Geometria.

Kihelkonnakoolidele ja iseöpetuseks

wälja annud

J. Kapp.

Tartus.
C. Mattieseni kuluga trükitud.
1878.

Eesti

Kirjameeste Seltsi Toimetused

№ 17.

E. U. Sile
Kõrvekülal

Geometria.

Kihelkonnakoolidele ja iseõpetuseks

wälja annud

J. Kapp.

Tartus.
C. Mattieseni kuluga trükitud.
1878.

Zensuri poolest lubatud. — Rigas, 15. Augustil 1878

Eeskõne.

Et Eestikeeles geometria õpetusraamat siitsaadik puudus, siis ei wõinud ka geometria õpetus Eestikoolides mitte hääste sigineda. Iga mees, kes geometriat õpetas, pruukis Saksakeele raamatuid ja Saksakeele sõnu, kellest laps, kas wähe, ehk ka sugugi aru ei saanud ja sellega lapse geometria-mõistust ennemini surmas, kui last geometriatundmisele äratas; ehk ta walas oma aru mööda Saksakeelest Eestikeele sõnu, mis niisama arusaamata oliwad, kui Saksakeele sõnad ja otsata segadusi sünnitasiwad. Sellepärast wõttis selle raamatu wäljaandja ammugi nõu, Eestikeeles üht geometria õpetus raamatut walmistada. Et ühes Eestikeeles lausa uues õpetus asjas kõige päält koolmeistrid ise asjaga ja õpetus wiisiga tutwaks saaksiwad, siis oli ka wäljaandja nõu see, Eesti koolmeistritele kõige päält raamatut kirjutada. Kui juba mõni hää aeg raamatu kallal tööd oli tehtud, nägi wäljandja pea, et see nõu korda ei läinud; sest raamat paisus nii paksuks, ja raamatu hind kaswis nii kõrgeks, et koolmeistrite rahapung teda sugugi wälja ei wõinud lunastada. Pääle selle aga pidi ka koolilastele üks raamat kätte antud saama, sest et järelekirjutamine koolitunnis niipalju aega ära oleks wõtnud, et õpetus aeg, mis muidugi kasin on, kääst kagoni ära oleks kadunud. Mulle ei jäänud wiimaks muud nõu üle, kui nii sugust raamatut walmistada, mis koolmeistritele õpetus wiisi poolest õpetust annab, ühes aga ka koolilastest pruugitud wõib saada, — mis lühikene, aga siiski igas tükis arusaawlik on. Et see aga mitte kerge töö, ega iga mehe asi ei ole, ühes raamatus mitmesugusid pärimisi täita, teab see, kes niisugust raamatut ise on walmistanud. — Iseenese puudust selles asjas tundes, ei tohtinud wäljaandja tugewama toeta seda tööd mitte ette wõtta. — Kuulus Saksamaa lastekaswataja A. Diesterweg paistis mulle kui kõige osawam mees selle tarwis; tema jälgil olen ma oma tööd toimetanud. Koolmeistritele olen ma iseäranes 14 esimest lehekülge kirjutanud. Kes koolmeistritest seda raamatut pruukida tahab, pangu iseäranis seda tähele, mis nende lehekülgede pääl seisab! Lastele ei ole see mitte kirjutatud.

Kõige enam waewa on mulle raamatu walmistamises geometrialikud sõnad teinud ja sääl on mulle mitmed auustatud mehed, nimelt aga praegune „Eesti kirjameeste Seltsi" president, Otepä õpetaja herra Hurt ja „mõistliku rehkendaja" wäljaandja herra K. G. Kallas suureks abiks olnud, kelle wasta ma suur wõlglane olen ja kõige weiksemat osa oma wõlast siin awaliku tänuga ära püüan tasuda.

Raamatu puudusi tunneb wäljaandja ise kõige enam, ilma, et ta neid wähendada on suudanud. Sellepärast käib tema palwe sinna, et igamees, kes raamatu parandamiseks midagi öölda teab, seda wäljaandjale teada annaks, et raamat teise trükiga paraneks ja täielisemaks saaks.

