutuspäevik [B.3](#)). Hõreda maatriksi `spTi` saame teisendada täismaatriksiks käsuga `full(spTi)`. Olemasolevasse hõredasse maatriksisse `spA` saab sisestada hõreda maatriksi `spB` funktsiooniga `spInsertBtoA(spA, IM, JN, spB)` [spInsertBtoA.m](#)⁴, lk 726 alates reast `IM` ja veerust `JN`.

Arvutuspäevikus [B.3](#) on funktsiooni `spInsertBtoA.m` abil koostatud sõlme 4 (vt joonis [16.60](#)) tasakaaluvõrrandid. Siin paigutatakse maatriksisse `spA` varda 2 teisendusmaatriks `spT2` (`spA = spInsertBtoA(spA, 46, 16, spT2)`). Jooniselt [16.60](#) näeme, et varda lõpus olevate jõudude aadressid hakkavad aadressist 16. Kui võrrandeid on juba koostatud 45, siis järgmiseks võrrandi rea numbriks valime 46.

Arvutuspäevik B.3 octave:1> diary horedad3.out

octave-3.0.1:2> diary on

octave-3.0.1:3> T2 = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1]

T2 =

```

1  0  0
0  1  0
0  0  1
```

octave-3.0.1:4> T3 = [0 1 0; -1 0 0; 0 0 1]

T3 =

```

0  1  0
-1 0  0
0  0  1
```

octave-3.0.1:5> T4 = [1 0; 0 1]

T4 =

⁴.[/octaveProgrammid/spInsertBtoA.m](#)

```
1 0
0 1
```

```
octave-3.0.1:6> spT2=sparse(T2)
spT2 =
```

```
Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 3, nnz = 3)
```

```
(1, 1) -> 1
(2, 2) -> 1
(3, 3) -> 1
```

```
octave-3.0.1:7> spT3=sparse(T3)
spT3 =
```

```
Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 3, nnz = 3)
```

```
(2, 1) -> -1
(1, 2) -> 1
(3, 3) -> 1
```

```
octave-3.0.1:8> spT4=sparse(T4)
spT4 =
```

```
Compressed Column Sparse (rows = 2, cols = 2, nnz = 2)
```

```
(1, 1) -> 1
(2, 2) -> 1
```

```
octave-3.0.1:9> spA=sparse(60,60)
spA =
```

```
Compressed Column Sparse (rows = 60, cols = 60, nnz = 0)
```

```
octave-3.0.1:10> % 46,16 46,28 46,46
octave-3.0.1:10> spA =spInsertBtoA(spA,46,16,spT2);
octave-3.0.1:11> spA =spInsertBtoA(spA,46,28,spT3);
octave-3.0.1:12> spA =spInsertBtoA(spA,46,46,spT4);
octave-3.0.1:13> spA
spA =
```

```
Compressed Column Sparse (rows = 48, cols = 47, nnz = 8)
```

```
(46, 16) -> 1
(47, 17) -> 1
(48, 18) -> 1
(47, 28) -> -1
(46, 29) -> 1
(48, 30) -> 1
(46, 46) -> 1
```

```
(47, 47) -> 1

octave-3.0.1:14> % saadud tulemus ühtib varem sisestatud sõlme
octave-3.0.1:14> % tasakaaluvõrranditega 46,16; 46,28; 46,46
octave-3.0.1:14> %
octave-3.0.1:14> % siirete võrdsustamisel tuleb kasutada -Ti'd
octave-3.0.1:14> % korrutame T3 elemendid läbi -1 -ga
octave-3.0.1:14> spT3.*(-1)
ans =
```

Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 3, nnz = 3)

```
(2, 1) -> 1
(1, 2) -> -1
(3, 3) -> -1
```

```
octave-3.0.1:15> diary off
```

Samale reale 46 paigutame varda 3 ja varda 4 teisendusmaatriksid. Sõlmes 4 algavad varda 3 jõud aadressilt 28 ja vardal 4 aadressilt 46. Sisestamise käigus on arvutuspäevikus [B.3](#) $spA = spInsertBtoA(spA, 46, 28, spT3)$, $spA = spInsertBtoA(spA, 46, 46, spT4)$. Tulemus ühtib varem sisestatud tasakaaluvõrrandite vasaku poolega. Võrrandi paremale poole lähevad võrrandisüsteemi vabaliikmed $B(46, 1) = 0.0$, $B(47, 1) = 750.0$ ja $B(48, 1) = 0.0$. Varda 4 alguses on momendiügend. Teisendusmaatriks T_4 ([B.5](#)) võtab arvesse ainult pikijõu ja ristjõu.

Hõreda maatriksi elementide märgi muutmiseks korrutame kõik elemendid läbi miinus ühega. Arvutuspäevikus [B.3](#) on näide miinus ühega korrutamisest $spT3.*(-1)$.

Olgu võrrandisüsteemi vasak pool spA ja parem pool B , siis võrrandisüsteemi lahendamise käsuga $X = spA \setminus B$.

GNU Octave'i hõredate maatriksite funktsioonide ja operaatorite loetelu leiab internetist.⁵

⁵http://www.obihiro.ac.jp/~suzukim/masuda/octave/html3/octave_113.html#SEC222

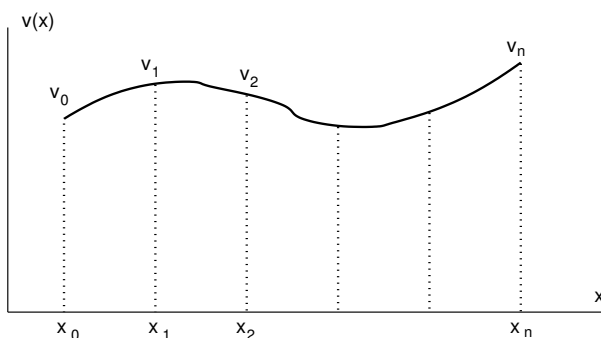
C. Interpoleerimine

C.1 Lagrange'i interpolatsioon

Kirjeldame funktsiooni $v(x)$ polünoomiga $P^n(x)$

$$v(x) = P^n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (\text{C.1})$$

Avaldise (C.1) kirjutame maatrikskujul



Joonis C.1. Funktsiooni interpolatsioon

$$v(x) = P^n(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

ehk veel lühemalt

$$v(x) = P^n(x) = [x][a] \quad (\text{C.3})$$

Olgu teada funktsiooni väärtused $n+1$ punktis (joonis C.1). Punktis x_0 on funktsiooni väärtus v_0 , punktis x_1 on funktsiooni väärtus v_1 ja punktis x_n on funktsiooni väärtus v_n . Punkte, kus on antud funktsiooni väärtused, nimetatakse polünoomi sõlmedeks.

Kirjeldame polünoomi (C.2) abil neid väärtusi

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

ehk sümboolselt

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{a} \quad (\text{C.5})$$

Otsitavad parameetrid \mathbf{a} leiame võrrandist (C.5)

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \quad (\text{C.6})$$

Nüüd on polünoomis (C.3) parameetrid (C.6) määratud

$$v(x) = P^n(x) = \mathbf{x}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \quad (\text{C.7})$$

Kirjutame avaldise (C.7) lahti

$$v(x) = \mathcal{L}_0^n(x)v_0 + \mathcal{L}_1^n(x)v_1 + \mathcal{L}_2^n(x)v_2 + \dots + \mathcal{L}_n^n(x)v_n \quad (\text{C.8})$$

Kus Lagrange'i¹ interpolatsioonipolünoomi kordajad $\mathcal{L}_i^n(x)$ on

$$\mathcal{L}_0^n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathcal{L}_1^n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{L}_n^n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \quad (\text{C.11})$$

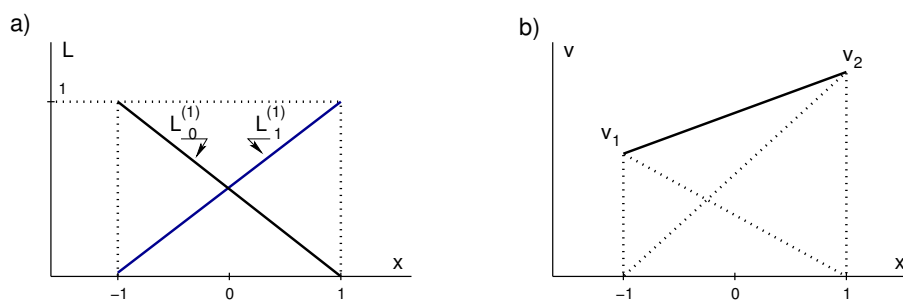
Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi kordajate $\mathcal{L}_i^n(x)$ sümbolne kuju

$$\mathcal{L}_i^n(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (\text{C.12})$$

Vaatleme lineaarset interpolatsiooni vahemikus $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ (joonis C.2)

$$N_1(x) = \mathcal{L}_0^1(x) = \frac{(x-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-x) \quad (\text{C.13})$$

¹Joseph Louis de Lagrange, prantsuse matemaatik ja mehaanikateadlane, 1736–1813.



Joonis C.2. Lineaarne interpolatsioon

$$N_2(x) = \mathcal{L}_1^1(x) = \frac{(x+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+x) \quad (\text{C.14})$$

Funktsiooni $v(x)$ saame interpoleerida väärtuste v_1 ja v_2 vahel (joonis C.2 b)

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)v_2 \quad (\text{C.15})$$

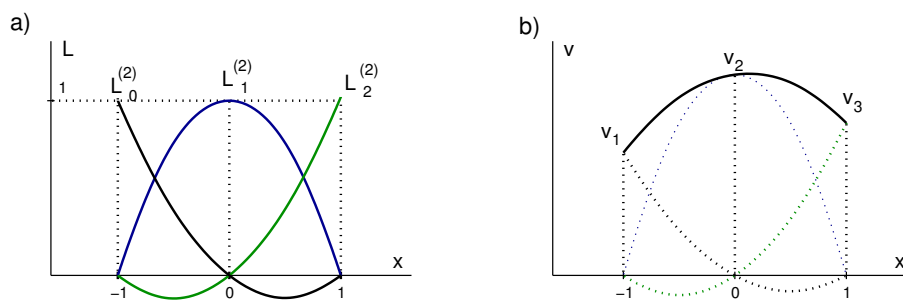
Lõplike elementide meetodis nimetatakse funktsioone N_i kujufunktsioonideks (vormifunktsioonideks).

Ruutinterpolatsiooni puhul vahemikus $x_0 = -1, x_2 = 1$ (joonis C.3) on Lagrange'i interpolatsioonipoliinoomi kordajad

$$N_1(x) \equiv \mathcal{L}_0^{(2)}(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}x(x-1) \quad (\text{C.16})$$

$$N_2(x) \equiv \mathcal{L}_1^{(2)}(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = (1-x^2) \quad (\text{C.17})$$

$$N_3(x) \equiv \mathcal{L}_2^{(2)}(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}x(x+1) \quad (\text{C.18})$$



Joonis C.3. Ruutinterpolatsioon

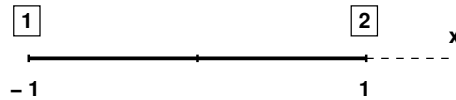
Funktsiooni $v(x)$ saame interpoleerida väärtuste v_1 ja v_3 vahel (joonis C.3 b)

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)v_2 + N_3(x)v_3 \quad (\text{C.19})$$

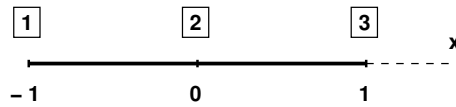
Lineaarse interpolatsiooni kaudu (C.13), (C.14) sõlmede $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ (joonis C.4) vahel

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}(1-x) \\ \mathcal{L}_1^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}(1+x)\end{aligned}\tag{C.20}$$

saame avaldada kõrgemad interpolatsioonid

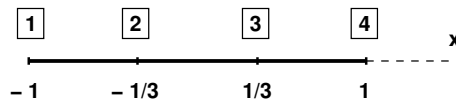


Joonis C.4. Lineaarse interpolatsiooni sõlmed



Joonis C.5. Ruutinterpolatsiooni sõlmed

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^{(2)}(x) &= (1 - 2\mathcal{L}_1^{(1)}) \mathcal{L}_0^{(1)} \\ \mathcal{L}_1^{(2)}(x) &= 4\mathcal{L}_0^{(1)} \mathcal{L}_1^{(1)} \\ \mathcal{L}_2^{(2)}(x) &= (2\mathcal{L}_1^{(1)} - 1) \mathcal{L}_1^{(1)}\end{aligned}\tag{C.21}$$



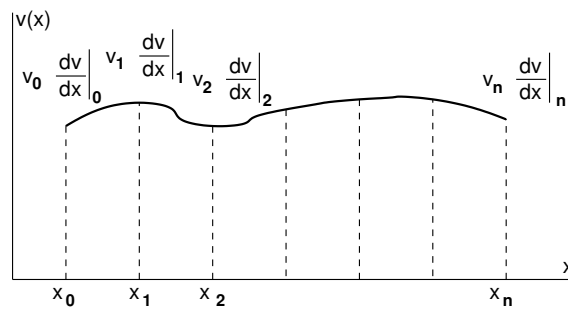
Joonis C.6. Kuupinterpolatsiooni sõlmed

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^{(3)}(x) &= \frac{1}{2} (1 - 3\mathcal{L}_1^{(1)}) (2 - 3\mathcal{L}_1^{(1)}) \mathcal{L}_0^{(1)} \\ \mathcal{L}_1^{(3)}(x) &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_1^{(1)} (2 - 3\mathcal{L}_1^{(1)}) \mathcal{L}_0^{(1)} \\ \mathcal{L}_2^{(3)}(x) &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_1^{(1)} (3\mathcal{L}_1^{(1)} - 1) \mathcal{L}_0^{(1)} \\ \mathcal{L}_3^{(3)}(x) &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^{(1)} (3\mathcal{L}_1^{(1)} - 1) (3\mathcal{L}_1^{(1)} - 2)\end{aligned}\tag{C.22}$$

C.2 Hermite'i interpolatsioon

Olgu antud funktsioon $v(x)$ ja tema tuletiste väärtused n sõlmpunktis, mille koordinaat on x_n

$x_0,$	$x_1,$	$x_2,$	\dots	x_n
$v_0,$	$v_1,$	$v_2,$	\dots	v_n
$\frac{dv}{dx} \Big _0,$	$\frac{dv}{dx} \Big _1,$	$\frac{dv}{dx} \Big _2,$	\dots	$\frac{dv}{dx} \Big _n$
$\frac{d^2v}{dx^2} \Big _0,$	$\frac{d^2v}{dx^2} \Big _1,$	$\frac{d^2v}{dx^2} \Big _2,$	\dots	$\frac{d^2v}{dx^2} \Big _n$
\vdots	$\vdots,$	$\vdots,$	\dots	\vdots
$\frac{d^k v}{dx^k} \Big _0,$	$\frac{d^k v}{dx^k} \Big _1,$	$\frac{d^k v}{dx^k} \Big _2,$	\dots	$\frac{d^k v}{dx^k} \Big _n$



Joonis C.7. Hermite'i interpolatsioon

Funktsiooni lähendame ($m = 2n$)-astme polünoomiga

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \frac{dv}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^m \\ 0 & 1 & 2x & \dots & mx^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \tag{C.23}$$

ehk

$$v(x) = \mathbf{xa} \tag{C.24}$$

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v'_0 \\ v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v_n \\ v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 0 & 1 & 2x_0 & \dots & mx_0^{m-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 0 & 1 & 2x_1 & \dots & mx_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ 0 & 1 & 2x_2 & \dots & mx_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \\ 0 & 1 & 2x_n & \dots & mx_n^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \tag{C.25}$$

ehk

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_H \mathbf{a} \quad (\text{C.26})$$

Avaldisest (C.26) saame

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_H^{-1} \mathbf{v} \quad (\text{C.27})$$

Funktsioon (C.24) avaldub nüüd järgmiselt:

$$v(x) = \mathbf{x} \mathbf{a} = \mathbf{x} \mathbf{A}_H^{-1} \mathbf{v} \quad (\text{C.28})$$

Kirjutame avaldise (C.28) kujul

$$\begin{aligned} v(x) = \mathcal{H}_{00}^{(1)}(x) v_0 + \mathcal{H}_{10}^{(1)}(x) v'_0 + \mathcal{H}_{01}^{(1)}(x) v_1 + \mathcal{H}_{11}^{(1)}(x) v'_1 + \dots \\ \dots + \mathcal{H}_{0n}^{(1)}(x) v_n + \mathcal{H}_{1n}^{(1)}(x) v'_n \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

ehk

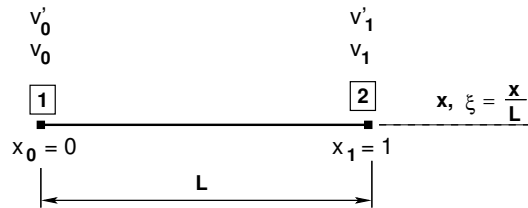
$$v(x) = \mathcal{H}_{0i}^{(1)}(x) v_i + \mathcal{H}_{1i}^{(i)}(x) v'_i \quad (i = 1, 2, \dots, 4) \quad (\text{C.30})$$

kus Hermite'i² interpolatsioonipolünoomi kordajad \mathcal{H}_{ij}^n on

$$\mathcal{H}_{0i}^{(1)}(x) = \left\{ 1 - 2(x - x_i) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \right\} \{\mathcal{L}_i^{(1)}(x)\}^2 \quad (\text{C.31})$$

$$\mathcal{H}_{1i}^{(1)}(x) = (x - x_i) \{\mathcal{L}_i^{(1)}(x)\}^2 \quad (\text{C.32})$$

Kahe interpolatsioonisõlmega ja esimese tuletisega (joonis C.8) on funktsiooni interpolatsioon järgmine:



Joonis C.8. Hermite'i interpolatsiooni sõlmed

$$v(x) = \mathcal{H}_{00}^{(1)}(x) v_0 + \mathcal{H}_{10}^{(1)}(x) v'_0 + \mathcal{H}_{01}^{(1)}(x) v_1 + \mathcal{H}_{11}^{(1)}(x) v'_1 \quad (\text{C.33})$$

²Charles Hermite, prantsuse matemaatik, 1822–1901.

Siin on Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid $\mathcal{H}_{ij}^{(n)}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{00}^{(1)}(x) &= \left(1 - 2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right) \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 = \\ &= \left(1 + 2\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3\end{aligned}\quad (\text{C.34})$$

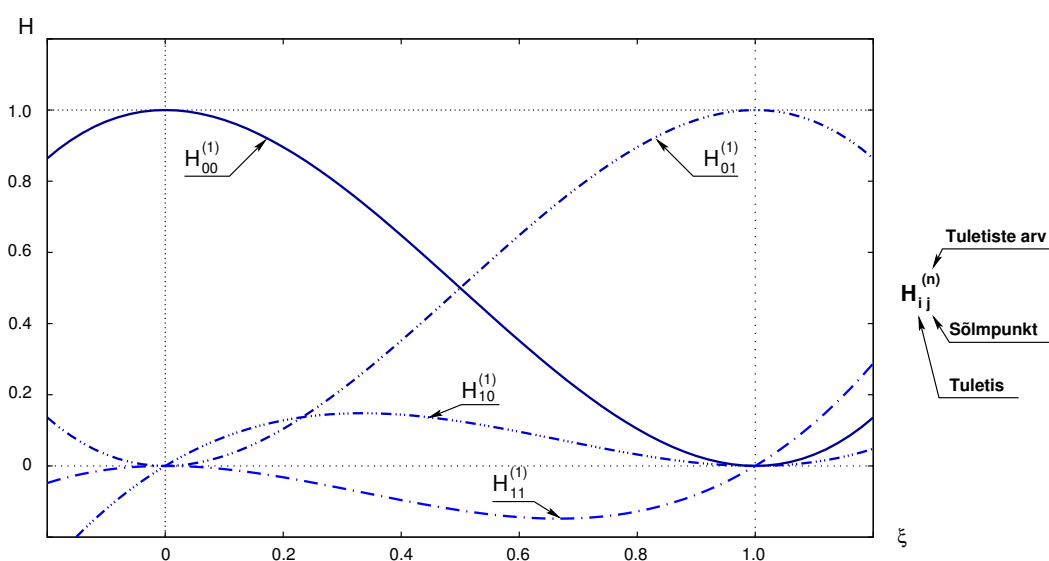
$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{10}^{(1)}(x) &= (x-x_0) \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 = \\ &= x \left(\frac{x}{L} - \frac{L}{L}\right)^2 = L\xi(1-\xi)^2\end{aligned}\quad (\text{C.35})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{01}^{(1)}(x) &= \left(1 - 2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 = \\ &= \left(1 - 2\left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \left(\frac{x}{L}\right)^2 = 3\xi^2 - 2\xi^3\end{aligned}\quad (\text{C.36})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{11}^{(1)}(x) &= (x-x_1) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 = \\ &= (L\xi - L) \left(\frac{x}{L}\right)^2 = L\xi^2(\xi - 1)^2\end{aligned}\quad (\text{C.37})$$

Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid $\mathcal{H}_{ij}^{(n)}$ on näidatud joonisel C.9. Avaldis (C.15) esitatakse lõplike elementide meetodis kujul

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)v_1' + N_3(x)v_2 + N_4(x)v_2' \quad (\text{C.38})$$



Joonis C.9. Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid

kus v_1, v'_1 on siirded ning siirete tuletised elemendi algul,
 v_2, v'_2 – siirded ning siirete tuletised elemendi lõpus,
 N_i – kujufunktsioonid (vormifunktsioonid)

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \mathcal{H}_{00}^{(1)}(x) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2(x) &= \mathcal{H}_{10}^{(1)}(x) = L\xi(1 - \xi)^2 \\ N_3(x) &= \mathcal{H}_{01}^{(1)}(x) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_4(x) &= \mathcal{H}_{11}^{(1)}(x) = L\xi^2(\xi - 1)^2 \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

siin $\xi = x/L$ (L – elemendi pikkus).

Teades kahes sõlmpunktis funktsiooni ja tema kahe tuletise väärtust v_n, v'_n, v''_n , on Hermite'i interpolatsiooni valem järgmine:

$$\begin{aligned} v(x) = \mathcal{H}_{00}^{(2)}(x)v_0 + \mathcal{H}_{10}^{(2)}(x)v'_0 + \mathcal{H}_{20}^{(2)}(x)v''_0 + \mathcal{H}_{01}^{(2)}(x)v_1 + \\ \mathcal{H}_{11}^{(2)}(x)v'_1 + \mathcal{H}_{21}^{(2)}(x)v''_1 \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Kasutades tähistust

$$x_2 - x_1 = L, \quad \frac{x}{L} = \xi \quad (\text{C.41})$$

avaldame Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid $\mathcal{H}_{ij}^{(2)}$ kujul

$$\mathcal{H}_{00}^{(2)}(\xi) = 1 - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 \quad (\text{C.42})$$

$$\mathcal{H}_{10}^{(2)}(\xi) = L\xi(1 - 6\xi^2 + 8\xi^3 - 3\xi^4) \quad (\text{C.43})$$

$$\mathcal{H}_{20}^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}L^2\xi^2(1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) \quad (\text{C.44})$$

$$\mathcal{H}_{01}^{(2)}(\xi) = 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5 \quad (\text{C.45})$$

$$\mathcal{H}_{11}^{(2)}(\xi) = -L\xi(4\xi^2 + 7\xi^3 - 3\xi^4) \quad (\text{C.46})$$

$$\mathcal{H}_{21}^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}L^2\xi^2(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (\text{C.47})$$

D. Numbriline integreerimine

D.1 Sissejuhatavad märkused ja määrangud

Vaatleme määratud integraali ligikaudse väärtuse leidmist funktsioonist $f(x)$

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n) + E(f(x)) \quad (\text{D.1})$$

siin

- x_k – integreerimispunktid (sõlmed)
- A_k – integreerimiskordajad (kaalud)
- $E(f(x))$ – aproksimatsiooniviga
- $w(x)$ – kaalufunktsioon.

Määratud integraali ligikaudse väärtuse leidmiseks kasutatakse

- Newton-Cotes'i valemit
- Gaussi valemit
- Rombergi valemit.

Funktsiooni kirjeldamiseks kasutame Lagrange'i interpolatsiooni (C.8)

$$v(x) = \mathcal{L}_0^{(n)}(x) v_0 + \mathcal{L}_1^{(n)}(x) v_1 + \mathcal{L}_2^{(n)}(x) v_2 + \dots + \mathcal{L}_n^{(n)}(x) v_n + E[v; x] \quad (\text{D.2})$$

siin on $E[v; x]$ aproksimatsiooniviga.

Korrutame avaldise (D.2) kaalufunktsiooniga $w(x)$ ja integreerime üle piirkonna $[a, b]$

$$\int_a^b w(x) v(x) dx = \int_a^b w(x) \mathcal{L}_i^{(n)}(x) v_i dx + \int_a^b w(x) E[v; x] dx \quad (\text{D.3})$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n)$

Võrdleme saadud tulemust (D.3) avaldisega (D.1), saame

$$A_i = \int_a^b w(x) \mathcal{L}_i^{(n)}(x) dx \quad , \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (\text{D.4})$$

ja

$$E(f(x)) = \int_a^b w(x) E[v; x] dx \quad (\text{D.5})$$

Järgnevalt vaatleme ortogonaalseid polünoome $P^{(n)}(x)$ lõigul $[a, b]$. Lõigul $[a, b]$ kaalufunktsiooniga $w(x)$ on ortogonaalsed polünoomid ühe muutuja polünoomide jada $\{P^{(n)}\}$, milles iga $P^{(n)}$ on täpselt n -astme polünoom, ja $n \neq m$ korral

$$\int_a^b w(x) P^{(n)}(x) P^{(m)}(x) dx = 0 \quad (\text{D.6})$$

Legendre'i, Tšebõšovi, Jacobi, Hermite'i, Laguerre'i polünoomide puhul on kaalufunktsioonid toodud tabelis.

Tabel D.1. Ortogonaalsete polünoomide kaalufunktsioonid

Intervall	Kaalufunktsioon $w(x)$	Polünoom
$[-1, +1]$	1	Legendre'i
$[-1, +1]$	$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$	Tšebõšovi esimest liiki
$[-1, +1]$	$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$	Tšebõšovi teist liiki
$[-1, +1]$	$(1 - x^2)^\alpha (1 + x^2)^\beta$ $\alpha > -1, \beta < -1$	Jacobi
$[-\infty, +\infty]$	e^{-x^2}	Hermite'i
$[0, +\infty]$	e^{-x}	Laguerre'i

Ortogonaalse polünoomi sõlmede $x_0, x_1, x_2, \dots, x_l$ kaudu saab polünoomi esitada järgmisel kujul:

$$P^{(n)}(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_l)^{m_l} \quad (\text{D.7})$$

kus $m_0, m_1, m_2, \dots, m_l$ on reaalsed ja erinevad ning

$$m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_l = n \quad (\text{D.8})$$

Legendre'i polünoomid

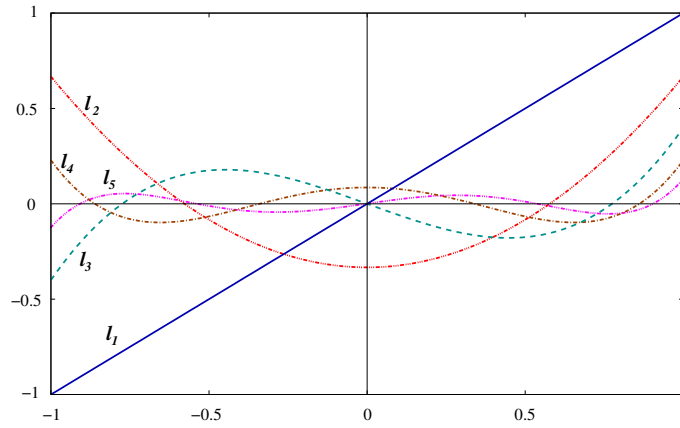
Kasutame Legendre'i polünoomide saamiseks Rodriguesi valemit

$$P^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{D.9})$$

Esitame mõned Legendre'i polünoomid $P^{(n)}$ ja $l^{(n)}$

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 1, & l_0 &= 1 \\
 P_1 &= x, & l_1 &= x \\
 P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & l_2 &= \frac{1}{3}(3x^2 - 1) \\
 P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & l_3 &= \frac{1}{5}(5x^3 - 3x) \\
 P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & l_4 &= \frac{1}{35}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
 P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), & l_5 &= \frac{1}{63}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

Normeeritud Legendre'i polünoomid $l^{(n)}$ on joonisel [D.1](#).



Joonis D.1. Legendre'i polünoomid

Legendre'i polünoomid $l^{(n)}$ saab esitada kujul

$$\begin{aligned}
 l_2(\xi) &= \frac{1}{3}(5\xi^2 - 3\xi) = \left(\xi - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \left(\xi + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \\
 l_3(\xi) &= \frac{1}{5}(5\xi^3 - 3\xi) = \xi \left(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \left(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

Legendre'i polünoomi $l^{(2)}$ sõlmed $-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}}$,

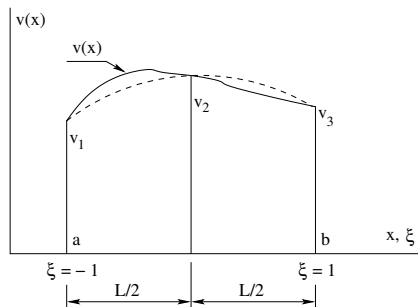
polünoomi $l^{(3)}$ sõlmed $0, -\sqrt{\frac{3}{5}}, +\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Legendre'i polünoomide $l^{(n)}$ sõlmed on tabuleeritud ja toodud käsiraamatutes.

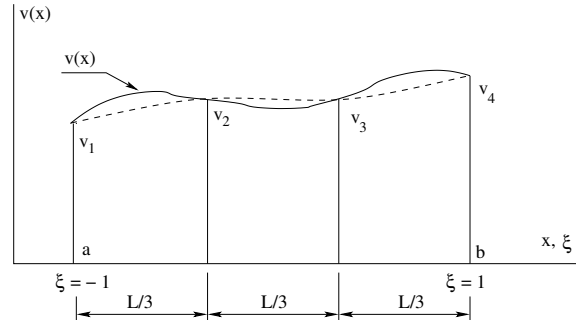
D.2 Newton-Cotes'i valemid

Vaatleme funktsiooni $v(x)$ lõigul $[a, b]$ (joonis [D.2](#)). Olgu teada funktsiooni väärtused lõigu alguses v_1 , keskel v_2 ja lõpus v_3 ning kaalufunktsioon $w(x) = 1$. Kasutame mõõduta koordinaate

$$\xi = \frac{2x}{L}, \quad dx = \frac{1}{2}Ld\xi \tag{D.12}$$



Joonis D.2. Simpsoni valem

Joonis D.3. Simpsoni $\frac{3}{8}$ -valem

Funktsiooni v_x interpoleerime Lagrange'i kujufunktsioonidega kolmes sõlmes

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) dx &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} v(\xi) d\xi = \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} (N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3) d\xi = \\ &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) v_1 + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \xi^2) v_2 + \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) v_3 \right] d\xi = \frac{L}{6} [v_1 + 4v_2 + v_3] \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Valemit (D.13) nimetatakse Simpsoni¹ valemiks.

Olgu teada funktsiooni väärtused lõigu alguses v_1 , ühel kolmandikul v_2 , teisel kolmandikul v_3 ja lõpus v_4 (joonis D.3). Interpoleerime funktsiooni v_x Lagrange'i kujufunktsioonidega neljas sõlmes

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) dx &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} v(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} (N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4) d\xi = \\ &= \frac{L}{8} [v_1 + 3v_2 + 3v_3 + v_4] \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Valemit (D.14) nimetatakse Simpsoni $\frac{3}{8}$ valemiks.

Paljude varraskonstruksiooni ülesannete lahendamisel tuleb arvutada siirdeid. Sirgetest varrastest koosneva konstruksiooni elementide siirded leitakse valemitega (7.44) ja (7.45), milles on pikijõudude ja paindemomentide integraalid. Vaatleme nende integraalide numbrilist integreerimist. Kasutame lühiduse mõttes järgmist tähistust: $m_i \frac{M_p}{EI} \equiv f(x)$. Seega vaatleme integraali $\int_a^b f(x) dx$ numbrilist integreerimist.

¹T. Simpson sai selle valemi 1743. aastal.

D.2.1 Simpsoni valem

Simpsoni valemi puhul jagame pideva funktsiooni $f(x)$ integreerimisel lõigu $[a, b]$ pikkusega 1 pooleks ($1/2$ ja $1/2$) ja saame

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{l}{6} [f(a) + 4 \cdot f(c) + f(b)] \quad (\text{D.15})$$

kus $f(a)$ – funktsiooni väärtus lõigu alguses,

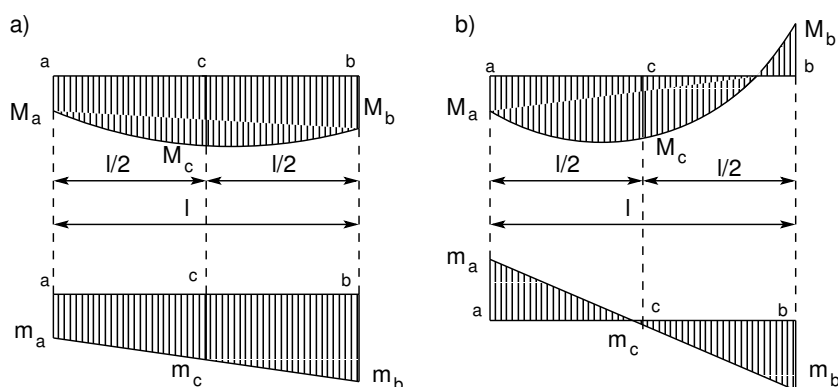
$f(c)$ – funktsiooni väärtus lõigu keskel,

$f(b)$ – funktsiooni väärtus lõigu lõpus.

Simpsoni valem (D.15) annab täpse tulemuse kuni kuuppolünoomini.

Simpsoni valemi (D.15) kogu integreerimisvahemiku a – b paarisarvuliseks n võrdseks osaks jagamisel $\Delta s = l/n$

$$\int_a^b f(s) ds \approx \frac{\Delta s}{3} [f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 4 \cdot f_3 + 2 \cdot f_4 + \dots \\ \dots + 2 \cdot f_{n-2} + 4 \cdot f_{n-1} + f_n] \quad (\text{D.16})$$



Joonis D.4. Märgid Simpsoni valemis

Joonisel D.4 a on koormusest põhjustatud epüüri M_p ja ühikjõust põhjustatud epüüri m_i ordinaadid ühesuguste märkidega. Joonisel D.4 b on epüüridel M_p ja m_i otstes erinevad märgid. Siirete arvutamiseks rakendame Simpsoni valemit (D.15)

$$\int_a^b m_i \cdot \frac{M_p}{EI} dx = \frac{l}{6} \left[m_a \frac{M_a}{EI} + 4 \cdot m_c \frac{M_c}{EI} + m_b \frac{M_b}{EI} \right] \quad (\text{D.17})$$

Valemis (D.17) on korrutised $m_a \frac{M_a}{EI}$, $m_c \frac{M_c}{EI}$ ja $m_b \frac{M_b}{EI}$ positiivsed, kui ühikjõust ja koormusest põhjustatud epüüride ordinaadid on varda samal poolel, ja negatiivsed, kui epüüride ordinaadid on vastupidiste märkidega. Näiteks joonisel D.4 b on lõigu algul (punktis a) ja lõpus (punktis b) epüüride ordinaatide korrutis negatiivne, kuna ordinaadid on suunatud eri poole. Lõigu keskel (punktis c) on epüüride ordinaatide korrutis positiivne. Simpsoni valemiga (D.17) saab täpse tulemuse lineaarsete epüüride korrutise, lineaarsete ja ruutparaboolse epüüri korrutise korral. Kõrgemat järku epüüride korrutise puhul tuleb kasutada 3/8 valemit (D.23).

