Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven.

(Fortsetzung und Schluss der Arbeit aus Band 116 Heft 1.)

Von

A. Meder.

(Sonderabdruck aus Heft 3 Bd. 116 des Journals für die reine und angewandte Mathematik.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Herausgegeben von L. Fuchs.
Druck und Verlag von Georg Reimer in Berlin.
(Sonderabdruck aus Heft 3 Bd. 116.)

Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven.

(Fortsetzung und Schluss der Arbeit aus Heft I dieses Bandes.)

(Von Herrn *Alfred Meder* in Dorpat.)

V.

Projection eines Punktes auf seine Schmiegungs-, rectificirende und Normalebene.

§ 17.

Wir wollen in diesem Abschnitte die schon von *Staudt* und *Wiener* durch geometrische Betrachtungen gefundenen Projectionen eines Punktes einer Raumcurve auf seine Schmiegungs-, rectificirende und Normalebene auf analytischem Wege herleiten. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Art des betrachteten Punktes nach der Bezeichnungsweise von § 15 wieder durch die folgenden Gleichungen definirt:

$$(1.)\qquad x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0,\quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$

$$(2.)\qquad A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0,\quad A^{(m+1)} \gtrless 0,$$

$$(3.)\qquad \Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(p)} = 0,\quad \Delta^{(p+1)} \gtrless 0,$$

$$(4.)\qquad m \geqq 2n-1,\quad p \geqq 2m-n+1.$$

Es seien für diesen Punkt, den wir als mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammenfallend annehmen wollen, die Coordinaten und ihre Ableitungen bis zu einer so hohen Ordnung hinauf eindeutige, endliche und stetige Functionen des Parameters t, dass wir die *Taylor*schen Entwickelungen für dieselben

$$(5.)\qquad \begin{cases} x = x_0't + x_0''\dfrac{t^2}{2} + x_0'''\dfrac{t^3}{3!} + \cdots, \\[2ex] y = y_0't + y_0''\dfrac{t^2}{2} + y_0'''\dfrac{t^3}{3!} + \cdots, \\[2ex] z = z_0't + z_0''\dfrac{t^2}{2} + z_0'''\dfrac{t^3}{3!} + \cdots, \end{cases}$$

mit einem solchen Gliede abbrechen können, dass alle aus den Coordinaten gebildeten Ausdrücke, die wir gebrauchen, bis zu einer so hohen Ordnung hinauf, als sie in unseren Entwickelungen auftreten, ebenfalls eindeutige, endliche und stetige Functionen von t sind.

Wir müssen nun versuchen, das Coordinatensystem so zu legen, dass in den Reihen (5.) für x, y, z möglichst viele von den ersten Gliedern wegfallen, wir werden sehen, dass dann die Schmiegungs-, rectificirende und Normalebene mit den drei Coordinatenebenen zusammenfallen. Die Coordinaten dieses zweiten Systems seien X, Y, Z und mit den Coordinaten des alten Systems durch die folgenden Transformationsgleichungen verbunden:

$$X = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,$$
$$Y = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,$$
$$Z = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,$$

wobei die Determinante aus den Coefficienten α, β, γ gleich $+1$ ist.

Setzt man die Werthe von x, y, z aus den Gleichungen (5.) ein, so erhält man

$$(6.)\quad \begin{cases} X = \sum\limits_{\nu=1,2,\dots} (\alpha_1 x_0^{(\nu)} + \beta_1 y_0^{(\nu)} + \gamma_1 z_0^{(\nu)}) \dfrac{t^\nu}{\nu!}, \\ Y = \sum\limits_{\nu=1,2,\dots} (\alpha_2 x_0^{(\nu)} + \beta_2 y_0^{(\nu)} + \gamma_2 z_0^{(\nu)}) \dfrac{t^\nu}{\nu!}, \\ Z = \sum\limits_{\nu=1,2,\dots} (\alpha_3 x_0^{(\nu)} + \beta_3 y_0^{(\nu)} + \gamma_3 z_0^{(\nu)}) \dfrac{t^\nu}{\nu!}, \end{cases}$$

wobei die Reihenentwickelungen wiederum für ein so grosses Intervall gelten, dass wir sie mit einem solchen Gliede abbrechen können, dass alle in unseren Betrachtungen vorkommenden Grössen eindeutige, endliche und stetige Functionen von t sind.

Die Axen des neuen Coordinatensystems sind bis auf die Unterscheidung der positiven oder negativen Richtungen vollkommen festgelegt, wenn man zwei Gleichungen von der Form

$$(7.)\quad \begin{cases} \alpha_1 x_0^{(\lambda)} + \beta_1 y_0^{(\lambda)} + \gamma_1 z_0^{(\lambda)} = 0, \\ \alpha_1 x_0^{(\mu)} + \beta_1 y_0^{(\mu)} + \gamma_1 z_0^{(\mu)} = 0 \end{cases}$$

und eine Gleichung von der Form

$$(8.)\quad \alpha_2 x_0^{(\nu)} + \beta_2 y_0^{(\nu)} + \gamma_2 z_0^{(\nu)} = 0$$

ansetzt, wobei weder alle λten, noch alle μten, noch alle νten Ableitungen der drei Coordinaten gleich Null sein dürfen und ausserdem mindestens eine der drei folgenden Determinanten von Null verschieden sein muss:

$$(9.)\quad y_0^{(\lambda)} z_0^{(\mu)} - y_0^{(\mu)} z_0^{(\lambda)}, \quad z_0^{(\lambda)} x_0^{(\mu)} - z_0^{(\mu)} x_0^{(\lambda)}, \quad x_0^{(\lambda)} y_0^{(\mu)} - x_0^{(\mu)} y_0^{(\lambda)}.$$

Aus den Gleichungen (7.) findet man offenbar, wenn nicht alle Determinanten (9.) verschwinden, das Verhältniss der Richtungscosinus der X-Axe bezogen auf das alte System. Durch die Gleichung (8.) zusammen mit der Relation $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$ wird auch das Verhältniss der Richtungscosinus der Y-Axe bestimmt. Nimmt man eine der beiden Richtungen der X-Axe als die positive an und thut dasselbe mit der Y-Axe, so ist das neue Coordinatensystem in der That vollkommen festgelegt, da es mit dem ursprünglichen congruent ist. Welche von den beiden Richtungen der X-Axe und der Y-Axe als die positiven angenommen werden, ist für die folgenden Betrachtungen gleichgültig.