Trükiwead, mis raamatus parandamata on jäänud, sest et trükkija herra wäljaandjast eemal elab, palutakse ära parandada.

Kui raamat oma suuruse kohta mõnele ehk liig kallis on, siis tuleb see sellest, et kujude õikamine mitte odaw töö ei ole.

Peaks see geometria õpetusraamat Eesti koolidele kõige wähemat kasu tooma, Eesti rahwa täädmist ja tundmist laiendama, siis oleks suurem osa wäljaandja waewast tasutud.

Suure-Jaanis, 4. Juunil 1877.

Wäljaandja.

Mõni sõna geometriast ja geometria õpetamisest.

1. Mis on geometria (ütle: geomeetria)?

Eestikeele sees on sõna „geometria" alles üks üsna uus sõna, ja sellepärast peame temast siin, asja seletamiseks — selgumiseks — mõne sõna kõnelama.

Sõna „geometria" on sõnalt ümberpandud maamõõtmine ehk maamõõtmisekunst. Et geometria aga mitte paljalt maamõõtmisega üksi tegemist ei tee, waid kõiki kehalikusid asju, mis ruumi sees on, tähele paneb, nende suurust, laotust, radasid mõõdab, — ühesõnaga: tööd teeb kehadega, pindadega, (lagendikudega), joontega ja punktidega, seepärast nimetatakse teda ka ruumiõpetuseks. Geometria on nii wana kui täädused üleüldsa, ehk nii wana, — kui maailm. Igaüks, kes ühte maja rajab, ühte hoonet ehitab, ühte pisukest pütti ehk pangi teeb, künnab, külib, äästab ehk kõnnibki, teeb tegemist geometriaga, ehk toimetab ühte tema toimetamistest. Maailm on suur, ja otsata nende asjade arw, mis maailmas on, olgu nad nüüd kehad, lagendikud, jooned ehk punktid, — need jälle sügawad, madalad, paksud ja õhukesed, ehk kõrged, laiad, pikad, peenikesed, ümargused, nurgelised, sirged ja kõwerad, — see kõik puudub geometriasse, sellega kõigega teeb geometria tegemist.

Geometer (maamõõtja) ei waata, ega katsu üksi kehalikusid asju, — waatamine, katsumine ja tähelepanemine on hää, wäga hää, aga ei ole weel mitte kõige param, sest et puudulik, — waid geometer waatab, paneb tähele ja — — hakkab tööse; tema hakkab sammudega, — ehk kui jalg kindel ei ole — nööriga, ahelaga mõõtma, wõtab lati, süllapuu, tollipulga kätte ja hakkab mehisel meelel tegewusele. Nääb ta, — ja see sünnib pea — et süllapuuga ja tollipulgaga asi ikka alles poolik on, siis ei jää ta mitte seisma, ega jäta asja toimetamata, weel wähem paneb ta käed rüppe, ja on nõuta, — ei, ta otsib tõisi, osawamaid riistu, — ta wõtab winkli, malli (transportöri), loodlaua, waaderbassi — sihib, loodib ja mõõdab nii kaua, kuni töö korralikul kombel ja õieti tehtud — walmis — on.

Aga ei! weel puudub midaga! Tema ei ole sellega mitte weel rahul, et tema looduses mõõdab, sihib, loodib; tema tahab ka seda mõõdetud põldu, kohta, maja, kirikut, kooli j. n. e. paberi pääle panna, ühte plaani walmistada, kas isienesele ehk tõistele eemal olewa sõbradele, sugulastele, omastele, ehk ka oma laste lastele — minupärast — mälestuseks. Mis nüüd? Ka nüüd ei ole geometer mitte kimpus. Ta otsib uusa riistu, ja — kes otsib, see laiab: temal on lühendatud mõõtlaud, sirkel, joonlaud j. n. e. abiks. Nende riistade najal paneb ta seda, mis ta looduses mõõtis truuiste ja õiete pisendatud — paberi pääle. Nüüd on temal kuju põllust, kohast, majast ꝛc. kääs.