Numbrilisel integreerimisel Simpsoni valemiga (D.17) kasutame arvutusprogrammi Octave. Vektorite \mathbf{a} (D.18) ja \mathbf{b} (D.19) korrutamiseks kasutame element-element (Hadamardi) korrutamist (vt paragrahvi A.5 avaldist (A.24) lk 631). Korrutamise tulemus on näidatud avaldisega (D.20)

$$\mathbf{a} = [m_a \quad m_c \quad m_b] \quad (\text{D.18})$$

$$\mathbf{b} = [M_a \quad M_c \quad M_b] \quad (\text{D.19})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [m_a \cdot M_a \quad m_c \cdot M_c \quad m_b \cdot M_b] \quad (\text{D.20})$$

Võtame kasutusele Simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori \mathbf{smps} , mille transponeeritud kuju on toodud avaldisega

$$\mathbf{smps}' = \frac{1}{6} \left[\frac{l}{EI} \quad 4 \cdot \frac{l}{EI} \quad \frac{l}{EI} \right] \quad (\text{D.21})$$

Element-element korrutamise saadud tulemuse (D.20) korrutame skalaarselt (vt avaldist A.12 lk 629) vektoriga (D.21). Tulemuseks on Simpsoni valem (D.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} * \mathbf{smps} &= \frac{1}{6} [m_a \cdot M_a \quad m_c \cdot M_c \quad m_b \cdot M_b] \begin{bmatrix} \frac{l}{EI} \\ 4 \cdot \frac{l}{EI} \\ \frac{l}{EI} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l}{6} \left[m_a \frac{M_a}{EI} + 4 \cdot m_c \frac{M_c}{EI} + m_b \frac{M_b}{EI} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

D.2.2 Simpsoni 3/8-valem

Simpsoni 3/8-valemit kasutades jagame pideva funktsiooni $f(x)$ integreerimisel lõigu $[a, b]$ pikkusega 1 kolmeks ($1/3$, $1/3$ ja $1/3$) ja saame

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{l}{8} [f(a) + 3 \cdot f(c) + 3 \cdot f(d) + f(b)] \quad (\text{D.23})$$

kus $f(a)$ – funktsiooni väärtus lõigu alguses,

$f(c)$ – funktsiooni väärtus $\frac{1}{3}$ lõigul $[a, b]$,

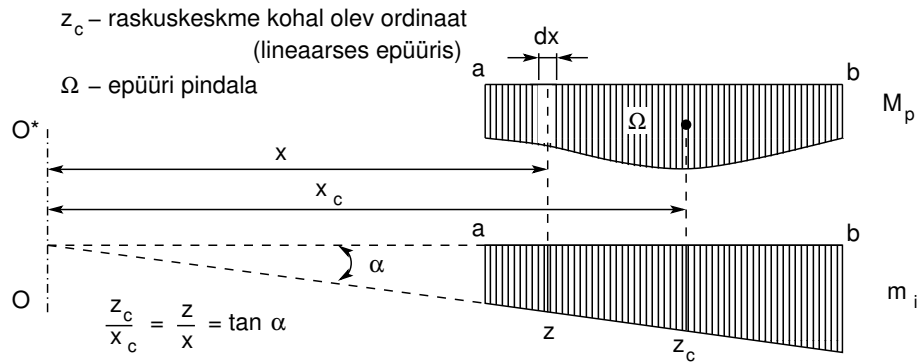
$f(d)$ – funktsiooni väärtus $\frac{2}{3}$ lõigul $[a, b]$,

$f(b)$ – funktsiooni väärtus lõigu lõpus.

D.2.3 Vereštšagini võte

Vereštšagini² võte integraali arvutamisel, kui $EI = \text{const}$ ja üks epüüridest on lineaarne. Joonisel D.5 on ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür lineaarne ja tema ordinaa-

²A. K. Vereštšagin, Moskva Raudteetranspordi Inseneride Instituudi üliõpilane, esitas selle valemi 1925. aastal.



Joonis D.5. Vereštšagini võte

di m_i saab avaldada $m_i = z = x \cdot \tan\alpha$. Siirde valemi integraali teisendame kujule

$$\Delta_{ip} = \int_a^b m_i \frac{M_p}{EI} dx = \frac{\tan\alpha}{EI} \int_a^b x \cdot M_p dx \tag{D.24}$$

Epüüri M_p staatiline moment telje OO^* suhtes

$$\Omega \cdot x_c = \int_a^b x \cdot M_p dx \tag{D.25}$$

Siirde valemi integraalis (D.24) asendame $\int_a^b x \cdot M_p dx$ avaldisega (D.25). Jooniselt D.5 näeme, et $x_c \cdot \tan\alpha = z_c$, kus viimane on koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pindala Ω raskuskeskme kohal olev ordinaat z_c teises lineaarselt muutavas epüüris. Eelnenut arvesse võttes avaldub siirde valemi integraal (D.24) järgmiselt:

$$\Delta_{ip} = \Omega \cdot z_c \frac{1}{EI} \tag{D.26}$$

Epüüri kuju	Epüüri pindala	Raskuskeskme kaugus
	$l h$	$(1/2)l$
	$(1/2) h$	$(1/3)l$
	$(1/3) h$	$(1/4)l$
	$(2/3) h$	$(5/8)l$

Joonis D.6. Epüüride pindalad

Seega on paindemomendi epüüride m_i , M_p ordinaatide korrutise integraal lõigul $[a, b]$ võrdne korrutisega, mille üheks teguriks on epüüri pindala ja teiseks teguriks epüüri pindala raskuskeskme kohal olev ordinaat teises lineaarselt muutavas epüüris. Korrutis $\Omega \cdot z_c$ on positiivne, kui koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri M_p ja ordinaat z_c on sama märgiga. Joonisel D.6 on näidatud lihtsate epüüride pindalad ja nende raskuskeskmete kaugused. Epüüri raskuskeskme arvutamise asemel on lihtsam kasutada Simpsoni valemit.

D.3 Gaussi valemid

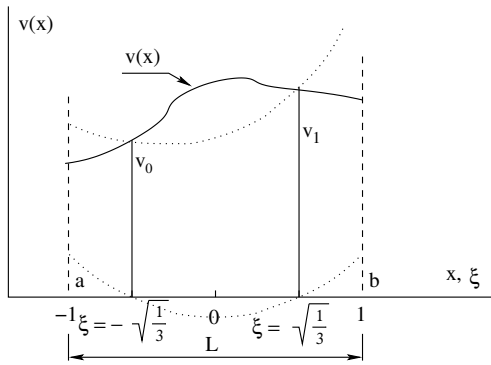
Lähendame funktsiooni $v(\xi)$ järgmiselt:

$$v(\xi) = \mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) v_0 + \mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) v_1 \quad (\text{D.27})$$

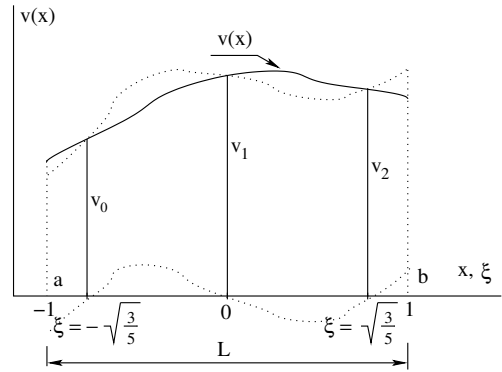
kus interpolatsioonipolünoomi $\mathcal{L}_i^{(n)}(\xi)$ interpolatsioonisõlmedeks võetakse Legendre'i polünoomi sõlmed (joonis D.7)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) &= \frac{\xi - \sqrt{\frac{1}{3}}}{-\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}\xi \\ \mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) &= \frac{\xi + \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}\xi \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Integraal funktsioonist $v(x)$ on



Joonis D.7. Gaussi kaks sõlme



Joonis D.8. Gaussi kolm sõlme

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) dx &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} v(\xi) d\xi = \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) v_0 d\xi + \\ &+ \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) v_1 d\xi = \frac{1}{2}L \left[A_0 v_0 \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \right) + A_1 v_1 \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

kus

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}\xi \right) d\xi = 1 \\ A_1 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}\xi \right) d\xi = 1 \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

$$A_0 + A_1 = 2 \quad (\text{D.31})$$

Kolme Gaussi integreerimissõlme puhul (joonis D.8) on funktsiooni lähendus

$$v(\xi) = \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) v_0 + \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) v_1 + \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) v_2 \quad (\text{D.32})$$

siin

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) &= \frac{(\xi - 0)(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}})}{(-\sqrt{\frac{3}{5}} - 0)(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}})} = \frac{5}{6}\xi \left(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \\ \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) &= \frac{(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}})(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}})}{(0 + \sqrt{\frac{3}{5}})(0 - \sqrt{\frac{3}{5}})} = -\frac{5}{3} \left(\xi^2 - \frac{3}{5} \right) \\ \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) &= \frac{(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}})(\xi - 0)}{(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}})(\sqrt{\frac{3}{5}} - 0)} = \frac{5}{6}\xi \left(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Integraal funktsioonist $v(x)$ on

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) dx &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} v(\xi) d\xi = \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) v_0 d\xi + \\ &+ \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) v_1 d\xi + \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) v_2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2}L \left[A_0 v_0 \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} \right) + A_1 v_1 (0) + A_2 v_2 \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

kus

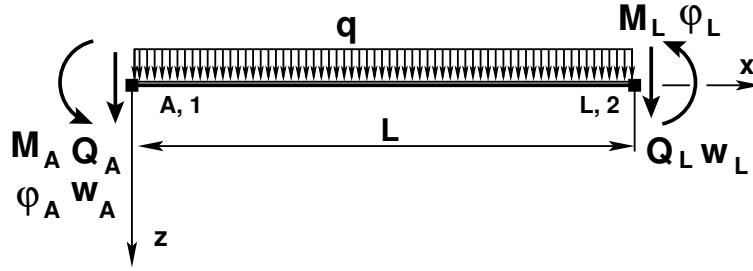
$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{5}{6} \left(\xi^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\xi \right) d\xi = \frac{5}{9} = 0.5555\dots \\ A_1 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} -\frac{5}{3} \left(\xi^2 - \frac{3}{5} \right) d\xi = \frac{8}{9} = 0.8888\dots \\ A_2 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{5}{6} \left(\xi^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\xi \right) d\xi = \frac{5}{9} = 0.5555\dots \\ A_0 + A_1 + A_2 &= \frac{5}{9} + \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = 2 \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

D.4 Näiteid numbrilisest integreerimisest

Näide D.1 Taandada joonisel D.9 näidatud tala elemendile mõjuv ühtlaselt jaotatud lauskoormus sõlmedesse.

Võtame kasutusele mööduta koordinaadi ξ ($d\xi = Ld\xi$). Virtuaalsiirete printsiip tala elemendi jaoks

$$\int_0^L M_y \delta\psi_y dx = [Q_z \delta w + M_y \delta\varphi_y] \Big|_0^L + \int_0^L q(x) \delta w dx \quad (\text{D.36})$$



Joonis D.9. Tala elemendi kontaktjõudude positiivsed suunad

Avaldise (D.36) viimane liige väljendab välisjõu virtuaaltööd. Lähendame siirded Hermite'i interpolatsiooniga

$$\int_0^L q(x) \delta w dx = \int_0^L q (N_1 \delta w_1 + N_2 \delta w'_1 + N_3 \delta w_2 + N_4 \delta w'_2) dx \quad (\text{D.37})$$

Kujufunktsioonide N_i integraalid

$$\begin{aligned} \int_0^L N_1(x) dx &= \int_0^1 (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) L d\xi = \frac{L}{2} \\ \int_0^L N_2(x) dx &= \int_0^1 L\xi(1 - \xi)^2 L d\xi = \frac{L^2}{12} \\ \int_0^L N_3(x) dx &= \int_0^1 (3\xi^2 - 2\xi^3) L d\xi = \frac{L}{2} \\ \int_0^L N_4(x) dx &= \int_0^1 L(\xi^3 - \xi^2) L d\xi = -\frac{L^2}{12} \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

Saadud avaldised (D.38) ühtivad varem saadutega. Esitame välisjõudude virtuaaltöö maatrikskuju

$$\int_0^L q(x) \delta w dx = \begin{bmatrix} \delta w_1 & \delta w'_1 & \delta w_2 & \delta w'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{D.39})$$

arvestades, et $w'_i = -\varphi_{y,i}$, saame

$$\int_0^L q(x) \delta w dx = \begin{bmatrix} \delta w_1 & \delta \varphi_{y1} & \delta w_2 & \delta \varphi_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{D.40})$$

Rajajõudude virtuaaltöö $[Q_z \delta w + M_y \delta \varphi_y] \Big|_0^L$ erinevate märgikokkulepete puhul:

- I märgikokkulepe

$$[Q_z \delta w + M_y \delta \varphi_y] \Big|_0^L = -Q_{z1} \delta w_1 - M_{y1} \delta \varphi_{y1} + Q_{z2} \delta w_2 + M_{y2} \delta \varphi_{y2} \quad (\text{D.41})$$

- II märgikokkulepe

$$[Q_z \delta w + M_y \delta \varphi_y] \Big|_0^L = Q_{z1} \delta w_1 + M_{y1} \delta \varphi_{y1} + Q_{z2} \delta w_2 + M_{y2} \delta \varphi_{y2} \quad (\text{D.42})$$

siin on arvestatud, et $\varphi_y = -w'_i$ ja $M_y = -EIw''_i$.

Sisejõudude virtuaaltöö avaldis on

$$\int_0^L M_y \delta \psi_y dx = \int_0^L w'' EI \delta w'' dx \quad (\text{D.43})$$

siin $\psi_y = -w''$. Siirde w esitame kujufunktsioonide abil

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 w'_1 + N_3 w_2 + N_4 w'_2 \quad (\text{D.44})$$

Siirde teine tuletis w'' ja selle variatsioon $\delta w''$

$$w'' = \frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} w_1 + \frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} w'_1 + \frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} w_2 + \frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} w'_2 \quad (\text{D.45})$$

$$\delta w'' = \frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} \delta w_1 + \frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} \delta w'_1 + \frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} \delta w_2 + \frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} \delta w'_2 \quad (\text{D.46})$$

Läheme üle mõõduta koordinaatidele $\xi = \frac{x}{l}$, kus tuletised ξ järgi on

$$\frac{d \dots}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l} \frac{d \dots}{d\xi}, \quad \frac{d^2 \dots}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \dots}{d\xi^2} \quad (\text{D.47})$$

Võtame Hermite'i kujufunktsioonidest (D.38) tuletised, saame

$$w'' = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} (-6 + 12\xi) & l(-4 + 6\xi) & (6 - 12\xi) & l(-2 + 6\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.48})$$

ehk

$$w'' = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} (-6 + 12\xi) & -l(-4 + 6\xi) & (6 - 12\xi) & -l(-2 + 6\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \varphi_{y2} \end{bmatrix} \quad (\text{D.49})$$

Võimalikud teised tuletised $\delta w''$ esitame järgmisel kujul:

$$w'' = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} w_1 & w'_1 & w_2 & w'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-6 + 12\xi) \\ l(-4 + 6\xi) \\ (6 - 12\xi) \\ l(-2 + 6\xi) \end{bmatrix} \quad (\text{D.50})$$

ehk

$$w'' = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} w_1 & \varphi_{y1} & w_2 & \varphi_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-6 + 12\xi) \\ -l(-4 + 6\xi) \\ (6 - 12\xi) \\ -l(-2 + 6\xi) \end{bmatrix} \quad (\text{D.51})$$

Avaldise (D.43) integreerimisel kasutame Simpsoni valemit

$$\begin{aligned} \int_0^l w'' EI \delta w'' dx &= \frac{l}{6} \left(w'' EI \delta w''|_{\xi=0} + 4w'' EI \delta w''|_{\xi=0.5} + w'' EI \delta w''|_{\xi=1} \right) = \\ &= \frac{l}{6} \frac{1}{l^4} \begin{bmatrix} w_1 & \varphi_{y1} & w_2 & \varphi_{y2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 4l \\ 6 \\ 2l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4l & 6 & 2l \end{bmatrix} + \right. \\ &+ 4 \begin{bmatrix} 0 \\ l \\ 0 \\ -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & l & 0 & -l \end{bmatrix} + \left. \begin{bmatrix} 6 \\ -2l \\ -6 \\ -4l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2l & -6 & -4l \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta \varphi_{y1} \\ \delta w_2 \\ \delta \varphi_{y1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (D.52)$$

Sisejõudude virtuaaltöö avaldise (D.52) esitame järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} \int_0^l M_y \delta \psi_y dx &= \int_0^l \delta w'' EI w'' dx = \\ &= \begin{bmatrix} \delta w_1 & \delta \varphi_{y1} & \delta w_2 & \delta \varphi_{y2} \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \varphi_{y2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (D.53)$$

Avaldisest (D.53) saab jäikusmaatriksi \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (D.54)$$

Sisejõudude virtuaaltöö avaldise esitame jäikusmaatriksi \mathbf{K} abil

$$\int_0^l M_y \delta \psi_y dx = [\delta \mathbf{d}^T] [\mathbf{K}] [\mathbf{d}] \quad (D.55)$$

kus \mathbf{d}^T on

$$\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} \delta w_1 & \delta \varphi_{y1} & \delta w_2 & \delta \varphi_{y2} \end{bmatrix} \quad (D.56)$$

Virtuaalsiirete printsiip varda elemendi jaoks on

$$[\delta d^T] [\mathbf{K}] [d] = [\delta d^T] [\mathbf{F}] + [\delta d^T] [\mathbf{F}_q] \quad (D.57)$$

kust saame varda elemendi tasakaaluvõrrandi

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_q \quad (D.58)$$

siin on \mathbf{K} toodud avaldisega (D.54), sõlmpunkti siirded \mathbf{d} , elemendi kontaktjõud \mathbf{F} ja elemendile mõjuv koormusvektor \mathbf{F}_q – avaldistega

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} Q_{z1} \\ M_{y1} \\ Q_{z2} \\ M_{y2} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \varphi_{y2} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{F}_q] = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (D.59)$$

Varda elemendi otstes mõjuvate kontaktjõudude leidmiseks kirjutame võrrandi (D.58) ringi kujul

$$\mathbf{F} = \mathbf{Kd} - \mathbf{F}_q \quad (\text{D.60})$$

E. Ligikaudsed lahendid

E.1 Rajatingimused

Rajatingimuste selgitamiseks vaatleme tala elastse joone diferentsiaalvõrrandit piirkonnas $0 \leq x \leq l$

$$-\frac{d^2}{dx^2}EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -q_z(x) \quad (\text{E.1})$$

Edaspidi võtame lihtsuse mõttes $EI = \text{const.}$ Sümboolselt võime võrrandi (E.1) kirjutada järgmisel kujul:

$$\mathcal{L}(w) = b \quad \text{piirkonnas } \Omega \quad (\text{E.2})$$

siin

$$\mathcal{L} \equiv EI \frac{d^4}{dx^4} \quad b \equiv q_z(x) \quad (\text{E.3})$$

Korrutame võrrandit (E.1) siirdega \hat{w} ja integreerime üle varda l

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \right) \hat{w} dx = -\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx \quad (\text{E.4})$$

Võrrandi (E.4) parempoolne liige väljendab väliskoormuse tööd W_v siirdel \hat{w} . Koondkoormuse F_{zi} töö varda telje punkti i siirdel \hat{w}_i on $F_{zi}\hat{w}_i$. Seega,

$$W_v = \int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi}\hat{w}_i \quad (\text{E.5})$$

Võrrandi (E.4) vasakpoolset avaldist integreerime ositi valemi

$$\int_0^l u dv = uv \Big|_0^l - \int_0^l v du \quad (\text{E.6})$$

järgi:

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \underbrace{\hat{w}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \right)}_{Q_z} \hat{w} \Big|_0^l + \\ & + \int_0^l \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y} dx \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Avaldise (E.7) viimast liiget integreerime veel üks kord

$$\int_0^l \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{dv} dx = \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y} \Big|_0^l - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}}_{-\hat{\psi}_y} dx \quad (\text{E.8})$$

Arvestades avaldise (E.7) ja (E.4), saab võrrandi (E.8) esitada virtuaaltööde (passiivtööde) summana

$$\underbrace{[Q_z \hat{w} + M_y \hat{\varphi}_y]}_{W_r^{(p)}} \Big|_0^l - \underbrace{\int_0^l M_y \hat{\psi}_y dx}_{W_s^{(p)}} = - \underbrace{\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^{(p)}} \quad (\text{E.9})$$

kus $\hat{w} \equiv \delta w$ vaatleme kui virtuaalsiiret. Sisejõudude virtuaaltöö paindel $\delta W_s^{(p)}$ on

$$\delta W_s^{(p)} = - \int_0^l M_y \delta \psi_y dx \quad (\text{E.10})$$

välisjõudude virtuaaltöö paindel $\delta W_v^{(p)}$

$$\delta W_v^{(p)} = \int_0^l q_z(p) \delta w dx + F_{zi} \delta w_i \quad (\text{E.11})$$

rajajõudude virtuaaltöö paindel $\delta W_r^{(p)}$

$$\delta W_r^{(p)} = [Q_z \delta w + M_y \delta \varphi_y] \Big|_0^l \quad (\text{E.12})$$

Paindel tööde vastastikkuse teoreemi tõestamiseks jätkame avaldise (E.8) teise liikme ositi integreerimist

$$\begin{aligned} - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}}_{-d\hat{\varphi}_y} dx &= - \underbrace{\frac{dw}{dx}}_{-\varphi_y} \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} \right)}_{-\hat{M}_y} \Big|_0^l + \int_0^l \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} \right)}_{-\hat{Q}_z} \underbrace{\frac{dw}{dx}}_{dw} dx = \\ &= \underbrace{w}_{\hat{w}} \underbrace{\left(EI_y \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} \right)}_{-\hat{Q}_z} \Big|_0^l - \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}}_{-\hat{\psi}_y} \Big|_0^l - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^4 \hat{w}}{dx^4} \right)}_{\hat{p}_z} \underbrace{w}_{\hat{w}} dx \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Saadud seosed (E.13) asetame avaldisse (E.9), kust saame tööde vastastikkuse teoreemi paindel

$$\begin{aligned} \underbrace{[Q_z \hat{w} + M_y \hat{\varphi}_y] |'_0}_{W_r^I} + \underbrace{\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^I} = \\ \underbrace{[\hat{Q}_z w + \hat{M}_y \varphi_y] |'_0}_{W_r^{II}} + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_z(x) w dx + \hat{F}_{zi} w_i}_{W_v^{II}} \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Avaldise (E.14) liikmed

$$[Q_z \hat{w} + M_y \hat{\varphi}_y] |'_0 - [\hat{Q}_z w + \hat{M}_y \varphi_y] |'_0 \quad (\text{E.15})$$

on rajatingimused, kus w ja φ on olulised ehk kinemaatilised rajatingimused, Q_z ja M_y loomulikud ehk staatilised rajatingimused.

Saadud seos (E.14) väljendab tööde vastastikkuse teoreemi (E. Betti¹): esimese koormusolukorra (I) välisjõudude (sisejõudude) töö teise koormusolukorra (II) jõudude poolt põhjustatud siiretel on võrdne teise koormusolukorra välisjõudude (sisejõudude) virtuaaltööga esimese koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel.

Avaldise (E.14) võib kirjutada sümbolisel kujul

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{L}(w) \hat{w} d\Omega = \int_{\Omega} w \mathcal{L}^*(\hat{w}) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma} [\mathcal{O}^*(\hat{w}) \mathcal{S}(w) - \mathcal{S}^*(\hat{w}) \mathcal{O}(w)] d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

kus

Γ – piirkonna Ω väline rada,

\mathcal{L}^* – operaatori \mathcal{L} kaasoperaator $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$,

\mathcal{O} – oluliste ehk kinemaatiliste rajatingimuste operaator,

\mathcal{S} – loomulike ehk staatiliste rajatingimuste operaator.

E.2 Ligikaudsed lahendid

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$\mathcal{L}(u_0) = b \quad \text{piirkonnas } \Omega \quad (\text{E.17})$$

kus u_0 on diferentsiaalvõrrandi täpne lahend.

Selle võrrandi rajatingimused on

$$\mathcal{O}(u_0) = \mathcal{O}_0 \quad \text{rajal } \Gamma_1 \quad (\text{E.18})$$

¹Enrico Betti, itaalia ehitusinsener, 1823–1892.

$$\mathcal{S}(u_0) = \mathcal{S}_0 \quad \text{rajal } \Gamma_2 \quad (\text{E.19})$$

Olgu

$$u(x) \quad \text{lähedane funktsiooniga } u_0(x) \quad (\text{E.20})$$

Funktsioonide lähendamise (aproksimeerimise²) ülesanded:

- lähendfunktsiooni valik
- määru valik, millega hinnatakse funktsiooni lähedust
- lähendamismeetodi valik
- lähendamisvea hindamine.

E.2.1 Lähendfunktsioonid

Lähendfunktsiooniks võib valida

- algebralise või trigonomeetrilise funktsiooni
- üldistatud polünoomi

$$u(x) = \alpha_k \varphi_k(x) + \alpha_0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{E.21})$$

kus

α_k – sõltumatud parameetrid,

$\varphi_k(x)$ – lineaarselt sõltumatud funktsioonid, st tingimus

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \quad (\text{E.22})$$

on täidetud siis, kui kõik parameetrid $\alpha_i = 0$

- ratsionaalse murru

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

- splaini $S(x)$.

E.2.2 Lähendi vea määru valik

Tähistame lähendi vea määru järgmiselt:

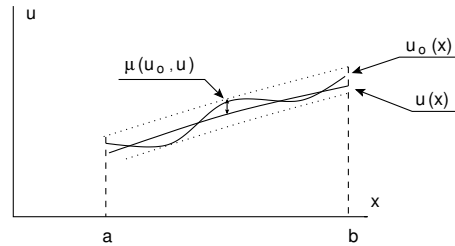
$$\mu(u_0, u)$$

Vaatleme järgmiste lähendite vea määru:

²**Aproksimeerimine** – objekti asendamine mingi teise temast vähe erineva objektiga.

- ühtlane lähendamine, ühtlase lähendamise puhul on vea mõõduks täpse lahendi u_0 ja lähedase funktsiooni u suurim erinevus (joonis E.1)

$$\mu(u_0, u) = \sup_{\Omega} | \mu_o(x) - \mu(x) | \quad (\text{E.23})$$



Joonis E.1. Ühtlane lähendamine

- astmekeskmisel lähendamisel on vea mõõt järgmine:

$$\mu(u_0, u) = \int_{\Omega} | \mu_o(x) - \mu(x) |^p dx, \quad p > 0 \quad (\text{E.24})$$

kus

$p = 1$ – keskmine lähendamine,

$p = 2$ – ruutkeskmine lähendamine,

- kaalutud lähendamisel

$$\mu(u_0, u) = \int_{\Omega} | \mu_o(x) - \mu(x) |^p \varrho(x) dx, \quad p > 0 \quad (\text{E.25})$$

kus $\varrho(x)$ on kaalufunktsioon.

Kaalufunktsiooni kasutamise näitena vaatleme paindemomendi M_0 täpset avaldist ja paindemomendi M lähedast avaldist. Nende kahe funktsiooni läheduse hindamiseks võtame kaalufunktsiooniks paindeprinkuse $\varrho(x) = \psi(x)$. Vea mõõduks on siis painde deformatsioonienergia erinevused.

E.2.3 Lähendamismeetod. Kaalutud hälvete meetod

Olgu u_0 diferentsiaalvõrrandi

$$\mathcal{L}(u_0) = b \quad \text{piirkonnas } \Omega \quad (\text{E.26})$$

täpne lahend.

Selle võrrandi olulised ehk kinemaatilised rajatingimused \mathcal{O} on

$$\mathcal{O}(u_0) = \mathcal{O}_o \quad \text{rajalõigul } \Gamma_1 \quad (\text{E.27})$$

ja loomulikud ehk staatilised rajatingimused \mathcal{S} on

$$\mathcal{S}(u_0) = \mathcal{S}_o \quad \text{rajalõigul } \Gamma_2 \quad (\text{E.28})$$

kus

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (\text{E.29})$$

Valime lähendfunktsiooniks $u(x)$ üldistatud polünoomi

$$u(x) = \alpha_i \varphi_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{E.30})$$

siin

α_i – sõltumatud parameetrid,

$\varphi_i(x)$ – lineaarselt sõltumatud funktsioonid.

Asetame lähendfunktsiooni $u(x)$ diferentsiaalvõrrandisse (E.26) ja rajatingimustesse (E.27), (E.28):

$$\mathcal{L}(u) - b = R \quad (\text{E.31})$$

$$\mathcal{O}(u) - \mathcal{O}_o = R_1 \quad (\text{E.32})$$

$$\mathcal{S}(u) - \mathcal{S}_o = R_2 \quad (\text{E.33})$$

siin

R – diferentsiaalvõrrandi lahendi hälve,

R_1 – kinemaatiliste rajatingimuste hälve,

R_2 – staatiliste rajatingimuste hälve.

Valime kaalufunktsiooni

$$v(x) = \beta_i \psi_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{E.34})$$

Korrutame avaldised (E.31), (E.32), (E.33) kaalufunktsiooniga (E.34), integreerime üle piirkonna Ω , ja nõudes, et

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}(u) - b) v(x) d\Omega = \int_{\Omega} R v(x) d\Omega = 0 \quad (\text{E.35})$$

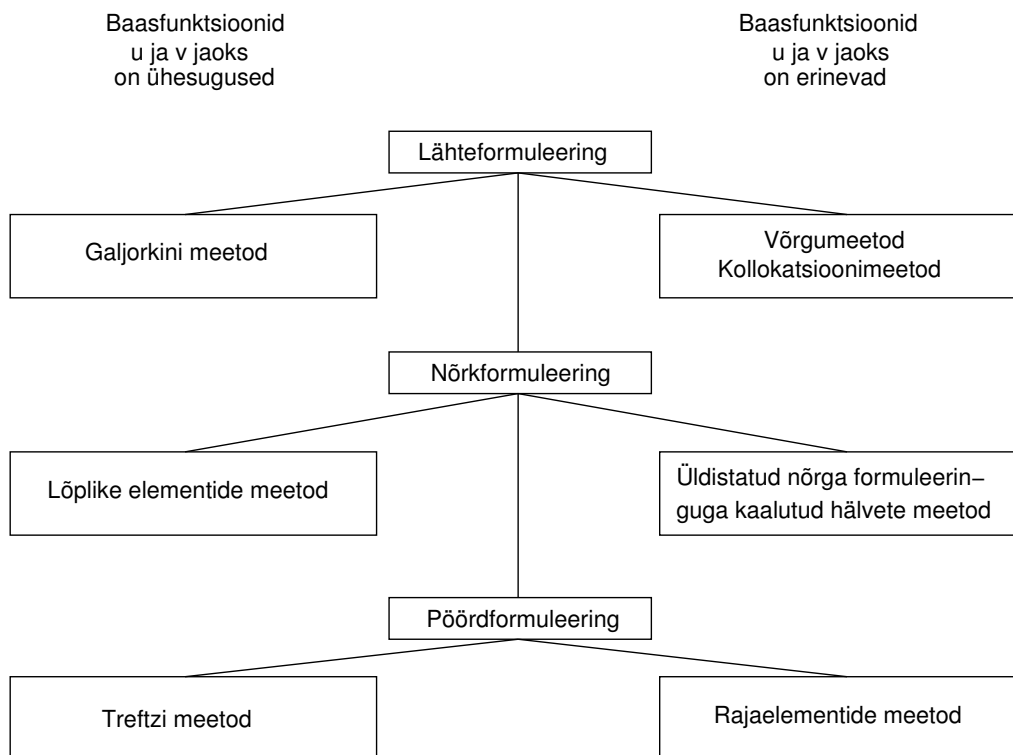
$$\int_{\Gamma_1} (\mathcal{O}(u) - \mathcal{O}_o) v(x) d\Gamma = \int_{\Gamma_1} R_1 v(x) d\Gamma = 0 \quad (\text{E.36})$$

$$\int_{\Gamma_2} (\mathcal{S}(u) - \mathcal{S}_o) v(x) d\Gamma = \int_{\Gamma_2} R_2 v(x) d\Gamma = 0 \quad (\text{E.37})$$

Sõltuvalt lähendfunktsiooni $u(x) = \alpha_i \varphi_i(x)$ valikust eristatakse järgmisi formuleeringuid [BW80]:

- $R_1 = 0, R_2 = 0$ – lähteformuleering
- $R_1 = 0$ – nõrkformuleering
- $R = 0$ – pöördformuleering.

Sõltuvalt sellest, kas baasfunktsioonid $\varphi_i(x), \psi_i(x)$ on valitud ühesugused või erinevad, klassifitseeritakse lahendusmeetodeid (joonis E.2) järgmiselt:



Joonis E.2. Lahendusmeetodite klassifikatsioon

F. Mõisteid vardateooriast

F.1 Varda tööd

Varda tööde leidmiseks kasutame ositi integreerimise valemit

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (\text{F.1})$$

F.1.1 Töö varda pikkel

Kirjutame pikijõu diferentsiaalseose

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x) \quad (\text{F.2})$$

ehk

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = -q_x(x) \quad (\text{F.3})$$

kus $N_x = EA \frac{du}{dx}$.

Korrutame avaldise (F.3) suvalise siirdega \hat{u} ja integreerime üle varda pikkuse l

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \hat{u} dx = - \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx \quad (\text{F.4})$$

Võrrandi (F.4) parempoolne liige väljendab väliskoormuse q_x tööd W_v siirdel \hat{u} . On võimalik näidata, et koondkoormuse F_{xi} töö varda telje punkti i siirdel \hat{u}_i on $F_{xi} \hat{u}_i$. Seega,

$$W_v = \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \quad (\text{F.5})$$

Võrrandi (F.4) vasakpoolset avaldist integreerime ositi valemi (F.1) järgi, võttes u ja dv järgmiselt:

$$\int_a^b \underbrace{\hat{u}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx}_{dv}$$

Saame avaldise

$$\int_a^b \hat{u} d \left(EA \frac{du}{dx} \right) = \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx} \right) \hat{u}}_{N_x} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx} \right)}_{N_x} \underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{\lambda}} dx \quad (\text{F.6})$$

Võrrandi (F.6) parema poole esimene liige väljendab rajajõudude \overleftrightarrow{N}_x tööd W_r rajasiiretel \hat{u} ja teine liige kirjeldab sisejõudude tööd W_s .

Võttes arvesse välisjõudude töö avaldise (F.5) ja rajajõudude töö avaldise (F.6), võib integraali (F.4) kirjutada kujul

$$\underbrace{\overleftrightarrow{N}_x \hat{u}}_{W_r} \Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b N_x \hat{\lambda} dx}_{W_s} = - \underbrace{\left(\int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \right)}_{W_v} \quad (\text{F.7})$$

Kui vaadelda avaldises (F.7) \hat{u} -d kui virtuaalsiiret, siis väljendab see avaldis virtuaalsiirete printsiipi.