In dem für X aufgestellten Ausdrucke (6.) verschwinden wegen der Bedingung (1.) nachstehende Glieder:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 x_0' \;+\beta_1 y_0' \;+\gamma_1 z_0' \;= 0,\\
&\alpha_1 x_0'' +\beta_1 y_0'' +\gamma_1 z_0'' = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_1 x_0^{(n)}+\beta_1 y_0^{(n)}+\gamma_1 z_0^{(n)} = 0.
\end{aligned}$$

Aus der Bedingung (2.) folgen nach Satz I (S. 57) die Proportionen:

$$x_0^{(n+1)}:y_0^{(n+1)}:z_0^{(n+1)} = x_0^{(n+2)}:y_0^{(n+2)}:z_0^{(n+2)} = \cdots = x_0^{(m-n+2)}:y_0^{(m-n+2)}:z_0^{(m-n+2)}.$$

Setzt man den folgenden Ausdruck gleich Null:

$$(10.)\qquad \alpha_1 x_0^{(n+1)}+\beta_1 y_0^{(n+1)}+\gamma_1 z_0^{(n+1)} = 0,$$

so besteht also auch das System

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 x_0^{(n+2)} \;+\beta_1 y_0^{(n+2)} \;+\gamma_1 z_0^{(n+2)} \;= 0,\\
&\alpha_1 x_0^{(n+3)} \;+\beta_1 y_0^{(n+3)} \;+\gamma_1 z_0^{(n+3)} \;= 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_1 x_0^{(m-n+2)}+\beta_1 y_0^{(m-n+2)}+\gamma_1 z_0^{(m-n+2)} = 0.
\end{aligned}$$

Wir setzen zur Bestimmung der X-Axe noch die folgende Gleichung an:

$$(11.)\qquad \alpha_1 x_0^{(m-n+3)}+\beta_1 y_0^{(m-n+3)}+\gamma_1 z_0^{(m-n+3)} = 0.$$

Aus den Bedingungen (1.) und (2.) folgt nach Satz II (S. 59):

$$\Delta_0 = \Delta_0' = \cdots = \Delta_0^{(2m-n+1)} = 0.$$

Die $(2m-n+2)$-te Ableitung von Δ reducirt sich nach § 5 auf die nachstehende Determinante:

$$\Delta_0^{(2m-n+2)} = k_{n+1,m-n+3}^{2m-n+2} \begin{vmatrix} x_0^{(n+1)} & y_0^{(n+1)} & z_0^{(n+1)} \\ x_0^{(m-n+3)} & y_0^{(m-n+3)} & z_0^{(m-n+3)} \\ x_0^{(m-n+4)} & y_0^{(m-n+4)} & z_0^{(m-n+4)} \end{vmatrix}.$$

Ist $\Delta_0^{(2m-n+2)} = 0$, so kommt zu den Gleichungen (10.) und (11.) noch die folgende hinzu:

$$\alpha_1 x_0^{(m-n+4)} + \beta_1 y_0^{(m-n+4)} + \gamma_1 z_0^{(m-n+4)} = 0.$$

Es mögen für einen Punkt der Curve die Gleichungssysteme (1.), (2.) und ausserdem das nachstehende erfüllt sein:

$$\Delta_0 = \Delta_0' = \cdots = \Delta_0^{(q-1)} = 0,$$

und es sei eine Folge derselben das Bestehen der Gleichungen

$$(12.) \quad \begin{cases} \alpha_1 x_0' + \beta_1 y_0' + \gamma_1 z_0' = 0, \\ \alpha_1 x_0'' + \beta_1 y_0'' + \gamma_1 z_0'' = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_1 x_0^{(q-m+1)} + \beta_1 y_0^{(q-m+1)} + \gamma_1 z_0^{(q-m+1)} = 0. \end{cases}$$

Ist dann ausserdem $\Delta^{(q)} = 0$, so tritt zu diesem System die folgende Gleichung hinzu:

$$(13.) \quad \alpha_1 x_0^{(q-m+2)} + \beta_1 y_0^{(q-m+2)} + \gamma_1 z_0^{(q-m+2)} = 0,$$

denn die $q$te Ableitung von Δ

$$\Delta_0^{(q)} = \Sigma k_{\mu,\nu}^q \begin{vmatrix} x_0^{(\mu)} & y_0^{(\mu)} & z_0^{(\mu)} \\ x_0^{(\nu)} & y_0^{(\nu)} & z_0^{(\nu)} \\ x_0^{(q+6-\mu-\nu)} & y_0^{(q+6-\mu-\nu)} & z_0^{(q+6-\mu-\nu)} \end{vmatrix}$$

reducirt sich wegen der Bedingungen (1.), (2.) und (12.) auf ein einziges Glied:

$$\Delta_0^{(q)} = k_{n+1,m-n+3}^q \begin{vmatrix} x_0^{(n+1)} & y_0^{(n+1)} & z_0^{(n+1)} \\ x_0^{(m-n+3)} & y_0^{(m-n+3)} & z_0^{(m-n+3)} \\ x_0^{(q-m+2)} & y_0^{(q-m+2)} & z_0^{(q-m+2)} \end{vmatrix},$$

woraus das Bestehen der Gleichung (13.) folgt, da in dem System (12.) die beiden Gleichungen

$$\alpha_1 x_0^{(n+1)} + \beta_1 y_0^{(n+1)} + \gamma_1 z_0^{(n+1)} = 0,$$
$$\alpha_1 x_0^{(m-n+3)} + \beta_1 y_0^{(m-n+3)} + \gamma_1 z_0^{(m-n+3)} = 0$$

enthalten sind. Da die Gleichungen (12.) richtig sind für $q-1 = 2m-n+2$, so gilt unsere Behauptung für jedes beliebige q, welches grösser oder gleich $2m-n+2$ ist, folglich auch für $q = p$; es fallen also, wenn die X-Axe durch die beiden Gleichungen (10.) und (11.) bestimmt ist, in dem Ausdrucke (6.) für X die nachstehenden Summanden weg:

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1 x_0' & +\beta_1 y_0' & +\gamma_1 z_0' & = & 0, \\ \alpha_1 x_0'' & +\beta_1 y_0'' & +\gamma_1 z_0'' & = & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_1 x_0^{(p-m+2)} & +\beta_1 y_0^{(p-m+2)} & +\gamma_1 z_0^{(p-m+2)} & = & 0. \end{array}$$

Aus den Gleichungen (10.) und (11.), welche die X-Axe bestimmen, folgt

$$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1$$

$$= y_0^{(n+1)} z_0^{(m-n+3)} - y_0^{(m-n+3)} z_0^{(n+1)} : z_0^{(n+1)} x_0^{(m-n+3)} - z_0^{(m-n+3)} x_0^{(n+1)} : x_0^{(n+1)} y_0^{(m-n+3)} - x_0^{(m-n+3)} y_0^{(n+1)}.$$

Die einzelnen Determinanten in diesem Ausdrucke sind jedenfalls nicht alle gleich Null, denn dann wären nach Satz I auch $A^{(m+1)}$, $B^{(m+1)}$, $C^{(m+1)}$ gleich Null, was nach (2.) ausgeschlossen worden ist. Die X-Axe ist also vollkommen bestimmt und für Punkte der Curve ist

$$X = \sum_{\nu=p-m+3,\dots} (\alpha_1 x_0^{(\nu)} + \beta_1 y_0^{(\nu)} + \gamma_1 z_0^{(\nu)}) \frac{t^\nu}{\nu!},$$

wobei die $(p-m+3)$-te Ableitung einer der drei Coordinaten x, y, z sicher von Null verschieden ist, da sonst $\Delta_0^{(p+1)}$ gleich Null wäre, was der Voraussetzung (3.) widerspricht.

Von den Gliedern in dem Ausdrucke (6.) für Y verschwinden wegen der Bedingung (1.) die folgenden:

$$\begin{array}{lllll} \alpha_2 x_0' & +\beta_2 y_0' & +\gamma_2 z_0' & = & 0, \\ \alpha_2 x_0'' & +\beta_2 y_0'' & +\gamma_2 z_0'' & = & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_2 x_0^{(n)} & +\beta_2 y_0^{(n)} & +\gamma_2 z_0^{(n)} & = & 0. \end{array}$$

Es muss zur Bestimmung von α_2, β_2, γ_2 noch eine Gleichung angesetzt werden:

$$\alpha_2 x_0^{(n+1)} + \beta_2 y_0^{(n+1)} + \gamma_2 z_0^{(n+1)} = 0.$$

Dann verschwinden infolge der Bedingungsgleichungen (2.) in dem Ausdrucke für Y noch die Summanden

$$\begin{array}{lllll} \alpha_2 x_0^{(n+2)} & +\beta_2 y_0^{(n+2)} & +\gamma_2 z_0^{(n+2)} & = & 0, \\ \alpha_2 x_0^{(n+3)} & +\beta_2 y_0^{(n+3)} & +\gamma_2 z_0^{(n+3)} & = & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_2 x_0^{(m-n+2)} & +\beta_2 y_0^{(m-n+2)} & +\gamma_2 z_0^{(m-n+2)} & = & 0. \end{array}$$

Y nimmt die nachstehende Gestalt an:

$$Y = \sum_{\nu=m-n+3,\ldots} (\alpha_2 x_0^{(\nu)} + \beta_2 y_0^{(\nu)} + \gamma_2 z_0^{(\nu)}) \frac{t^\nu}{\nu!},$$

wobei die $(m-n+3)$-te Ableitung einer der drei Coordinaten x, y, z sicher von Null verschieden ist, da sonst die $(m+1)$-ten Ableitungen von A, B, C gleich Null wären, was der Voraussetzung (2.) widerspricht.

In dem Ausdrucke (6.) für Z fallen wegen der Bedingung (1.) die folgenden Glieder weg:

$$\begin{aligned} \alpha_3 x_0' + \beta_3 y_0' + \gamma_3 z_0' &= 0, \\ \alpha_3 x_0'' + \beta_3 y_0'' + \gamma_3 z_0'' &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_3 x_0^{(n)} + \beta_3 y_0^{(n)} + \gamma_3 z_0^{(n)} &= 0, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$Z = \sum_{\nu=n+1,\ldots} (\alpha_3 x_0^{(\nu)} + \beta_3 y_0^{(\nu)} + \gamma_3 z_0^{(\nu)}) \frac{t^\nu}{\nu!}.$$

In dem neuen Systeme sind also die Coordinaten X, Y, Z durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$(14.) \quad \begin{cases} X = t^{p-m+3}(a+t(\cdots)), \\ Y = t^{m-n+3}(b+t(\cdots)), \\ Z = t^{n+1}(c+t(\cdots)), \end{cases}$$

wobei $p-m+3 > m-n+3 > n+1$ ist und die numerischen Factoren a, b, c von Null verschieden sind.

§ 18.

Die Gleichungen der Tangente an die Curve (X, Y, Z) sind, wenn man durch ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten derselben bezeichnet:

$$\begin{aligned} Y'(\xi-X) - X'(\eta-Y) &= 0, \\ Z'(\eta-Y) - Y'(\zeta-Z) &= 0. \end{aligned}$$

Da der Exponent der niedrigsten vorkommenden Potenz von t in X grösser ist als in Y, und in Y grösser als in Z, so erhält man für $t=0$, also für die Tangente im Coordinatenanfangspunkt, $\xi = \eta = 0$, d. h. die Tangente ist die Z-Axe.