Kas nüüd geometer juba oma tööd on lõpetanud? Ei! tema ei ole mitte üksinda sellega rahul, et tema mõõdab, sihib, joonetab ja sirgeldab, waid tema töö ja toimetus peab alati ja igal pool põhjendatud saama. Põhjendus ja tunnistus ei tohi geometria juures iial puududa, niisama wähe kui wärske õhk inimese elu ülespidamise juures. Igaühe, ka kõige pisema toimetuse juures küsib geometer: Mikspärast on see ehk see nõnda? Wastus: selle ja sellepärast. Mikspärast on b nii suur kui d? Sellepärast et $a + d$ nii suur on kui $a + b$; a on niisama suur kui a (iga asi oma enese suurune); sellepärast on ka b nii suur kui d (ühe palju ühe paljust ära wõtta, jätab ühe palju üle).

Selle kõigega ja weel tuhande tõiste ruumiliste asjadega teeb geometria tööd, kellest meie mitte siin laiemalt juttu teha ei wõi. Asja enese toimetamine, mis selle raamatu sees seisab, teeb asja ja asja=nime selgeks.

2. Kas peab geometriat ehk ruumiõpetust rahwakoolides ja nimelt meie kihelkonnakoolides õpetatama?

Selle küsimise pääle wõime alles siis täit wastust anda, kui enne lühidelt ruumiõpetust ennast tähele pannud oleme; kui oleme waadanud, mil kombel ruumiõpetus inimese waimu liikumisele ja isetegewusele sunnib; mähärdust kasu ta waimuharimisele ja inimese igapääwase elule toob.

a) Ruumiõpetus wiib meid kõige osawama ja selgema kehaliku kujude ja wormide tähelepanemisele, wiib meid asjade wälimise tundmisele.

Loodust tundma õppida ja looduse sees iga ühte iseasja tähelepanna on inimisele lõbus ja kogoni kosutaw toimetus ja nii hääste meelte-, kui ka südame- ja waimuharimine. Imelikud, ja siiski nii wäga arusaawlikud on looduse kujud maa sees (kristallid ja kiwid) ja maa pääl (taimed ja elajad). Kiwide ja kristallide kujud on nii korralikud ja sääduslikud, nagu oleksiwad nad tollipulgaga ja sirkliga walmistatud ja winkliga mõõdetud. Ja just sääduslikku ja korraliku asjadega (kehadega, joontega ja pindadega) teeb ruumiõpetus tegemist; kui wõimalik nende eneste küljes ja kallal ehk, kus need ise puudawad ja neid saada ei ole, puust ja paksust paberist tehtud mudelite kallal.

b) Ruumiõpetus wiib inimest tundmisest ja tähelepanemisest tegewusele.

Mitte üksi asju ja asja kujusid waatama, katsuma, tähelepanema ja nende läbi tundma ei pea inimene looduse säädusi ja olekut, waid ka järeletegema. Tundmine ja tegemine, täädmine ja katsumine asja järele teha, ei tohi, kus iial wõimalik on, mitte teinetõisest lahutatud saada, waid peawad alati ühes edasi astuma ja kaswama. Geometria õpetus käib just seda loomuliku teed, ta ei tohigi tõist teed kõndida. Kõik, mis lapsed kehade ja kehapindade (lagendikude) küljes ruumiliku asja tähelepanewad, peawad nad ka järele maalima ja joonitama: punkta, joona, winklid, kujusid ja wiimaks kehasi, kehade wälimisi wõrkusi j. n. e. Mis laps silmaga enne on näinud, peab ta pärast paberi wõi tahwli pääle sule, krihwli ehk malli abiga järele tegema. Selleläbi saab laps koolis isetegewusele harjutatud.

d) Ruumiõpetus harib inimese mõistust ja wiib teda korraliku järelemõtlemisele, ning on mõistuse kõige osawam ja arusaawlikum juht.