Jätkame võrrandi (F.6) viimase liikme ositi integreerimist:

$$- \int_0^l \underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx} \right)}_u \underbrace{\frac{du}{dx}}_{dv} dx = - \underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx} \right)}_{\hat{N}_x} u \Big|_0^l + \int_0^l \frac{d}{dx} \underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx} \right)}_{\hat{N}_x} u dx \quad (\text{F.8})$$

Võttes arvesse saadud avaldise (F.8), võime avaldise (F.7) kirjutada kujul

$$\underbrace{\overleftrightarrow{N}_x \hat{u}}_{W_r} \Big|_0^l - \underbrace{\overleftrightarrow{N}_x u}_{\hat{W}_r} \Big|_0^l + \int_0^l \frac{d}{dx} \underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx} \right)}_{\hat{N}_x} u dx = - \underbrace{\int_0^l q_x(x) \hat{u} dx - F_{xi} \hat{u}_i}_{W_v} \quad (\text{F.9})$$

Võrrandi (F.9) vasaku poole viimase liikme sisu selgitamiseks võtame vaatluse alla teise (II) koormusolukorra. Võrrandite (F.4), (F.5) eeskujul saame järgmise võrrandi:

$$\int_0^l \frac{d}{dx} \left(EA \frac{d\hat{u}}{dx} \right) u dx = - \int_0^l \hat{q}_x(x) u dx - \hat{F}_{xi} u_i \quad (\text{F.10})$$

Võrranditest (F.9) ja (F.10) saame

$$\underbrace{\overleftrightarrow{N}_x \hat{u}}_{W_r^I} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i}_{W_v^I} = \underbrace{\overleftrightarrow{N}_x u}_{\hat{W}_r^{II}} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_x(x) u dx + \hat{F}_{xi} u_i}_{\hat{W}_v^{II}} \quad (\text{F.11})$$

see on tööde vastastikkuse teoreemi tõestus välis- ja rajajõudude kohta pikkel. Sisejõudude tööde vastastikkuse teoreemi tõestamiseks kirjutame virtuaalsiirete printsiibi (F.7) ümber järgmisel kujul:

$$- W_s^{(p)} = W_r^{(p)} + W_v^{(p)} \quad (\text{F.12})$$

Kuna avaldise (F.11) põhjal on esimese (I) ja teise (II) koormusolukorra tööd ($W_r^I + W_v^I = \hat{W}_r^{II} + \hat{W}_v^{II}$) võrdsed, siis on avaldise (F.12) põhjal ka sisejõudude tööd võrdsed

$$W_s^{(I)} = W_s^{(II)} \quad (\text{F.13})$$

ehk

$$\int_0^l \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx} \right)}_{N_x} \underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{\lambda}} dx = \int_0^l \underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx} \right)}_{\hat{N}_x} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\lambda} dx \quad (\text{F.14})$$

Seega on tööde vastastikkuse teoreem pikkel

$$\int_0^l N_x \frac{\hat{N}_x}{EA} dx = \int_0^l \hat{N}_x \frac{N_x}{EA} dx \quad (\text{F.15})$$

F.1.2 Töö varda paindel

Paindemomendi ja põikjõu tööde avaldise saamisel lähtume diferentsiaalseostest

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = \frac{dQ_z}{dx} = -q_z(x) \quad (\text{F.16})$$

ja Bernoulli hüpoteesist

$$\varphi_y = -\frac{dw}{dx} \quad (\text{F.17})$$

$$\psi_y = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (\text{F.18})$$

$$\gamma = 0 \quad (\text{F.19})$$

ning seostest

$$M_y = \frac{EI_y d\varphi}{dx}, \quad Q_z = \frac{dM_y}{dx} \quad (\text{F.20})$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -q_z(x) \quad (\text{F.21})$$

Nii nagu pikkejõu puhul, korrutame võrrandi (F.21) siirdega \hat{w} ja integreerime üle varda l

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \hat{w} dx = -\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx \quad (\text{F.22})$$

Võrrandi (F.22) parempoolne liige väljendab väliskoormuse tööd W_v siirdel \hat{w} . Koondkoormuse F_{zi} töö varda telje punkti i siirdel \hat{w}_i on $F_{zi} \hat{w}_i$. Seega,

$$W_v = \int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i \quad (\text{F.23})$$

Võrrandi (F.22) vasakpoolset liiget integreerime ositi:

$$\begin{aligned}
 - \int_0^l \underbrace{\hat{w}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{dv} dx &= - \underbrace{\left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{Q_z} \hat{w} \Big|_0^l + \\
 &+ \int_0^l \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y} dx
 \end{aligned} \quad (F.24)$$

Avaldise (F.24) viimast liiget integreerime veel üks kord

$$\int_0^l \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{dv} dx = \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y} \Big|_0^l - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}}_{-\hat{\psi}_y} dx \quad (F.25)$$

Arvestades saadud avaldise (F.24) ja (F.25) võime võrrandi (F.22) esitada virtuaaltööde (passiivtööde) summamana (virtuaalsiirete printsüüp paindel)

$$\underbrace{[Q_z \hat{w} + M_y \hat{\varphi}_y]}_{W_r^{(p)}} \Big|_0^l - \underbrace{\int_0^l M_y \hat{\psi}_y dx}_{W_s^{(p)}} = - \underbrace{\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx - F_{zi} \hat{w}_i}_{-W_v^{(p)}} \quad (F.26)$$

Paindel jätkame tööde vastastikkuse teoreemi tõestamiseks avaldise (F.26) teise liikme ositi integreerimist:

$$\begin{aligned}
 - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} \right)}_{-\hat{M}_y} \underbrace{\frac{d^2 w}{dx^2}}_{-\hat{\psi}_y} dx &= - \underbrace{\frac{dw}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} \right)}_{-\hat{\varphi}_y} \Big|_0^l + \int_0^l \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} \right)}_{-\hat{Q}_z} \frac{dw}{dx} = \\
 &= w \underbrace{\left(EI_y \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} \right)}_{-\hat{Q}_z} \Big|_0^l - \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} \right)}_{-\hat{M}_y} \underbrace{\frac{dw}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y} \Big|_0^l - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^4 \hat{w}}{dx^4} \right)}_{\hat{p}_z} w dx
 \end{aligned} \quad (F.27)$$

Saadud seosed (F.27) asetame avaldisse (F.26), kust saame tööde vastastikkuse teoreemi paindel

$$\begin{aligned}
 \underbrace{[\overset{\leftrightarrow}{Q}_z \hat{w} + \overset{\leftrightarrow}{M}_y \hat{\varphi}_y]}_{W_r^I} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^I} &= \\
 &= \underbrace{[\overset{\leftrightarrow}{Q}_z w + \overset{\leftrightarrow}{M}_y \varphi_y]}_{W_r^{II}} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_z(x) w dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^{II}}
 \end{aligned} \quad (F.28)$$

Siin on Q_z , M_y , p_z , w ja φ_y esimese koormusolukorra jõud ja siirded ning \hat{Q}_z , \hat{M}_y , \hat{p}_z , \hat{w} ja $\hat{\varphi}_y$ teise koormusolukorra jõud ja siirded.

Arvestades saadud avaldise (F.26), (F.28), saame sisejõudude vastastikkuse töö paindel

$$\underbrace{\int_0^l M_y \hat{\psi}_y dx}_{W_s^I} = \underbrace{\int_0^l \hat{M}_y \psi_y dx}_{W_s^{II}} \quad (\text{F.29})$$

ehk

$$\underbrace{\int_0^l M_y \frac{\hat{M}_y}{EI_y} dx}_{W_s^I} = \underbrace{\int_0^l \hat{M}_y \frac{M_y}{EI_y} dx}_{W_s^{II}} \quad (\text{F.30})$$

F.2 Ülekandemaatriks

Võrrandeid (1.56), (1.57), (1.58) ja (1.59) (lk 57) võib kirjutada maatrikskujul

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{U}\mathbf{Z}_v + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (\text{F.31})$$

kus \mathbf{Z}_v , \mathbf{Z}_p on vastavalt siirded ja kontaktjõud varda algul ning lõpus

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_v \quad (\text{F.32})$$

Avaldises (F.31) olev ülekandemaatriks \mathbf{U} I märgikokkuleppe puhul (vt joonis 1.30 lk 57) on toodud avaldisega (F.33)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -(x_p - x_v) & \frac{(x_p - x_v)}{GA_Q} - \frac{(x_p - x_v)^3}{6EI_y} & -\frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} \\ 0 & 1 & \frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} & \frac{(x_p - x_v)}{EI_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x_p - x_v) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.33})$$

Ülekandemaatriksit (F.33) saab arvutada funktsiooni `Ulintala_Imk.m`¹ abil.

Ülekandemaatriksit I märgikokkuleppe puhul `U(6,6)`, kus arvesse on võetud ka normaaljõud N ja pikisiire u ($Z_v = [u_x \ w_z \ \varphi_y \ N_x \ Q_z \ M_y]$), võib arvutada funktsiooni `Ulin_Imk.m`² abil.

Ülekandemeetodi koormusvektor $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ on

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^2}{EI_y 2!} + \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^3}{EI_y 3!} + \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^4}{EI_y 4!} \\ - \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^1}{EI_y 1!} - \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^2}{EI_y 2!} - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^3}{EI_y 3!} \\ - \sum F_z (x_p - a_F)_+^0 - \sum q_z (x_p - a_q)_+^1 \\ - \sum \mathcal{M}_y (x_p - a_M)_+^0 - \sum F_z (x_p - a_F)_+^1 - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^2}{2!} \end{bmatrix} \quad (\text{F.34})$$

¹ `./octaveProgrammid/Ulintala_Imk.m`

² `./octaveProgrammid/Ulin_Imk.m`

Koormusvektorit (F.34) saab arvutada funktsiooni $Z_{talaFq.m}$ ³ abil. Momendi M_y ja pöördnurga φ_y positiivne suund on pööre teljelt z teljele x . Siin kasutatakse järgmist tähistust:

$$(x - a_F)_+ = \begin{cases} 0, & \text{kui } (x - a_F) < 0 \\ |x - a_F|, & \text{kui } (x - a_F) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{F.35})$$

Avaldises (F.31) olev ülekan demaatriks \mathbf{U} II märgikokkuleppe puhul on esitatud avaldisega

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -(x_p - x_v) & -\frac{(x_p - x_v)}{GA_Q} + \frac{(x_p - x_v)^3}{6EI_y} & \frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} \\ 0 & 1 & -\frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} & -\frac{(x_p - x_v)}{EI_y} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(x_p - x_v) & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.36})$$

Ülekan demaatriksit (F.36) saab arvutada funktsiooni $U_{lintala_IIImk.m}$ ⁴ abil. Ülekan demaatriksit II märgikokkuleppe puhul $U(6,6)$, kus arvesse on võetud ka normaaljõud N ja pikisiire u ($Z_v' = [u_x \ w_z \ \varphi_y \ N_x \ Q_z \ M_y]$), võib arvutada funktsiooni $U_{lin_IIImk.m}$ ⁵ abil.

Ülekan demetodi koormusvektor $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$, kus arvesse on võetud ka normaaljõud N ja pikisiire u ($Z_v' = [u_x \ w_z \ \varphi_y \ N_x \ Q_z \ M_y]$) on

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} -\sum F_x \frac{(x_p - a_F)_+}{EA} - \sum q_x \frac{(x_p - a_q)_+^2}{2EA} \\ \sum M_y \frac{(x_p - a_M)_+^2}{EI_y 2!} + \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^3}{EI_y 3!} + \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^4}{EI_y 4!} \\ -\sum M_y \frac{(x_p - a_M)_+^1}{EI_y 1!} - \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^2}{EI_y 2!} - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^3}{EI_y 3!} \\ -\sum F_x (x_p - a_F)_+^0 - \sum q_x (x_p - a_q)_+^1 \\ -\sum F_z (x_p - a_F)_+^0 - \sum q_z (x_p - a_q)_+^1 \\ -\sum M_y (x_p - a_M)_+^0 - \sum F_z (x_p - a_F)_+^1 - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^2}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{F.37})$$

Momendi M_y ja pöördnurga φ_y positiivne suund on pööre teljelt z teljele x . Siin kasutatakse tähistust (F.35).

³ ./octaveProgrammid/ZtalaFq.m

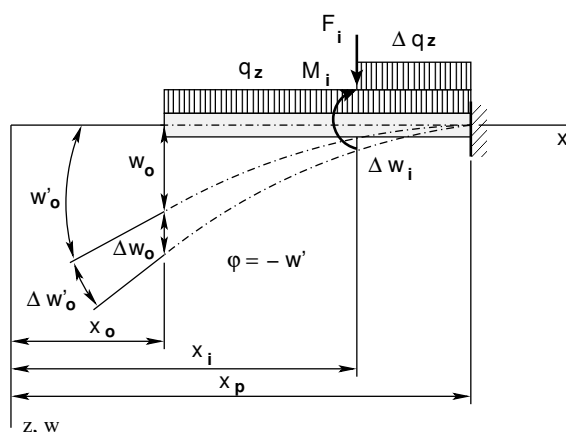
⁴ ./octaveProgrammid/Ulintala_IIImk.m

⁵ ./octaveProgrammid/Ulin_IIImk.m

G. Ülekandemaatriksid

G.1 Algpameetrite meetod

Algpameetrite meetod on matemaatikas tuntud Cauchy¹ meetodina. Tugevusõpetusse tõi selle meetodi 1862. a A. Clebsch². Seda meetodit on põhjalikult selgitanud A. P. Filin [Fi71]. A. Jürgenson kirjeldab algpameetrite meetodit õpikus [Jür85].



Joonis G.1. Algpameetrid

Vaatleme joonisel **G.1** jaotatud koormusega $q_z = q_z(x)$ varrast, mille elastne joon on esitatud funktsiooniga $w = w(x)$. Punktis i lisame momendi M_i , jõu F_i ja lauskoormuse $\Delta q_z = \Delta q_z(x)$. Koormuste lisamisest tekib täiendav läbipaine $\Delta w = \Delta w(x)$.

Punktis i arendame täiendava läbipainde Δw Taylori ritta

$$\Delta w = \Delta w_i + \Delta w'_i \frac{(x - x_i)}{1!} + \Delta w''_i \frac{(x - x_i)^2}{2!} + \dots \quad (\text{G.1})$$

Punkti $x = x_i$ siirde avaldame punkti $x = x_0$ siirde ja pöörde kaudu

$$\Delta w = \Delta w_0 + \Delta w'_0 x \quad (\text{G.2})$$

Võtame arvesse momendi, põikjõu, siirde ja pöörde omavahelised seosed

$$w'_i = -\varphi_i, \quad w''_i = -\frac{M_i}{EI}, \quad w'''_i = -\frac{Q_{zi}}{EI} \quad (\text{G.3})$$

¹Augustin Louis Cauchy, prantsuse matemaatik, 1789–1857.

²Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, saksa matemaatik, 1833–1872.

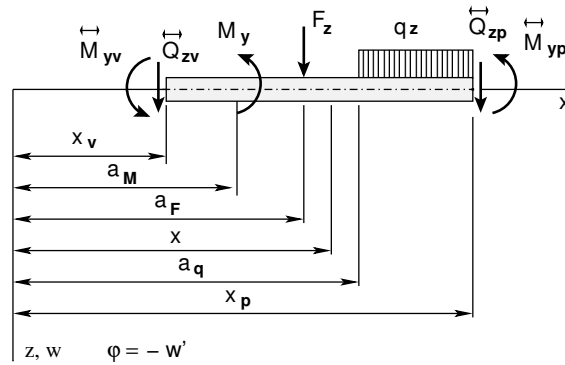
Siin $\varphi_i = -w'_i$, kuna parema käe teljestiku puhul on pöörde positiivne suund z -lt x -le, aga tuletise w'_i (puutuja tõusunurga tangens) positiivne suund on vastupidine. Arvestades avaldisi (G.2), (G.3) kirjutame läbipainde juurdekasvu (G.1) kujul

$$\Delta w = \Delta w_0 - \varphi x - \frac{M_{yi}}{EI} \frac{(x - x_i)_+^2}{2!} - \frac{Q_{zi}}{EI} \frac{(x - x_i)_+^3}{3!} + \frac{\Delta q_i}{EI} \frac{(x - x_i)_+^4}{4!} + \dots \quad (\text{G.4})$$

Teise märgikokkuleppe puhul

$$w_0 = w_0, \quad w'_0 = -\varphi_0, \quad w''_0 = -\frac{M_y}{EI}, \quad w'''_0 = -\frac{Q_z}{EI} \quad (\text{G.5})$$

Varda elastse joone universaalvõrrandi saamiseks summeerime kõik jõud vastavalt teisele märgikokkuleppele (G.5) (joonis G.2)



Joonis G.2. Jõudude positiivsed suunad universaalvõrrandis

$$w_p = w_v - (\varphi_y)_v x + \frac{1}{EI_y} \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^2}{2!} + \frac{1}{EI_y} \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^3}{3!} + \frac{1}{EI_y} \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^4}{4!} \quad (\text{G.6})$$

kus

$$(x_p - a_F)_+ = \begin{cases} 0, & kui \quad (x_p - a_F) < 0 \\ |x_p - a_F|, & kui \quad (x_p - a_F) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{G.7})$$

Elastse joone universaalvõrrandis (G.6) on järgmised tähistused:

EI_y – varda ristlõike paindejäikus,

\mathcal{M}_y – momentkoormus,

F_z – koondatud jõud,

q_z – ühtlaselt jaotatud koormus

Diferentseerime võrrandit (G.6) ja võtame kasutusele vastavalt teisele märgikokkuleppele (G.5) tähistused. Saame varda ristlõike pöörde $\varphi_p = -w'_p$

$$\begin{aligned} (\varphi_y)_p &= 0 - (\varphi_y)_v - \frac{1}{EI_y} \sum \mathcal{M}_y (x_p - a_M)_+ - \\ & - \frac{1}{EI_y} \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^2}{2!} - \frac{1}{EI_y} \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^3}{3!} \end{aligned} \quad (G.8)$$

Varda lõpus saame paindemomendi $(M_y)_p = -EIw''_p$ avaldiseks

$$\begin{aligned} (M_y)_p &= 0 - 0 - \frac{1}{EI_y} \sum \mathcal{M}_y (x_p - a_M)_+^0 - \\ & - \frac{1}{EI_y} \sum F_z (x_p - a_F)_+ - \frac{1}{EI_y} \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^2}{2!} \end{aligned} \quad (G.9)$$

Varda lõpus on põikjõu $(Q_z)_p = -EIw'''_p$ avaldis

$$(Q_z)_p = 0 - 0 - 0 - \frac{1}{EI_y} \sum F_z (x_p - a_F)_+^0 - \frac{1}{EI_y} \sum q_z (x_p - a_q)_+ \quad (G.10)$$

Võrrandid (G.6) ja (G.8) – (G.10) esitame maatrikskuju

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{U}\mathbf{Z}_v + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (G.11)$$

kus \mathbf{Z}_p , \mathbf{Z}_v on tala lõpus ja alguses olevad siirded ning sisejõud

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ \dots \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ \dots \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_v, \quad (G.12)$$

\mathbf{U} – ülekandemaatriks

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -(x_p - x_v) & \vdots & \frac{(x_p - x_v)}{GA_Q} - \frac{(x_p - x_v)^3}{6EI_y} & -\frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} & \frac{(x_p - x_v)}{EI_y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & (x_p - x_v) & 1 \end{bmatrix}, \quad (G.13)$$

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ – koormusvektor mis, on toodud avaldisega

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^2}{EI_y 2!} + \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^3}{EI_y 3!} + \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^4}{EI_y 4!} \\ - \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^1}{EI_y 1!} - \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^2}{EI_y 2!} - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^3}{EI_y 3!} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ - \sum F_z (x_p - a_F)_+^0 - \sum q_z (x_p - a_q)_+^1 \\ - \sum \mathcal{M}_y (x_p - a_M)_+^0 - \sum F_z (x_p - a_F)_+^1 - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^2}{2!} \end{bmatrix} \quad (\text{G.14})$$

Moodustame varda alguses ja lõpus olevatest siiretest vastavad vektorid \mathbf{v}_A ning \mathbf{v}_L :

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix} \quad (\text{G.15})$$

ja varda alguses ja lõpus olevatest kontaktjõududest vastavad vektorid \mathbf{s}_A ning \mathbf{s}_L .

$$\mathbf{s}_A = \begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_L = \begin{bmatrix} Q_L \\ M_L \end{bmatrix} \quad (\text{G.16})$$

Võrrandid (G.11) saame kirjutada kujul

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_L \\ \dots \\ \mathbf{s}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{vv} & \vdots & \mathbf{U}_{vs} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{U}_{sv} & \vdots & \mathbf{U}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_A \\ \dots \\ \mathbf{s}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \dots \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{G.17})$$

Raamatus [PW94] lk 174 saadakse maatriks \mathbf{U} (G.13), (G.17) ühikkoormuse meetodil. Võrrandeid (G.17) nimetatakse varda põhivõrranditeks, kus varda põhiseoseid kirjelavad alammaatriksid:

\mathbf{U}_{vv} kirjeldab geometriat (kõvakeha liikumist),

\mathbf{U}_{ss} – tasakaalu,

\mathbf{U}_{vs} – elastsusseoseid (seosed siirete juurdekasvu ja jõudude vahel),

$\mathbf{U}_{sv} = 0$ – tugevate ning elastsete vedrude mõju.

G.2 Esimest järku teooria ülekandemaatriks

Esimest järku teooria ülekandemaatriksit vaadeldakse õpikutes [Bor79a], [Krä91a], [PW94]. Esimest järku teooria ülekandevõrrandi võib kirjutada sümbolisel kujul

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_v + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (\text{G.18})$$

kus

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N_x \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N_x \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_v \quad (\text{G.19})$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{(x_p-x_v)}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(x_p-x_v) & 0 & \frac{(x_p-x_v)^3}{6EI_y} - \frac{(x_p-x_v)}{GA_{red}} & \frac{(x_p-x_v)^2}{2EI_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{(x_p-x_v)^2}{2EI_y} & -\frac{(x_p-x_v)}{EI_y} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(x_p-x_v) & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.20})$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \int_{x_v}^{x_p} \frac{1}{EA} \int_{x_v}^{x_p} q_x dx dx \\ \int_{x_v}^{x_p} \int_{x_v}^{x_p} \frac{1}{EI_y} \int_{x_v}^{x_p} \int_{x_v}^{x_p} q_z dx^2 dx^2 \\ - \int_{x_v}^{x_p} \frac{1}{EI_y} \int_{x_v}^{x_p} \int_{x_v}^{x_p} q_z dx^2 dx \\ - \int_{x_v}^{x_p} q_x dx dx \\ - \int_{x_v}^{x_p} q_z dx dx \\ - \int_{x_v}^{x_p} \int_{x_v}^{x_p} q_z dx dx + \int_{x_v}^{x_p} m_y dx \end{bmatrix} \quad (\text{G.21})$$

Ühtlaselt jaotatud koormuse puhul on koormusliige $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ järgmine:

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q_z \cdot (x_p-x_v)^4}{24EI_y} \\ -\frac{q_z \cdot (x_p-x_v)^3}{6EI_y} \\ 0 \\ -q_z \cdot (x_p-x_v) \\ -q_z \cdot (x_p-x_v)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{G.22})$$

Koondatud jõu korral, kus x_a on koondatud jõu rakenduspunkti koordinaat, saame

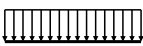
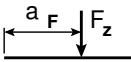
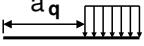
$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_z \cdot (x_p-x_a)^3}{6EI_y} \\ -\frac{F_z \cdot (x_p-x_a)^2}{2EI_y} \\ 0 \\ -F_z \\ -F_z \cdot (x_p-x_a) \end{bmatrix} \quad (\text{G.23})$$

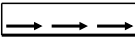
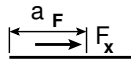
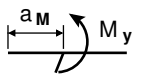
Ülekandemaatriksi \mathbf{U} saab arvutada GNU Octave'i funktsioonidega [ylfhlin.m](#) lk 721 või hõreda maatriksina [ysplfhlin.m](#) lk 723.

Tala ülekandemaatriksi \mathbf{U} saame, kui varda ülekandemaatriksist \mathbf{U} (14.20) eemaldame pikisiirdele u ja normaaljõule N vastavad elemendid. Tala ülekandemaatriksit saame arvutada GNU Octave'i funktsiooni [yspTlvfmbHvI.m](#) lk 724 abil. Selle koostamiseks on kasutatud funktsiooni [yspTlfhlin.m](#) lk 723.

Kolme liigendiga raamile maatriksi $\widehat{\mathbf{IU}}$ (14.11) arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon [yspSlvfmbHvI.m](#) lk 724 (koostatakse funktsiooni [yspSlfhlin.m](#) lk 724 abil).

Tabel G.1. Koormusvektor

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$	 qz	 F_z	 qz
$\overset{\circ}{u}$	0.0	0.0	0.0
$\overset{\circ}{w}$	$\frac{qz \cdot x^4}{24EI_y}$	$\frac{F_z \cdot (x - a_F)_+^3}{6EI_y}$	$\frac{qz \cdot (x - a_q)_+^4}{24EI_y}$
$\overset{\circ}{\varphi}_y$	$-\frac{qz \cdot x^3}{6EI_y}$	$-\frac{F_z \cdot (x - a_F)_+^2}{2EI_y}$	$\frac{qz \cdot (x - a_q)_+^3}{6EI_y}$
$\overset{\circ}{N}_x$	0.0	0.0	0.0
$\overset{\circ}{Q}_z$	$-qz \cdot x$	$-F_z \cdot (x - a_F)_+^0$	$-qz \cdot (x - a_q)_+^1$
$\overset{\circ}{M}_y$	$-\frac{qz \cdot x^2}{2}$	$-F_z \cdot (x - a_F)_+$	$-\frac{qz \cdot (x - a_q)_+^2}{2}$

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$	 q_x	 F_x	 M_y
$\overset{\circ}{u}$	$-\frac{q_x \cdot x^2}{2EA}$	$-\frac{q_x \cdot (x - a_F)_+}{EA}$	0.0
$\overset{\circ}{w}$	0.0	0.0	$\frac{M_y \cdot (x - a_M)_+^2}{2EI_y}$
$\overset{\circ}{\varphi}_y$	0.0	0.0	$-\frac{M_y \cdot (x - a_M)_+}{EI_y}$
$\overset{\circ}{N}_x$	$-q_x \cdot x$	$-F_x \cdot (x - a_F)_+^0$	0.0
$\overset{\circ}{Q}_z$	0.0	0.0	0.0
$\overset{\circ}{M}_y$	0.0	0.0	$-M_y \cdot (x - a_M)_+^0$

Staatiliselt määratud tala maatriksi $\widehat{\mathbf{IU}}$ (14.11) arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioonid `yspSTlvfmbHvI.m` lk 725 (koostatakse funktsiooni `yspSTlfhlin.m` lk 724 abil).

Järgnevatel koormusvektorite tabelitel on kasutatud õpikutes [Krä91c], [Bor79b] toodud avaldisi. Koormusvektorite tabelites G.1, G.2 on kasutusel parema käe teljestik x - z . Koormusvektorid esimeses ja teises märgikokkuleppes ei erine teineteisest.

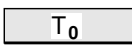

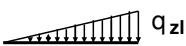
Koormusvektoreid $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$, $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$ ylffin, `yzqz` ning `yzfz` saab arvutada GNU Octave'i funktsioonidega `yzhqz.m` lk 721, `yzfzv.m` lk 722.

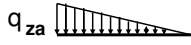
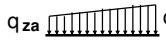
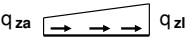
Mitmesildelise tala koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ (14.11) arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `ESTtalaKrmus.m` lk 727, mis omakorda kasutab koormusvektorite $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$, $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$ arvutamiseks funktsioone `yzThqz.m` ja `yzTfzv.m` lk 722.

Kolme liigendiga raamile koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ (14.11) arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon `ESTSKrmus.m` lk 727, mis omakorda kasutab koormusvektorite $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$, $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$ arvutamiseks funktsioone `yzShqz.m` ja `yzSfzv.m` lk 722.

Staatiliselt määratud tala koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ (14.11) arvutamiseks on GNU Octave'i

Tabel G.2. Koormusvektor (järg 1)

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$			
$\overset{\circ}{u}$	$\alpha_T T_0 x$	0.0	0.0
$\overset{\circ}{w}$	0.0	$-\alpha_T x^2 \frac{\Delta T}{2h}$	$\frac{q_{zl} \cdot l^4}{120EI_y}$
$\overset{\circ}{\varphi}_y$	0.0	$\alpha_T x \frac{\Delta T}{h}$	$-\frac{q_{zl} \cdot l^3}{24EI_y}$
$\overset{\circ}{N}_x$	0.0	0.0	0.0
$\overset{\circ}{Q}_z$	0.0	0.0	$-\frac{q_z \cdot l}{2}$
$\overset{\circ}{M}_y$	0.0	0.0	$-\frac{q_z \cdot l^2}{6}$

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$			
$\overset{\circ}{u}$	0.0	0.0	$-\frac{l^2}{6EA} (2q_{xa} + q_{xl})$
$\overset{\circ}{w}$	$\frac{q_{za} \cdot l^4}{30EI_y}$	$\frac{(4q_{za} + q_{zl})l^4}{120EI_y}$	0.0
$\overset{\circ}{\varphi}_y$	$-\frac{q_{za} \cdot l^3}{8EI_y}$	$-\frac{(3q_{za} + q_{zl})l^3}{24EI_y}$	0.0
$\overset{\circ}{N}_x$	0.0	0.0	$-\frac{1}{2} (q_{xa} + q_{xl})$
$\overset{\circ}{Q}_z$	$-\frac{q_{za} \cdot l}{2}$	$-\frac{1}{2} (q_{za} + q_{zl})$	0.0
$\overset{\circ}{M}_y$	$-\frac{q_{za} \cdot l^2}{3}$	$-\frac{l^2}{2} (2q_{za} + q_{zl})$	0.0

funktsioon *ESTSTKrmus.m* lk 727, mis omakorda kasutab koormusvektorite $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$, $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$ arvutamiseks funktsioone *yzSThqz.m* ja *yzSTfzv.m* lk 722.

G.2.1 Sõrestiku varda ülekandemaatriks

Sõrestiku varda ülekandevõrrand peab sisaldama kõvakeha liikumise. Sõrestiku varda ülekandemaatriksi saame avaldisest G.20, kui eemaldame 4. ja 5. rea ning veeru. Saame

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_v + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (\text{G.24})$$

kus

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N_x \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N_x \end{bmatrix}_v \quad (\text{G.25})$$

ja sõrestiku varda ülekandemaatriks:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{(x_p - x_v)}{EA} \\ 0 & 1 & -(x_p - x_v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.26})$$

Ülekandemaatriksi (G.26) saame arvutada GNU Octave'i funktsiooniga `yspSRhlin.m` lk 725.

Kirjutame avaldise (G.24) ringi võrrandisüsteemiks

$$\mathbf{Z}_p - \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_v = \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (\text{G.27})$$

Sõrestiku varda võrrandite (G.27) nullist erinevaid kordajaid saame arvutada GNU Octave'i funktsiooniga `yspSRmhvI.m` lk 725.

G.3 Ülekandemaatriksid teist järku teoorias

Ülekandevõrrandisüsteemi (pikijõududes S ja ristjõududes H)

$$\tilde{\mathbf{Z}}_p - \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{Z}}_v = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}} \quad (\text{G.28})$$

kus

$$\tilde{\mathbf{Z}}_p = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S_x \\ H_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_v = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S_x \\ H_z \\ M_y \end{bmatrix}_v \quad (\text{G.29})$$

lahendamisel on siirete ja sisejõudude arvväertuste erinevus ca 10^3 korda. Korrutame siirete võrrandid baasjäikusega ($i_o = \max EI / \min l$).

Teeme muutujate teisenduse, kus siirete arvväertusi suurendame varda baasjäikuse i_o korda. Sellist võrrandisüsteemi teisendust nimetame võrrandisüsteemi skaleerimiseks (ingl *scaling*). Pärast võrrandisüsteemi lahendamist saame tegelikud siirded, kui jagame leitud siirded baasjäikusega.

Teise märgikokkuleppe puhul korrutame -1 -ga ülekandemaatriksite (16.376) ja (16.377) veerud 4, 5, 6. Suurendame siirdeid ($i_o = \max EI / \min l$) korda. Skaleeritud võrrandisüsteemi (G.28) kordajate maatriks teise märgikokkuleppe puhul on toodud avaldistega (G.30), (G.31). Neid maatrikseid saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga `ylfmhvII.m` lk 743.

Ülekandemaatriks

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i_o^* \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sin \nu \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & 0 & i_o^* \left(\frac{\frac{\nu x}{l} - \sin \frac{\nu x}{l}}{\nu^3} \frac{l^3}{EI} \right) & i_o^* \left(\frac{1 - \cos \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \right) \\ 0 & 0 & \cos \frac{\nu x}{l} & 0 & -i_o^* \left(\frac{-1 + \cos \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \right) & -i_o^* \left(\frac{-\sin \frac{\nu x}{l}}{\nu} \frac{l}{EI} \right) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \sin \frac{\nu x}{l} \frac{l}{EI} \frac{1}{i_o} & 0 & \frac{-\sin \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & -\cos \frac{\nu x}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{G.30})$$

vastab survele ja II märgikokkuleppele.

Ülekandemaatriks

$$\tilde{\mathbf{U}}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i_o^* \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\text{sh} \nu \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & 0 & i_o^* \left(\frac{\frac{-\nu x}{l} + \text{sh} \frac{\nu x}{l}}{\nu^3} \frac{l^3}{EI} \right) & i_o^* \left(\frac{-1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \right) \\ 0 & 0 & \text{ch} \frac{\nu x}{l} & 0 & i_o^* \left(\frac{1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \right) & i_o^* \left(\frac{-\text{sh} \frac{\nu x}{l}}{\nu} \frac{l}{EI} \right) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \text{sh} \frac{\nu x}{l} \frac{l}{EI} \frac{1}{i_o} & 0 & \frac{-\text{sh} \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & -\text{ch} \frac{\nu x}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{G.31})$$

vastab tõmbele ja II märgikokkuleppele.

Skaleeritud võrrandisüsteemi (G.28) koormusvektor ühtlaselt jaotatud koormusel $q_z = \text{const}$ esimese ja teise märgikokkuleppe puhul on toodud avaldistega

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_o \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\nu x}{l} \right)^2 - 1 + \cos \left(\frac{\nu x}{l} \right) \right] \frac{ql^4}{\nu^4 EI} \\ -i_o \left[\frac{\nu x}{l} - \sin \left(\frac{\nu x}{l} \right) \right] \frac{ql^3}{\nu^3 EI} \\ 0 \\ -q \cdot x \\ - \left[1 - \cos \left(\frac{\nu x}{l} \right) \right] \frac{ql^2}{\nu^2} \end{bmatrix} \quad (\text{G.32})$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_t = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i_o \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\nu x}{l} \right)^2 - 1 - \text{ch} \left(\frac{\nu x}{l} \right) \right] \frac{ql^4}{\nu^4 EI} \\ i_o \left[\frac{\nu x}{l} - \text{sh} \left(\frac{\nu x}{l} \right) \right] \frac{ql^3}{\nu^3 EI} \\ 0 \\ -q \cdot x \\ \left[1 - \text{ch} \left(\frac{\nu x}{l} \right) \right] \frac{ql^2}{\nu^2} \end{bmatrix} \quad (\text{G.33})$$

Koormusvektor $\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}$ (G.32) vastab survele, koormusvektor $\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_t$ (G.33) vastab tõmbele. Neid teisele ja ka esimesele märgikokkuleppele vastavaid koormusvektoreid saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga `ylqvII.m` lk 744.

Skaleeritud võrrandisüsteemi (G.28) koormusvektor koondatud jõu korral (teise ja esimese märgikokkuleppe puhul) on toodud avaldistega

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i_o \left[\sin \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl^3}{\nu^3 EI} \\ i_o \left[\cos \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - 1 \right] \frac{Fl^2}{\nu^2 EI} \\ 0 \\ -(x-a)_+^0 F \\ - \left[\sin \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl}{\nu} \end{bmatrix} \quad (\text{G.34})$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}_t} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_o \left[\text{sh} \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl^3}{\nu^3 EI} \\ -i_o \left[\text{ch} \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) - 1 \right] \frac{Fl^2}{\nu^2 EI} \\ 0 \\ -(x-a)_+^0 F \\ - \left[\text{sh} \left(\nu \frac{(x-a)_+}{l} \right) \right] \frac{Fl}{\nu} \end{bmatrix} \quad (\text{G.35})$$

Koormusvektor $\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}$ (G.34) vastab survele, koormusvektor $\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}_t}$ (G.35) vastab tõmbele. Neid teisele kui ka esimesele märgikokkuleppele vastavaid koormusvektoreid saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [ylfhvzII.m](#) lk 743.

Avaldistes (G.34) ja (G.35) kasutame järgmist Heaviside'i funktsiooni tähistust

$$(x-a)_+ = \begin{cases} 0, & \text{kui } (x-a) < 0 \\ x-a, & \text{kui } (x-a) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{G.36})$$

Ülekandevõrrand normaaljõududes N ja põikjõududes Q

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_v + \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}} \quad (\text{G.37})$$

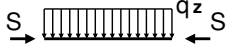
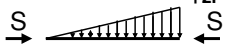
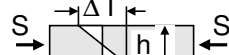
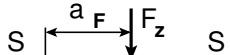
kus

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N_x \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N_x \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_v \quad (\text{G.38})$$

ja maatrikseid

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & \frac{l^3}{\nu^3 EI} \left[\frac{\nu x}{l} - \sin \frac{\nu x}{l} \right] & \frac{l^2}{\nu^2 EI} \left[1 - \cos \frac{\nu x}{l} \right] \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{l^2}{\nu^2 EI} \left[1 - \cos \frac{\nu x}{l} \right] & -\frac{l}{\nu EI} \sin \frac{\nu x}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \frac{\nu x}{l} & \frac{\nu}{l} \sin \frac{\nu x}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{\nu} \sin \frac{\nu x}{l} & -\cos \frac{\nu x}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{G.39})$$

Tabel G.3. Koormusvektor survel (pikijõud S ja ristjõud H)

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$		
$\overset{\circ}{u}$	0.0	0.0
$\overset{\circ}{w}$	$-\frac{ql^4}{\nu^4 EI} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu x}{l} \right)^2 - \cos \frac{\nu x}{l} \right]$	$-\frac{ql^4}{\nu^5 EI} \left[\frac{\nu x}{l} - \frac{1}{6} \left(\frac{\nu x}{l} \right)^3 - \sin \frac{\nu x}{l} \right]$
$\overset{\circ}{\varphi}_y$	$-\frac{ql^3}{\nu^3 EI} \left[\frac{\nu x}{l} - \sin \frac{\nu x}{l} \right]$	$-\frac{ql^3}{\nu^4 EI} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu x}{l} \right)^2 - \cos \frac{\nu x}{l} \right]$
$\overset{\circ}{S}_x$	0.0	0.0
$\overset{\circ}{H}_z$	$-\frac{ql}{\nu} \sin \frac{\nu x}{l}$	$-\frac{ql}{\nu^2} \left[1 - \cos \frac{\nu x}{l} \right]$
$\overset{\circ}{M}_y$	$-\frac{ql^2}{\nu^2} \left[1 - \cos \frac{\nu x}{l} \right]$	$-\frac{ql^2}{\nu^3} \left[\frac{\nu x}{l} - \sin \frac{\nu x}{l} \right]$
$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$		
$\overset{\circ}{u}$	0.0	0.0
$\overset{\circ}{w}$	$-\frac{\alpha_t \Delta T}{h} \frac{l^2}{\nu^2} \left[1 - \cos \frac{\nu x}{l} \right]$	$\left[\frac{\nu}{l} (x - a) - \right] \frac{Fl^3}{EI\nu^3}$
$\overset{\circ}{\varphi}_y$	$-\frac{\alpha_T \Delta T}{h} \frac{l^2}{\nu^2} \sin \frac{\nu x}{l}$	$-\left[\cos \frac{\nu}{l} (x - a) - 1 \right] \frac{Fl^2}{EI\nu^2}$
$\overset{\circ}{S}_x$	0.0	0.0
$\overset{\circ}{H}_z$	$-\frac{\alpha_T \Delta T}{h} EI \frac{\nu}{l} \sin \frac{\nu x}{l}$	$-F$
$\overset{\circ}{M}_y$	$-\frac{\alpha_T \Delta T}{h} EI \left[1 - \cos \frac{\nu x}{l} \right]$	$-\left[\sin \frac{\nu}{l} (x - a) \right] \frac{Fl}{\nu}$

$$\mathbf{U}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & -\frac{l^3}{\nu^3 EI} \left[\frac{\nu x}{l} - \text{sh} \frac{\nu x}{l} \right] & -\frac{l^2}{\nu^2 EI} \left[1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l} \right] \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{l^2}{\nu^2 EI} \left[1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l} \right] & -\frac{l}{\nu EI} \text{sh} \frac{\nu x}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{ch} \frac{\nu x}{l} & \frac{\nu}{l} \text{sh} \frac{\nu x}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{\nu} \text{sh} \frac{\nu x}{l} & -\text{ch} \frac{\nu x}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{G.40})$$

saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga [ylfmII.m](#) lk 744. Ülekandemaatriks \mathbf{U} (G.39) on survel ja II märgikokkuleppel. Ülekandemaatriks \mathbf{U}_t (G.40) on tõmbel ja II märgikokkuleppel.