Die Gleichung der Schmiegungsebene ist

$$\begin{vmatrix} \xi-X & \eta-Y & \zeta-Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die Werthe

$$\begin{aligned} X' &= t^{p-m+2}(a_1+t(\cdots)), & X'' &= t^{p-m+1}(a_2+t(\cdots)), \\ Y' &= t^{m-n+2}(b_1+t(\cdots)), & Y'' &= t^{m-n+1}(b_2+t(\cdots)), \\ Z' &= t^{n}(c_1+t(\cdots)), & Z'' &= t^{n-1}(c_2+t(\cdots)), \end{aligned}$$

wo $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ von Null verschiedene Constanten sind, in die Gleichung der Schmiegungsebene ein und dividirt dann die zweite Horizontalreihe durch t^n, die dritte durch t^{n-1}, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \xi-X & \eta-Y & \zeta-Z \\ t^{p-m-n+2}(a_1+t(\cdots)) & t^{m-2n+2}(b_1+t(\cdots)) & c_1+t(\cdots) \\ t^{p-m-n+2}(a_2+t(\cdots)) & t^{m-2n+2}(b_2+t(\cdots)) & c_2+t(\cdots) \end{vmatrix} = 0.$$

Nach den Gliedern der ersten Horizontalreihe geordnet und durch t^{m-2n+2} dividirt:

$$(\xi-X)\begin{vmatrix} b_1+t(\cdots), & c_1+t(\cdots) \\ b_2+t(\cdots), & c_2+t(\cdots) \end{vmatrix} - (\eta-Y)t^{p-2m+n}\begin{vmatrix} a_1+t(\cdots), & c_1+t(\cdots) \\ a_2+t(\cdots), & c_2+t(\cdots) \end{vmatrix}$$
$$+(\zeta-Z)t^{p-m-n+2}\begin{vmatrix} a_1+t(\cdots), & b_1+t(\cdots) \\ a_2+t(\cdots), & b_2+t(\cdots) \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Exponenten $p-2m+n$ und $p-m-n+2$ nach den Ungleichungen (4.) positiv sind, so erhält man für $t=0$ als Gleichung der Schmiegungsebene im Coordinatenanfangspunkt

$$\xi = 0.$$

Wie wir gefunden haben, ist die Tangente an die Curve im Coordinatenanfangspunkt die Z-Axe, also die Ebene $X=0$ die Schmiegungsebene, $Y=0$ die rectificirende Ebene, $Z=0$ die Normalebene der Curve im Coordinatenanfangspunkt.

Bestehen für einen Punkt einer Raumcurve, der der Coordinatenanfangspunkt sein möge, die Relationen

$$\begin{aligned} x' &= x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \; x^{(n+1)} \gtrless 0, & A &= A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \; A^{(m+1)} \gtrless 0, \\ y' &= y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, \; y^{(n+1)} \gtrless 0, & B &= B' = \cdots = B^{(m)} = 0, \; B^{(m+1)} \gtrless 0, \\ z' &= z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, \; z^{(n+1)} \gtrless 0, & C &= C' = \cdots = C^{(m)} = 0, \; C^{(m+1)} \gtrless 0, \end{aligned}$$
$$\varDelta = \varDelta' = \cdots = \varDelta^{(p)} = 0, \quad \varDelta^{(p+1)} \gtrless 0,$$

so können die Gleichungen der Curve auf die nachstehende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} X &= t^{p-m+3}(a+t(\cdots)), \\ Y &= t^{m-n+3}(b+t(\cdots)), \\ Z &= t^{n+1}(c+t(\cdots)), \end{aligned}$$

wobei a, b, c von Null verschiedene Constanten bedeuten, und es ist dann die YZ-Ebene die Schmiegungsebene, die ZX-Ebene die rectificirende, die XY-Ebene die Normalebene der Curve im Coordinatenanfangspunkt.

Aus den Ausdrücken (14.) findet man leicht die Projectionen der Curve auf diese drei Ebenen. Für die Projection auf die Schmiegungsebene erhält man z. B.

$$Y = t^{m-n+3}(b+t(\cdots)), \quad Z = t^{n+1}(c+t(\cdots)).$$

Die Tangente an diese Projection ist die Z-Axe. Der Charakter der Projection des Coordinatenanfangspunktes auf seine Schmiegungsebene, also des Coordinatenanfangspunktes in der YZ-Ebene, hängt von den niedrigsten in Y und Z vorkommenden Exponenten von t ab. Sind dieselben ungerade, so wechseln die Coordinaten, wenn t aus dem negativen ins positive übergeht, also im Coordinatenanfangspunkt ihr Zeichen; sind die Exponenten der niedrigsten Potenzen von t dagegen gerade, so behalten sie es. Es können folgende Fälle eintreten:

I. $m-n+3$ ist gerade, $n+1$ ungerade. Y behält sein Zeichen, Z ändert es. Man erhält einen *regulären Punkt.*

II. $m-n+3$ ist ungerade, $n+1$ gerade. Y ändert sein Zeichen, Z dagegen nicht. Man erhält eine *Spitze.*

III. $m-n+3$ und $n+1$ sind beide ungerade. Y und Z ändern ihr Zeichen. Man erhält einen *Wendepunkt.*

IV. $m-n+3$ und $n+1$ sind gerade. Y und Z behalten ihr Zeichen. Man erhält einen *Schnabelpunkt.*

Für die Projectionen auf die rectificirende und Normalebene lassen sich analoge Betrachtungen anstellen.

Aus den Ausdrücken (14.) für die Coordinaten kann man auch ersehen, ob die Curve die Coordinatenebenen durchdringt oder nicht. Die Curve durchdringt die Schmiegungs-, rectificirende oder Normalebene im Coordinatenanfangspunkt oder nicht, je nachdem die bezw. niedrigsten Exponenten von t in den Ausdrücken (14.) für X, Y, Z von ungerader oder gerader Ordnung sind, denn im ersten Falle wechseln die Coordinaten ihr Zeichen, im zweiten behalten sie es.

§ 19.

Um die Projectionen des Punktes auf seine Schmiegungs-, rectificirende und Normalebene in jedem einzelnen der acht singulären Fälle zu finden, muss man in den Ausdrücken (14.) n, m, p durch ihre in § 15 abgeleiteten Werthe ersetzen.

I. $+++$. $n = 2\alpha$, $p-m+3 = 2\gamma-2\beta+3$ ist ungerade,
$m = 2\beta-1$, $m-n+3 = 2\beta-2\alpha+2$ ist gerade,
$p = 2\gamma-1$, $n+1 = 2\alpha+1$ ist ungerade.