Tabel G.4. Koormusvektor tõmbel (pikijõud S ja ristjõud H)

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$		
$\overset{\circ}{u}$	0.0	0.0
$\overset{\circ}{w}$	$-\frac{ql^4}{\nu^4 EI} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu x}{l} \right)^2 - \text{ch} \frac{\nu x}{l} \right]$	$-\frac{ql^4}{\nu^5 EI} \left[\frac{\nu x}{l} - \frac{1}{6} \left(\frac{\nu x}{l} \right)^3 - \text{sh} \frac{\nu x}{l} \right]$
$\overset{\circ}{\varphi}_y$	$-\frac{ql^3}{\nu^3 EI} \left[\frac{\nu x}{l} - \text{sh} \frac{\nu x}{l} \right]$	$-\frac{ql^3}{\nu^4 EI} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu x}{l} \right)^2 - \text{ch} \frac{\nu x}{l} \right]$
$\overset{\circ}{S}_x$	0.0	0.0
$\overset{\circ}{H}_z$	$-\frac{ql}{\nu} \text{sh} \frac{\nu x}{l}$	$-\frac{ql}{\nu^2} \left[1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l} \right]$
$\overset{\circ}{M}_y$	$-\frac{ql^2}{\nu^2} \left[1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l} \right]$	$-\frac{ql^2}{\nu^3} \left[\frac{\nu x}{l} - \text{sh} \frac{\nu x}{l} \right]$
$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$		
$\overset{\circ}{u}$	0.0	0.0
$\overset{\circ}{w}$	$-\frac{\alpha_t \Delta t}{h} \frac{l^2}{\nu^2} \left[1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l} \right]$	$\left[\frac{\nu}{l} (x - a) - \text{sh} \frac{\nu}{l} (x - a) \right] \frac{Fl^3}{EI\nu^3}$
$\overset{\circ}{\varphi}_y$	$-\frac{\alpha_T \Delta T}{h} \frac{l^2}{\nu^2} \text{sh} \frac{\nu x}{l}$	$-\left[\text{ch} \frac{\nu}{l} (x - a) - 1 \right] \frac{Fl^2}{EI\nu^2}$
$\overset{\circ}{S}_x$	0.0	0.0
$\overset{\circ}{H}_z$	$-\frac{\alpha_T \Delta T}{h} EI \frac{\nu}{l} \text{sh} \frac{\nu x}{l}$	$-F$
$\overset{\circ}{M}_y$	$-\frac{\alpha_T \Delta T}{h} EI \left[1 - \text{ch} \frac{\nu x}{l} \right]$	$-\left[\text{sh} \frac{\nu}{l} (x - a) \right] \frac{Fl}{\nu}$

Ülekandevõrrandid (G.28) saab kirjutada lühemal kujul

$$\widehat{\mathbf{IU}} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (\text{G.41})$$

kus maatriksi $\widehat{\mathbf{IU}}$ saab koostada GNU Octave'i funktsiooniga [ysplvmhvII.m](#) lk 746, milles on kasutatud funktsiooni [ysplvmhvII.m](#) lk 743. Need funktsioonid sisaldavad nii survet kui ka tõmmet.

Koormusvektorid jaotatud koormusest ja koondatud jõust arvutame GNU Octave'i funktsioonidega vastavalt [ylqvII.m](#) lk 744 ja [ylfhvzII.m](#) lk 743. Need funktsioonid sisaldavad nii survet kui ka tõmmet.

Koormusvektorite tabelites on kasutatud õpikutes [Krä91c], [Bor79a] toodud avaldisi.

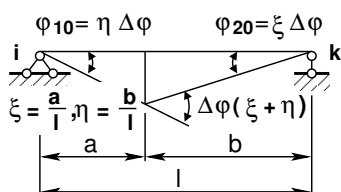
H. Põhivalemite tabelid

Järgnevate tabelite koostamisel on kasutatud õpikutes [Rää75], [EP67], [Krä90] ja [Bor79a] toodud andmeid.

H.1 Deformatsioonimeetod

Esimest järku teooria deformatsioonimeetodi põhivalemite tabelites on varda elastse joone ja pöördenurga katkevuse valemid kinnitusemomendi leidmiseks.

Tala elastse joone pöördenurga katkevusest $\Delta\varphi$ tekkivad kinnitusemomendid leiame pöördenurkade φ_{10} ja φ_{20} abil (joonis H.1)

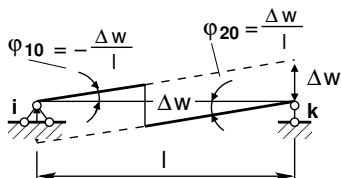


Joonis H.1. Pöördenurga katkevus $\Delta\varphi$

$$M_{ik}^0 = -\frac{4EI}{l}\varphi_{10} + \frac{2EI}{l}\varphi_{20} = \frac{2EI}{l} \frac{(-2b + l - b)}{l} \Delta\varphi = 2\frac{EI}{l} \left(l - \frac{3b}{l}\right) \Delta\varphi \quad (\text{H.1})$$

Avaldis (H.1) vastab I märgikokkuleppele.

Tala elastse joone katkevusest Δw tekkivad kinnitusemomendid leiame pöördenurkade φ_{10} ja φ_{20} abil (joonis H.2)

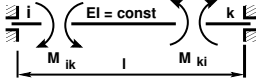
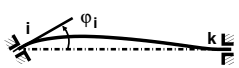


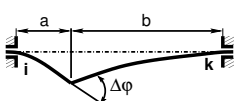
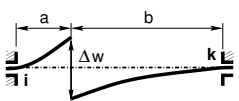
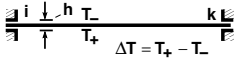


Joonis H.2. Elastse joone katkevus Δw

$$M_{ik}^0 = M_{ki}^0 = -\frac{4EI}{l}\varphi_{10} + \frac{2EI}{l}\varphi_{20} = \frac{4EI}{l} \frac{\Delta w}{l} + \frac{2EI}{l} \frac{\Delta w}{l} = 6\frac{EI}{l} \frac{\Delta w}{l} \quad (\text{H.2})$$

Avaldis (H.2) vastab I märgikokkuleppele.

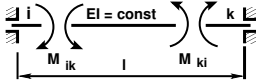



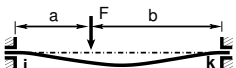

Tabel H.1. Jäikade tugeodega varda toemomendid*

Koormus	
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} 4\varphi_i$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} 2\varphi_i$
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} 2\varphi_k$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} 4\varphi_k$
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} 6\vartheta_{ik}$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} 6\vartheta_{ik}$
	$M_{ik} = -\frac{EI}{l} \left[2\frac{a}{l} + 4\frac{b}{l} \right] \Delta\varphi = -2\frac{EI}{l} \left(1 - 3\frac{b}{l} \right) \Delta\varphi$
	$M_{ki} = -\frac{EI}{l} \left[4\frac{a}{l} + 2\frac{b}{l} \right] \Delta\varphi = 2\frac{EI}{l} \left(1 - 3\frac{a}{l} \right) \Delta\varphi$
	$M_{ik} = -6\frac{EI}{l} \frac{1}{l} \Delta w$
	$M_{ki} = -6\frac{EI}{l} \frac{1}{l} \Delta w$
	$M_{ik} = EI \frac{\alpha_T \Delta T}{h}$
	$M_{ki} = -EI \frac{\alpha_T \Delta T}{h}$

* Tabelis *H.1* esitatud valemite kehtib kontaktjõudude määramisel teine märgikokkuleppe (joonis *1.19*). Teise märgikokkuleppe puhul

- jäikade sõlmede pöörded φ_i , φ_k ja momendid M_{ik} , M_{ki} on positiivsed vastupidi kellaosutite liikumise suunale
- varda pöörde ϑ_{ik} positiivne suund on kellaosutite liikumise suunas [KM04] lk 199, [ME09].

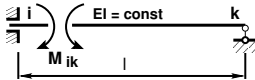
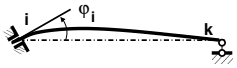

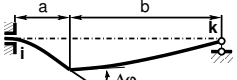
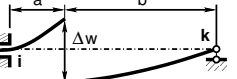


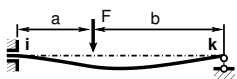
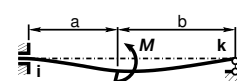

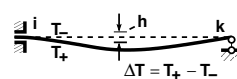
Tabel H.2. Jäikade tugegeda varda toemomendid*

Koormus	
	$M_{ik} = \frac{ql^2}{12}$
	$M_{ki} = -\frac{ql^2}{12}$
	$M_{ik} = \frac{ql^2}{20}$
	$M_{ki} = -\frac{ql^2}{30}$
	$M_{ik} = \frac{ql^2}{30}$
	$M_{ki} = -\frac{ql^2}{20}$
	$M_{ik} = \frac{a}{l} \left(\frac{b}{l}\right)^2 Fl$
	$M_{ki} = -\left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{b}{l} Fl$
	$M_{ik} = \frac{b}{l} \left(3\frac{a}{l} - 1\right)$
	$M_{ki} = \frac{a}{l} \left(3\frac{b}{l} - 1\right)$

* Tabelis H.2 esitatud valemities kehtib kontaktjõudude määramisel teine märgikokkuleppe (joonis 1.19). Teise märgikokkuleppe puhul

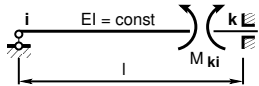
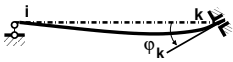

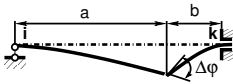
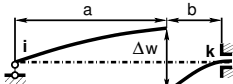
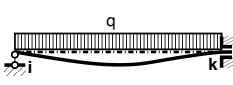

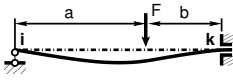
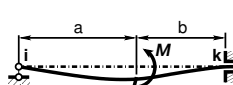

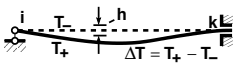
- jäikade sõlmede pöörded φ_i , φ_k ja momendid M_{ik} , M_{ki} on positiivsed vastupidi kellaosutite liikumise suunale
- varda pöörde ϑ_{ik} positiivne suund on kellaosutite liikumise suunas [KM04] lk 199, [ME09].

Tabel H.3. Jäiga ja liigendtoega varda toemoment*

Koormus	
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} 3\varphi_i$
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} 3\vartheta_{ik}$
	$M_{ik} = \frac{3EI}{l} \frac{b}{l} \Delta\varphi$
	$M_{ik} = -\frac{3EI}{l^2} \Delta w$
	$M_{ik} = \frac{ql^2}{8}$
	$M_{ik} = \frac{l^2}{120} (14q_v + q_p), \quad q_p \geq q_v$ $M_{ik} = \frac{l^2}{120} (7q_p + 8q_v), \quad q_v \geq q_p$
	$M_{ik} = \frac{1}{2} \frac{b}{l} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right] Fl$
	$M_{ik} = \frac{1}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right] M$
	$M_{ik} = \frac{1}{2} M$
	$M_{ik} = \frac{3}{2} EI \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$

* Tabelis H.3 esitatud valemities kehtib kontaktjõudude määramisel teine märgikokkulepe (joonis 1.19).

Tabel H.4. Liigend ja jäiga toega varda toemoment*

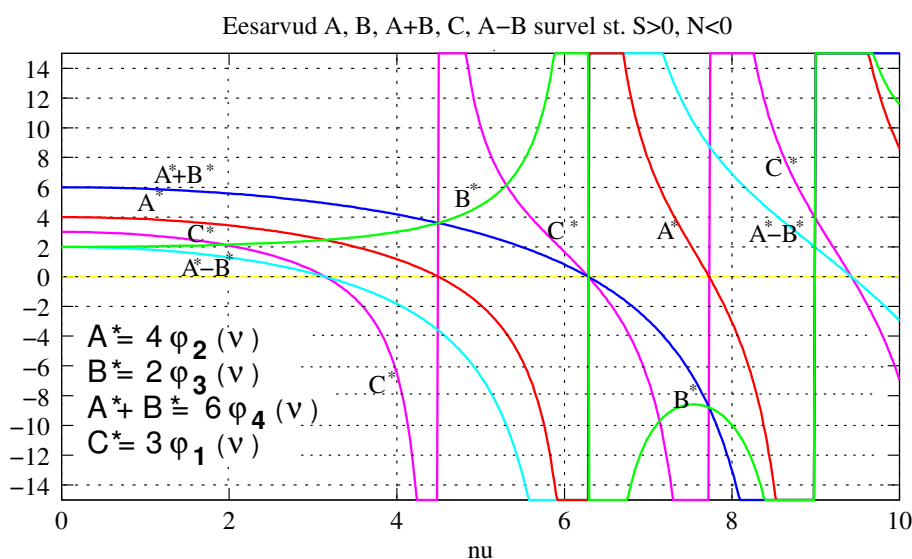
Koormus	
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} 3\varphi_k$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} 3\delta_{ik}$
	$M_{ki} = -\frac{3EI}{l} \frac{a}{l} \Delta\varphi$
	$M_{ki} = -\frac{3EI}{l^2} \Delta w$
	$M_{ki} = -\frac{ql^2}{8}$
	$M_{ki} = -\frac{l^2}{120} (14q_p + q_v), \quad q_v \geq q_p$ $M_{ki} = -\frac{l^2}{120} (7q_v + 8q_p), \quad q_p \geq q_v$
	$M_{ki} = \frac{1}{2} \frac{a}{l} \left[\left(\frac{a}{l} \right)^2 - 1 \right] Fl$
	$M_{ki} = \frac{1}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right] M$
	$M_{ki} = \frac{1}{2} M$
	$M_{ki} = -\frac{3}{2} EI \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$

*Tabelis H.4 esitatud valemities kehtib kontaktjõudude määramisel teine märgi-kokkulepe (joonis 1.19).

H.2 Deformatsiooni- ja jõumeetod II järku teoorias

Kõnesolevas lisas on toodud varda teist järku teooria deformatsiooni- ja jõumeetodi põhivalemid. Varda tunnusarv ν (sks Stabkennzahl [Krü91a]) on parameeter

$$\nu = l\sqrt{\frac{S}{EI}} \quad (\text{H.3})$$



Joonis H.3. Eesarvud A^* , B^* , C^* , A^*+B^* survel

Kui puudub pikijõud, st $S = 0$, siis eesarvude avaldistes (tabel H.5) piirile minnes $\lim_{\nu \rightarrow 0}$, saame deformatsioonimeetodis tuntud suurused

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow 0} A^* &= 4, & \lim_{\nu \rightarrow 0} B^* &= 2, & \lim_{\nu \rightarrow 0} C^* &= 3 \\ \lim_{\nu \rightarrow 0} \varphi_1(\nu) &= 1, & \lim_{\nu \rightarrow 0} \varphi_2(\nu) &= 1, & \lim_{\nu \rightarrow 0} \varphi_3(\nu) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

Juhul kui valemis (H.3) vaadeldakse jõudu S tõmbejõuna, tuleb parameeter ν asendada $i\nu$ -ga

$$\begin{aligned} (i\nu)^2 &= i^2\nu^2 = -\nu^2 \\ \cos(i\nu)^2 &= \text{ch } \nu \\ \sin(i\nu)^2 &= i \text{ sh } \nu \\ \tan(i\nu)^2 &= i \text{ th } \nu \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

st trigonomeetrilised funktsioonid lähevad üle hüperboolseteks funktsioonideks. Eesarvud (sks k Vorzahlen [Bor79a]) on toodud tabelis H.5. Eesarvude leidmiseks kasutame GNU Octave'i programmi `eesarvud.m` lk 740.

Tabel H.5. Eesarvud

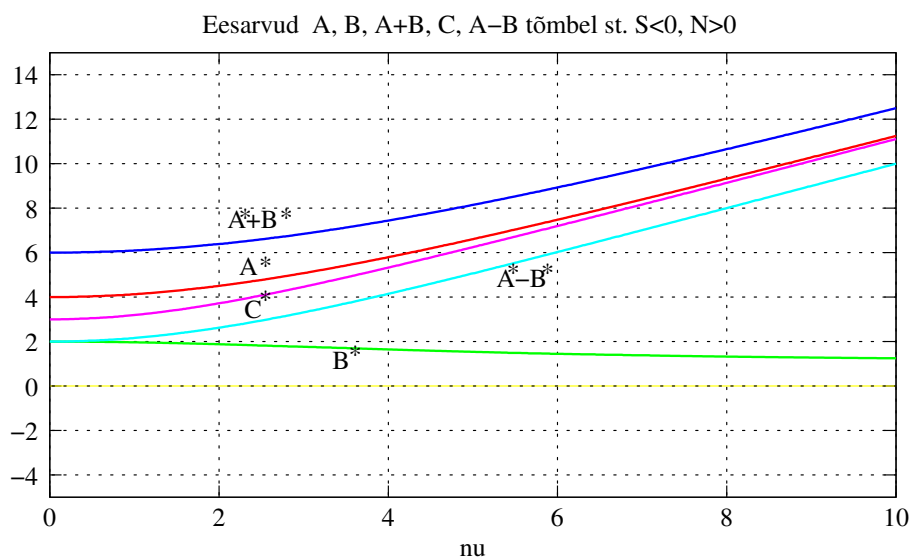
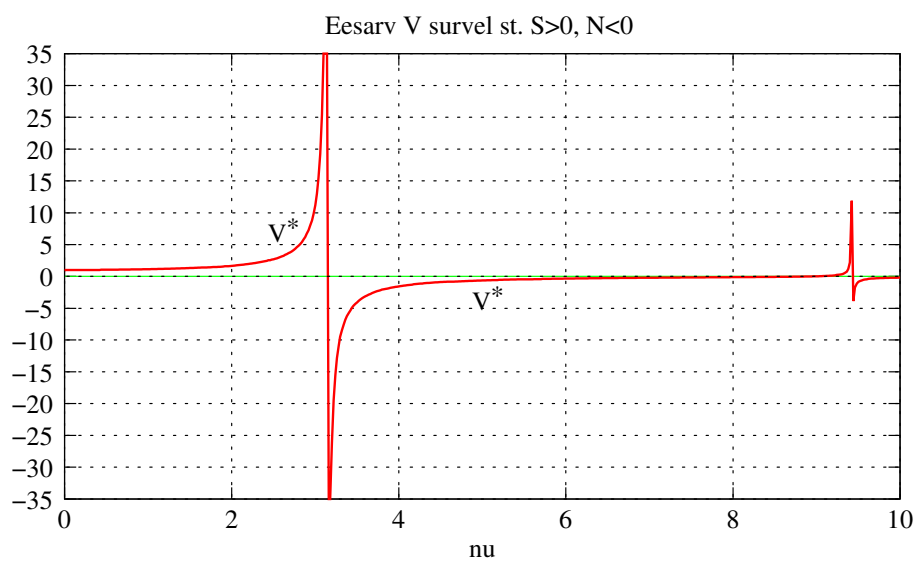
<i>Funktsioon</i>	<i>S kui survejõud</i>	<i>S kui tõmbejõud</i>
$A^* = 4\varphi_2(\nu)$	$\frac{\nu(\sin \nu - \nu \cos \nu)}{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu}$	$\frac{\nu(\operatorname{sh} \nu - \nu \operatorname{ch} \nu)}{2(\operatorname{ch} \nu - 1) - \nu \operatorname{sh} \nu}$
$B^* = 2\varphi_3(\nu)$	$\frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu}$	$\frac{\nu(\nu - \operatorname{sh} \nu)}{2(\operatorname{ch} \nu - 1) - \nu \operatorname{sh} \nu}$
$A^* + B^* = 6\varphi_4(\nu)$	$\frac{\nu^2(1 - \cos \nu)}{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu}$	$\frac{\nu^2(1 - \operatorname{ch} \nu)}{2(\operatorname{ch} \nu - 1) - \nu \operatorname{sh} \nu}$
$C^* = 3\varphi_1(\nu)$	$\frac{\nu^2 \sin \nu}{\sin \nu - \nu \cos \nu}$	$\frac{\nu^2 \operatorname{sh} \nu}{\operatorname{ch} \nu - \operatorname{sh} \nu}$
$A^* - B^*$	$\frac{\nu(1 + \cos \nu)}{\sin \nu}$	$\frac{\nu(1 + \operatorname{ch} \nu)}{\operatorname{sh} \nu}$
V^*	$12 \frac{2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu}{\nu^2 \sin \nu}$	$12 \frac{2(1 - \operatorname{ch} \nu) - \nu \operatorname{sh} \nu}{\nu^2 \operatorname{sh} \nu}$
α^*	$\frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{\nu} - \cot \nu \right]$	$\frac{1}{\nu} \left[\operatorname{coth} \nu - \frac{1}{\nu} \right]$
β^*	$\frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{\sin \nu} - \frac{1}{\nu} \right]$	$\frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \nu} - \frac{1}{\nu} \right]$
$\alpha^* = \frac{1}{C^*}, \beta^* = \frac{B^*}{A^* C^*}, \frac{1}{C^*} = \frac{A^*}{A^{*2} - B^{*2}}$		
$\eta_1(\nu) = \varphi_1(\nu) - \frac{\nu^2}{3}, \quad \eta_2(\nu) = \varphi_4(\nu) - \frac{\nu^2}{12}$		

Pikipõikpaine parandustegurite $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$, $\varphi_4(\nu)$, $\eta_1(\nu)$, $\eta_2(\nu)$ leidmiseks on õpikutes [EP67] lk 598 ja [SALŠ84] lk 407 toodud tabelid. Tabelite kasutamisel peab arvestama, et suurte arvude väikeste vahede lineaarne interpolatsioon¹ võib põhjustada vigu. Nende parandustegurite arvutamiseks on GNU Octave'i funktsioon [fi_ja_eta.m](#) lk 741. Siin funktsiooni `fi_ja_eta(mark, nu)` argument „mark” on survel ‘-’ ja tõmbel ‘+’ ning „nu” – varda tunnusarvu arvuline väärtus. Funktsioon väljastab parandustegurid järgmises järjekorras: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \eta_1, \eta_2$.

Eesarve $\nu, A^*, B^*, A + B^*, C^*, A - B^*, V^*, \alpha^*, \beta^*$ saab leida GNU Octave'i funktsiooniga [eesarv.m](#) lk 741. Programm väljastab eesarvud järgmises järjekorras: $\nu, A^*, B^*, A + B^*, C^*, A - B^*, V^*, \alpha^*, \beta^*$.

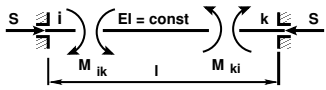
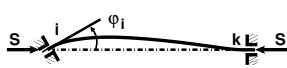

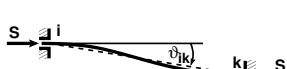
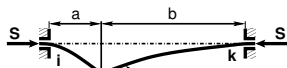
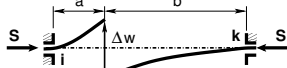


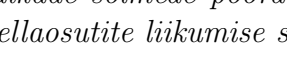


Eesarvude graafika koostab GNU Octave'i programm [eesagraf.m](#) lk 741.

¹Interpoleerimine, funktsiooni väärtuste hindamine nende punktide vahel, kus selle funktsiooni või tema tuletiste väärtused on teada.

Joonis H.4. Eesarvud A^*, B^*, C^*, A^*+B^* tõmbelJoonis H.5. Eesarv V^* survel

Järgnevate tabelite koostamisel on kasutatud loengukonspektis [Bor79a] toodud andmeid, mis on viidud vastavusse teise märgikokkuleppega.

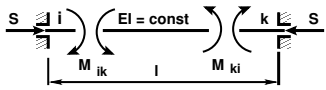




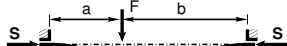
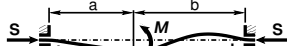
Tabel H.6. Jäikade tugegeda varda toemomendid survel

Koormus	
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} A^* \varphi_i$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} B^* \varphi_i$
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} B^* \varphi_k$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} A^* \varphi_i$
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} (A^* + B^*) \vartheta_{ik}$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} (A^* + B^*) \vartheta_{ik}$
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} \left[B^* \frac{\sin \frac{\nu a}{l}}{\sin \nu} + A^* \frac{\sin \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \right] \Delta \varphi$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} \left[A^* \frac{\sin \frac{\nu a}{l}}{\sin \nu} + B^* \frac{\sin \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \right] \Delta \varphi$
	$M_{ik} = -\frac{EI}{l^2} \frac{\nu}{\sin \nu} \left[A^* \cos \frac{\nu b}{l} + B^* \cos \frac{\nu a}{l} \right] \Delta w$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l^2} \frac{\nu}{\sin \nu} \left[A^* \cos \frac{\nu a}{l} + B^* \cos \frac{\nu b}{l} \right] \Delta w$
	$M_{ik} = EI \frac{\alpha_T \Delta T}{h}$
	$M_{ki} = EI \frac{\alpha_T \Delta T}{h}$

Tabelis H.6 esitatud valemities kehtib teine märgikokkuleppe. Teise märgikokkuleppe puhul

- jäikade sõlmede pöörded φ_i , φ_k ja momendid M_{ik} , M_{ki} on positiivsed vastupidi kellaosutite liikumise suunale
- varda pöörde ϑ_{ik} positiivne suund on kellaosutite liikumise suunas.

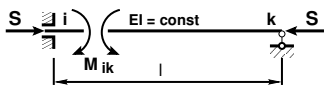
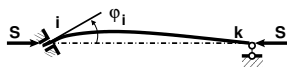

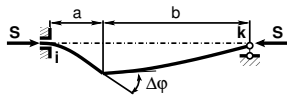
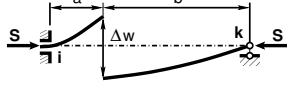
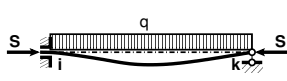

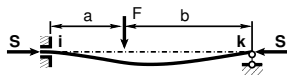
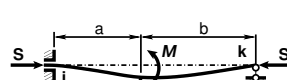
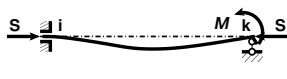
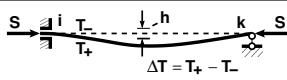
Tabel H.7. Jäikade tugegeda varda toemomendid survel

Koormus	
	$M_{ik} = (A^* - B^*) V^* \frac{ql^2}{24}$
	$M_{ki} = -(A^* - B^*) V^* \frac{ql^2}{24}$
	$M_{ik} = \left[\frac{1}{2} (A^* - B^*) V^* + 2 \frac{6-(A^*+B^*)}{\nu^2} \right] \frac{ql^2}{24}$
	$M_{ki} = - \left[\frac{1}{2} (A^* - B^*) V^* - 2 \frac{6-(A^*+B^*)}{\nu^2} \right] \frac{ql^2}{24}$
	$M_{ik} = \left[\frac{1}{2} (A^* - B^*) V^* - 2 \frac{6-(A^*+B^*)}{\nu^2} \right] \frac{ql^2}{24}$
	$M_{ki} = - \left[\frac{1}{2} (A^* - B^*) V^* + 2 \frac{6-(A^*+B^*)}{\nu^2} \right] \frac{ql^2}{24}$
	$M_{ik} = \frac{ql^2}{60} (3q_v + 2q_p)$
	$M_{ki} = - \frac{ql^2}{60} (3q_v + 2q_p)$
	$M_{ik} = \frac{1}{\nu^2} \left[A^* \left(\frac{\sin \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} - \frac{b}{l} \right) - B^* \left(\frac{\sin \frac{\nu a}{l}}{\sin \nu} - \frac{a}{l} \right) \right] Fl$
	$M_{ki} = - \frac{1}{\nu^2} \left[-B^* \left(\frac{\sin \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} - \frac{b}{l} \right) + A^* \left(\frac{\sin \frac{\nu a}{l}}{\sin \nu} - \frac{a}{l} \right) \right] Fl$
	$M_{ik} = - \frac{1}{\nu^2} \left[A^* \left(1 - \nu \frac{\cos \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \right) + B^* \left(1 - \nu \frac{\cos \frac{\nu a}{l}}{\sin \nu} \right) \right] M$
	$M_{ki} = - \frac{1}{\nu^2} \left[B^* \left(1 - \nu \frac{\cos \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \right) + A^* \left(1 - \nu \frac{\cos \frac{\nu a}{l}}{\sin \nu} \right) \right] M$

Tabelis H.7 esitatud valemities kehtib teine märgikokkuleppe. Teise märgikokkuleppe puhul

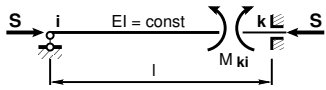
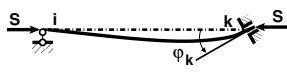

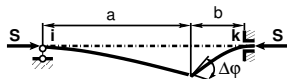
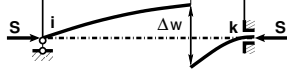
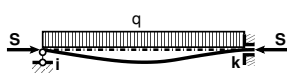

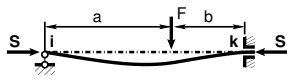
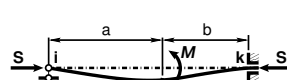

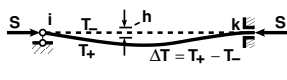
- jäikade sõlmede pöörded φ_i , φ_k ja momendid M_{ik} , M_{ki} on positiivsed vastupidi kellaosutite liikumise suunale
- varda pöörde ϑ_{ik} positiivne suund on kellaosutite liikumise suunas.

Tabel H.8. Jäiga ja liigendtoega varda toemoment survel

<p><i>Koormus</i></p>	
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} C^* \varphi_i$
	$M_{ik} = -\frac{EI}{l} C^* \vartheta_{ik}$
	$M_{ik} = \frac{EI}{l} C^* \frac{\sin \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \Delta \varphi$
	$M_{ik} = -\frac{EI}{l} C^* \frac{\nu \cos \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \Delta w$
	$M_{ik} = C^* V^* \frac{ql^2}{24}$
	$M_{ik} = \left[C^* V^* q_p + 8 \frac{3-V^*}{\nu^2} (q_v - q_p) \right] \frac{l^2}{24}$
	$M_{ik} = C^* \frac{1}{\nu^2} \left[\frac{\sin \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} - \frac{b}{l} \right] Fl$
	$M_{ik} = C^* \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{\nu} - \frac{\cos \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \right] M$
	$M_{ik} = -\frac{B^*}{A^*} M$
	$M_{ik} = C^* \frac{1}{\nu} \tan \frac{\nu}{2} EI \frac{\alpha_T \Delta T}{h}$

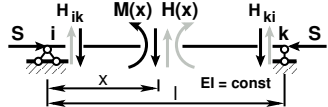
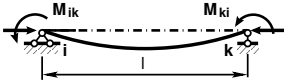

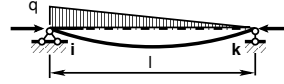
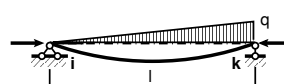
Tabelis H.8 esitatud valemities kehtib *teine märgikokkulepe*.

Tabel H.9. Liigend ja jäiga toega varda toemoment survel

<i>Koormus</i>	
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} C^* \varphi_i$
	$M_{ki} = -\frac{EI}{l} C^* \vartheta_{ik}$
	$M_{ki} = \frac{EI}{l} C^* \frac{\sin \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \Delta \varphi$
	$M_{ki} = -\frac{EI}{l} C^* \frac{\nu \cos \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \Delta w$
	$M_{ki} = C^* V^* \frac{ql^2}{24}$
	$M_{ki} = \left[C^* V^* q_p + 8 \frac{3-V^*}{\nu^2} (q_v - q_p) \right] \frac{l^2}{24}$
	$M_{ki} = C^* \frac{1}{\nu^2} \left[\frac{\sin \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} - \frac{b}{l} \right] Fl$
	$M_{ki} = -C^* \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{\nu} - \frac{\cos \frac{\nu b}{l}}{\sin \nu} \right] M$
	$M_{ki} = -\frac{B^*}{A^*} M$
	$M_{ki} = C^* \frac{1}{\nu} \tan \frac{\nu}{2} EI \frac{\alpha_T \Delta T}{h}$

Tabelis H.9 esitatud valemities kehtib *teine määrgikokkulepe*.

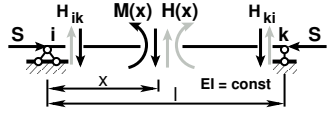
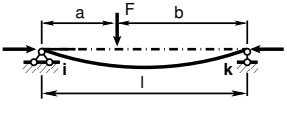
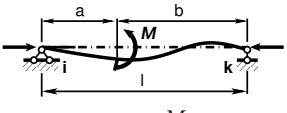
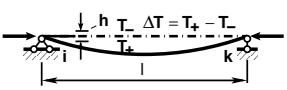
Tabel H.10. Sisejõud surutud vardas

Koormus	
 $\frac{\Delta M}{\Delta x} = -\frac{M_{ik} + M_{ki}}{l}$	$M(x) = M_{ki} \frac{\sin \frac{\nu x}{l}}{\sin \nu} - M_{ik} \frac{\sin(\nu(1 - \frac{x}{l}))}{\sin \nu}$ $Q(x) = \frac{\nu}{l} \left[M_{ik} \frac{\cos(\nu(1 - \frac{x}{l}))}{\sin \nu} + M_{ki} \frac{\cos \frac{\nu x}{l}}{\sin \nu} \right]$
 $H_{ik} = -\frac{ql}{2}$ $H_{ki} = -\frac{ql}{2}$	$M(x) = \frac{ql^2}{\nu^2} \left\{ \frac{1}{\sin \nu} \left[\sin \frac{\nu x}{l} + \sin \left(\nu \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right) \right] - 1 \right\}$ $Q(x) = \frac{ql}{\nu} \frac{1}{\sin \nu} \left[\cos \frac{\nu x}{l} - \cos \left(\nu \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right) \right]$
 $H_{ik} = -\frac{ql}{3}$ $H_{ki} = -\frac{ql}{6}$	$M(x) = \frac{ql^2}{\nu^2} \left[\frac{1}{\sin \nu} \sin \left(\nu \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right) - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]$ $Q(x) = -\frac{ql}{\nu^2} \left[\frac{\nu}{\sin \nu} \cos \left(\nu \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right) - 1 \right]$
 $H_{ik} = -\frac{ql}{6}$ $H_{ki} = -\frac{ql}{3}$	$M(x) = \frac{ql^2}{\nu^2} \left[\frac{1}{\sin \nu} \sin \left(\nu \frac{x}{l} \right) - \frac{x}{l} \right]$ $Q(x) = \frac{ql}{\nu^2} \left[\frac{\nu}{\sin \nu} \cos \left(\nu \frac{x}{l} \right) - 1 \right]$

Tabelis H.10 esitatud valemities $M(x)$ ja M_{ik} suunad vastavad teisele märgikokkuleppele.

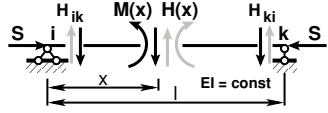
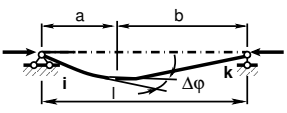
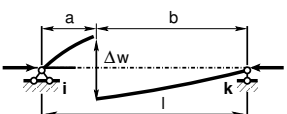
Varda koormamisel momentidega M_{ik} ja M_{ki} saame leida momendi $M(x)$ ning põikjõu $Q(x)$ varda pikipõikpindel GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni [mxriikki.m](#) lk 741 abil. Ühtlaselt jaotatud koormuse puhul saame leida momendi $M(x)$ ning põikjõu $Q(x)$ GNU Octave'is kirjutatud funktsiooni [mxq.m](#) lk 741 abil.

Tabel H.11. Sisejõud surutud vardas (järg 1)

<i>Koormus</i>	
 $H_{ik} = -F \frac{b}{l}$ $H_{ki} = -F \frac{a}{l}$	$0 \leq x \leq a$
	$M(x) = Fl \frac{1}{\nu \sin \nu} \sin \frac{\nu b}{l} \sin \frac{\nu x}{l}$
	$Q(x) = F \frac{1}{\sin \nu} \sin \frac{\nu b}{l} \cos \frac{\nu x}{l}$
	$a \leq x \leq l$
	$M(x) = Fl \frac{1}{\nu \sin \nu} \sin \frac{\nu a}{l} \sin \left[\nu \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]$
	$Q(x) = -F \frac{1}{\nu \sin \nu} \sin \frac{\nu a}{l} \cos \left[\nu \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]$
 $H_{ik} = -\frac{M}{L}$ $H_{ki} = \frac{M}{L}$	$0 \leq x \leq a$
	$M(x) = M \frac{1}{\sin \nu} \cos \frac{\nu b}{l} \sin \frac{\nu x}{l}$
	$Q(x) = M \frac{\nu}{l \sin \nu} \cos \frac{\nu b}{l} \cos \frac{\nu x}{l}$
	$a \leq x \leq l$
	$M(x) = -M \frac{1}{\sin \nu} \cos \frac{\nu a}{l} \sin \left[\nu \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]$
	$Q(x) = M \frac{\nu}{l \sin \nu} \cos \frac{\nu a}{l} \cos \left[\nu \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]$
 $H_{ik} = 0$ $H_{ki} = 0$	$M(x) = EI \frac{\alpha_T \Delta T}{h} \left[\tan \frac{\nu}{2} \sin \frac{\nu x}{l} + \cos \frac{\nu x}{l} - 1 \right]$
	$Q(x) = EI \frac{\alpha_T \Delta T}{h} \frac{\nu}{l} \left[\tan \frac{\nu}{2} \cos \frac{\nu x}{l} - \sin \frac{\nu x}{l} \right]$

Tabelis H.11 esitatud valemities $M(x)$ ja M_{ik} suunad vastavad teisele märgikokkuleppele.

Tabel H.12. Sisejõud surutud vardas (järg 2)

Koormus	
 $H_{ik} = 0$ $H_{ki} = 0$	$0 \leq x \leq a$ $M(x) = EI \frac{\nu}{l} \frac{1}{\sin \nu} \sin \frac{\nu b}{l} \sin \frac{\nu x}{l} \Delta \varphi$ $Q(x) = EI \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \frac{1}{\sin \nu} \sin \frac{\nu b}{l} \cos \frac{\nu x}{l} \Delta \varphi$ $a \leq x \leq l$ $M(x) = EI \frac{\nu}{l} \frac{1}{\sin \nu} \sin \frac{\nu a}{l} \sin \left[\nu \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right] \Delta \varphi$ $Q(x) = -EI \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \frac{1}{\sin \nu} \sin \frac{\nu a}{l} \cos \left[\nu \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right] \Delta \varphi$
 $H_{ik} = 0$ $H_{ki} = 0$	$0 \leq x \leq a$ $M(x) = -EI \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \frac{1}{\sin \nu} \cos \frac{\nu b}{l} \sin \frac{\nu x}{l} \Delta w$ $Q(x) = -EI \left(\frac{\nu}{l}\right)^3 \frac{1}{\sin \nu} \cos \frac{\nu b}{l} \cos \frac{\nu x}{l} \Delta w$ $a \leq x \leq l$ $M(x) = EI \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \frac{1}{\sin \nu} \cos \frac{\nu a}{l} \sin \left[\nu \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right] \Delta w$ $Q(x) = -EI \left(\frac{\nu}{l}\right)^3 \frac{1}{\sin \nu} \cos \frac{\nu a}{l} \cos \left[\nu \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right] \Delta w$

Tabelis H.12 esitatud valemities vastavad $M(x)$ ja M_{ik} suunad teisele märgikokkuleppele.

I. Arvutiprogrammid

Arvutiprogrammide baas URL-id: `file:///D:/`, `file:///E:/`, `file:///F:/`, `file:///S:/`,
`file:///Z:/`, `file:///media/cdrom0/`, `file:///media/E_OPE/`.

Arvutiprogrammide kasutamise kohta loe *eessõna* lk 3.

I.1 Tala arvutus

Programm I.1 (lihttala.m)¹ 59 – arvutab sisejõudude Q ja M jaotuse tala sildes.
Kasutab funktsioone:

$jaotusteArv(L, Fjoud1, qkoormus1)$ ² – leiab suurima ühisteguri
 $talaFqSj(NT, L, MA, ML, Fjoud, qkoormus)$ ³ – sisejõudude jaotus talas
 $tabelXQM(TSjT, pealdis)$ ⁴ – sisejõudude jaotus talas tabelina.

Programm I.2 (talaRajajoud.m)⁵ – arvutab sisejõudude Q ja M jaotuse tala sildes.
Kasutab funktsioone:

$ZtalaFqSc(L, EIsuhe, Fjoud, qkoormus)$ ⁶ – koormusvektor
 $Ulintala_Imk(x, GAr, EI)$ ⁷ – ülekan demaatriks
 $InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ⁸ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN .

Programm I.3 (talaRajaSiirded.m)⁹ 61 – arvutab sisejõudude ja siirete jaotuse tala sildes. Kasutab funktsioone:

$Ulintala_ImkSc(L, EIsuhe, GAr, suhe)$ ¹⁰ – ülekan demaatriks
 $ZtalaFqSc(L, EIsuhe, Fjoud, qkoormus)$ ¹¹ – koormusvektor
 $spUlintala_ImkSc(L, EIsuhe, GAr, suhe)$ ¹² – ülekan demaatriks hõreda maatriksina

¹ `./octaveProgramm/ lihttala.m`
² `./octaveProgramm/ jaotusteArv.m`
³ `./octaveProgramm/ talaFqSj.m`
⁴ `./octaveProgramm/ tabelXQM.m`
⁵ `./octaveProgramm/ talaRajajoud.m`
⁶ `./octaveProgramm/ ZtalaFqSc.m`
⁷ `./octaveProgramm/ Ulintala_Imk.m`
⁸ `./octaveProgramm/ InsertBtoA.m`
⁹ `./octaveProgramm/ talaRajaSiirded.m`
¹⁰ `./octaveProgramm/ Ulintala_ImkSc.m`
¹¹ `./octaveProgramm/ ZtalaFqSc.m`
¹² `./octaveProgramm/ spUlintala_ImkSc.m`

$InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ¹³ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN ,
 $spInsertBtoA(spA, IM, JN, spB)$ ¹⁴ – asetab hõredasse maatriksisse spA alates reast
 IM ja veerust JN hõreda maatriksi spB
 $spIN(N, M, Av)$ ¹⁵ – kordajate sisestamine hõredasse maatriksisse
 $jaotusteArv(L, Fjoud1, qkoormus1)$ ¹⁶ – leiab suurima ühisteguri
 $talaSiireFqSc(NT, L, EIsuhe, GArsohu, Walg, Fjoud, qkoormus)$ ¹⁷ – sisejõudude ja
siirete jaotus talas
 $tabelXWfiQM(TSjT, pealdis)$ ¹⁸ – sisejõudude ja siirete jaotus talas tabelina
 $minMaxGrafSiirded(TSjT)$ ¹⁹ – minimaalsed ning maksimaalsed sisejõudude ja
siirete väärtused graafikute telgede valimiseks.

Programm I.4 (GerberiTala.m)²⁰ 100 – arvutab sisejõudude jaotuse tala silletes.
Kasutab funktsioone:

$jaotusteArv(L, Fjoud1, qkoormus1)$ ²¹ – leiab suurima ühisteguri
 $talaFqQaMa(NT, L, QA, MA, Fjoud1, qkoormus1)$ ²² – sisejõudude jaotus talas
 $tabelXQM(TSjT, pealdis)$ ²³ – sisejõudude jaotus talas tabelina
 $minMaxGrafSisejoud(TSjT)$ ²⁴ – minimaalsed ning maksimaalsed sisejõudude
väärtused graafikute telgede valimiseks

Programm I.5 (spIN(N, M, Av).m)²⁵ – sisestab hõreda maatriksi elemente. Ka-
sutab globaalseid muutujaid:

$global\ sv;$ – globaalne muutuja
 $global\ ins;$ – globaalne muutuja
 $global\ jms;$ – globaalne muutuja
 $global\ jrknrS;$ – globaalne muutuja

kasutab funktsiooni:

$svinjm(N, M, Av, Jrknr)$ ²⁶ – aitab sisestada elemente hõredasse maatriksisse

Programm I.6 (spGerberiTala.m)²⁷ 104 – arvutab sisejõudude jaotuse tala silletes.
Kasutab hõredat maatriksit ja funktsioone:

¹³ ./octaveProgrammide/InsertBtoA.m

¹⁴ ./octaveProgrammide/spInsertBtoA.m

¹⁵ ./octaveProgrammide/spIN.m

¹⁶ ./octaveProgrammide/jaotusteArv.m

¹⁷ ./octaveProgrammide/talaSiireFqSc.m

¹⁸ ./octaveProgrammide/tabelXWfiQM.m

¹⁹ ./octaveProgrammide/minMaxGrafSiirded.m

²⁰ ./octaveProgrammide/GerberiTala.m

²¹ ./octaveProgrammide/jaotusteArv.m

²² ./octaveProgrammide/talaFqQaMa.m

²³ ./octaveProgrammide/tabelXQM.m

²⁴ ./octaveProgrammide/minMaxGrafSisejoud.m

²⁵ ./octaveProgrammide/spIN.m

²⁶ ./octaveProgrammide/svinjm.m

²⁷ ./octaveProgrammide/spGerberiTala.m

$spIN(N, M, Av)$ ²⁸ – sisestab hõreda matriksi elemente. Kasutab globaalseid muutujaid:

global svS; – globaalne muutuja

global ins; – globaalne muutuja

global jms; – globaalne muutuja

global jrknrS; – globaalne muutuja

*jaotusteArv(L, Fjoud1, qkoormus1)*²⁹ – leiab suurima ühisteguri

*talaFqQaMa(NT, L, QA, MA, Fjoud1, qkoormus1)*³⁰ – sisejõudude jaotus talas

*tabelXQM(TSjT, pealdis)*³¹ – sisejõudude jaotus talas tabelina

*minMaxGrafSisejoud(TSjT)*³² – minimaalsed ning maksimaalsed sisejõudude väärtused graafikute telgede valimiseks.

Programm I.7 (lihttalaPrbKSjPr.m)³³ 338 – arvutab lihttala sisejõude Q ja M paraboolse jaotusega koormusest. Kasutab funktsiooni:

*lihttalaPrbKSj(NN, l, qk, qc)*³⁴ – arvutab lihttala sisejõude Q ja M paraboolse jaotusega koormusest.

I.2 Kaare arvutus

Programm I.8 (kaarSjPr30.m)³⁵ 128 – arvutab kaare sisejõudude jaotuse ja survejoone. Kasutab funktsioone:

*jaotusteArv(L, Fjoud1, qkoormus1)*³⁶ – leiab suurima ühisteguri

*talaFqSj(NT, L, MA, ML, Fjoud, qkoormus)*³⁷ – sisejõudude jaotus lihttalas

*tabelXQM(TSjT, pealdis)*³⁸ – sisejõudude jaotus vastavas lihttalas tabelina

*kaarPrbSj30(L, Lluk, f, TSj)*³⁹ – sisejõudude jaotus kaares (parabool)

*kaarRngSj30(L, Lluk, f, TSj)*⁴⁰ – sisejõudude jaotus kaares (ring)

*tabelXQMN(SRK, pealdisK)*⁴¹ – sisejõudude jaotus kaares tabelina

*tabelSurveJoon(SRS, pealdisS)*⁴² – survejoone koordinaadid tabelina

*minMaxGrafSisejoud(TSjT)*⁴³ – tala minimaalsed ja maksimaalsed sisejõud

²⁸ ./octaveProgrammide/spIN.m

²⁹ ./octaveProgrammide/jaotusteArv.m

³⁰ ./octaveProgrammide/talaFqQaMa.m

³¹ ./octaveProgrammide/tabelXQM.m

³² ./octaveProgrammide/minMaxGrafSisejoud.m

³³ ./octaveProgrammide/lihttalaPrbKSjPr.m

³⁴ ./octaveProgrammide/lihttalaPrbKSj.m

³⁵ ./octaveProgrammide/kaarSjPr30.m

³⁶ ./octaveProgrammide/jaotusteArv.m

³⁷ ./octaveProgrammide/talaFqSj.m

³⁸ ./octaveProgrammide/tabelXQM.m

³⁹ ./octaveProgrammide/kaarPrbSj30.m

⁴⁰ ./octaveProgrammide/kaarRngSj30.m

⁴¹ ./octaveProgrammide/tabelXQMN.m

⁴² ./octaveProgrammide/tabelSurveJoon.m

⁴³ ./octaveProgrammide/minMaxGrafSisejoud.m

$\text{minMaxGrafSiirded}(SRG')$ ⁴⁴ – kaare minimaalsed ja maksimaalsed sisejõud.

Programm I.9 (kaarSjPrBA.m)⁴⁵ 132 – arvutab kaare sisejõudude jaotuse ja survejoone. Kasutab funktsioone:

$\text{jaotusteArv}(L, Fjoud1, qkoormus1)$ ⁴⁶ – leiab suurima ühisteguri
 $\text{talaFqSj}(NT, L, MA, ML, Fjoud, qkoormus)$ ⁴⁷ – sisejõudude jaotus lihttalas
 $\text{tabelXQM}(TSjT, pealdis)$ ⁴⁸ – sisejõudude jaotus vastavas lihttalas tabelina
 $\text{kaarPrbSj30}(L, Llukk, f, TSj)$ ⁴⁹ – sisejõudude jaotus kaares (parabool)
 $\text{kaarRngSj30}(L, Llukk, f, TSj)$ ⁵⁰ – sisejõudude jaotus kaares (ring)
 $\text{tabelXQMN}(SRK, pealdisK)$ ⁵¹ – sisejõudude jaotus kaares tabelina
 $\text{tabelSurveJoon}(SRS, pealdisS)$ ⁵² – survejoone koordinaadid tabelina
 $\text{minMaxGrafSisejoud}(TSjT)$ ⁵³ – tala minimaalsed ja maksimaalsed sisejõud
 $\text{minMaxGrafSiirded}(SRG')$ ⁵⁴ – kaare minimaalsed ja maksimaalsed sisejõud.

I.3 Sõrestiku arvutus

Programm I.10 (srstkN1.m)⁵⁵ 154 – arvutab staatiliselt määratud sõrestiku varraste sisejõude ja koostab mõjujooned.

Programm I.11 (srstkNBA.m)⁵⁶ 158 – arvutab staatiliselt määratud sõrestiku varraste sisejõude ja koostab mõjujooned.

I.4 Arvutiprogramme siirete arvutamiseks

Programm I.12 (siireNAB.m)⁵⁷ 186 – arvutab murtud varda siirded.

Programm I.13 (siireNAD.m)⁵⁸ 201 – arvutab raami siirded.

⁴⁴ ./octaveProgrammide/minMaxGrafSiirded.m

⁴⁵ ./octaveProgrammide/kaarSjPrBA.m

⁴⁶ ./octaveProgrammide/jaotusteArv.m

⁴⁷ ./octaveProgrammide/talaFqSj.m

⁴⁸ ./octaveProgrammide/tabelXQM.m

⁴⁹ ./octaveProgrammide/kaarPrbSj30.m

⁵⁰ ./octaveProgrammide/kaarRngSj30.m

⁵¹ ./octaveProgrammide/tabelXQMN.m

⁵² ./octaveProgrammide/tabelSurveJoon.m

⁵³ ./octaveProgrammide/minMaxGrafSisejoud.m

⁵⁴ ./octaveProgrammide/minMaxGrafSiirded.m

⁵⁵ ./octaveProgrammide/srstkN1.m

⁵⁶ ./octaveProgrammide/srstkNBA.m

⁵⁷ ./octaveProgrammide/siireNAB.m

⁵⁸ ./octaveProgrammide/siireNAD.m

I.5 Esimest järku teooria ülekandemaatriksid

Programm I.14 (`ylfhlin(baasi0,x,EA,GAr,EJ)`)⁵⁹ 397, 407, 693 – leiab ülekandemaatriksi I järku teoorias, II märgikokkulepe, kus
EA – ristlõike pikijäikus,
GAr – ristlõike nihkejäikus,
EJ – ristlõike paindejäikus,
baasi0 – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

Programm I.15 (`ylTfhlin(baasi0,x,GAr,EJ)`)⁶⁰ – leiab tala ülekandemaatriksi (II mkl) I järku teoorias, II märgikokkulepe, kus
GAr – ristlõike nihkejäikus,
EJ – ristlõike paindejäikus,
baasi0 – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

Programm I.16 (`ylSfhlin(x)`)⁶¹ 444 – leiab ülekandemaatriksi 3 liigendiga raami arvutamiseks, II märgikokkulepe.

Programm I.17 (`ylSTfhlin(x)`)⁶² 453 – leiab ülekandemaatriksi Gerberi tala arvutamiseks, II märgikokkulepe.

Programm I.18 (`yzhqz(baasi0,x,qx,qz,EA,EJ)`)⁶³ 396, 398, 407, 694 – leiab koormusvektori jaotatud koormusest I järku teoorias, II märgikokkuleppe järgi, kus
qx – ühtlaselt jaotatud pikikoormus,
qz – ühtlaselt jaotatud põikkoormus,
EA – ristlõike pikijäikus,
EJ – ristlõike paindejäikus,
baasi0 – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

Programm I.19 (`yzThqz(baasi0,x,qz,EJ)`)⁶⁴ 435, 694 – leiab tala koormusvektori jaotatud koormusest I järku teoorias, II märgikokkuleppe järgi, kus
qz – ühtlaselt jaotatud põikkoormus,
EA – ristlõike pikijäikus,
EJ – ristlõike paindejäikus,
baasi0 – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

⁵⁹ `./octaveProgramm/ylfhlin.m`

⁶⁰ `./octaveProgramm/ylTfhlin.m`

⁶¹ `./octaveProgramm/ylSfhlin.m`

⁶² `./octaveProgramm/ylSTfhlin.m`

⁶³ `./octaveProgramm/yzhqz.m`

⁶⁴ `./octaveProgramm/yzThqz.m`

Programm I.20 ($\text{yzShqz}(\mathbf{x}, \mathbf{q}\mathbf{x}, \mathbf{q}\mathbf{z})$)⁶⁵ 443, 694 – arvutab 3 liigendiga raami koormusvektori ühtlaselt jaotatud koormuse puhul, II märgikokkuleppe järgi, kus
 $\mathbf{q}\mathbf{x}$ – ühtlaselt jaotatud pikikoormus,
 $\mathbf{q}\mathbf{z}$ – ühtlaselt jaotatud põikkoormus.

Programm I.21 ($\text{yzSThqz}(\mathbf{x}, \mathbf{q}\mathbf{z})$)⁶⁶ 452, 695 – arvutab Gerberi tala koormusvektori jaotatud koormuse EST-meetodis, II märgikokkuleppe järgi, kus
 $\mathbf{q}\mathbf{z}$ – ühtlaselt jaotatud põikkoormus.

Programm I.22 ($\text{yzfzv}(\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{s}\mathbf{i}\mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{F}\mathbf{x}, \mathbf{F}\mathbf{z}, \mathbf{E}\mathbf{A}, \mathbf{E}\mathbf{J})$)⁶⁷ 396, 398, 407, 694 – leiab koormusvektori koondatud jõust I järku teoorias, II märgikokkuleppe järgi, kus
 $\mathbf{F}\mathbf{x}$ – koondatud pikijõud,
 $\mathbf{F}\mathbf{z}$ – koondatud põikjõud,
 \mathbf{a} – koondatud jõu $\mathbf{F}\mathbf{x}/\mathbf{F}\mathbf{z}$ kaugus varda algusest,
 $\mathbf{E}\mathbf{A}$ – ristlõike pikijäikus,
 $\mathbf{E}\mathbf{J}$ – ristlõike paindejäikus,
 $\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{s}\mathbf{i}\mathbf{0}$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = \mathbf{E}\mathbf{J}/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

Programm I.23 ($\text{yzTfzv}(\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{s}\mathbf{i}\mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{F}\mathbf{z}, \mathbf{E}\mathbf{J})$)⁶⁸ 435, 694 – leiab tala koormusvektori koondatud jõust I järku teoorias, II märgikokkuleppe järgi, kus
 $\mathbf{F}\mathbf{z}$ – koondatud põikjõud,
 \mathbf{a} – koondatud jõu $\mathbf{F}\mathbf{z}$ kaugus varda algusest,
 $\mathbf{E}\mathbf{A}$ – ristlõike pikijäikus,
 $\mathbf{E}\mathbf{J}$ – ristlõike paindejäikus,
 $\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{s}\mathbf{i}\mathbf{0}$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = \mathbf{E}\mathbf{J}/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

Programm I.24 ($\text{yzSfzv}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{F}\mathbf{x}, \mathbf{F}\mathbf{z})$)⁶⁹ 443, 694 – arvutab 3 liigendiga raami koormusvektori koondatud jõust EST-meetodis, II märgikokkuleppe järgi, kus
 $\mathbf{F}\mathbf{x}$ – koondatud pikijõud,
 $\mathbf{F}\mathbf{z}$ – koondatud põikjõud,
 \mathbf{a} – koondatud jõu $\mathbf{F}\mathbf{x}/\mathbf{F}\mathbf{z}$ kaugus varda algusest.

Programm I.25 ($\text{yzSTfzv}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{F}\mathbf{z})$)⁷⁰ 452, 695 – arvutab Gerberi tala koormusvektori koondatud jõust EST-meetodis, II märgikokkuleppe järgi, kus
 $\mathbf{F}\mathbf{z}$ – koondatud põikjõud,
 \mathbf{a} – koondatud jõu $\mathbf{F}\mathbf{x}/\mathbf{F}\mathbf{z}$ kaugus varda algusest.

⁶⁵ [./octaveProgrammID/yzShqz.m](#)

⁶⁶ [./octaveProgrammID/yzSThqz.m](#)

⁶⁷ [./octaveProgrammID/yzfzv.m](#)

⁶⁸ [./octaveProgrammID/yzTfzv.m](#)

⁶⁹ [./octaveProgrammID/yzSfzv.m](#)

⁷⁰ [./octaveProgrammID/yzSTfzv.m](#)

Programm I.26 ($\text{ylflin}(\mathbf{x}, \mathbf{EA}, \mathbf{GAr}, \mathbf{EJ})$)⁷¹ – leiab ülekandemaatriksi I järku teoorias, II märgikokkulepe, kus
EA – ristlõike pikijäikus,
GAr – ristlõike nihkejäikus,
EJ – ristlõike paindejäikus.

Programm I.27 ($\text{yzqz}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{EJ})$)⁷² – leiab koormusvektori jaotatud koormusest I järku teoorias, II, I märgikokkulepe, kus
q – jaotatud koormus,
EJ – ristlõike paindejäikus.

Programm I.28 ($\text{yzfz}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{Fx}, \mathbf{Fz}, \mathbf{EA}, \mathbf{EJ})$)⁷³ – leiab koormusvektori koondatud jõust I järku teoorias, II märgikokkulepe, kus
Fx – koondatud pikijõud,
Fz – koondatud põikjõud,
a – koondatud jõu *Fx/Fz* kaugus varda algusest,
EA – ristlõike pikijäikus,
EJ – ristlõike paindejäikus.

Programm I.29 ($\text{ysplfhlin}(\text{baasi0}, \mathbf{x}, \mathbf{EA}, \mathbf{GAr}, \mathbf{EJ})$)⁷⁴ 397, 693 – koostab hõreda ülekandemaatriksi lineaarses teoorias võrrandisüsteemi koostamiseks, II märgikokkulepe, $Z_p = F^*Z_v$, $Z_p' = [U_p \ W_p \ Fip \ N_p \ Q_p \ Mp]$, kus
EA – ristlõike pikijäikus,
GAr – ristlõike nihkejäikus,
EJ – ristlõike paindejäikus,
x – varda ristlõike koordinaat,
baasi0 – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

Programm I.30 ($\text{yspTlfhlin}(\text{baasi0}, \mathbf{x}, \mathbf{GAr}, \mathbf{EJ})$)⁷⁵ 435, 693 – koostab tala hõreda ülekandemaatriksi (II mkl) lineaarses teoorias võrrandisüsteemi koostamiseks, II märgikokkulepe, $Z_p = F^*Z_v$, $Z_p' = [W_p \ Fip \ Q_p \ Mp]$, kus
EA – ristlõike pikijäikus,
GAr – ristlõike nihkejäikus,
EJ – ristlõike paindejäikus,
x – varda ristlõike koordinaat,
baasi0 – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

⁷¹ [./octaveProgrammid/ylflin.m](#)

⁷² [./octaveProgrammid/yzqz.m](#)

⁷³ [./octaveProgrammid/yzfz.m](#)

⁷⁴ [./octaveProgrammid/ysplfhlin.m](#)

⁷⁵ [./octaveProgrammid/yspTlfhlin.m](#)

Programm I.31 (`yvspSlfhlin(x)`)⁷⁶ 443, 693 – koostab hõreda ülekandemaatriksi 3 liigendiga raami arvutamiseks, II märgikokkulepe, $Z_p = F^*Z_v$, $Z_p' = [N_p \ Q_p \ M_p]$, kus x – varda ristlõike koordinaat.

Programm I.32 (`yvspSTlfhlin(x)`)⁷⁷ 452, 694 – koostab hõreda ülekandemaatriksi Gerberi tala arvutamiseks, II märgikokkulepe, $Z_p = F^*Z_v$, $Z_p' = [Q_p \ M_p]$, kus x – varda ristlõike koordinaat.

Programm I.33 (`ysplvfmhvI(baasi0,x,l,EA,GAr,EJ)`)⁷⁸ 395, 398 – koostab hõreda ülekandemaatriksi I järku teoorias võrrandisüsteemi koostamiseks, II märgikokkulepe, $Z_p = F^*Z_v$, $Z_p' = [U_p \ W_p \ Fip \ N_p \ Q_p \ M_p]$, kus

EA – ristlõike pikijäikus,

GAr – ristlõike nihkejäikus,

EJ – ristlõike paindejäikus,

x – varda ristlõike koordinaat,

$baasi0$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused. Kasutab funktsioone:

`ysplfhlin(baasi0,x,EA,GAr,EJ)`⁷⁹ – hõre ülekandemaatriks lineaarses ülekandemeetodis

`spInsertBtoA(spA,IM,JN,spB)`⁸⁰ – asetab hõredasse maatriksisse spA alates reast IM ja veerust JN hõreda maatriksi spB .

Programm I.34 (`yvspTlvfmhvI(baasi0,x,l,GAr,EJ)`)⁸¹ 435, 693 – koostab tala hõreda ülekandevõrrandi I-U (II_{mkl}) I järku teoorias võrrandisüsteemi koostamiseks, II märgikokkulepe, $Z_p = F^*Z_v$, $Z_p' = [W_p \ Fip \ Q_p \ M_p]$, kus

GAr – ristlõike nihkejäikus,

EJ – ristlõike paindejäikus,

x – varda ristlõike koordinaat,

$baasi0$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused. Kasutab funktsioone:

`yvspTlfhlin(baasi0,x,GAr,EJ)`⁸² – tala hõre ülekandemaatriks lineaarses ülekandemeetodis

`spInsertBtoA(spA,IM,JN,spB)`⁸³ – asetab hõredasse maatriksisse spA alates reast IM ja veerust JN hõreda maatriksi spB .

Programm I.35 (`yvspSlvfmhvI(x)`)⁸⁴ 443, 693 – koostab 3 liigendiga raami ülekandevõrrandid hõreda maatriksina, II märgikokkulepe, kus x – varda ristlõike koordinaat.

⁷⁶ `./octaveProgrammID/yvspSlfhlin.m`

⁷⁷ `./octaveProgrammID/yvspSTlfhlin.m`

⁷⁸ `./octaveProgrammID/ysplvfmhvI.m`

⁷⁹ `./octaveProgrammID/ysplfhlin.m`

⁸⁰ `./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m`

⁸¹ `./octaveProgrammID/yvspTlvfmhvI.m`

⁸² `./octaveProgrammID/yvspTlfhlin.m`

⁸³ `./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m`

⁸⁴ `./octaveProgrammID/yvspSlvfmhvI.m`

Kasutab funktsioone:

$ySpSlfhlin(x)$ ⁸⁵ – koostab hõreda ülekandemaatriksi 3 liigendiga raami arvutamiseks,

$spInsertBtoA(spA,IM,JN,spB)$ ⁸⁶ – asetab hõredasse maatriksisse spA alates reast IM ja veerust JN hõreda maatriksi spB .

Programm I.36 ($ySpSTlvfmhvI(x)$)⁸⁷ 452, 694 – koostab Gerberi tala ülekandevõrrandid hõreda maatriksina, II märgikokkulepe, kus x – varda ristlõike koordinaat. Kasutab funktsioone:

$ySpSTlvfhlin(x)$ ⁸⁸ – koostab hõreda ülekandemaatriksi 3 liigendiga raami arvutamiseks,

$spInsertBtoA(spA,IM,JN,spB)$ ⁸⁹ – asetab hõredasse maatriksisse spA alates reast IM ja veerust JN hõreda maatriksi spB .

Programm I.37 ($ySpSRmhvI(baasi0,Li,EA)$)⁹⁰ 386, 696 – koostab sõrestiku varda ülekandevõrrandid hõreda maatriksina, II märgikokkulepe, kus Li – varda pikkus. m . Kasutab funktsioone:

$ySpSRhlin(baasi0,x,EA)$ ⁹¹ – koostab hõreda ülekandemaatriksi sõrestiku vardale,

$spInsertBtoA(spA,IM,JN,spB)$ ⁹² – asetab hõredasse maatriksisse spA alates reast IM ja veerust JN hõreda maatriksi spB .

Programm I.38 ($ySpSRhlin(baasi0,x,EA)$)⁹³ 386, 696 – koostab sõrestiku varda hõreda ülekandemaatriksi (IImkl) lineaarses teoorias, kus

EA – ristlõike pikijäikus,

x – varda ristlõike koordinaat,

$baasi0$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused.

Programm I.39 ($srstkESTPY.m$)⁹⁴ 388, 391 – arvutab EST-meetodiga sõrestiku. Kasutab funktsioone:

$ySpSRmhvI(baasi0,Li,EA)$ ⁹⁵ – koostab sõrestiku varda ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,

$ySpSRhlin(baasi0,x,EA)$ ⁹⁶ – koostab sõrestiku varda ülekandemaatriksi,

$spInsertBtoA(spA,Iv,Iv,spvF)$ ⁹⁷ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse

⁸⁵ ./octaveProgrammid/ySpSlfhlin.m

⁸⁶ ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m

⁸⁷ ./octaveProgrammid/ySpSTlvfmhvI.m

⁸⁸ ./octaveProgrammid/ySpSlfhlin.m

⁸⁹ ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m

⁹⁰ ./octaveProgrammid/ySpSRmhvI.m

⁹¹ ./octaveProgrammid/ySpSRhlin.m

⁹² ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m

⁹³ ./octaveProgrammid/ySpSRhlin.m

⁹⁴ ./octaveProgrammid/srstkESTPY.m

⁹⁵ ./octaveProgrammid/ySpSRmhvI.m

⁹⁶ ./octaveProgrammid/ySpSRhlin.m

⁹⁷ ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m

maatriksisse spA algusega Iv, IJv ,
 $spSisestaArv(spA, iv, jv, sv)$ ⁹⁸ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv, jv ,
 $InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ⁹⁹ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN .

Programm I.40 (spTalaVarrasESTR.m)¹⁰⁰ 460 – arvutab EST-meetodiga tala koos sõrestikuga. Kasutab funktsioone:

$yspSRmhvI(baasi0, Li, EA)$ ¹⁰¹ – koostab sõrestiku varda ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,
 $yspSRhlin(baasi0, x, EA)$ ¹⁰² – koostab sõrestiku varda ülekandemaatriksi,
 $ysplvmhvI(baasi0, Li, Li, EA, GAr, EI)$ ¹⁰³ – koostab raami varda ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,
 $ysplfhlin(baasi0, x, EA, GAr, EJ)$ ¹⁰⁴ – koostab ülekandevõrrandid maatriksina,
 $yzhqz(baasi0, Li, qx, qz, EA, EI)$ ¹⁰⁵ – arvutab raami varda ühtlaselt jaotatud koormuse I järku teoorias,
 $spInsertBtoA(spA, Iv, IJv, spvF)$ ¹⁰⁶ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse maatriksisse spA algusega Iv, IJv
 $spSisestaArv(spA, iv, jv, sv)$ ¹⁰⁷ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv, jv ,
 $InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ¹⁰⁸ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN .

Programm I.41 (InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N))¹⁰⁹ 398, 596, 615 – paigutab maatriksisse $A(I, J)$ alates reast IM ja veerust JN maatriksi $B(M, N)$.

Programm I.42 (spInsertBtoA(spA, IM, JN, spB))¹¹⁰ 403, 596, 650 – paigutab maatriksisse $spA(I, J)$ alates reast IM ja veerust JN maatriksi $spB(M, N)$.

Programm I.43 (spSisestaArv(spA, iv, jv, sv))¹¹¹ 403, 406, 600 – paigutab maatriksisse $spA(I, J)$ alates reast iv ja veerust jv arvu sv .

Programm I.44 (remRowIRfromA(A, I, J, IR))¹¹² 373 – eemaldab maatriksist $A(I, J)$ rea IR .

⁹⁸ ./octaveProgrammID/spSisestaArv.m

⁹⁹ ./octaveProgrammID/InsertBtoA.m

¹⁰⁰ ./octaveProgrammID/spTalaVarrasESTR.m

¹⁰¹ ./octaveProgrammID/yspSRmhvI.m

¹⁰² ./octaveProgrammID/yspSRhlin.m

¹⁰³ ./octaveProgrammID/ysplvmhvI.m

¹⁰⁴ ./octaveProgrammID/ysplfhlin.m

¹⁰⁵ ./octaveProgrammID/yzhqz.m

¹⁰⁶ ./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m

¹⁰⁷ ./octaveProgrammID/spSisestaArv.m

¹⁰⁸ ./octaveProgrammID/InsertBtoA.m

¹⁰⁹ ./octaveProgrammID/InsertBtoA.m

¹¹⁰ ./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m

¹¹¹ ./octaveProgrammID/spSisestaArv.m

¹¹² ./octaveProgrammID/remRowIRfromA.m

Programm I.45 (remColJRfromA(A,I,J,JR))¹¹³ 373 – eemaldab maatriksist $A(I,J)$ veeru JR .

Programm I.46 (ESTtalaKrmus(baasi0,xx,Li,Fjoud,qkoormus,EI))¹¹⁴ 435, 694 – arvutab tala koormusvektori EST -meetodis ($q + F$). Kasutab funktsioone:

$yzThqz(baasi0,x,qz,EJ)$ ¹¹⁵ – arvutab tala ühtlaselt jaotatud koormuse I järku teoorias,

$yzTfzv(baasi0,x,a,Fz,EJ)$ ¹¹⁶ – arvutab tala koondatud jõust koormuse I järku teoorias.

Programm I.47 (ESTSKrmus(xx,Li,Fjoud,qkoormus))¹¹⁷ 443, 694 – arvutab koormusvektori EST -meetodis ($q + F$) kolme liigendiga raamile. Kasutab funktsioone:

$yzShqz(x,qx,qz)$ ¹¹⁸ – arvutab 3 liigendiga raami koormusvektori ühtlaselt jaotatud koormusest,

$yzSfzv(x,a,Fx,Fz)$ ¹¹⁹ – arvutab 3 liigendiga raami koormusvektori koondatud jõust.

Programm I.48 (ESTSTKrmus(xx,Li,Fjoud,qkoormus))¹²⁰ 452, 695 – arvutab koormusvektori EST -meetodis ($q + F$) Gerberi talale. Kasutab funktsioone:

$yzSThqz(x,qz)$ ¹²¹ – arvutab Gerberi tala koormusvektori ühtlaselt jaotatud koormusest,

$yzSTfzv(x,a,Fz)$ ¹²² – arvutab Gerberi talale koormusvektori koondatud jõust.

Programm I.49 (SisejoudPunktis.m)

$SisejoudPunktis(VardaNr,X,AlgPar,lvarras,selem,qxZ,qzZ,aLXx,FZz,FZx,suurused)$ ¹²³ 429 – arvutab ja trükitab varda 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$.

Programm I.50 (SisejoudTalaPunktis.m)

$SisejoudTalaPunktis(VardaNr,X,AlgPar,lvarras,selem,esFjoud,esQkoormus,suurused)$ ¹²⁴ 439 – arvutab ja trükitab tala 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$. Kasutab funktsioone:

$ESTtalaKrmus(baasi0,xx,Li,Fjoud,qkoormus,EI)$ ¹²⁵ – arvutab tala koormuse ($q + F$) I järku teoorias.

¹¹³ ./octaveProgramm/remColJRfromA.m

¹¹⁴ ./octaveProgramm/ESTtalaKrmus.m

¹¹⁵ ./octaveProgramm/yzThqz.m

¹¹⁶ ./octaveProgramm/yzTfzv.m

¹¹⁷ ./octaveProgramm/ESTSKrmus.m

¹¹⁸ ./octaveProgramm/yzShqz.m

¹¹⁹ ./octaveProgramm/yzSfzv.m

¹²⁰ ./octaveProgramm/ESTSTKrmus.m

¹²¹ ./octaveProgramm/yzSThqz.m

¹²² ./octaveProgramm/yzSTfzv.m

¹²³ ./octaveProgramm/SisejoudPunktis.m

¹²⁴ ./octaveProgramm/SisejoudTalaPunktis.m

¹²⁵ ./octaveProgramm/ESTtalaKrmus.m

Programm I.51 (Sisejoud3LraamiPnktis.m)

Sisejoud3LraamiPnktis(3,Lpunkt,AlgPar,lvarras,esFjoud,esQkoormus,suurused) ¹²⁶

446 – arvutab ja trükitab 3 liigendiga raami 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$. Kasutab funktsioone:

ESTSKrmus(xx,Li,Fjoud,qkoormus) ¹²⁷ – arvutab koormusvektori EST-meetodis ($q + F$) kolme liigendiga raamile.