Man erhält als Projection des Coordinatenanfangspunktes auf seine Schmiegungsebene einen regulären Punkt, auf die rectificirende Ebene einen Wendepunkt, auf die Normalebene eine Spitze. Die Curve durchdringt die Schmiegungs- und Normalebene, die rectificirende Ebene dagegen nicht.

Auf diese Weise findet man die schon bekannten Projectionen für jede einzelne der acht Arten von Punkten. Was die Durchdringung der drei Ebenen durch die Curve anbetrifft, so erhält man:

Die Curve durchdringt die Schmiegungsebene in den Fällen

I $+++$, IV $+--$, VI $-+-$, VII $--+$,

die rectificirende Ebene in den Fällen

III $+-+$, IV $+--$, V $-++$, VI $-+-$,

die Normalebene in den Fällen

I $+++$, II $++-$, III $+-+$, IV $+--$.

§ 20.

Ausgehend von den Ausdrücken (14.) kann man auch bestimmen, wie viele auf einander folgende Punkte die Curve im Coordinatenanfangspunkt mit ihrer Schmiegungsebene und Tangente gemein hat. Hat die Curve im Coordinatenanfangspunkt zwei auf einander folgende Punkte mit der *YZ*–Ebene gemein, so ist $X = X' = 0$, $X'' \gtrless 0$; hat sie drei auf einander folgende Punkte mit dieser Ebene gemein, so muss $X = X' = X'' = 0$, $X''' \gtrless 0$ sein u. s. f. Da für $t = 0$

$$X = X' = \cdots = X^{(p-m+2)} = 0, \quad X^{(p-m+3)} \gtrless 0$$

ist, so hat die Curve mit ihrer Schmiegungsebene $p-m+3$ auf einander folgende Punkte gemein. Die Curve hat also mit ihrer Schmiegungsebene eine ungerade oder gerade Anzahl von auf einander folgenden Punkten gemein, je nachdem sie dieselbe durchdringt oder nicht.

Die Tangente geht, als Durchschnittslinie der Schmiegungs- und rectificirenden Ebene, durch $m-n+3$ auf einander folgende Punkte der Curve, da

$$Y = Y' = \cdots = Y^{(m-n+2)} = 0, \quad Y^{(m-n+3)} \gtrless 0$$

ist. Die Curve hat mit ihrer Tangente eine ungerade oder gerade Anzahl von auf einander folgenden Punkten gemein, je nachdem sie die rectificirende Ebene durchdringt oder nicht.

Bei Einführung eines anderen Parameters τ, der von dem ursprünglichen in folgender Weise abhängig sei:

$$t = \tau^\alpha,$$

ändert sich auch die Anzahl der auf einander folgenden Punkte, die die Curve mit ihrer Schmiegungsebene oder Tangente gemein hat. Sie bleibt aber gerade oder ungerade, wie sie es früher war, wenn α ungerade ist. Ist α dagegen gerade, so hat die Curve für $\tau = 0$ mit ihrer Schmiegungsebene und Tangente stets eine gerade Anzahl von auf einander folgenden Punkten gemein, wie es sich auch nach § 16 nicht anders erwarten liess, da dann der Punkt in den Fall VIII $---$ übergeführt wird.

VI.

Krümmungs- und Torsionsradius.

§ 21.

Wir wollen in diesem Abschnitte die Ausdrücke für den Krümmungs- und Torsionsradius einer näheren Untersuchung unterziehen und werden dann sehen, dass dieselben in manchen der von uns betrachteten Fälle nicht endlich und dabei von Null verschieden sein können.

Die Art des Punktes sei wieder durch die folgenden Bedingungsgleichungen definirt:

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \quad A^{(m+1)} \gtrless 0,$$
$$\varDelta = \varDelta' = \cdots = \varDelta^{(p)} = 0, \quad \varDelta^{(p+1)} \gtrless 0.$$

Der Krümmungsradius R wird, wenn s' die Ableitung des Bogens bedeutet, durch den Ausdruck

$$R = \frac{s'^3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

gegeben. Wir betrachten das Quadrat des Krümmungsradius, weil dann das Wurzelzeichen wegfällt:

$$R^2 = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}{A^2+B^2+C^2}.$$

Die erste nicht verschwindende Ableitung von $x'^2+y'^2+z'^2$ ist die $2n$te, von $(x'^2+y'^2+z'^2)^3$ also die $6n$te, dagegen die erste nicht verschwindende Ableitung des Nenners die $(2m+2)$-te. Nach Satz IV (S. 62) ist also R^2 gleich Null, endlich oder unendlich gross, je nachdem $6n$ grösser, gleich oder kleiner ist als $2m+2$.

$R = 0$, endlich, ∞, je nachdem m kleiner, gleich oder grösser als $3n-1$ ist.

Der Ausdruck für den Torsionsradius lautet

$$T = \frac{A^2+B^2+C^2}{\varDelta}.$$

Die erste nicht verschwindende Ableitung des Zählers ist die $(2m+2)$-te, die des Nenners die $(p+1)$-te.

$T = 0$, endlich, ∞, je nachdem p kleiner, gleich oder grösser als $2m+1$ ist.

Für die einzelnen acht Arten von Punkten erhalten wir nach § 15:

I. $+++$. $n = 2\alpha,\quad m = 2\beta-1,\quad p = 2\gamma-1.$

$$3n-1 = 6\alpha-1,\quad 2m+1 = 4\beta-1.$$

Sowohl $p = 2m+1$, als auch $m = 3n-1$ ist möglich. R und T können endlich und von Null verschieden sein.

II. $++-$. $n = 2\alpha,\quad m = 2\beta-1,\quad p = 2\gamma.$

$$3n-1 = 6\alpha-1,\quad 2m+1 = 4\beta-1.$$

Die Bedingung $p = 2m+1$ ist nicht erfüllbar, denn dann müsste $2\gamma = 4\beta-1$, also eine gerade Zahl einer ungeraden gleich sein; es kann daher T nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

III. $+-+$. $n = 2\alpha,\quad m = 2\beta,\quad p = 2\gamma-1.$

$$3n-1 = 6\alpha-1,\quad 2m+1 = 4\beta+1.$$

R kann nicht endlich und von Null verschieden sein.