Programm I.52 (SsjoudGrbrTalaPnktis.m)

SsjoudGrbrTalaPnktis(VardaNr,X,AlgPar,lvarras,esFjoud,esQkoormus,suurused) ¹²⁸

455 – arvutab ja trükitab Gerberi tala 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$. Kasutab funktsioone:

ESTSTKrmus(xx,Li,Fjoud,qkoormus) ¹²⁹ – arvutab koormusvektori EST-meetodis ($q + F$) Gerberi talale.

Programm I.53 (spRaamEST.m) ¹³⁰ **399, 406, 407, 410, 413** – arvutab raami EST-meetodiga lineaarses teoorias. Kasutab funktsioone:

ysplvmhvI(baasi0,Li,Li,EA,GAr,EI) ¹³¹ – koostab ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,

ysplfhlin(baasi0,x,EA,GAr,EJ) ¹³² – koostab ülekandevõrrandid maatriksina,

yzhqz(baasi0,Li,qx,qz,EA,EI) ¹³³ – arvutab ühtlaselt jaotatud koormuse I järku teoorias,

yzfzv(baasi0,Li,aLx,Fx,Fz,EA,EI) ¹³⁴ – arvutab koondatud jõust koormuse I järku teoorias,

spInsertBtoA(spA,IIV,IJv,spvF) ¹³⁵ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse maatriksisse spA algusega IIV, IJv ,

spSisestaArv(spA,iv,jv,sv) ¹³⁶ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv,jv ,

ylfhlin(baasi0,x,EA,GAr,EJ) ¹³⁷ – ülekandemaatriks lineaarses ülekandemeetodis,

InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N) ¹³⁸ – asetab $B(M,N)$ $A(I,J)$ -sse algusega IM,JN .

Programm I.54 (spRaamEST77.m) ¹³⁹ **425, 429** – arvutab raami EST-meetodiga lineaarses teoorias. Kasutab funktsioone:

¹²⁶ [./octaveProgrammID/Sisejoud3LraamiPnktis.m](#)

¹²⁷ [./octaveProgrammID/ESTSKrmus.m](#)

¹²⁸ [./octaveProgrammID/SsjoudGrbrTalaPnktis.m](#)

¹²⁹ [./octaveProgrammID/ESTSTKrmus.m](#)

¹³⁰ [./octaveProgrammID/spRaamEST.m](#)

¹³¹ [./octaveProgrammID/ysplvmhvI.m](#)

¹³² [./octaveProgrammID/ysplfhlin.m](#)

¹³³ [./octaveProgrammID/yzhqz.m](#)

¹³⁴ [./octaveProgrammID/yzfzv.m](#)

¹³⁵ [./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m](#)

¹³⁶ [./octaveProgrammID/spSisestaArv.m](#)

¹³⁷ [./octaveProgrammID/ylfhlin.m](#)

¹³⁸ [./octaveProgrammID/InsertBtoA.m](#)

¹³⁹ [./octaveProgrammID/spRaamEST77.m](#)

$ysplvmhvI(baasi0, Li, Li, EA, GAr, EI)$ ¹⁴⁰ – koostab ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,
 $ysplfhlin(baasi0, x, EA, GAr, EJ)$ ¹⁴¹ – koostab ülekandevõrrandid maatriksina,
 $ESTSKrmus(x, L, Fjoud, qkoormus)$ ¹⁴² – arvutab koormusvektori EST-meetodis $(q + F)$ 3 liigendiga raamile,
 $yzhqz(baasi0, Li, qx, qz, EA, EI)$ ¹⁴³ – arvutab ühtlaselt jaotatud koormuse I järku teoorias,
 $yzfzv(baasi0, Li, aLx, Fx, Fz, EA, EI)$ ¹⁴⁴ – arvutab koondatud jõust koormuse I järku teoorias,
 $spInsertBtoA(spA, Iv, IJv, spvF)$ ¹⁴⁵ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse maatriksisse spA algusega Iv, IJv ,
 $spSisestaArv(spA, iv, jv, sv)$ ¹⁴⁶ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv, jv ,
 $ylfhlin(baasi0, x, EA, GAr, EJ)$ ¹⁴⁷ – ülekandemaatriks lineaarses ülekandemeetodis,
 $InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ¹⁴⁸ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN ,
 $SisejoudPunktis(VardaNr, X, AlgPar, lvarras, selem, qxZ, qzZ, aLXx, FZz, FZx, suurused)$ ¹⁴⁹ – arvutab ja trükitab varda 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$.

Programm I.55 (sp3liigendRaamEST.m) ¹⁵⁰ 444, 444 – arvutab 3 liigendiga raami EST-meetodiga. Kasutab funktsioone:

$ySpSlvmhvI(x)$ ¹⁵¹ – koostab 3 liigendiga raami ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,
 $ySpSlfhlin(x)$ ¹⁵² – koostab 3 liigendiga raami ülekandevõrrandid maatriksina,
 $ESTSKrmus(x, L, Fjoud, qkoormus)$ ¹⁵³ – arvutab koormusvektori EST-meetodis $(q + F)$ 3 liigendiga raamile,
 $yzShqz(x, qx, qz)$ ¹⁵⁴ – arvutab 3 liigendiga raami koormusvektori ühtlaselt jaotatud koormusest,
 $yzSfzv(x, a, Fx, Fz)$ ¹⁵⁵ – arvutab 3 liigendiga raami koormusvektori koondatud jõust,

¹⁴⁰ ./octaveProgrammid/ysplvmhvI.m

¹⁴¹ ./octaveProgrammid/ysplfhlin.m

¹⁴² ./octaveProgrammid/ESTSKrmus.m

¹⁴³ ./octaveProgrammid/yzhqz.m

¹⁴⁴ ./octaveProgrammid/yzfzv.m

¹⁴⁵ ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m

¹⁴⁶ ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m

¹⁴⁷ ./octaveProgrammid/ylfhlin.m

¹⁴⁸ ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m

¹⁴⁹ ./octaveProgrammid/SisejoudPunktis.m

¹⁵⁰ ./octaveProgrammid/sp3liigendRaamEST.m

¹⁵¹ ./octaveProgrammid/ySpSlvmhvI.m

¹⁵² ./octaveProgrammid/ySpSlfhlin.m

¹⁵³ ./octaveProgrammid/ESTSKrmus.m

¹⁵⁴ ./octaveProgrammid/yzShqz.m

¹⁵⁵ ./octaveProgrammid/yzSfzv.m

$spInsertBtoA(spA, Iiv, IJv, spvF)$ ¹⁵⁶ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse maatriksisse spA algusega Iiv, IJv ,
 $spSisestaArv(spA, iv, jv, sv)$ ¹⁵⁷ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv, jv ,
 $ylSfhlin(x)$ ¹⁵⁸ – ülekanedemaatriks 3 liigendiga raami arvutamiseks,
 $InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ¹⁵⁹ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN ,
 $Sisejoud3LraamiPunktis(VardaNr, X, AlgPar, lvarras, esFjoud, esQkoormus, suurused)$ ¹⁶⁰ – arvutab ja trükitab 3 liigendiga raami 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$.

Programm I.56 (spRaam3EST.m) ¹⁶¹ – arvutab 3 liigendiga raami EST-meetodiga. Kasutab funktsioone:

$ySpSlvfmhvI(x)$ ¹⁶² – koostab 3 liigendiga raami ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,
 $ySpSlfhlin(x)$ ¹⁶³ – koostab 3 liigendiga raami ülekandevõrrandid maatriksina,
 $ESTSKrmus(x, L, Fjoud, qkoormus)$ ¹⁶⁴ – arvutab koormusvektori EST-meetodis $(q + F)$ 3 liigendiga raamile,
 $yzShqz(x, qx, qz)$ ¹⁶⁵ – arvutab 3 liigendiga raami koormusvektori ühtlaselt jaotatud koormusest,
 $yzSfzv(x, a, Fx, Fz)$ ¹⁶⁶ – arvutab 3 liigendiga raami koormusvektori koondatud jõust,

$spInsertBtoA(spA, Iiv, IJv, spvF)$ ¹⁶⁷ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse maatriksisse spA algusega Iiv, IJv ,
 $spSisestaArv(spA, iv, jv, sv)$ ¹⁶⁸ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv, jv ,
 $ylSfhlin(x)$ ¹⁶⁹ – ülekanedemaatriks 3 liigendiga raami arvutamiseks,
 $InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ¹⁷⁰ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN ,
 $Sisejoud3LraamiPunktis(VardaNr, X, AlgPar, lvarras, esFjoud, esQkoormus, suurused)$ ¹⁷¹ – arvutab ja trükitab 3 liigendiga raami 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$.

Programm I.57 (spGerberTalaEST.m) ¹⁷² 452, 451, 455 – arvutab Gerberi tala

-
- ¹⁵⁶ ./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m
¹⁵⁷ ./octaveProgrammID/spSisestaArv.m
¹⁵⁸ ./octaveProgrammID/ylSfhlin.m
¹⁵⁹ ./octaveProgrammID/InsertBtoA.m
¹⁶⁰ ./octaveProgrammID/Sisejoud3LraamiPunktis.m
¹⁶¹ ./octaveProgrammID/spRaam3EST.m
¹⁶² ./octaveProgrammID/ySpSlvfmhvI.m
¹⁶³ ./octaveProgrammID/ySpSlfhlin.m
¹⁶⁴ ./octaveProgrammID/ESTSKrmus.m
¹⁶⁵ ./octaveProgrammID/yzShqz.m
¹⁶⁶ ./octaveProgrammID/yzSfzv.m
¹⁶⁷ ./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m
¹⁶⁸ ./octaveProgrammID/spSisestaArv.m
¹⁶⁹ ./octaveProgrammID/ylSfhlin.m
¹⁷⁰ ./octaveProgrammID/InsertBtoA.m
¹⁷¹ ./octaveProgrammID/Sisejoud3LraamiPunktis.m
¹⁷² ./octaveProgrammID/spGerberTalaEST.m

EST-meetodiga. Kasutab funktsioone:

$yspSTlvfmhvI(x)$ ¹⁷³ – koostab Gerberi tala ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,

$yspSTlfhlin(x)$ ¹⁷⁴ – koostab 3 liigendiga raami ülekandevõrrandid maatriksina,

$ESTSTKrmus(x,L,Fjoud,qkoormus)$ ¹⁷⁵ – arvutab koormusvektori EST-meetodis $(q + F)$ Gerberi talale,

$yzSThqz(x,qz)$ ¹⁷⁶ – arvutab Gerberi tala koormusvektori ühtlaselt jaotatud koormusest,

$yzSTfzv(x,a,Fz)$ ¹⁷⁷ – arvutab Gerberi tala koormusvektori koondatud jõust,

$spInsertBtoA(spA,Iv,IJv,spvF)$ ¹⁷⁸ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse maatriksisse spA algusega Iv, IJv ,

$spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)$ ¹⁷⁹ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv, jv ,

$yspSTlfhlin(x)$ ¹⁸⁰ – koostab hõreda ülekandemaatriksi Gerberi tala arvutamiseks,

$InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N)$ ¹⁸¹ – asetab $B(M,N)$ $A(I,J)$ -sse algusega IM, JN ,

$SsjoudGrbrTalaPnktis(VardaNr,X,AlgPar,lvarras,esFjoud,esQkoormus,suurused)$ ¹⁸² – arvutab ja trükitab Gerberi tala 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$.

Programm I.58 (spRaamEST93.m)¹⁸³ 420, 421 – arvutab raami EST-meetodiga lineaarses teoorias. Kasutab funktsioone:

$ysplvmhvI(baasi0,Li,Li,EA,GAr,EI)$ ¹⁸⁴ – koostab ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,

$ysplfhlin(baasi0,x,EA,GAr,EJ)$ ¹⁸⁵ – koostab ülekandevõrrandid maatriksina,

$yzhqz(baasi0,Li,qx,qz,EA,EI)$ ¹⁸⁶ – arvutab ühtlaselt jaotatud koormuse I järku teoorias,

$yzfzv(baasi0,Li,aLx,Fx,Fz,EA,EI)$ ¹⁸⁷ – arvutab koondatud jõust koormuse I järku teoorias,

$spInsertBtoA(spA,Iv,IJv,spvF)$ ¹⁸⁸ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse maatriksisse spA algusega Iv, IJv ,

¹⁷³ ./octaveProgrammID/yspSTlvfmhvI.m

¹⁷⁴ ./octaveProgrammID/yspSTlfhlin.m

¹⁷⁵ ./octaveProgrammID/ESTSTKrmus.m

¹⁷⁶ ./octaveProgrammID/yzSThqz.m

¹⁷⁷ ./octaveProgrammID/yzSTfzv.m

¹⁷⁸ ./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m

¹⁷⁹ ./octaveProgrammID/spSisestaArv.m

¹⁸⁰ ./octaveProgrammID/yspSTlfhlin.m

¹⁸¹ ./octaveProgrammID/InsertBtoA.m

¹⁸² ./octaveProgrammID/SsjoudGrbrTalaPnktis.m

¹⁸³ ./octaveProgrammID/spRaamEST93.m

¹⁸⁴ ./octaveProgrammID/ysplvmhvI.m

¹⁸⁵ ./octaveProgrammID/ysplfhlin.m

¹⁸⁶ ./octaveProgrammID/yzhqz.m

¹⁸⁷ ./octaveProgrammID/yzfzv.m

¹⁸⁸ ./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m

$spSisestaArv(spA, iv, jv, sv)$ ¹⁸⁹ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv, jv ,

$ylfhlin(baasi0, x, EA, GAr, EJ)$ ¹⁹⁰ – ülekandemaatriks lineaarses ülekandemeetodis,

$InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ¹⁹¹ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN .

Programm I.59 (spTalaEST.m)¹⁹² 437, 439, 439 – arvutab raami EST-meetodiga lineaarses teoorias. Kasutab funktsioone:

$yspTlvfmhvI(baasi0, x, l, GAr, EJ)$ ¹⁹³ – koostab tala ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,

$yspTlfhlin(baasi0, x, GAr, EJ)$ ¹⁹⁴ – koostab tala hõreda ülekandemaatriksi,

$yzThqz(baasi0, x, qz, EJ)$ ¹⁹⁵ – arvutab tala ühtlaselt jaotatud koormuse I järku teoorias,

$yzTfzv(baasi0, x, a, Fz, EJ)$ ¹⁹⁶ – arvutab tala koondatud jõust koormuse I järku teoorias,

$ESTtalaKrmus(baasi0, xx, Li, Fjoud, qkoormus, EI)$ ¹⁹⁷ – arvutab tala koormuse $(q + F)$ I järku teoorias,

$spInsertBtoA(spA, Iiv, IJv, spvF)$ ¹⁹⁸ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse maatriksisse spA algusega Iiv, IJv ,

$spSisestaArv(spA, iv, jv, sv)$ ¹⁹⁹ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv, jv ,

$ylTfhlin(baasi0, x, GAr, EJ)$ ²⁰⁰ – ülekandemaatriks lineaarses ülekandemeetodis,

$InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ²⁰¹ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN ,

$SisejoudTalaPunktis(VardaNr, X, AlgPar, lvarras, selem, esFjoud, esQkoormus, suurused)$ ²⁰² – arvutab ja trükitab varda 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$.

I.6 Raami arvutus. Jõumeetod

Programm I.60 (journR3.m)²⁰³ 229 – arvutab paindemomendid $2 \times$ staatikaga määramatus raamis.

¹⁸⁹ ./octaveProgrammide/spSisestaArv.m

¹⁹⁰ ./octaveProgrammide/ylfhlin.m

¹⁹¹ ./octaveProgrammide/InsertBtoA.m

¹⁹² ./octaveProgrammide/spTalaEST.m

¹⁹³ ./octaveProgrammide/yspTlvfmhvI.m

¹⁹⁴ ./octaveProgrammide/yspTlfhlin.m

¹⁹⁵ ./octaveProgrammide/yzThqz.m

¹⁹⁶ ./octaveProgrammide/yzTfzv.m

¹⁹⁷ ./octaveProgrammide/ESTtalaKrmus.m

¹⁹⁸ ./octaveProgrammide/spInsertBtoA.m

¹⁹⁹ ./octaveProgrammide/spSisestaArv.m

²⁰⁰ ./octaveProgrammide/ylTfhlin.m

²⁰¹ ./octaveProgrammide/InsertBtoA.m

²⁰² ./octaveProgrammide/SisejoudTalaPunktis.m

²⁰³ ./octaveProgrammide/journR3.m

Programm I.61 (journAq.m)²⁰⁴ 418 – arvutab paindemomendid $3 \times$ staatikaga määramatus raamis.

Programm I.62 (journA4q.m)²⁰⁵ 433 – arvutab paindemomendid $4 \times$ staatikaga määramatus raamis.

I.7 Jätkuvtala arvutus

Programm I.63 (spTundmatudVorrandid.m)²⁰⁶ 209 – arvutab sisejõudude ja siirete jaotuse jätkuvtala sildes. Kasutab funktsioone:

*ZtalaFqSc(L, EIsuhe, Fjoud, qkoormus)*²⁰⁷ – koormusvektor

*spUlintala_ImkSc(L, EIsuhe, GArruhe)*²⁰⁸ – ülekande maatriks hõreda maatriksina

*InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)*²⁰⁹ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN ,

*spIN(N, M, Av)*²¹⁰ – sisestab hõreda maatriksi elemente. Kasutab globaalseid muu-

tujaid:

global sv; – globaalne muutuja

global ins; – globaalne muutuja

global jms; – globaalne muutuja

global jrknrS; – globaalne muutuja

*spInsertBtoA(spA, IM, JN, spB)*²¹¹ – asetab hõredasse maatriksisse spA alates

reast IM ja veerust JN hõreda maatriksi spB

*jaotusteArv(L, Fjoud1, qkoormus1)*²¹² – leiab suurima ühisteguri

*talaSiireFqSc(NT, L, EIsuhe, GArruhe, Walg, Fjoud, qkoormus)*²¹³ – sisejõudude ja

siirete jaotus talas

*tabelXWfiQM(TSjT, pealdis)*²¹⁴ – sisejõudude ja siirete jaotus talas tabelina

*minMaxGrafSiirded(TSjT)*²¹⁵ – sisejõudude ja siirete minimaalsed ning maksimaalsed väärtused graafikute telgede valimiseks.

Programm I.64 (spTundmatudVorrandidII.m)²¹⁶ 212 – arvutab sisejõudude ja siirete jaotuse jätkuvtala sildes II märgikokkuleppega. Kasutab funktsioone:

*ZtalaFqSc(L, EIsuhe, Fjoud, qkoormus)*²¹⁷ – koormusvektor

²⁰⁴ ./octaveProgrammID/journAq.m

²⁰⁵ ./octaveProgrammID/journA4q.m

²⁰⁶ ./octaveProgrammID/spTundmatudVorrandid.m

²⁰⁷ ./octaveProgrammID/ZtalaFqSc.m

²⁰⁸ ./octaveProgrammID/spUlintala_ImkSc.m

²⁰⁹ ./octaveProgrammID/InsertBtoA.m

²¹⁰ ./octaveProgrammID/spIN.m

²¹¹ ./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m

²¹² ./octaveProgrammID/jaotusteArv.m

²¹³ ./octaveProgrammID/talaSiireFqSc.m

²¹⁴ ./octaveProgrammID/tabelXWfiQM.m

²¹⁵ ./octaveProgrammID/minMaxGrafSiirded.m

²¹⁶ ./octaveProgrammID/spTundmatudVorrandidII.m

²¹⁷ ./octaveProgrammID/ZtalaFqSc.m

$spUlintala_ImkSc(L, EIsuhe, GArruhe)$ ²¹⁸ – ülekan demaatriks hõreda maatriksina
 $InsertBtoA(A, I, J, IM, JN, B, M, N)$ ²¹⁹ – asetab $B(M, N)$ $A(I, J)$ -sse algusega IM, JN ,
 $spIN(N, M, Av)$ ²²⁰ – sisestab hõreda maatriksi elemente. Kasutab globaalseid muu-
 tujaid:

$global\ sv;$ – globaalne muutuja
 $global\ ins;$ – globaalne muutuja
 $global\ jms;$ – globaalne muutuja
 $global\ jrknrS;$ – globaalne muutuja

$spInsertBtoA(spA, IM, JN, spB)$ ²²¹ – asetab maatriksisse $A(I, J)$ alates reast IM ja
 veerust JN maatriksi $B(M, N)$

$jaotusteArv(L, Fjoud1, qkoormus1)$ ²²² – leiab suurima ühisteguri

$talaSiireFqSc(NT, L, EIsuhe, GArruhe, Walg, Fjoud, qkoormus)$ ²²³ – sisejõudude ja
 siirete jaotus talas

$tabelXWfiQM(TSjT, pealdis)$ ²²⁴ – sisejõudude ja siirete jaotus talas tabelina

$minMaxGrafSiirded(TSjT)$ ²²⁵ – sisejõudude ja siirete minimaalsed ning maksimaalsed väärtused graafikute telgede valimiseks.

Funktsioon I.1 (afbikt1.m)²²⁶ 255, 271

$afbikt1(l, F1, aF1, F2, aF2, qz, aqA, aqL, EI, EIo)$ – jätkuvtala fiktiivsete toereaktsioonide $6 \cdot Af$ ja $6 \cdot Bf$ arvutamise programm, võtab arvesse 2 koondatud jõudu $aF1$, $aF2$ ja ühe jaotatud koormuse.

Funktsioon I.2 (fooksuhe.m)²²⁷ 263 $fooksuhe(N, lv, kvs, kps, EI, EIo)$ – jätkuvtala fookussuhete arvutamise programm.

Funktsioon I.3 (toemom1.m)²²⁸ 263

$toemom1(l, kv, kp, F1, aF1, F2, aF2, qz, aqA, aqL, EI, EIo)$ – jätkuvtala toemomentide arvutus, võtab arvesse 2 koondatud jõudu $aF1$, $aF2$ ja ühe jaotatud koormuse qz .

Programm I.65 (jtalaNBA.m)²²⁹ 269, 276 – arvutab jätkuvtala M ja Q . Kasutab funktsioone:

$afbikt1(l, F1, aF1, F2, aF2, qz, aqA, aqL, EI, EIo)$ ²³⁰ – jätkuvtala fiktiivsete toereaktsioonide $6 \cdot Af$ ja $6 \cdot Bf$ arvutamise funktsioon.

²¹⁸ ./octaveProgrammID/spUlintala_ImkSc.m

²¹⁹ ./octaveProgrammID/InsertBtoA.m

²²⁰ ./octaveProgrammID/spIN.m

²²¹ ./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m

²²² ./octaveProgrammID/jaotusteArv.m

²²³ ./octaveProgrammID/talaSiireFqSc.m

²²⁴ ./octaveProgrammID/tabelXWfiQM.m

²²⁵ ./octaveProgrammID/minMaxGrafSiirded.m

²²⁶ ./octaveProgrammID/afbikt1.m

²²⁷ ./octaveProgrammID/fooksuhe.m

²²⁸ ./octaveProgrammID/toemom1.m

²²⁹ ./octaveProgrammID/jtalaNBA.m

²³⁰ ./octaveProgrammID/afbikt1.m

fooksuhe(N,lv,kvs,kps,EI,EIo)²³¹ – jätkuvtala fookussuhete arvutamise funktsioon.
toemom1($l,kv,kp,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL,EI,EIo$)²³² – jätkuvtala toemomente arvutus.

jtalaXQMSj($NT,L,MA,ML,Fjoud,qkoormus$)²³³ – arvutab sisejõudude Q ja M jaotuse tala sildes.

jtalaSuurimadM($XQMq,XQMff,XQMf$)²³⁴ – arvutab suurimad paindemomendid.

tabelXMMM(*jtS,nimetus*)²³⁵ – trüüb välja koordinaadi x ning sisejõud Q ja M .

tabelXQM(*TSjT,pealdis*)²³⁶ – sisejõudude jaotus vastavas lihttalas tabelina.

Programm I.66 (jtala1kLEM.m)²³⁷ 379 – arvutab jätkuvtala M ja Q kolme momendi võrrandiga. Kasutab funktsioone:

afbfikt1($l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL,EI,EIo$)²³⁸ – jätkuvtala fiktiivsete toereaktsioonide 6^*Af ja 6^*Bf arvutamise funktsioon.

jtalaXQMSj($NT,L,MA,ML,Fjoud,qkoormus$)²³⁹ – arvutab sisejõudude Q ja M jaotuse tala sildes.

tabelXQM(*TSjT,pealdis*)²⁴⁰ – sisejõudude jaotus vastavas lihttalas tabelina.

I.8 Deformatsioonimeetodiga arvutus

Programm I.67 (defRaamN.m)²⁴¹ 298 – arvutab varrastes M ja Q . Kasutab funktsioone:

kinnmom1($l,F1,aF1,F2,aF2,qz$)²⁴² – kinnitusemomendid koormusest; kinni vasakul ja paremal

kinnmom2($l,F1,aF1,F2,aF2,qz$)²⁴³ – kinnitusemomendid koormusest; kinni vasakul

kinnmom3($l,F1,aF1,F2,aF2,qz$)²⁴⁴ – kinnitusemomendid koormusest; kinni paremal

jtalaXQMSj($NT,L,MA,ML,Fjoud,qkoormus$)²⁴⁵ – arvutab sisejõudude Q ja M jaotuse tala sildes

²³¹ ./octaveProgrammid/fooksuhe.m

²³² ./octaveProgrammid/toemom1.m

²³³ ./octaveProgrammid/jtalaXQMSj.m

²³⁴ ./octaveProgrammid/jtalaSuurimadM.m

²³⁵ ./octaveProgrammid/tabelXMMM.m

²³⁶ ./octaveProgrammid/tabelXQM.m

²³⁷ ./octaveProgrammid/jtala1kLEM.m

²³⁸ ./octaveProgrammid/afbfikt1.m

²³⁹ ./octaveProgrammid/jtalaXQMSj.m

²⁴⁰ ./octaveProgrammid/tabelXQM.m

²⁴¹ ./octaveProgrammid/defRaamN.m

²⁴² ./octaveProgrammid/kinnmom1.m

²⁴³ ./octaveProgrammid/kinnmom2.m

²⁴⁴ ./octaveProgrammid/kinnmom3.m

²⁴⁵ ./octaveProgrammid/jtalaXQMSj.m

*tabelXQM(SjT,krmus)*²⁴⁶ – trükitab välja koordinaadi x ning sisejõud Q ja M .

Programm I.68 (defNBA.m)²⁴⁷ 304, 308 – arvutab kolmekordselt geomeetriliselt määramatu raami varrastes M ja Q . Kasutab funktsioone:

*kinnmom1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)*²⁴⁸ – kinnitusemomendid koormusest; kinni vasakul ja paremal

*kinnmom2(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)*²⁴⁹ – kinnitusemomendid koormusest; kinni vasakul

*kinnmom3(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)*²⁵⁰ – kinnitusemomendid koormusest; kinni paremal

*jtalaXQMSj(NT,L,MA,ML,Fjoud,qkoormus)*²⁵¹ – arvutab sisejõudude Q ja M jaotuse tala sildes

*tabelXQM(SjT,krmus)*²⁵² – trükitab välja koordinaadi x ning sisejõud Q ja M .

Programm I.69 (defNBAest.m)²⁵³ 609 – arvutab neljakordselt geomeetriliselt määramatu raami varrastes M ja Q . Kasutab funktsioone:

*kinnmom1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)*²⁵⁴ – kinnitusemomendid koormusest; kinni vasakul ja paremal

*kinnmom2(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)*²⁵⁵ – kinnitusemomendid koormusest; kinni vasakul

*kinnmom3(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)*²⁵⁶ – kinnitusemomendid koormusest; kinni paremal.

Programm I.70 (kinnmom1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz))²⁵⁷ 309 – arvutab kinnitusemomendid koormusest; kinni vasakul ja paremal.

Programm I.71 (kinnmom2(l,F1,aF1,F2,aF2,qz))²⁵⁸ 309 – arvutab kinnitusemomendid koormusest; kinni vasakul.

Programm I.72 (kinnmom3(l,F1,aF1,F2,aF2,qz))²⁵⁹ 309 – arvutab kinnitusemomendid koormusest; kinni paremal.

²⁴⁶ ./octaveProgrammID/tabelXQM.m

²⁴⁷ ./octaveProgrammID/defNBA.m

²⁴⁸ ./octaveProgrammID/kinnmom1.m

²⁴⁹ ./octaveProgrammID/kinnmom2.m

²⁵⁰ ./octaveProgrammID/kinnmom3.m

²⁵¹ ./octaveProgrammID/jtalaXQMSj.m

²⁵² ./octaveProgrammID/tabelXQM.m

²⁵³ ./octaveProgrammID/defNBAest.m

²⁵⁴ ./octaveProgrammID/kinnmom1.m

²⁵⁵ ./octaveProgrammID/kinnmom2.m

²⁵⁶ ./octaveProgrammID/kinnmom3.m

²⁵⁷ ./octaveProgrammID/kinnmom1.m

²⁵⁸ ./octaveProgrammID/kinnmom2.m

²⁵⁹ ./octaveProgrammID/kinnmom3.m

I.9 Staatiliselt määramatu kaare arvutus

Programm I.73 (kaarSjPr1.m)²⁶⁰ 328, 329 – arvutab kahe liigendiga kaare sisejõude. Kasutab funktsioone:

lihttalaSj($NT, NN, l, F1, aF1, F2, aF2, qz, aqA, aqL$)²⁶¹ – arvutab lihttala sisejõude Q ja M

kaarPrbSj($NT, NN, l, f, F1, aF1, F2, aF2, SP$)²⁶² – arvutab 3 liigendiga paraboolse kaare sisejõude Q ja M

kaarPrbSj1($NT, NN, l, f, F1, aF1, F2, aF2, SP$)²⁶³ – arvutab 2 liigendiga paraboolse kaare sisejõude Q ja M .

Programm I.74 (kaarPrbSTMSjPr.m)²⁶⁴ 336, 338, 339 – arvutab liigenditeta kaare sisejõude. Kasutab funktsioone:

lihttalaPrbKSj(NN, l, qk, qc)²⁶⁵ – arvutab lihttala sisejõude Q ja M paraboolse jao- tusega koormusest

kaarPrbSTMSj(NN, l, f, SP)²⁶⁶ – arvutab lihttala sisejõude Q ja M paraboolse jao- tusega koormusest.

I.10 Lõplike elementide meetod

Programm I.75 (lemTalaKe4x4(L,EI))²⁶⁷ 616 – koostab tala lineaarse jäikusmaatriksi Ke (4×4).

Programm I.76 (lemTalaKg4x4(S,L,EI))²⁶⁸ 616 – koostab tala geomeetrilise jäi- kusmaatriksi Kg (4×4) survel.

Programm I.77 (lemTalaK3x3lpar(L,EI))²⁶⁹ – koostab tala (liigend paremal) jäi- kusmaatriksi $K3 \times 3$ (3×3) survel I järku teoorias.

Programm I.78 (lemTalaIIK3x3lpar(S,L,EI))²⁷⁰ 617 – koostab tala (liigend pare- mal) jäikusmaatriksi $K3 \times 3$ (3×3) survel II järku teoorias.

Programm I.79 (lemTalaFq4x1(L,q,EI))²⁷¹ – koostab tala koormusvektori fq (4×1) I järku teoorias survel.

²⁶⁰ ./octaveProgrammide/kaarSjPr1.m

²⁶¹ ./octaveProgrammide/lihttalaSj.m

²⁶² ./octaveProgrammide/kaarPrbSj.m

²⁶³ ./octaveProgrammide/kaarPrbSj1.m

²⁶⁴ ./octaveProgrammide/kaarPrbSTMSjPr.m

²⁶⁵ ./octaveProgrammide/lihttalaPrbKSj.m

²⁶⁶ ./octaveProgrammide/kaarPrbSTMSj.m

²⁶⁷ ./octaveProgrammide/lemTalaKe4x4.m

²⁶⁸ ./octaveProgrammide/lemTalaKg4x4.m

²⁶⁹ ./octaveProgrammide/lemTalaK3x3lpar.m

²⁷⁰ ./octaveProgrammide/lemTalaIIK3x3lpar.m

²⁷¹ ./octaveProgrammide/lemTalaFq4x1.m

Programm I.80 (`lemTalaIIfq4x1(S,L,q,EI)`)²⁷² 617 – koostab tala koormusvektori f_q (4×1) II järku teoorias survel.

Programm I.81 (`lemTalaIIfq3x1Lp(L,q,EI)`)²⁷³ – koostab tala (liigend paremal) koormusvektori f_q (3×1) I järku teoorias survel.

Programm I.82 (`lemTalaIIfq3x1Lp(S,L,q,EI)`)²⁷⁴ 617 – koostab tala (liigend paremal) koormusvektori f_q (3×1) II järku teoorias survel.

Programm I.83 (`srstkLemPY.m`)²⁷⁵ 364 – arvutab sõrestiku varraste sisejõude.

Programm I.84 (`srstkLEM.m`)²⁷⁶ 367 – arvutab sõrestiku varraste sisejõude (võrdlus `srstkNBA.m`).

Programm I.85 (`srstkLemBA.m`)²⁷⁷ – arvutab sõrestiku varraste sisejõude.

Programm I.86 (`LemTalaNaide1.m`)²⁷⁸ 370, 374 – arvutab LEM-iga tala sisejõud. Kasutab funktsioone:

`lemTalaKe4x4(L,EI)`²⁷⁹ – koostab tala lineaarse jäikusmaatriksi Ke (4×4).

`lemTalaK3x3lpar(Se,L,EI)`²⁸⁰ – koostab tala (liigend paremal) jäikusmaatriksi $K_{3 \times 3}$ (3×3) survel I järku teoorias.

`lemTalaIIfq4x1(Se,L,q,EI)`²⁸¹ – koostab tala koormusvektori f_q (4×1) I järku teoorias survel.

`lemTalaIIfq3x1Lp(Se,L,q,EI)`²⁸² – koostab tala (liigend paremal) koormusvektori f_q (3×1) I järku teoorias survel.

`InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N)`²⁸³ – asetab (liidab) $B(M,N)$ $A(I,J)$ -sse algusega IM, JN ,

`remRowIRfromA(A,I,J,IR)`²⁸⁴ – eemaldab maatriksist $A(I,J)$ rea IR .

`remColJRfromA(A,I,J,IR)`²⁸⁵ – eemaldab maatriksist $A(I,J)$ veeru JR .

Programm I.87 (`LemKelin.m`)²⁸⁶ 618 – arvutab LEM-iga I järku teoorias tala sisejõud. Kasutab funktsioone:

²⁷² `./octaveProgrammimid/lemTalaIIfq4x1.m`

²⁷³ `./octaveProgrammimid/lemTalaIIfq3x1Lp.m`

²⁷⁴ `./octaveProgrammimid/lemTalaIIfq3x1Lp.m`

²⁷⁵ `./octaveProgrammimid/srstkLemPY.m`

²⁷⁶ `./octaveProgrammimid/srstkLEM.m`

²⁷⁷ `./octaveProgrammimid/srstkLemBA.m`

²⁷⁸ `./octaveProgrammimid/LemTalaNaide1.m`

²⁷⁹ `./octaveProgrammimid/lemTalaKe4x4.m`

²⁸⁰ `./octaveProgrammimid/lemTalaK3x3lpar.m`

²⁸¹ `./octaveProgrammimid/lemTalaIIfq4x1.m`

²⁸² `./octaveProgrammimid/lemTalaIIfq3x1Lp.m`

²⁸³ `./octaveProgrammimid/InsertBtoA.m`

²⁸⁴ `./octaveProgrammimid/remRowIRfromA.m`

²⁸⁵ `./octaveProgrammimid/remColJRfromA.m`

²⁸⁶ `./octaveProgrammimid/LemKelin.m`

*lemTalaKe4x4(L,EI)*²⁸⁷ – koostab tala lineaarse jäikusmaatriksi Ke (4×4).

*lemTalaK3x3lpar(Se,L,EI)*²⁸⁸ – koostab tala (liigend paremal) jäikusmaatriksi $K3 \times 3$ (3×3) survel I järku teoorias.

*lemTalaIq4x1(Se,L,q,EI)*²⁸⁹ – koostab tala koormusvektori f_q (4×1) I järku teoorias survel.

*lemTalaIq3x1Lp(Se,L,q,EI)*²⁹⁰ – koostab tala (liigend paremal) koormusvektori f_q (3×1) I järku teoorias survel.

*InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N)*²⁹¹ – asetab (liidab) $B(M,N)$ $A(I,J)$ -sse algusega IM, JN .

Programm I.88 (LemKe.m)²⁹² 614 – arvutab LEM-iga II järku teoorias tala sisejõud. Kasutab funktsioone:

*lemTalaKg4x4(Se,L,EI)*²⁹³ – koostab tala geomeetrilise jäikusmaatriksi Kg (4×4) survel.

*lemTalaKe4x4(L,EI)*²⁹⁴ – koostab tala lineaarse jäikusmaatriksi Ke (4×4).

*lemTalaIIK3x3lpar(Se,L,EI)*²⁹⁵ – koostab tala (liigend paremal) jäikusmaatriksi $K3 \times 3$ (3×3) survel II järku teoorias.

*lemTalaIIq4x1(Se,L,q,EI)*²⁹⁶ – koostab tala koormusvektori f_q (4×1) II järku teoorias survel.

*lemTalaIIq3x1Lp(Se,L,q,EI)*²⁹⁷ – koostab tala (liigend paremal) koormusvektori f_q (3×1) II järku teoorias survel.

*InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N)*²⁹⁸ – asetab (liidab) $B(M,N)$ $A(I,J)$ -sse algusega IM, JN .

I.11 Piirkoormuse järgi arvutus

Programm I.89 (spRaamESTsn3.m)²⁹⁹ 481, 482, 486 – arvutab raami EST-meetodiga lineaarses teoorias. Raam on $3 \times$ staatikaga määramatu. Kasutab funktsioone:

*ysplvmhvI(baasi0,Li,Li,EA,GAr,EI)*³⁰⁰ – koostab ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,

²⁸⁷ ./octaveProgrammide/lemTalaKe4x4.m

²⁸⁸ ./octaveProgrammide/lemTalaK3x3lpar.m

²⁸⁹ ./octaveProgrammide/lemTalaIq4x1.m

²⁹⁰ ./octaveProgrammide/lemTalaIq3x1Lp.m

²⁹¹ ./octaveProgrammide/InsertBtoA.m

²⁹² ./octaveProgrammide/LemKe.m

²⁹³ ./octaveProgrammide/lemTalaKg4x4.m

²⁹⁴ ./octaveProgrammide/lemTalaKe4x4.m

²⁹⁵ ./octaveProgrammide/lemTalaIIK3x3lpar.m

²⁹⁶ ./octaveProgrammide/lemTalaIIq4x1.m

²⁹⁷ ./octaveProgrammide/lemTalaIIq3x1Lp.m

²⁹⁸ ./octaveProgrammide/InsertBtoA.m

²⁹⁹ ./octaveProgrammide/spRaamESTsn3.m

³⁰⁰ ./octaveProgrammide/ysplvmhvI.m

$ysplfhlin(baasi0,x,EA,GA_r,EJ)$ ³⁰¹ – koostab ülekandevõrrandid maatriksina,
 $ESTSKrmus(x,L,Fjoud,qkoormus)$ ³⁰² – arvutab koormusvektori EST-meetodis
 $(q + F)$ 3 liigendiga raamile,
 $yzhqz(baasi0,Li,qx,qz,EA,EI)$ ³⁰³ – arvutab ühtlaselt jaotatud koormuse I järku
 teoorias,
 $yzfzv(baasi0,Li,aLx,Fx,Fz,EA,EI)$ ³⁰⁴ – arvutab koondatud jõust koormuse I järku
 teoorias,
 $spInsertBtoA(spA,Iv,IJv,spvF)$ ³⁰⁵ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse
 maatriksisse spA algusega Iv, IJv ,
 $spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)$ ³⁰⁶ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadres-
 siga iv, jv ,
 $ylfhlin(baasi0,x,EA,GA_r,EJ)$ ³⁰⁷ – ülekandemaatriks lineaarses ülekandemeetodis,
 $InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N)$ ³⁰⁸ – asetab $B(M,N)$ $A(I,J)$ -sse algusega IM ,
 JN ,
 $SisejoudPunktis(VardaNr,X,AlgPar,lvarras,selem,qxZ,qzZ,aLXx,FZz,FZx,suuru-
 sed)$ ³⁰⁹ – arvutab ja trükitab varda 'VardaNr' sisejõud kohal $x=X$.

Programm I.90 (spRaamESTsn2.m)³¹⁰ 482, 482, 488 – arvutab raami EST-meetodiga lineaarses teoorias. Raam on $2 \times$ staatikaga määramatu. Kasutab samu funktsioone, mis $spRaamESTsn3.m$.

Programm I.91 (spRaamESTsn1.m)³¹¹ 483, 483, 490 – arvutab raami EST-meetodiga lineaarses teoorias. Raam on $1 \times$ staatikaga määramatu. Kasutab samu funktsioone, mis $spRaamESTsn3.m$.

Programm I.92 (spRaamESTsn0.m)³¹² 483, 484, 492 – arvutab raami EST-meetodiga lineaarses teoorias. Raam on $0 \times$ staatikaga määramatu s.o on staatikaga määratav. Kasutab samu funktsioone, mis $spRaamESTsn3.m$.

I.12 Teist järku teooria järgi arvutus

Programm I.93 (eesarvud.m)³¹³ 515, 545, 560, 706 – arvutab varda eesarvud, varda pikkuse, pikijõu S ja ristlõike jäikuse EI järgi.

³⁰¹ ./octaveProgrammID/ysplfhlin.m

³⁰² ./octaveProgrammID/ESTSKrmus.m

³⁰³ ./octaveProgrammID/yzhqz.m

³⁰⁴ ./octaveProgrammID/yzfzv.m

³⁰⁵ ./octaveProgrammID/spInsertBtoA.m

³⁰⁶ ./octaveProgrammID/spSisestaArv.m

³⁰⁷ ./octaveProgrammID/ylfhlin.m

³⁰⁸ ./octaveProgrammID/InsertBtoA.m

³⁰⁹ ./octaveProgrammID/SisejoudPunktis.m

³¹⁰ ./octaveProgrammID/spRaamESTsn2.m

³¹¹ ./octaveProgrammID/spRaamESTsn1.m

³¹² ./octaveProgrammID/spRaamESTsn0.m

³¹³ ./octaveProgrammID/eesarvud.m

Programm I.94 (eesagraf.m)³¹⁴ 515, 707 – koostab eesarvude graafika.

Programm I.95 (tnnusarv(l1,s1,ea1))³¹⁵ 515 – leiab varda tunnusarvu pikipõikpaindel, kus $l1$ – varda pikkus, $s1$ – pikijõud vardas, $ea1$ – varda ristlõike paindejäikus.

Programm I.96 (eesarv(mark,nu))³¹⁶ 515, 518, 707 – arvutab eesarvud A , B , C , V , $A+B$, $A-B$, $ALFA$, $BETA$; $mark='+/-'$; $survel: mark='-'$; $tõmbel: mark='+'$; nu – tunnusarv

```

fi(1,1)=C;                fi(5,1)=A-B;
fi(2,1)=A;                fi(6,1)=V;
fi(3,1)=B;                fi(7,1)=ALFA;
fi(4,1)=A+B;              fi(8,1)=BETA;

```

Programm I.97 (fi_ja_eta(mark,nu))³¹⁷ 515, 526, 531, 535, 539, 707 – arvutab eesarvud $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ja $\varphi_4(\nu)$, $\eta_1(\nu)$ ja $\eta_2(\nu)$, kus $mark='+/-'$; $survel: mark='-'$; $tõmbel: mark='+'$; nu – tunnusarv

```

fi(1,1)=C/3;              fi(5,1)=eta1;
fi(2,1)=A/4;              fi(6,1)=eta2;
fi(3,1)=B/2;              fi(7,1)=ALFA;
fi(4,1)=(A+B)/6;          fi(8,1)=BETA;

```

Programm I.98 (mxrikki(mitmeks,nu,l,Mik,Mki))³¹⁸ 523, 555, 713 – arvutab momendi Mx varda pikipõikpaindel, Mik -moment aluses, Mki -moment lõpus; teise märgikokkuleppe järgi, l – varda pikkus, $mitmeks$ – jaotuste arv, $Mx(1,i)$ – momentide jaotus vardas; esimese märgikokkuleppe järgi, $Mx(2,i)$ – põikjõudude jaotus vardas; esimese märgikokkuleppe järgi.

Programm I.99 (mxq(mitmeks,nu,lprojeks,l,q))³¹⁹ 523, 555, 713 – arvutab momendid koormusest q pikipõikpaindel, $q=konst$; l – varda pikkus; $lprojeks$ – varda pikkuse l projektsioon; väljastab: $Mx(1,i)$ – momentide jaotus vardas; esimese märgikokkuleppe järgi ja $Mx(2,i)$ – põikjõudude jaotus vardas; esimese märgikokkuleppe järgi.

I.13 Kriitilise koormuse leidmine

Programm I.100 (naide1er.m)³²⁰ 531 – näiteülesanne, leiab raami kriitilised jõud. Kasutab funktsioone:

$tnnusarv(l1,s1,ea1)$ ³²¹ – leiab varda tunnusarvu ν ,

³¹⁴ ./octaveProgrammide/eesagraf.m

³¹⁵ ./octaveProgrammide/tnnusarv.m

³¹⁶ ./octaveProgrammide/eesarv.m

³¹⁷ ./octaveProgrammide/fi_ja_eta.m

³¹⁸ ./octaveProgrammide/mxrikki.m

³¹⁹ ./octaveProgrammide/mxq.m

³²⁰ ./octaveProgrammide/naide1er.m

³²¹ ./octaveProgrammide/tnnusarv.m

$fi_ja_eta(mark, nu)$ ³²² – arvutab eesarvud $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ja $\varphi_4(\nu)$, $\eta_1(\nu)$ ja $\eta_2(\nu)$.
 $mrkmts(a)$ ³²³ – leiab vektori a elementide märgimuutused.

Programm I.101 (naide2er.m)³²⁴ 535 – näiteülesanne, leiab raami kriitilised jõud. Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1, s1, ea1)$ ³²⁵ – leiab varda tunnusarvu ν ,
 $fi_ja_eta(mark, nu)$ ³²⁶ – arvutab eesarvud $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ja $\varphi_4(\nu)$, $\eta_1(\nu)$ ja $\eta_2(\nu)$.
 $mrkmts(a)$ ³²⁷ – leiab vektori a elementide märgimuutused.

Programm I.102 (naide3ep.m)³²⁸ 527 – näiteülesanne, leiab raami kriitilised jõud. Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1, s1, ea1)$ ³²⁹ – leiab varda tunnusarvu ν ,
 $fi_ja_eta(mark, nu)$ ³³⁰ – arvutab eesarvud $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ja $\varphi_4(\nu)$, $\eta_1(\nu)$ ja $\eta_2(\nu)$.
 $mrkmts(a)$ ³³¹ – leiab vektori a elementide märgimuutused.

Programm I.103 (naide4al.m)³³² 540 – näiteülesanne, leiab raami kriitilised jõud. Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1, s1, ea1)$ ³³³ – leiab varda tunnusarvu ν ,
 $fi_ja_eta(mark, nu)$ ³³⁴ – arvutab eesarvud $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ja $\varphi_4(\nu)$, $\eta_1(\nu)$ ja $\eta_2(\nu)$.
 $mrkmts(a)$ ³³⁵ – leiab vektori a elementide märgimuutused.

Programm I.104 (naide4alVR.m)³³⁶ 543 – näiteülesanne, leiab raami kriitilised jõud. Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1, s1, ea1)$ ³³⁷ – leiab varda tunnusarvu ν ,
 $fi_ja_eta(mark, nu)$ ³³⁸ – arvutab eesarvud $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ja $\varphi_4(\nu)$, $\eta_1(\nu)$

³²² ./octaveProgrammide/fi_ja_eta.m

³²³ ./octaveProgrammide/mrkmts.m

³²⁴ ./octaveProgrammide/naide2er.m

³²⁵ ./octaveProgrammide/tnnusrv.m

³²⁶ ./octaveProgrammide/fi_ja_eta.m

³²⁷ ./octaveProgrammide/mrkmts.m

³²⁸ ./octaveProgrammide/naide3ep.m

³²⁹ ./octaveProgrammide/tnnusrv.m

³³⁰ ./octaveProgrammide/fi_ja_eta.m

³³¹ ./octaveProgrammide/mrkmts.m

³³² ./octaveProgrammide/naide4al.m

³³³ ./octaveProgrammide/tnnusrv.m

³³⁴ ./octaveProgrammide/fi_ja_eta.m

³³⁵ ./octaveProgrammide/mrkmts.m

³³⁶ ./octaveProgrammide/naide4alVR.m

³³⁷ ./octaveProgrammide/tnnusrv.m

³³⁸ ./octaveProgrammide/fi_ja_eta.m

ja $\eta_2(\nu)$.

$mrkmts(a)$ ³³⁹ – leiab vektori a elementide märgimuutused.

I.14 Teist järku teooria ülekandemaatriksid

Programm I.105 (ylfmhvII(baasi0,S,x,l,EA,GAr,EJ))³⁴⁰ 577, 579, 582, 587, 602, 696 – leiab ülekandemaatriksi II järku teoorias võrrandisüsteemi koostamiseks, II märgikokkulepe, $Zp=F*Zv$, $Zp'=[Up\ Wp\ Fip\ Sp\ Hp\ Mp]$, kus

EA – ristlõike pikijäikus,

GAr – ristlõike nihkejäikus,

EJ – ristlõike paindejäikus,

x – varda ristlõike koordinaat,

$baasi0$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused,

S – pikijõud.

Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1,s1,ea1)$ ³⁴¹ – leiab varda tunnusarvu ν ,

$ylfhlin(baasi0,x,EA,GAr,EJ)$ ³⁴² – ülekandemaatriks lineaarses ülekandemeetodis

Programm I.106 (ysplfmhvII(baasi0,S,x,l,EA,GAr,EJ))³⁴³ 700 – koostab hõreda ülekandemaatriksi II järku teoorias võrrandisüsteemi koostamiseks, II märgikokkulepe, $Zp=F*Zv$, $Zp'=[Up\ Wp\ Fip\ Sp\ Hp\ Mp]$, kus

EA – ristlõike pikijäikus,

GAr – ristlõike nihkejäikus,

EJ – ristlõike paindejäikus,

x – varda ristlõike koordinaat,

$baasi0$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused,

S – pikijõud.

Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1,s1,ea1)$ ³⁴⁴ – leiab varda tunnusarvu ν ,

$ysplfhlin(baasi0,x,EA,GAr,EJ)$ ³⁴⁵ – hõre ülekandemaatriks lineaarses ülekandemeetodis

Programm I.107 (ylfhvzII(baasi0,S,l,x,a,Fz,EJ))³⁴⁶ 595, 602, 698, 700 – leiab koormusvektori koondatud jõust II järku teoorias, II märgikokkulepe, kus

³³⁹ ./octaveProgramm/yrkmts.m

³⁴⁰ ./octaveProgramm/ylfmhvII.m

³⁴¹ ./octaveProgramm/tnnusrv.m

³⁴² ./octaveProgramm/ylfhlin.m

³⁴³ ./octaveProgramm/ysplfmhvII.m

³⁴⁴ ./octaveProgramm/tnnusrv.m

³⁴⁵ ./octaveProgramm/ysplfhlin.m

³⁴⁶ ./octaveProgramm/ylfhvzII.m

Fz – koondatud jõud,

a – koondatud jõu Fz kaugus varda algusest,

EJ – ristlõike paindejäikus,

l – varda pikkus,

$baasi0$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused,

S – pikijõud.

Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1,s1,ea1)$ ³⁴⁷ – leiab varda tunnusarvu ν ,

$yzfzv(baasi0,x,a,Fx,Fz,EA,EJ)$ ³⁴⁸ – koondatud koormus lineaarses ülekandemethodis.

Programm I.108 ($ylqvII(baasi0,S,x,lp,qz,EJ)$)³⁴⁹ 579, 582, 587, 596, 602, 700 – leiab koormusvektori jaotatud koormusest II järku teoorias, II märgikokkulepe, kus

qz – ühtlaselt jaotatud koormus,

EJ – ristlõike paindejäikus,

x – varda ristlõike koordinaat,

$baasi0$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused,

S – pikijõud.

Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1,s1,ea1)$ ³⁵⁰ – leiab varda tunnusarvu ν ,

$yzhqz(baasi0,x,qx,qz,EA,EJ)$ ³⁵¹ – jaotatud koormus vardale ülekandemethodis.

Programm I.109 ($ylfmII(S,x,l,EA,GAr,EJ)$)³⁵² 573, 699 – leiab ülekandemaatriksi II järku teoorias, II märgikokkulepe, $Zp=F*Zv$, $Zp'=[Up Wp Fip Np Qp Mp]$, kus

EA – ristlõike pikijäikus,

GAr – ristlõike nihkejäikus,

EJ – ristlõike paindejäikus,

l – varda pikkus,

S – pikijõud.

Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1,s1,ea1)$ ³⁵³ – leiab varda tunnusarvu ν ,

$ylflin(x,EA,GAr,EJ)$ ³⁵⁴ – ülekandemaatriks (6,6) lineaarsele ülesandele.

Programm I.110 ($ylqII(S,x,l,qz,EJ)$)³⁵⁵ 574 – leiab koormusvektori ühtlaselt jaotatud koormusest II järku teoorias, II ja I märgikokkulepe puhul $[Up Wp Fip Nv Qp$

³⁴⁷ `./octaveProgrammID/tnnusrv.m`

³⁴⁸ `./octaveProgrammID/yzfzv.m`

³⁴⁹ `./octaveProgrammID/ylqvII.m`

³⁵⁰ `./octaveProgrammID/tnnusrv.m`

³⁵¹ `./octaveProgrammID/yzhqz.m`

³⁵² `./octaveProgrammID/ylfmII.m`

³⁵³ `./octaveProgrammID/tnnusrv.m`

³⁵⁴ `./octaveProgrammID/ylflin.m`

³⁵⁵ `./octaveProgrammID/ylqII.m`

$Mp]$, kus

qz – jaotatud koormus,
 EJ – ristlõike paindejäikus,
 l – varda pikkus,
 S – pikijõud.

Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1, s1, ea1)$ ³⁵⁶ – leiab varda tunnusarvu ν ,
 $yzqz(x, q, EJ)$ ³⁵⁷ – jaotatud koormus vardale lineaarses ülekandemeetodis.

Programm I.111 (ylffzII(S,l,x,a,Fz,EJ))^{358 574} – leiab koormusvektori koondatud jõust II järku teoorias, II märgikokkulepe, kus

Fz – koondatud jõud,
 a – koondatud jõu Fz kaugus varda algusest,
 EJ – ristlõike paindejäikus,
 l – varda pikkus,
 S – pikijõud.

Kasutab funktsioone:

$tnnusrv(l1, s1, ea1)$ ³⁵⁹ – leiab varda tunnusarvu ν ,
 $yzfz(x, a, Fx, Fz, EA, EJ)$ ³⁶⁰ – koondatud koormus vardale lineaarses ülekandemeetodis.

Programm I.112 (ytransf(S,l,EJ))^{361 575} – transformatsioonimaatriks II järku teoorias, kus

EJ – ristlõike paindejäikus,
 l – varda pikkus,
 S – pikijõud.

Teisendab N ja Q pikijõuks S ja ristjõuks H

$\check{Z} = \text{Tr}^* Z$, $\check{Z}' = [U \ W \ F_i \ \check{S} \ T \ M]$, $Z' = [U \ W \ F_i \ N \ Q \ M]$, $F_i = -dW/dx$

Kasutab funktsiooni:

$tnnusrv(l1, s1, ea1)$ ³⁶² – leiab varda tunnusarvu ν .

Programm I.113 (ytransfp(S,l,EJ))^{363 575, 587, 602} – transformatsioonimaatriks II järku teoorias, kus

EJ – ristlõike paindejäikus,
 l – varda pikkus,
 S – pikijõud.

Teisendab pikijõu S ja ristjõu H normaaljõuks N

³⁵⁶ ./octaveProgramm/tnnusrv.m

³⁵⁷ ./octaveProgramm/yzqz.m

³⁵⁸ ./octaveProgramm/ylffzII.m

³⁵⁹ ./octaveProgramm/tnnusrv.m

³⁶⁰ ./octaveProgramm/yzfz.m

³⁶¹ ./octaveProgramm/ytransf.m

³⁶² ./octaveProgramm/tnnusrv.m

³⁶³ ./octaveProgramm/ytransfp.m

ja põikjõuks Q .

$$Z = \text{Tr}^* \check{Z}, \quad \check{Z}' = [U \quad W \quad F_i \quad \check{S} \quad T \quad M],$$

$$Z' = [U \quad W \quad F_i \quad N \quad Q \quad M], \quad F_i = -dW/dx$$

Kasutab funktsiooni:

$\text{tnnusrv}(l1, s1, ea1)$ ³⁶⁴ – leiab varda tunnusrvu ν .

Programm I.114 (ynadIII1.m)³⁶⁵ 580, 582 – tala arvutamise näide II järku teooria ülekandemaatriksiga.

Kasutab funktsioone:

$\text{ylfhlin}(\text{baasi}0, x, EA, GAr, EJ)$ ³⁶⁶ – leiab ülekandemaatriksi (6,6) lineaarse ülesande lahendamiseks,

$\text{yzhqz}(\text{baasi}0, x, qx, qz, EA, EJ)$ ³⁶⁷ – ühtlaselt jaotatud koormus vardale,

$\text{ylfmhvII}(\text{baasi}0, S, x, l, EA, GAr, EJ)$ ³⁶⁸ – ülekandemaatriks II järku teoorias,

$\text{ylqvII}(\text{baasi}0, S, x, lp, qz, EJ)$ ³⁶⁹ – ühtlaselt jaotatud koormus II järku teoorias,

$\text{ylflin}(x, EA, GAr, EJ)$ ³⁷⁰ – ülekandemaatriks $F(6,6)$ lineaarses ülesandes,

$\text{yzqz}(x, q, EJ)$ ³⁷¹ – varda lauskoormusvektor ülekandemeetodis.

Programm I.115 (ylvmhvII(baasi0,S,x,l,EA,GAr,EJ))³⁷² 596 – koostab võrrandisüsteemi II järku teoorias, $I^*Z_p - U^*Z_v = Z_0$, $Z_p' = [U_p \quad W_p \quad F_{ip} \quad S_p \quad H_p \quad M_p]$, II määrgikokkulepe, kus

EA – ristlõike pikijäikus,

GAr – ristlõike nihkejäikus,

EJ – ristlõike paindejäikus,

l – varda pikkus,

$\text{baasi}0$ – varda baasjäikus on selle varda jäikus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jäikused,

S – pikijõud.

Kasutab funktsiooni:

$\text{ylfmhvII}(\text{baasi}0, S, x, l, EA, GAr, EJ)$ ³⁷³ – ülekandemaatriks.

Programm I.116 (ysplvmhvII(baasi0,S,x,l,EA,GAr,EJ))³⁷⁴ 596, 700 – koostab hõreda võrrandisüsteemi II järku teoorias, $I^*Z_p - U^*Z_v = Z_0$,

$Z_p' = [U_p \quad W_p \quad F_{ip} \quad S_p \quad H_p \quad M_p]$, II määrgikokkulepe, kus

EA – ristlõike pikijäikus,

³⁶⁴ `./octaveProgrammID/tnnusrv.m`

³⁶⁵ `./octaveProgrammID/ynadIII1.m`

³⁶⁶ `./octaveProgrammID/ylfhlin.m`

³⁶⁷ `./octaveProgrammID/yzhqz.m`

³⁶⁸ `./octaveProgrammID/ylfmhvII.m`

³⁶⁹ `./octaveProgrammID/ylqvII.m`

³⁷⁰ `./octaveProgrammID/ylflin.m`

³⁷¹ `./octaveProgrammID/yzqz.m`

³⁷² `./octaveProgrammID/ylvmhvII.m`

³⁷³ `./octaveProgrammID/ylfmhvII.m`

³⁷⁴ `./octaveProgrammID/ysplvmhvII.m`

GAr – ristlõike nihkejääkus,

EJ – ristlõike paindejääkus,

l – varda pikkus,

$baasi0$ – varda baasjääkus on selle varda jääkus $i = EJ/l$, millega normeeritakse varraste jääkused,

S – pikijõud.

Kasutab funktsiooni:

$ysplfmhvII(baasi0, S, x, l, EA, GAr, EJ)$ ³⁷⁵ – hõre ülekandemaatriks

$spInsertBtoA(spA, IM, JN, spB)$ ³⁷⁶ – asetab hõredasse maatriksisse spA alates reast IM ja veerust JN hõreda maatriksi spB .

Programm I.117 (yRaam1.m) ³⁷⁷ 584, 587 – arvutab raami II järku teoorias. Kasutab funktsioone:

$ylvmhvII(baasi0, S, x, l, EA, GAr, EJ)$ ³⁷⁸ – koostab ülekandevõrrandid,

$ylfmhvII(baasi0, S, x, l, EA, GAr, EJ)$ ³⁷⁹ – ülekandemaatriks II järku teoorias

$ylqvII(baasi0, S, x, lp, qz, EA, EJ)$ ³⁸⁰ – arvutab ühtlaselt jaotatud koormuse II järku teoorias.

$ytransfp(S, l, EJ)$ ³⁸¹ – teisendab pikijõu S ja ristjõu H normaaljõuks N ja põikjõuks Q .

Programm I.118 (yspRaamEST.m) ³⁸² 592, 596, 601 – arvutab raami EST-meetodiga II järku teoorias. Kasutab funktsioone:

$ysplvmhvII(baasi0, SII, Li, Li, EA, GAr, EI)$ ³⁸³ – koostab ülekandevõrrandid hõreda maatriksina,

$ylqvII(baasi0, S, x, lp, qz, EA, EJ)$ ³⁸⁴ – arvutab ühtlaselt jaotatud koormuse II järku teoorias.

$ylfhvzII(baasi0, SII, Li, Li, aLx, Fz, EI)$ ³⁸⁵ – arvutab koondatud jõust koormuse II järku teoorias.

$spInsertBtoA(spA, Iiv, IJv, spvF)$ ³⁸⁶ – asetab hõreda maatriksi $spvF$ hõredasse maatriksisse spA algusega Iiv , IJv ,

$spSisestaArv(spA, iv, jv, sv)$ ³⁸⁷ – asetab hõredasse maatriksisse spA arvu sv aadressiga iv, jv

³⁷⁵ ./octaveProgramm/ysplfmhvII.m

³⁷⁶ ./octaveProgramm/spInsertBtoA.m

³⁷⁷ ./octaveProgramm/yRaam1.m

³⁷⁸ ./octaveProgramm/ylvmhvII.m

³⁷⁹ ./octaveProgramm/ylfmhvII.m

³⁸⁰ ./octaveProgramm/ylqvII.m

³⁸¹ ./octaveProgramm/ytransfp.m

³⁸² ./octaveProgramm/yspRaamEST.m

³⁸³ ./octaveProgramm/ysplvmhvII.m

³⁸⁴ ./octaveProgramm/ylqvII.m

³⁸⁵ ./octaveProgramm/ylfhvzII.m

³⁸⁶ ./octaveProgramm/spInsertBtoA.m

³⁸⁷ ./octaveProgramm/spSisestaArv.m

*InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N)*³⁸⁸ – asetab $B(M,N)$ $A(I,J)$ -sse algusega IM, JN ,
*ytransfp(S,l,EJ)*³⁸⁹ – teisendab pikijõu S ja ristjõu H normaaljõuks N ja
põikjõuks Q .

³⁸⁸ `./octaveProgrammide/InsertBtoA.m`

³⁸⁹ `./octaveProgrammide/ytransfp.m`

Kirjandus

- [Arg54] J. H. Argyris. Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations. ³⁹⁰ Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Vol.26 Iss:10. pp. 347–356, Oct 1954. 35, 37
- [Beer04a] G. Beer. Baustatik 1. Geschichtliche Entwicklung | Grundlagen | Verformungsberechnung | Statisch unbestimmte Systeme | Kraftgrößenmethode | Deformationsmethode | Matrix Stiffness Method | Räumliche Systeme ³⁹¹. Institut für Baustatik der Technische Universität Graz, Graz, 2004.
- [Beer04] G. Beer. Baustatik 2. Seilstatik | Theorie II. Ordnung und Stabilität | Traglastverfahren | Tragwerksdynamik | Näherungsmethoden | Modellbildung ³⁹². Institut für Baustatik der Technische Universität Graz, Graz, 2004. 465, 466, 470, 471, 479, 494
- [Bor79a] F. W. Borscheuer. Berechnungsverfahren nach Theorie II. Ordnung. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1979. 692, 700, 701, 706, 708
- [Bor79b] F. W. Borscheuer. Übertragungsverfahren. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1979. 570, 694
- [BW80] C. A. Brebia, S. Walker. Boundary Element Techniques in Engineering. Butterworths, London, 1980. 383, 680
- [DK62] А. В. Дарков и В. И. Кузнецов. *Строительная механика*. Москва: Высшая школа, 1962. 71, 77, 325

³⁹⁰http://www.google.ee/search?hl=et&source=hp&q=Energy+theorems+and+structural+analysis&gbv=2&oq=Energy+theorems+and+structural+analysis&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=3&gs_upl=3479134791015980111101010101158115810.11110

³⁹¹http://portal.tugraz.at/portal/page/portal/Files/i2020/files/Skripten/Skriptum_StdTW_WS0506.pdf

³⁹²http://portal.tugraz.at/portal/page/portal/Files/i2020/files/Skripten/Baustatik2_Skriptum2004_IBK.pdf

- [Din11] D. Dinkler. Grundlagen der Baustatik. Modelle und Berechnungsmethoden für ebene Stabtragwerke. 1. auflage 2011.³⁹³ Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2011. 35
- [Ebl90a] H. Ebel. Statische Berechnung von Stabtragwerken mit dem Gesamtmatrixverfahren. Bauingenieur 65 (1990) 17–27, Springer-Verlag, 1990. 383
- [Ebl90] H. Ebel. Zur systematischen Durchführung des Kraftgrößenverfahrens 1. und 2. Ordnung, ausgehend vom Gesamtmatrixverfahren. Festschrift, Richard Schardt, THD Schriftenreihe Wissenschaft und Technik 51, pages 19–41. Inst. für Statik, THD – Veröffentl., Darmstadt, 1990. 217, 383
- [EP67] R. Eek, L. Poverus. Ehitusmehaanika II.³⁹⁴ Tallinn: Valgus, 1967. 465, 467, 494, 515, 516, 524, 526, 531, 535, 539, 701, 707
- [ER83] R. Eek, R. Räämet. Ehitusmehaanika näidisülesanded I.³⁹⁵ Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1983, 99 lk. 114, 136
- [ERL85] R. Eek, R. Räämet, A. Lahe. Ehitusmehaanika näidisülesanded II.³⁹⁶ Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1985, 100 lk.
- [ER77] R. Eek, R. Räämet. Ehitusmehaanika näidisülesanded III.³⁹⁷ Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1977, 51 lk. 529, 533, 536, 612
- [Fi71] А. П. Филин. *Приближенные методы математического анализа, используемые в механике твердых деформируемых тел.* Стройиздат, Ленинград, 1971. 689
- [GaW96] L. Gaul, M. Wagner. Beam Response Derived from 3D Hybrid Boundary Integral Method in Elastodynamics.³⁹⁸ Institute A of Mechanics, University of Stuttgart, Stuttgart, 1996. 384
- [Har85] F. Hartmann. The Mathematical Foundation of Structural Mechanics. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 1985. 37, 176
- [Har87] F. Hartmann. Methode der Randelemente. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 1987. 208, 383

³⁹³<http://books.google.ee/books?id=0q0aKoH2Y40C&pg=PA33&lpg=PA33&dq=Baustatik+Schnittprinzip&source=bl&ots=n0xKBXI7m&sig=fc8Y6Z3K0VKyEay9wLIP9Bh91S0&hl=et#v=onepage&q=Baustatik%20Schnittprinzip&f=false>

³⁹⁴./EekPoverusEMEII.djvu

³⁹⁵./EhmehINaidisYlesanded.djvu

³⁹⁶./EhmehIINaidisYlesanded.djvu

³⁹⁷./EhmehIIINaidisYlesanded.djvu

³⁹⁸<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.39.1207&rep=rep1&type=pdf>

- [Jür85] A. Jürgenson. Tugevusõpetus.³⁹⁹ Tallinn: Valgus, 1985. 32, 33, 34, 35, 36, 56, 171, 364, 689
- [Kis86] В. А. Киселев. *Строительная механика. Общий курс*. Стройиздат, Москва, 1986. 326, 342
- [Krä90] W. B. Krätzig. Statik der Tragwerke, 2b. Das Weggrößenverfahren. Bochum, Ruhr – Universität Bochum, Fakultät für Bauingenieurwesen, 1990. 701
- [Krä91a] W. B. Krätzig. Statik der Tragwerke, 4. Finite Berechnungsmethoden (4.a Grundlagen; Stabtragwerke). Bochum, Ruhr – Universität Bochum, Fakultät für Bauingenieurwesen, 1991. 40, 570, 575, 692, 706
- [Krä91c] W. B. Krätzig. Statik der Tragwerke, 4. Computermethoden zur linearen Tragwerksanalyse Teil II. Bochum, Ruhr – Universität Bochum, Fakultät für Bauingenieurwesen, 1991. 612, 694, 700
- [KW90] W. B. Krätzig and U. Wittek. Tragwerke 1. Theorie und Berechnungsmethoden statisch bestimmter Stabtragwerke⁴⁰⁰. Berlin Heidelberg NewYork, Springer-Verlag, 1990. 32, 35, 37, 38, 41, 52, 57, 83, 153, 172, 179, 754
- [Krä91b] W. B. Krätzig. Tragwerke 2. Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Stabtragwerke. Berlin Heidelberg NewYork, Springer-Verlag, 1991. 32, 158, 383
- [KM04] W. B. Krätzig, R. Harte, K. Meskouris and U. Wittek. Tragwerke 2. Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Stabtragwerke⁴⁰¹. Springer-Verlag, 2004. 281, 293, 702, 703
- [Kõo90] J. Kõo. Algpameetrite meetodi ühest esitusvariandist tugevusõpetuses. Põllumajandushoonete ja -ehitiste uued konstruktsioonid. Eesti Põllumajanduse Akadeemia Teaduslike Tööde Kogumik, Nr 168, Tartu 1990, lk 58–64. 56
- [Kõo92] J. Kõo. Varrastarindite arvutus maatrikstehetega. Õppevahend. Eesti Põllumajandusülikool, Tartu 1992. 83
- [Lah97a] A. Lahe. The transfer matrix and the boundary element method⁴⁰², Proc. Estonian Acad. Sci. Engng., 1997, 3, 1. p. 3–12. 4, 61, 208, 384

³⁹⁹ ./AJ_tugevus.djvu

⁴⁰⁰http://books.google.ee/books?id=gG8VusQ0YEwC&pg=PA243&lpg=PA243&dq=W+Krätzig+Tragwerke+1:&source=bl&ots=Ag1MCQ74Js&sig=c7pRtFPm127kcK4soeIS19DorBE&hl=et&ei=k6alTP75NcLtOZHrgawC&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=4&ved=0CCAQ6AEwAw#v=onepage&q&f=false

⁴⁰¹<http://books.google.ee/books?id=TvvD87SDVcIC&pg=PA196&lpg=PA197&dq=drehwinkelverfahren&hl=en#v=onepage&q=drehwinkelverfahren&f=false>

⁴⁰²http://books.google.ee/books?id=ghco7svk5T4C&pg=PA3&lpg=PA3&dq=Andres+Lahe&source=bl&ots=3SFfo4UCES&sig=_XLUez-SfW2FVYGRx8v2LVm16V8&hl=et&ei=YQaFTMeIEoWc00yCyNwP&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&ved=0CB0Q6AEwBDgK#v=onepage&q=Andres%20Lahe&f=false

- [Lah97b] A. Lahe. The EST method for the frame analysis. Proc. Tenth Nordic Seminar on Computational Mechanics, October 24–25, 1997, Tallinn, Tallinn Technical University, 1997, p. 202–205. [4](#), [61](#), [208](#), [384](#), [583](#), [592](#)
- [Lah98a] A. Lahe. The EST method for the frame analysis in second order theory., Proc. of the NSCM-11: Nordic Seminar on Computational Mechanics, October 16–17, 1997, Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, Stockholm, TRITA-BKN. Bulletin 39, Stockholm, 1998, p.167–170. [4](#), [61](#), [208](#), [384](#), [583](#), [592](#)
- [Lah98b] A. Lahe. Computer Aided Learning of Structural Mechanics with EHMEH., Proc. 4th International Conference on Computer Aided Learning and Instruction in Science and Engineering, (CALISE'98), June 15–17, 1998, Chalmers University of Technology Göteborg, Göteborg, 1998, p.72–79. [4](#), [208](#), [384](#)
- [Lah98c] A. Lahe. CAL program for Truss. Proc. 4th International Conference on Computer Aided Learning and Instruction in Science and Engineering, (CALISE'98), June 15–17, 1998, Chalmers University of Technology Göteborg, Göteborg, 1998, p. 483–484.
- [LT80] M. Lawo, O. Tierauf. Matrizenmethoden der Statik und Dynamik, I: Statik. Fried. Vieweg & Shon - Braunschweig-Wiesbaden, 1980. [4](#), [383](#)
- [MA99] P. Marti, M. Alvarez, W. Kaufmann and V. Sigrist. Tragverhalten von Stahlbeton. Fortbildungskurs für Bauingenieure ETH Zürich 30.9./1.10.1999 ⁴⁰³. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich Zürich, September 1999. [471](#), [494](#)
- [ME09] K. Meskouris and E. Hake. Statik der Stabtragwerke ⁴⁰⁴. Springer-Verlag, 2009 [281](#), [293](#), [702](#), [703](#)
- [MR95] J. Metsaveer, U. Raukas. Varda deformatsioonid ja siirded. ⁴⁰⁵ Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, mehaanikainstituut, 1995. [33](#), [35](#), [38](#), [41](#), [57](#)
- [MR96] J. Metsaveer, U. Raukas. Varda sisejõud ja pinged. ⁴⁰⁶ Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, mehaanikainstituut, 1996. [33](#), [35](#), [48](#), [355](#)
- [MR99] J. Metsaveer, U. Raukas. Saleda varda arvutus. Varda kandevõime ja dünaamika. ⁴⁰⁷ Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, mehaanikainstituut, 1999. [466](#), [499](#)
- [PL63] E. C. Pestel, F. A. Leckie. Matrix Method in Elastomechanics. McGraw-Hill, New York, San Francisco, Toronto, London, 1963. [4](#), [383](#)