IV. $+--$. $n = 2\alpha,\quad m = 2\beta,\quad p = 2\gamma.$

$$3n-1 = 6\alpha-1,\quad 2m+1 = 4\beta+1.$$

R und T können beide nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

V. $-++$. $n = 2\alpha-1,\quad m = 2\beta-1,\quad p = 2\gamma.$

$$3n-1 = 6\alpha-4,\quad 2m+1 = 4\beta-1.$$

R und T können beide nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

VI. $-+-$. $n = 2\alpha-1,\quad m = 2\beta-1,\quad p = 2\gamma-1.$

$$3n-1 = 6\alpha-4,\quad 2m+1 = 4\beta-1.$$

R kann nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

VII. $--+$. $n = 2\alpha-1,\quad m = 2\beta,\quad p = 2\gamma.$

$$3n-1 = 6\alpha-4,\quad 2m+1 = 4\beta+1.$$

T kann nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

VIII. $---.$ $n = 2\alpha - 1, \quad m = 2\beta, \quad p = 2\gamma - 1.$

$$3n-1 = 6\alpha-4, \quad 2m+1 = 4\beta+1.$$

R und T können beide endlich und von Null verschieden sein.

Aus diesen Entwickelungen ist Folgendes ersichtlich:

Besitzt ein Punkt der Curve, der kein Rückkehrpunkt ist, eine Rückkehrtangente, so kann in ihm der Krümmungsradius nicht endlich und dabei von Null verschieden sein, besitzt er eine Rückkehrschmiegungsebene, so kann der Torsionsradius nicht endlich und dabei von Null verschieden sein. Ist der Punkt dagegen ein Rückkehrpunkt, so kann der Krümmungsradius nur im Fall einer Rückkehrtangente, der Torsionsradius nur im Fall einer Rückkehrschmiegungsebene endlich und dabei von Null verschieden sein.

VII.

Contingenz- und Torsionswinkel. Andere Arten der Herleitung der analytischen Kriterien für die singulären Punkte.

§ 22.

Der Contingenzwinkel ε und der Torsionswinkel ω sind in einem analytisch sowohl als geometrisch regulären Punkte unendlich klein von derselben Ordnung wie dt. Es soll in diesem Abschnitt untersucht werden, ob und wann sie unendlich klein von höherer Ordnung sein können.

$$\varepsilon = \frac{ds}{R} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{s'^2}\,dt.$$

$$(1.)\qquad \left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)^2 = \frac{A^2+B^2+C^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}.$$

Die Art des Punktes sei wieder durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(2.)\qquad \begin{cases} x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, & x^{(n+1)} \gtrless 0, \\ A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, & A^{(m+1)} \gtrless 0, \\ \varDelta = \varDelta' = \cdots = \varDelta^{(p)} = 0, & \varDelta^{(p+1)} \gtrless 0. \end{cases}$$

Dann ist nach Satz III die erste nicht verschwindende Ableitung des Zählers im Ausdruck (1.) von der Ordnung $2m+2$, des Nenners von der Ordnung $4n$. Nach Satz IV ist der Ausdruck (1.) gleich Null, endlich oder unendlich gross, je nachdem $2m+2$ grösser, gleich oder kleiner ist als $4n$. Nach § 15 ist aber immer $m \geqq 2n-1$, es kann also $\varepsilon : dt$ nicht unendlich gross sein, der Contingenzwinkel ist immer unendlich klein von mindestens derselben Ordnung, wie das Differential des Parameters.

$$\frac{\varepsilon}{dt} = \begin{cases} 0 \\ \text{endlich,} \end{cases} \text{ je nachdem } m \gtreqqless 2n-1.$$

Für den Torsionswinkel ω lässt sich eine ähnliche Betrachtung anstellen:

$$\omega = \frac{ds}{T} = \frac{s'\Delta}{A^2+B^2+C^2}\,dt.$$

$$(3.)\qquad \left(\frac{\omega}{dt}\right)^2 = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)\Delta^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Infolge der Gleichungen (2.) ist nach Satz III die erste nicht verschwindende Ableitung des Zählers in dem Ausdruck (3.) von der Ordnung $2n+2p+2$, des Nenners von der Ordnung $4m+4$. Der Ausdruck (3.) ist nach Satz IV gleich Null, endlich oder unendlich gross, je nachdem $2n+2p+2$ grösser, gleich oder kleiner ist als $4m+4$. Nach § 15 ist immer $p \gtreqqless 2m-n+1$, auch der Torsionswinkel kann nicht unendlich gross sein im Verhältniss zu dt und es ist

$$\frac{\omega}{dt} = \begin{cases} 0 \\ \text{endlich,} \end{cases} \text{ je nachdem } p \gtreqqless 2m-n+1.$$

Wir wollen jetzt in jedem einzelnen der acht Fälle untersuchen, ob die Bedingungen

$$m \gtreqqless 2n-1, \quad p \gtreqqless 2m-n+1$$

immer erfüllbar sind.

I. $+++.$ $\quad n = 2\alpha, \quad m = 2\beta-1, \quad p = 2\gamma-1.$

$$2n-1 = 4\alpha-1, \quad 2m-n+1 = 4\beta-2\alpha-1.$$

Sowohl $m \gtreqqless 2n-1$, als auch $p \gtreqqless 2m-n+1$ ist möglich.

II. $++-.$ $\quad n = 2\alpha, \quad m = 2\beta-1, \quad p = 2\gamma.$

$$2n-1 = 4\alpha-1, \quad 2m-n+1 = 4\beta-2\alpha-1.$$

Die Erfüllung der Bedingung $p = 2m-n+1$ ist nicht möglich, denn dann müsste $2\gamma = 4\beta-2\alpha-1$, also eine gerade Zahl einer ungeraden gleich sein.

III. $+-+.$ $\quad n = 2\alpha, \quad m = 2\beta, \quad p = 2\gamma-1.$

$$2n-1 = 4\alpha-1, \quad 2m-n+1 = 4\beta-2\alpha+1.$$

$m = 2n-1$ ist nicht möglich.