⁴⁰³<http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:26156/eth-26156-01.pdf>

⁴⁰⁴<http://www.springerlink.com/content/v57424743081122n/>

⁴⁰⁵./vds.djvu

⁴⁰⁶./vsp.djvu

⁴⁰⁷./sva.djvu

- [PW94] W. D. Pilkey, W. Wunderlich. *Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods*. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, 1994. 500, 611, 612, 613, 623, 644, 692
- [PRZ68] J.Š. Przemienicki. *Theory of Matrix Structural Analysis*⁴⁰⁸. New York, McGraw-Hill Book Company, 1968. 171
- [RH95] E. Ramm and T. J. Hofmann. Stabtragwerke. In Melhorn G., editor, *Baustatik, Baudynamik, Der Ingenieurbau*, pages 1–349. Ernst & Shon, Berlin, 1995. 383, 500, 504, 507, 613, 644
- [Rää64] R. Räämet. *Ehitusmehaanika*. Tallinn: Eesti Riiklik Kirjastus, 1964. 31, 32
- [Rää75] R. Räämet. *Ehitusmehaanika*⁴⁰⁹. Tallinn: Valgus, 1975. 4, 36, 77, 91, 171, 179, 183, 217, 281, 325, 328, 332, 336, 338, 342, 465, 470, 701
- [ERL88] *P. Ряэмет, Р. Еек, А. Лахе. Строительная механика. Программа и задачи*. Таллинн: ТПИИ, кафедра строительной механики, 1988, 70 стр.
- [SALŠ84] А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников и Н. Н. Шапошников. *Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений*. Стройиздат, Москва, 1984. 526, 531, 535, 539, 707
- [Str89] M. Stern. Static analysis of beams, plates and shells. In Beskos, D. E., editor, *Boundary Element Methods in Structural Analysis*, pages 41–64. Am. Soc. Civil Engineers, New York, 1989. 383
- [Tam03] I. Tammeraid, *Matemaatiline analüüs II*⁴¹⁰. Tallinn, TTÜ kirjastus, 2003. 32
- [Ter86] *Terasprofiilide tabelid*. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1986, 12 lk.
- [Thi90] D. Thieme. *Einführung in die Finite-Element-Methode für Bauingenieure*. Verlag für Bauwesen, Berlin, 1990. 618
- [Vol67] *А. С. Вольмир. Устойчивость деформируемых систем*. Издательство Наука, Москва, 1967. 502
- [WR95] W. Wunderlich and W. Redanz. Die Methode der Finiten Elemente. In Melhorn G., editor, *Rechnerorientierte Baumechanik, Der Ingenieurbau*, pages 141–247. Ernst & Shon, Berlin, 1995. 383

⁴⁰⁸http://books.google.ee/books?id=Pb8qTzqOKbAC&pg=PA27&lpg=PA27&dq=complementary+work&source=bl&ots=NMTY3Ph4-0&sig=ULSnCkAUMfrUtoIw7zje201b3Sg&hl=et&ei=Y6sUTaeqB4Ss8gPHqayEBw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2&ved=0CBsQ6AEwAQ#v=onepage&q=complementarywork&f=false

⁴⁰⁹[./RR_ehmeh.djvu](#)

⁴¹⁰<http://staff.ttu.ee/~itammeraid/matan2.pdf#page=9>

Täiendav kirjandus

- [1] Bo Torstenfelt. Finite Elements "from the early beginning to the very end". An Introduction to Elasticity and Heat Transfer Applications. Only the Bar and Beam chapters! Preliminary edition LiU-IEI-S-08/535-SE ⁴¹¹. Linköpings Universitet, Tekniska Högskolan, 2007.
Siit lugege lk 13 (27), BARS 3.4 A Weak Formulation, valem (3.8) ja lk 51 (65), BEAMS 4.4 A Weak Formulation, valem (4.20). **35**
- [2] S. Govindjee. Variational Methods in Structural Mechanics and Civil Engineering ⁴¹². University of California Berkely, Department of Civil and Environmental Engineering, Berkely 2013.
- [3] N. S. Ottosen and H. Petersson. Introduction to the Finite Element Method. Lund University, Division of Structural Mechanics, Lund, second edition, 1991. **35**
- [4] R. Courant and D. Hilbert. Methoden der mathematischen Physik I und II. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 3. und 2. Auflage, NewYork, 1968.
Siit lugege: Greeni funktsionaal on lähtepunktiks mehaanikas. Ta kirjeldab välis-, sise- ja rajamuutujaid. See funktsionaal kui mehaanika energiateoreem on ehitusmehaanika, lõplike elementide meetodi ja rajaelementide meetodi põhitööriistaks [KW90] ^{413 414} lk 56. **35**
- [5] J. Heyman. Structural Analysis. A Historical Approach. Cambridge University Press, 1998.
- [6] G. Knappstein. Statik, insbesondere Schnittprinzip. 4., überarbeitete, erweiterte Auflage. Wissenschaftlicher Verlag Harry Deusch GmbH, Frankfurt am Main 2011, 403 Seiten ⁴¹⁵.
Siit vaadake joonis 1.11 lk 6 (41), sisejõud on paarikaupa ja joonis 1.13 lk 7 (42), kõik jõud on siin välisjõud.
- [7] A. Lahe. Kas rajajõud on sisejõud? ⁴¹⁶. Tallinn, 2012.
- [8] A. Lahe. Energiateoreem ehitusmehaanikas ⁴¹⁷. Tallinn, 2013.

⁴¹¹<http://www.solid.iei.liu.se/Education/TMHL02/Book-Bars and Beams.pdf>

⁴¹²<http://www.ce.berkeley.edu/~sanjay/ce130n/CE130NReader.pdf>

⁴¹³http://books.google.ee/books?id=gG8VusQ0YEwC&pg=PA56&lpg=PA56&dq=Greensche+Funktional+des+Fundamentaloperators&source=bl&ots=AhYHCR44Qs&sig=ZpOFfkc5x-iyifxa5S_2SmGFsrM&hl=et#v=onepage&q&f=false

⁴¹⁴http://www.booklooker.de/app/result.php?token=2087199215&mediaType=0&sortOrder=default&js_state=on&autocomplete=on&message=&autor=Krätzig&titel=Tragwerke+&infotext=&verlag=&isbn=&year_from=&year_to=&sprache=&einbandCategory=&price_min=&price_max=&searchUserTyp=0&land=&datefrom=&oldBooks=on&newBooks=on&x=0&y=0

⁴¹⁵http://www.harri-deutsch.de/verlag/titel/knappste/1876_sample.pdf

⁴¹⁶http://www.e-uni.ee/e-kursused/ehitusmehaanika/Rajaj6udude_too.pdf

⁴¹⁷[./Energiateoreem.pdf](http://www.e-uni.ee/e-kursused/ehitusmehaanika/Energiateoreem.pdf)

Aineregister

- aktiivne deformatsioon, 467
- aktiivtöö, 171, 172, 350
- alammaatriks, 361
- algparameetrid, 407, 580, 587, 601
- algparameetrite meetod, 56, 383, 689
- aproksimatsiooniviga, 661
- aproksimeerimine, 40
- arvutilõpmatus, 264
- arvutinull, 264
- arvutiprogramm
 - afbikt1.m, 734
 - defNBA.m, 736
 - defNBAest, 736
 - defRaamN.m, 735
 - eesagraf.m, 741
 - eesarv, 741
 - eesarvud.m, 740
 - ESTSKrmus.m, 727
 - ESTSTKrmus.m, 727
 - ESTtalaKrmus.m, 727
 - fi-ja-eta.m, 741
 - fooksuhe.m, 734
 - GerberiTala.m, 718
 - InsertBtoA.m, 726
 - joumNA4q.m, 733
 - joumNAq.m, 733
 - joumNR3.m, 732
 - jtala1kLEM.m, 735
 - jtalaNBA.m, 734
 - kaarPrbSTMSjPr.m, 737
 - kaarPrbSTMSjPr.out, 340
 - kaarSjPr1.m, 737
 - kaarSjPr1.out, 330
 - kaarSjPr30.m, 719
 - kaarSjPrBA.m, 720
 - kinnmom1, 736
 - kinnmom2, 736
 - kinnmom3, 736
 - LemKe.m, 739
 - LemKelin.m, 738
 - lemTalaIIfq3x1Lp.m, 738
 - lemTalaIIfq4x1.m, 737
 - lemTalaIIfq3x1Lp.m, 738
 - lemTalaIIfq4x1.m, 738
 - lemTalaIIK3x3lpar.m, 737
 - lemTalaK3x3lpar.m, 737
 - lemTalaKe4x4.m, 737
 - lemTalaKg4x4.m, 737
 - LemTalaNaide1.m, 738
 - lihttala.m, 717
 - lihttalaPrbKSjPr.m, 719
 - mxq.m, 741
 - mxrikki.m, 741
 - naide1er.m, 741, 742
 - naide2r.m, 742
 - naide3ep.m, 742
 - remColJRfromA.m, 727
 - remRowIRfromA.m, 726
 - siireNAB.m, 720
 - siireNAD.m, 201, 720
 - Sisejoud3LraamiPnktis.m, 728
 - SisejoudPunktis.m, 727
 - SisejoudTalaPunktis.m, 727
 - sp3liigendRaamEST.m, 729
 - spGerberiTala.m, 718
 - spGerberTalaEST.m, 730
 - spIN.m, 718
 - spInsertBtoA.m, 726
 - spRaam3EST.m, 730
 - spRaamEST.m, 728
 - spRaamEST77.m, 728
 - spRaamEST93.m, 731

- spRaamESTsn0.m, 740
 spRaamESTsn1.m, 740
 spRaamESTsn2.m, 740
 spRaamESTsn3.m, 739
 spSisestaArv.m, 726
 spTalaEST.m, 732
 spTalaVarrasESTR.m, 725, 726
 spTundmatudVorrandid.m, 733
 spTundmatudVorrandidII.m, 733
 srstkESTPY.out, 391
 srstkLEM.m, 738
 srstkLEM.out, 367
 srstkLemBA.m, 738
 srstkLemPY.m, 738
 srstkLemPY.out, 364
 srstkN1.m, 720
 srstkNBA.m, 720
 SsjoudGrbrTalaPnktis.m, 728
 talaRajajoud.m, 717
 talaRajaSiirded.m, 717
 tnnusarv.m, 741
 toemom1.m, 734
 ylffzII.m, 745
 ylfhlin.m, 721
 ylfhvzII.m, 743
 ylflin.m, 723
 ylfmhvII.m, 743
 ylfmII.m, 744
 yllqII.m, 744
 yllqvII.m, 744
 ylSfhlin.m, 721
 ylSTfhlin.m, 721
 ylTfhlin.m, 721
 ylvfmhvII.m, 746
 ynadIII.m, 746
 yRaam1.m, 747
 ysplfhlin.m, 723
 ysplfmhvII.m, 743
 ysplvfmhvI.m, 724
 ysplvfmhvII.m, 746
 yspRaamEST.m, 747
 yspSlfhlin.m, 724
 yspSlvfmhvI.m, 724
 yspSRhlin.m, 725
 yspSRmhvI.m, 725
 yspSTlfhlin.m, 724
 yspSTlvfmhvI.m, 725
 yspTlfhlin.m, 723
 yspTlvfmhvI.m, 724
 ytransf.m, 745
 ytransfp.m, 745
 yzfv.m, 723
 yzfvz.m, 722
 yzhqz.m, 721
 yzqz.m, 723
 yzSfvz.m, 722
 yzShqz.m, 722
 yzSTfvz.m, 722
 yzSThqz.m, 722
 yzTfvz.m, 722
 arvutuspäevik
 defNBA.out, 310
 eesarvuIIlahend.out, 560
 horedad1.out, 648
 horedad2.out, 649
 horedad3.out, 650
 jomNA4q.out, 249
 jomNAq.out, 236
 LemKe.out, 619
 LemTalaNaide1.out, 376
 naide4al.out, 541
 siireNA.out, 188
 sp3liigendRaamEST.out, 447
 spGerberTalaEST.out, 455
 spRaamEST.out, 413
 spRaamEST77.out, 429
 spRaamEST93.out, 421
 spRaamESTsn0.out, 492
 spRaamESTsn1.out, 490
 spRaamESTsn2.out, 488
 spRaamESTsn3.out, 486
 spTalaESTa.out, 439
 srstkN2.out, 158
 toereaktsioonVa.m, 55
 toereaktsioonVa.out, 54
 toereaktsioonVao.out, 56

- yRaam1.out, 588
 yspRaamEST.out, 605
 arvutuskeem, 79, 83, 397, 592
 hetkmuutuv, 86
 arvutustabel, 83
 astmekeskmine lähendamine, 679

 baasjäikus, 230, 241, 301, 384, 385, 577–
 579, 583, 587, 592, 595, 696
 baastunnusarv, 524
 baasvarda pöördenurk, 297, 298
 baasvarda pööre, 294
 Bernoulli vardateooria, 499
 Besseli funktsioonid, 502
 Betti teoreem, 174–176

 Cauchy meetod, 383, 689
 Crameri valem, 635

 deformatsioonienergia, 172, 174, 176, 471
 deformatsioonimeetod, 32, 217, 281
 deltafunktsioon, 40, 570
 determinant, 634
 diaadkorrutis, 373, 616, 629
 diferentsiaalgeomeetria, 42
 diferentsiaalseosed
 kaar, 126
 varras, 45
 diferentsiaalvõrrandi lahendi hälve, 680
 dissipatsioonienergia, 480, 484
 dünaamiline koormus, 38

 eelpinged, 218
 eesarv, 518
 eesarvud, 514, 517, 612
 funktsioon A^* , 516, 707
 funktsioon $A^* + B^*$, 516, 707
 funktsioon $A^* - B^*$, 516, 707
 funktsioon B^* , 516, 707
 funktsioon C^* , 516, 707
 funktsioon V^* , 516, 707
 eesarvud tõmbel, 515
 elastse joone universaalvõrrand, 690, 691
 elastsuskese, 332, 344
 elastsuskese ordinaat, 334

 energiaprinsiip, 32
 energiateoreem, 37, 172, 176, 351
 pikkel, 172
 energiateoreem pikkel, 37
 epüür
 momendi epüür, 521
 erilahend, 516
 esimene märgikokkulepe, 568, 569, 572,
 576, 601, 670, 694
 esimest järku teooria, 44
 EST-meetod, 208, 384, 397, 407, 408, 419,
 425, 426, 437, 479, 583, 592
 pidevustingimus sõlmes, 596
 rajatingimused, 600
 siirete pidevuse võrrandid, 596
 sõlmede tasakaaluvõrrandid, 598
 ülekandevõrrandid, 596
 ülekandevõrrandite vabaliikmed, 596

 fenomenoloogiline mudel, 41
 fiktiivsed koormused, 253
 fiktiivsed toereaktsioonid, 257
 fookus, 258
 fookussuhted, 259
 funktsionaal, 176
 funktsioonide lähendamine, 678
 funktsioonide skalaarkorrutis, 37

 Gaussi valem, 661
 geomeetiline jäikusmaatriks, 612
 geomeetrilise määramatuse aste, 281, 293
 geomeetriselt määratud põhiskeem, 313,
 545
 geomeetriselt mittelineaarne teooria, 42
 geomeetriselt muutuv skeem, 221
 Greeni funktsioon, 65
 gruppundmatu, 333

 Hadamardi korrutamise, 631
 Heaviside'i funktsioon, 58, 571, 698
 Hermite'i interpolatsioon, 670
 Hermite'i polünoom, 658, 659, 662
 hetkpoolus, 87, 89
 homogeenne, 30
 Hooke'i seadus, 42

- hõre maatriks, 104–106, 362, 398, 408, 427, 434, 437, 443, 451, 453, 585, 592, 637, 638, 647, 650
 sparse(iv,jv,sv), 647
 sparse(m,n), 647
 sparse(Ti), 650
 spconvert(A), 647
 spInsertBtoA.m, 650
 $X=spA \setminus B$, 652
- hälve
 diferentsiaalvõrrandi lahendi, 680
 kinemaatiliste rajatingimuste, 680
 staatiliste rajatingimuste, 680
- hüperboolsed funktsioonid, 510, 706
- I järku teooria, 44
- I märgikokkulepe, 47, 179, 207, 208, 355, 568, 569, 572, 576
- II järku teooria, 44, 578, 609
- II märgikokkulepe, 47, 52, 179, 281, 293, 355, 476, 513, 521, 568, 569, 573, 577, 578, 584, 587, 696, 702, 703, 709, 710
- III järku teooria, 45
- indekstabel, 349, 359, 372, 373, 616
- integreerimis-
 kaal, 661
 kordaja, 661
 punkt, 661
 sõlm, 661
- interpolatsioon, 707
- iseärane ristlõige, 39
- isotroopne materjal, 30
- Jacobi polünoom, 662
- joone kõverus, 42, 43, 334
- joone kõverusraadius, 43, 334
- joonkoormus, 38
- joonpaisumistegur, 183, 188, 223
- jõumeetod, 32, 217
- jõumeetodi kanooniline võrrandisüsteem, 223
- jõupaar, 314, 316, 547
- jäigad konsoolid, 332, 344
- jäik konsool, 332
- jäik tugi, 81
- jäikusmaatriks, 348, 611
 konstruktsiooni, 349, 354
 vedru, 348
- järkjärguline koormuse suurendamise meetod, 471, 479
- jätkuvtala arvutus fookussuhetega, 262
- jätkuvtala fookussuhted, 258
- jätkuvtala staatilise määramatuse aste, 251
- jääkdeformatsioon, 475
- jääkpinged, 468
- kaalufunktsioon, 505, 661, 662, 679, 680
- kaalutud lähendamine, 679
- kaar, 119
 diferentsiaalseosed, 126
 elastsuskese, 332, 333, 337, 344
 elastsuskeskme ordinaat, 334, 338
 kaare sille, 120
 kaare tõus, 120, 326
 kannaliigend, 119, 127, 132
 kõrged, 120
 kõrgus, 120
 lamedad, 120
 lukuliigend, 119, 120, 127, 132
 normaalsed, 120
 roomav kaar, 120
 sisejõud, 124
 survejoon, 127
 suure kõverusega, 326
 telgjoon, 122
 telgjoon parabool, 122
 telgjoon ring, 122
 väikese kõverusega, 326
- kaarskeem, 79
- kandepiirseisund, 29, 465
- kannaliigend, 127, 132
- kasutuspiirseisund, 29
- keskmise lähendamine, 679
- kinemaatiline ahel, 84
- kinemaatilised kontaktitingimused, 208
- kinemaatilised lisatundmatud, 217

- kinemaatilised rajatingimused, 207, 208, 373, 383, 406, 411, 436, 506, 677, 680
 kinemaatilised tundmatud, 208
 kinemaatiliste rajatingimuste hälve, 680
 kinnitusemomendid, 324
 kohalikud koordinaadid, 49, 355, 356, 585, 586, 596
 kolmandat järku teooria, 45
 kolme liigendiga raami põhivõrrandid, 443
 kolme momendi võrrand, 253, 254
 konstruktsiooni jäikusmaatriks, 349, 354
 konstruktsiooni põhivõrrandid, 398, 427, 434, 443, 452
 kontakti vabadusaste, 642
 kontaktitingimused, 82, 208
 kontaktjõud, 35, 36, 42, 81, 83, 93, 148, 379
 töö, 368
 kontaktjõud ja liigendid, 82
 kontaktjõudude arv, 91–93
 kontaktpind, 35, 36, 81
 koondkoormus, 38
 koordinaadid
 kohalikud koordinaadid, 49, 355, 356, 585, 586, 596
 üldkoordinaadid, 49, 356, 585, 586, 596
 koordinaatteisendus, 50, 51, 192, 305
 koormus
 joon, 38
 pind, 38
 ruum, 38
 koormusliikmed, 313, 545
 korrusskeem, 93
 kriitiline jõud, 76
 kriitiline koormus, 524
 kujufunktsioon, 337, 655, 660
 kujund, 84
 kõrged kaared, 120
 kõrvalpoolus, 88
 kõrvaltingimus, 52, 400–402, 404–406, 435, 436
 Lagrange'i polünoomi kordaja, 337, 655
 Laguerre'i polünoom, 662
 lamedad kaared, 120
 lauskoormus, 38
 lausmoment, 39
 Legendre'i polünoom, 662, 663
 Legendre'i polünoomi sõlmed, 668
 LEM
 lõplike elementide meetod, 368, 610
 lihe, 38
 lihtliigend, 52, 220, 223, 399
 lihtliigendite arv, 84, 91, 220
 liigendid
 jäik ühendus, 82
 normaaljõu liigend, 82
 paindemomendi liigend, 82
 põikjõu liigend, 82
 vabad otsad, 82
 liigside, 217
 liikuv liigendtugi, 81, 274
 liikuv pöördumatu tugi, 81
 lisaosa, 91
 lisatundmatud, 217, 221
 lisatundmatute arv, 220
 loomulikud rajatingimused, 383, 677, 680
 lossimine, 475
 lukuliigend, 120, 127, 132
 lõige, 33
 lõikemeetod, 32, 33, 148
 lõikepinnal mõjuvad jõud, 35
 lõplike elementide meetod, 32, 368, 610
 lähendfunktsioon
 algebraalne, 678
 trigonomeetiline, 678
 üldistatud polünoom, 678
 lähendamine
 astmikeskmine lähendamine, 679
 kaalutud lähendamine, 679
 keskmine lähendamine, 679
 ruutkeskmine lähendamine, 679
 ühtlane lähendamine, 679
 lähteformuleering, 681
 lõök, 38
 maatriks, 627
 alammaatriks, 361

- element-element korrutis, 631, 666
 Hadamardi korrutis, 631, 666
 hõre maatriks, 106, 362, 637
 korrutis, 630
 lahutamine, 628
 liitmine, 628
 maatrikskorrutis, 357
 ortogonaalne, 356
 ortogonaalne maatriks, 51, 502
 osamaatriks, 632
 pöördmaatriks, 502, 633
 singulaarne maatriks, 633
 tihe maatriks, 637
 transponeeritud, 632
 täismaatriks, 106, 637, 650
 ühikmaatriks, 633
 Maxwelli-Cremona diagramm, 151
 mehhanism, 84
 momendi epüür, 521
 momendiliigend, 406, 444, 452, 598, 644
 momentpunkti võte, 148
 mudel, 42
 mõjufunktsioon, 65
 mõjujoon, 65
 märgikokkulepe, 47, 355
 I märgikokkulepe, 47, 207, 208, 355
 II märgikokkulepe, 47, 52, 355
 mõõduta koordinaat, 65, 337

 Newtoni-Cotes'i valem, 661
 normaaljõud, 321, 499, 574
 normaalsed kaared, 120
 nõrkformuleering, 681
 näide
 2 x staatikaga määramatu raam, 223
 3 x geomeetriliselt määramatu raam, 300
 3 x geomeetriliselt määramatu raam 2, 312
 3 x staatikaga määramatu raam, 229
 4 x staatikaga määramatu raam, 238
 Gerberi tala, 96
 Gerberi tala 2, 110
 Gerberi tala mõjujooned, 108

 jätkuvtala arvutus, 269, 437
 jätkuvtala fookussuhetega, 262
 jätkuvtala kolme momendi võrrandiga, 254
 kahe liigendiga kaar, 328
 kolme liigendiga
 kaar, 127
 kaare mõjujooned, 134
 raam, 136, 140, 445
 konstruktsiooni piirkoormus, 466
 lihttala, 58
 lihttala siirded, 61, 181
 liigenditeta kaar, 336
 mitmesildeline tala, 453
 murtud varda siirded, 183, 186
 paraboolne kaar, 132
 plastne tugevusmoment, 470
 plastne vastupanumoment, 470
 pooluste plaan, 89
 raami 1 kriitiline koormus, 524
 raami 4 kriitiline koormus, 537
 raami siirded, 190
 segaskeem EST-meetodiga, 459
 sisejõudude leidmine mõjujoontega, 73
 sõrestiku arvutus, 154, 158
 sõrestiku arvutus. EST, 386
 sõrestiku arvutus. LEM, 363, 367
 sõrestiku mõjujooned, 165
 talal liikuv kolonn, 114
 talal liikuvad kraanad, 114
 varrassüsteem. LEM, 359
 vedrusüsteem. LEM, 352

 olekuparameeter, 40
 olekuvõrrand, 42
 olulised rajatingimused, 383, 677, 680
 ortogonaalne maatriks, 502
 ortogonaalne polünoom, 662
 ositi integreerimise valem, 675
 otsekorrutis, 373, 616, 629

 paigalseisev liigendtugi, 81
 paindenurk, 38
 paine, 33

- paine temperatuurist, 187
- paraboolse jaotusega koormus, 337
- parandustegurid
- funktsioon $\eta_1(\nu_i)$, 516, 539, 707
 - funktsioon $\eta_2(\nu_i)$, 516, 539, 707
 - funktsioon $\varphi_1(\nu_i)$, 516, 539, 707
 - funktsioon $\varphi_2(\nu_i)$, 516, 539, 707
 - funktsioon $\varphi_3(\nu_i)$, 516, 539, 707
 - funktsioon $\varphi_4(\nu_i)$, 516, 539, 707
- parema käe kolmikud, 49
- parema käe teljestik, 179
- parempoolne fookussuhe, 258, 260
- parempoolsed fookused, 258
- passiivne deformatsioon, 467
- passiivtöö, 171, 350, 506
- peapoolus, 87, 89
- pidevustingimus, 82, 208, 217, 281, 585, 596
- sõlmes, 596
- piirkoormus, 465
- piirkoormuste määramine, 32
- piirseisund, 29
- pike, 33
- pikijõud, 500, 521, 574, 601
- pikipõikpaine diferentsiaalvõrrand, 503
- pikipõikpaine, 499, 503
- pikkuse muut, 38
- pindkoormus, 38
- pinnanormaal, 81
- plastne liigend, 469, 472
- plastne tugevusmoment, 470
- plastne vastupanumoment, 470
- polaarkiir, 87
- polünoom
- Hermite'i, 662
 - Jacobi, 662
 - Laguerre'i, 662
 - Legendre'i, 662, 663
 - sõlmed, 662
 - Tšebõšovi, 662
- polünoomi kordaja, 655
- polünoomi sõlmed, 653, 662
- poolusplaan, 89, 293
- positiivsed kiud, 227, 232, 234, 246
- potentsiaalenergia, 172, 471, 507
- prinkus, 33
- lõikeprinkus, 33
 - paindeprinkus, 33
 - pikkeprinkus, 33
- projektsioonide võte, 148
- projitseerimine, 229, 233, 322, 412, 420, 562, 587, 603
- põhideformatsioonid, 38
- põhiosa, 91
- põhiskeem, 221
- põhiskeemi muutujad, 281
- põhivõrrandid, 386, 395, 398, 583, 592, 692
- põikjõu märgi määramine, 45, 320
- põikjõud, 321, 574, 575
- pööratud tasakaalumaatriks, 153
- pöörde hetkkese, 87
- pöördenurgameetod, 281, 300
- pöördformuleering, 681
- pöördmaatriks, 502, 511, 513
- raam
- põhiskeem, 221, 230
 - staatiline kontroll, 233, 248, 307, 322, 412, 420, 562, 587, 603
 - varrasahel, 300
- raamskeem, 79
- rajaelementide meetod, 208, 583, 592
- rajajõud, 36, 37, 42, 80, 506, 580, 684
- töö, 37, 172, 350, 684
 - virtuaaltöö, 670
- rajajõudude virtuaaltöö, 676
- rajasiire, 38, 42, 80, 580
- rajatingimused, 42, 80, 580, 675
- kinemaatilised, 373, 506, 677
 - loomulikud, 677
 - olulised, 677
 - staatilisid, 373, 506, 677
- ratsionaalse telgjoonega kaar, 127
- reaktsioonide vastastikkuse teoreemi, 178
- reaktsioonimoment, 314, 547
- resultantjõu hulknurk, 126
- resultantjõud, 126

- ristjõud, 499, 500, 521, 574, 575, 601
 ristlõike baasjäikus, 230, 241
 ristlõike tugevusvaru, 475
 ristlõike jäikus, 33
 lõikejäikus, 33
 paindejäikus, 33
 pikkejäikus, 33
 väändejäikus, 33
 Ritteri lõikemeetod, 149
 Rodriguesi valem, 662
 Rombergi valem, 661
 roomav kaar, 120
 ruumkoormus, 38
 ruutkeskmise lähendamine, 679

 segameetod, 217
 sidemetest vabastamise printsiip, 34
 siirdemeetod, 217
 siire
 tegelik siire, 36
 virtuaalsiire, 36
 võimalik siire, 36
 siirete pidevus, 82
 siirete pidevusvõrrand, 42
 siirete vastastikkuse teoreem, 177
 Simpsoni 3/8-valem, 664, 666
 Simpsoni valem, 664, 672
 singulaarne ristlõige, 39
 sisejõud, 33, 35, 42, 81, 148
 märgireegel, 48, 355
 põikjõud, 33
 paindemoment, 33
 passiivtöö, 506
 pikkejõud, 33
 potentsiaalenergia, 174, 176
 töö, 37, 172, 350, 368, 684
 väändemoment, 33
 virtuaaltöö, 507, 671, 676
 sisemine vabadusaste, 463, 616, 642
 sisepind, 81
 sisesiire, 38, 42
 lihe, 38
 paindenurk, 38
 pikkuse muut, 38
 väändenurk, 38
 skaleerimine, 579
 skaleeritud
 võrrandisüsteem, 384, 579
 võrrandisüsteemi kordaja, 596
 spTi – varda i teisendusmaatriks, 408
 staatikaga määratu, 84
 staatikaga määratuse aste, 220
 staatikaga määratav, 84
 staatikaga määratud tala põhivõrrandid, 452, 454
 staatiline kondensatsioon, 616, 642
 staatiline kontroll
 raam, 233, 248, 307, 322, 412, 420, 562, 587, 603
 tala, 102, 107, 112
 staatiline koormus, 38
 staatiline moment, 298
 staatilised kontaktitingimused, 208
 staatilised rajatingimused, 207, 208, 373, 383, 406, 411, 436, 506, 677, 680
 staatilised tundmatud, 208
 staatiliste rajatingimuste hälve, 680
 superpositsioon, 521
 superpositsiooniprintsiip, 30, 226
 survejoon, 127
 suunakoosinus, 50, 154, 585, 593
 sõlme reaktsioonimomendid, 315
 sõlme tasakaalutingimus, 51, 598
 sõlmede eraldamise võte, 148
 sõlmpunkt, 82, 83
 sõrestik
 alumine vöö, 147
 diagonaalid, 147
 koormusvektor, 156
 liigitus, 147
 Maxwelli-Cremona diagramm, 151
 momendipunkti võte, 149, 150
 mõjujooned, 165
 paneeli pikkus, 147
 postid, 147
 projektsioonide võte, 151
 Ritteri lõikemeetod, 149

- Ritteri punkt, 150
 sisejõudude diagramm, 151
 sõlmede eraldamise võte, 148
 sõrestikuvõrk, 147
 talasõrestiku mõjujooned, 153
 ülemine vöö, 147
 sõrestike liigitus, 147
 sõrestikkonstruksioon, 79
 sõrestikskeem, 79, 147
 sümbol \forall , 176
 süsteemi tugevusvaru, 475
 süsteemi topoloogia, 353
- tala
 diferentsiaalseosed, 56
 jäikusmaatriks, 616
 paindemomendi mõjujooned, 71
 põhivõrrandid, 435, 437
 põikjõu mõjujooned, 71
 sille, 269, 437
 staatiline kontroll, 102, 107, 112
 toereaktsioonide mõjujooned, 67, 70
 tasakaalumaatriks, 153
 tasakaalutingimus, 82, 208
 sõlme tasakaalutingimus, 51, 598
 varda tasakaalutingimus, 84
 tasakaaluvõrrand, 42
 tegelik siire, 36
 teine märgikokkulepe, 476, 568, 569, 573, 577, 578, 601, 671, 694, 696
 teisendusmaatriks, 585, 594
 teist järku teooria, 44, 555, 578, 609
 tervikmeetod, 217, 383
 tihe maatriks, 637
 tingimata vajalik side, 217
 toed, 80
 jäik tugi, 80
 liikumatu liigendtugi, 120
 liikuv liigendtugi, 80
 liikuv pöördumatu tugi, 80
 paigalseisev liigendtugi, 80
 vaba ots, 80
 toemomendid, 261
 toereaktsioonid, 80
 toereaktsioonide arv, 84, 91
 toeside, 83
 toetingimused, 80
 topoloogia, 158
 süsteemi topoloogia, 353
 transitiivsus, 596
 trigonomeetrilised funktsioonid, 510
 Tšebõšovi polünoom, 662
 tunnusarv, 518, 574, 601
 tõmbiga kaheliigendiga kaar, 328
 täiendav moment, 553
 täiendustöö, 171
 täismaatriks, 106, 637, 650
 täistöö, 174
 töö
 aktiivtöö, 171, 172, 176, 350
 passiivtöö, 171, 172, 176, 350, 506
 rajajõudude töö, 350
 rajajõudude virtuaaltöö, 676
 sisejõudude passiivtöö, 506
 sisejõudude töö, 350
 sisejõudude virtuaaltöö, 507, 676
 täiendustöö, 171, 172, 176
 virtuaaltöö, 507
 välisjõudude passiivtöö, 506
 välisjõudude virtuaaltöö, 676
 tööde vastastikkuse teoreem, 174–176, 676, 677
 paindel, 686
 pikkel, 684
 sisejõudude töö paindel, 687
 sisejõudude töö pikkel, 685
 tööseisund, 33
 lõige, 33
 paine, 33
 pike, 33
 vääne, 33
 vaba ots, 81
 vabadusastmete arv, 81, 83, 84, 91–93
 vantskeem, 79
 varda
 eesarvud, 524, 545, 560, 562
 jäikus, 282

- kinnitustegur, 542, 543
 peapoolus, 298
 pööre, 282
 põhivõrrandid, 384, 395, 692
 reaktsioonimomendid, 315, 316, 318, 548
 tunnusarv, 508, 524, 545, 560, 562, 601, 612, 706
 variatsioon, 176
 varrasahel, 84, 87, 89, 293, 313, 494, 545
 varrasahela virtuaaltöö, 548
 varrassüsteem, 79
 arvutusskeem, 359
 varraste arv, 84
 varraste eraldamise võte, 149, 154, 158
 varraste kinnitusemomendid, 545
 varraste sisejõud, 160
 vasakpoolne fookussuhe, 258, 260
 vasakpoolsed fookused, 258
 vastastikused siirded, 82
 vedru esimene samasus, 176
 vedru jäikusmaatriks, 348
 vedru teine samasus, 176
 vektor
 diaadkorrutis, 373, 616, 629
 element-element korrutis, 187, 631
 Hadamardi korrutis, 631, 666
 otsekorrutis, 373, 616, 629
 reavektor, 627–629
 skalaarkorrutis, 49, 629, 666
 veeruvektor, 627, 628
 Vereštšagini võte, 224, 253, 666
 virtuaalsiire, 36, 174, 313, 545, 676
 virtuaalsiirete printsiip, 35, 171, 368, 669, 672, 684
 paindel, 686
 pikkel, 684
 virtuaaltöö, 507, 547
 voolavuspiir, 465, 467, 469
 võimalik siire, 36
 võlv, 325
 võrrandid
 ülekandevõrrandid, 596
 ülekandevõrrandite vabaliikmed, 596
 võrrandisüsteem
 EST-meetodis, 209, 596
 hõredad mittesümmeetrilised, 211
 lindi laius, 362
 skaleerimine, 384, 579, 696
 välis- ja sisejõudude virtuaaltöö
 paindel, 676, 686
 pikkel, 684
 välisjõud, 35, 42
 passiivtöö, 506
 töö, 172, 176, 368
 välispind, 36
 välissiire, 42
 väändenurk, 38
 vääne, 33
 Wronski determinant, 567
 ühikkoormuse meetod, 692
 ühikvektorite kolmikud, 49
 ühtlane lähendamine, 679
 üldistatud ühikjõud, 178
 üldkoordinaadid, 49, 356, 585, 586, 596
 ülekandevõrrandite vabaliikmed, 596
 ülekandevõrrandite vabaliikmed, 596
 ülekandevõrrandid, 58, 59, 573, 583, 594, 596, 692, 698
 vabaliikmed, 596