IV. $+--.$ $\quad n = 2\alpha, \quad m = 2\beta, \quad p = 2\gamma.$

$$2n-1 = 4\alpha-1, \quad 2m-n+1 = 4\beta-2\alpha+1.$$

Weder $m = 2n-1$, noch $p = 2m-n+1$ ist möglich.

V. $-++$. $n=2\alpha-1$, $m=2\beta-1$, $p=2\gamma$.

$2n-1=4\alpha-3$, $2m-n+1=4\beta-2\alpha$.

Sowohl $m \geqq 2n-1$, als auch $p \geqq 2m-n+1$ ist möglich.

VI. $-+-$. $n=2\alpha-1$, $m=2\beta-1$, $p=2\gamma-1$.

$2n-1=4\alpha-3$, $2m-n+1=4\beta-2\alpha$.

$p=2m-n+1$ ist nicht möglich.

VII. $--+$. $n=2\alpha-1$, $m=2\beta$, $p=2\gamma$.

$2n-1=4\alpha-3$, $2m-n+1=4\beta-2\alpha+2$.

$m=2n-1$ ist nicht möglich.

VIII. $---$. $n=2\alpha-1$, $m=2\beta$, $p=2\gamma-1$.

$2n-1=4\alpha-3$, $2m-n+1=4\beta-2\alpha+2$.

Weder $m=2n-1$, noch $p=2m-n+1$ ist möglich.

Die Relation $m=2n-1$, welche besagt, dass ε unendlich klein ist von derselben Ordnung wie dt, kann also nicht bestehen in den Fällen, in denen die Tangente, die Relation $p=2m-n+1$, welche besagt, dass ω unendlich klein ist von derselben Ordnung wie dt, kann nicht bestehen in den Fällen, in denen die Schmiegungsebene ein Rückkehrelement ist.

Aendert die Tangente ihren Drehungssinn, so ist der Contingenzwinkel immer unendlich klein im Verhältniss zu dt, ändert die Schmiegungsebene ihren Drehungssinn, so ist der Torsionswinkel unendlich klein im Verhältniss zu dt. Unendlich klein von derselben Ordnung wie dt können der Contingenz- und der Torsionswinkel nur in den übrigen Fällen sein und zwar ist es der Contingenzwinkel dann und nur dann, wenn m, der Torsionswinkel, wenn p seinen kleinsten möglichen Werth hat: $m=2n-1$, $p=2m-n+1$.

Dass bei einer Aenderung des Drehungssinnes der Tangente oder Schmiegungsebene der Contingenz-, resp. Torsionswinkel unendlich klein sein muss im Verhältniss zu dt, ist auch aus folgenden geometrischen Betrachtungen ersichtlich.

Zwei auf einander folgende Tangenten bilden mit einander den Contingenzwinkel. Dreht sich die Tangente immer in demselben Sinne, so muss der Contingenzwinkel, von der positiven Seite der Schmiegungsebene aus betrachtet, von constantem Zeichen, etwa positiv sein. Dreht sich die Tangente im entgegensetzten Sinne, so ist der Contingenzwinkel negativ. Kehrt die Tangente in einem Punkte der Curve ihren Drehungssinn um, so geht der Contingenzwinkel in diesem Punkte aus dem positiven ins negative über. Da man die auf einander folgenden Punkte der Curve erhält, indem man den Parameter t allmählich wachsen lässt, so ist dt von constantem Zeichen. Soll ε aus dem positiven ins negative übergehen, so muss $\varepsilon : dt$ sein Zeichen wechseln, das ist aber nur möglich, wenn $\varepsilon : dt$ verschwindet, da es nie unendlich gross werden kann.

Zwei auf einander folgende Schmiegungsebenen schliessen den Torsionswinkel ein. Dreht sich die Schmiegungsebene immer in demselben Sinne, so behält der Torsionswinkel sein Zeichen, ist etwa positiv. Aendert die Schmiegungsebene in einem Punkte der Curve ihren Drehungssinn, so ändert der Torsionswinkel sein Zeichen, er wird negativ, es muss dann in diesem Punkte auch $\omega : dt$ sein Zeichen wechseln, was nur möglich ist, wenn $\omega : dt$ verschwindet.

§ 23.

Nach diesen Betrachtungen haben wir den Contingenz- und den Torsionswinkel bald als positiv, bald als negativ anzusehen; es müssen also die Quadratwurzeln, die in den Ausdrücken für ε und ω vorkommen, in gewissen Fällen ihr Zeichen wechseln. Diese Annahme wird auch dadurch gerechtfertigt, dass man von ihr ausgehend die Kriterien für die Rückkehrtangente und die Rückkehrschmiegungsebene in einfacher Weise ableiten kann, wie es im Folgenden angedeutet werden soll.

Bei der Rückkehrtangente wechselt der Ausdruck $\varepsilon : dt$ sein Zeichen, er muss also verschwinden und seine erste nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung sein. Setzt man

$$A^2+B^2+C^2 = D^2,$$

so ist

$$\frac{\varepsilon}{dt} = \frac{D}{s'^2} = Ds'^{-2}.$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)^{(r)} = D^{(r)}s'^{-2} + rD^{(r-1)}(s'^{-2})' + \cdots + D(s'^{-2})^{(r)}.$$

Bestehen für den betreffenden Punkt, nach der Bezeichnungsweise von § 15, die Relationen

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$

so ist für denselben auch

$$s' = s'' = \cdots = s^{(n)} = 0, \quad s^{(n+1)} \gtrless 0,$$
$$D = D' = \cdots = D^{(2n-1)} = 0.$$

Durch dieselben Betrachtungen, wie in Abschnitt III, findet man, dass dann die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für

$$\frac{\varepsilon}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)' = \cdots = \left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)^{(r)} = 0, \quad \left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)^{(r+1)} \gtrless 0$$

die folgenden sind:

$$D = D' = \cdots = D^{(2n+r)} = 0, \quad D^{(2n+r+1)} \gtrless 0.$$

Diese Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn dieselben Ableitungen von A, B, C verschwinden. Im Fall einer Rückkehrtangente ist r gerade, die letzten verschwindenden Ableitungen von A, B, C sind von gerader Ordnung.

Kehrt in einem Punkt der Curve die Schmiegungsebene den Sinn ihrer Drehung um die Tangente um, so muss $\omega : dt$ sein Zeichen wechseln.

$$\frac{\omega}{dt} = \frac{s'\Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

Im Abschnitt IV hatten wir den Ausdruck

$$\xi' = \frac{(yz'-y'z)\Delta}{A^2}$$

betrachtet und es musste derselbe nebst einer geraden Anzahl von auf einander folgenden Ableitungen verschwinden. Es verschwinden offenbar von s' eben so viele Ableitungen, wie von $yz'-y'z$, und von $A^2+B^2+C^2$ eben so viele, wie von A^2; es muss sich daher bei näherer Untersuchung zeigen, dass, wenn eine gewisse Anzahl auf einander folgender Ableitungen von Δ verschwindet, von $\omega : dt$ dieselben Ableitungen gleich Null sind, wie von ξ'. Wir erhalten dasselbe analytische Kriterium für die Rückkehrschmiegungsebene.

Führen wir einen neuen Parameter τ ein, so brauchen $\varepsilon : d\tau$ und $\omega : d\tau$ nicht mit derselben Anzahl von auf einander folgenden Ableitungen zu verschwinden, wie $\varepsilon : dt$ und $\omega : dt$. Nach unseren letzten Betrachtungen muss es sich aber ergeben, dass, wenn vorher eine gerade Anzahl von Ableitungen verschwand, es auch nachher der Fall ist; war dagegen die Anzahl der verschwindenden Ableitungen ungerade, so muss sie es auch nach der Einführung des neuen Parameters sein.

Es sei

$$t = \tau^{\alpha},$$

wo α eine positive ganze Zahl ist, dann haben wir

$$\frac{\varepsilon}{d\tau} = \alpha\tau^{\alpha-1}\frac{\varepsilon}{dt}, \quad \frac{\omega}{d\tau} = \alpha\tau^{\alpha-1}\frac{\omega}{dt}.$$

Entspricht der Punkt dem Parameter $t = \tau = 0$ und ist α ungerade, so ist in der That die Anzahl der auf einander folgenden verschwindenden Ableitungen von $\varepsilon : d\tau$ und $\omega : d\tau$ gerade oder ungerade, je nachdem sie von $\varepsilon : dt$ und $\omega : dt$ gerade oder ungerade war. Ist dagegen α eine gerade Zahl, so beginnen die Reihen, in die wir $\varepsilon : dt$ und $\omega : dt$ entwickelt denken können, wenn wir in dieselben τ statt t einführen, immer mit einer geraden Potenz von τ. Die Reihen für $\varepsilon : d\tau$ und $\omega : d\tau$ werden dann immer mit einer ungeraden Potenz von τ anfangen, die ersten nicht verschwindenden Ableitungen von $\varepsilon : d\tau$ und $\omega : d\tau$ sind von ungerader Ordnung, die Singularität des Punktes geht in den Fall VIII. — — — über, wie es auch nach § 16 sein muss.

§ 24.

Wir können auch die analytischen Kriterien für die geometrischen Singularitäten herleiten, ausgehend von der sphärischen Indicatrix und der sphärischen Polare zur sphärischen Indicatrix der Curve.

Construirt man um den Coordinatenanfangspunkt eine Kugel mit dem Radius 1 und zieht zu den Tangenten der Curve Parallele durch den Coordinatenanfangspunkt, so schneiden dieselben auf der Kugel die sphärische Indicatrix der Curve aus, welche stetig verläuft nach unserer Annahme über die positiven und negativen Richtungen der Tangenten (S. 50). Im Fall einer Rückkehrtangente der Curve besitzt die sphärische Indicatrix im entsprechenden Punkt einen Rückkehrpunkt. Die Coordinaten ξ, η, ζ der Punkte der sphärischen Indicatrix sind die Richtungscosinus der Tangenten der betrachteten Curve in den entsprechenden Punkten.

$$\xi = \frac{x'}{s'}, \quad \eta = \frac{y'}{s'}, \quad \zeta = \frac{z'}{s'}.$$

Der Ausdruck

$$\sigma' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}$$

kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$\sigma' = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{s'^2}.$$

Im Falle eines Rückkehrpunktes der sphärischen Indicatrix muss σ' verschwinden, und die erste von Null verschiedene Ableitung von σ von gerader Ordnung sein. Nach § 22 ist aber der Ausdruck für σ' gleich $\varepsilon : dt$, wir erhalten unser früheres Kriterium für die Rückkehrtangente.

Zieht man durch den Coordinatenanfangspunkt Parallele zu den Binormalen der Curve, so schneiden dieselben auf der mit dem Radius 1 um den Coordinatenanfangspunkt construirten Kugel die sphärische Polare zur sphärischen Indicatrix aus, welche ebenfalls nach unserer Annahme über die positiven und negativen Seiten der Schmiegungsebenen (S. 51) stetig verläuft. Kehrt die Schmiegungsebene ihren Drehungssinn um die Tangente um, so besitzt offenbar die sphärische Polare zur sphärischen Indicatrix einen Rückkehrpunkt. Die Coordinaten ξ, η, ζ dieser letzteren sind die Richtungscosinus der Binormalen der ursprünglichen Curve, also

$$\xi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \eta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \zeta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Der Ausdruck

$$\sigma' = \sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}$$

kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$\sigma' = \frac{s'\varDelta}{A^2+B^2+C^2}.$$

Im Falle eines Rückkehrpunktes der sphärischen Polare zur sphärischen Indicatrix muss σ' verschwinden und die erste nicht verschwindende Ableitung von σ von gerader Ordnung sein; wir erhalten wieder unser früheres Kriterium für die Rückkehrschmiegungsebene, da σ' gleich dem Ausdruck $\omega:dt$ ist, den wir im vorigen Paragraphen behandelt haben.

Zum Schluss dieser Abhandlung sei es mir gestattet, Herrn Professor Dr. *Adolf Kneser*, der mich zu dieser Arbeit veranlasst hat, meinen Dank zu sagen für die mir während meiner Studienzeit in so reichem Maasse gebotene Anregung und freundliche Unterstützung.

Dorpat, Februar 1895.

Druck und Verlag von Georg Reimer in Berlin.