Juba wanad Egiptlased ja Kreeklased tundsiwad geometriat, ja Kreeklased pidasiwad teda kui kõige ülemad waimuharimise õpetust suure auu sees; sellepärast oli nende juures ruumiõpetus mõtlemise eeskool, ja igaüks, kes omas tundmises ja täädmises sügawamale tahtis tungida, pidi enne geometriat õppima. — Ka rehkendamine on osaw mõistuse harija, aga ta ei ole mitte nii täieste silma paistaw kui geometria. Rehkentamist wõib küll ka silma paistaweks teha, aga see ei ole mitte tema päris töö. Rehkentamise päris töö on arwudega toimetada ja arwud jääwad ka pärastki ikka tema pääasjaks, kui ta ka esiotsa kunstlikul kombel joonte ja muu asjade läbi arwusi ja nende lahutamist lapsele silma ette püüab panna. Geometria on aga päris nägemisest sündinud ja saab ka enamiste nägemisega toimetatud; sellepärast — arwan mina — on tema hoopis osawam mõistuse harija ja teritaja kui rehkendamine. Tema wiib last järk järgult ühest nähtawast asjast teise nähtawa asjale, ühest wälispidisest ja seestpidisest tundmisest teisele tundmisele ja ei jäta kõige pisemat tühja ruumi, kelle üle ta wõiks karata, lapse meelte ja mõistuse sisse ja wahele.

e) Ruumiõpetus on inimese igapääwase elule suureks kasuks ja kergituseks.

Pääasjaks jääb ruumiõpetuse juures mõtlemine ja mõistuse harimine. Tema peab noore inimese pääd ja waimu karastama, harima, teritama, kaswatama, kosutama ja kindlaks tegema. Aga ka igapääwase elule peab inimene koolis ettewalmistatud saama. Ja kellel on kõige enam looduse asjadega tegemist? Meie arwates, ei kellegil muul nii palju, kui põllumehel. Eesti põllumehed on aga ka ühes — mõni enam, mõni wähem — weeloodijad, maamõõtjad ja puumeistrid, püttsepad, ratasepad, müürsepad ja muud teised sepad. Kõik need nimetatud sepad pruugiwad geometriat, — üks enam, teine wähem — oma toimetamise tarwis. Weeloodijad ja maamõõtjad ei saa ilma temata midagi teha.

Waatame meie nüüd kõige selle pääle, mis siin ülewel lühidelt oleme nimetanud, arwamata weel kõik see, mis kitsa ruumi pärast nimetamata on jäänud, siis ei wõi meie selle üle — kas geometria rahwakoolides peab õpetatud saama — mitte enam kehe wahel olla. Meie arwates on geometria rahwakoolides, ja nimelt meie kihelkonnakoolides niisama tarwiline õpetus nagu rehkendamine, ja ei tohi iial sääl puududa. Seda on ka meie ülem maakoolikohus õiete äratunnud ja geometria õpetusele isiäralised õpetuse tunnid ette kirjutanud.

3. Kuda peab rahwakoolides geometria õpetatud saama?

Et ruumiõpetus ühes h ä ä s rahwakoolis puududa ei tohi, nägime meie eespool selgeste. Siin tuleks meil aga weel sellest kõnelda, k u d a w i i s i, mil kombel rahwakoolides geometria õpetatud peab saama. Et see sellel kombel ei tohi sündida, ja päälegi nii laialt, nagu õpetatud koolides, on iseenesest mõista. Rahwakoolides ei sigine õpetatud koolide geometria mitte. Rahwakoolides wõiwad aga esiteks niisugused ruumiõpetuse tükid õpetatud saada, mis õrnema lapsele, kes alles 13mne, 14mne ja 15mne aastane ja kelle kooliaeg nii lühikene on, et tema selle aja sees aga pisut õppida wõib — a r u s a a w l i k u d on; tõiseks, ja kõige päält peab sääl geometria õpetus n ä i t a m i s e teel ja küsimise kombel last järk järgult, tema joudu mööda õpetuse tüki tundmisele juhtima. Nisugust teed, kus laps ise ühte asja tõisest tuntud asjast, ehk selle najal otsib ja leiab, ja sellega oma waimujõudu äratab, kosutab ja kaswatab, nimetame meie a r u t a w a k s õpetuseks. Õpetatud mehed ülemates ja suuremates koolides saawad ehk seda teed põlgama, sest et ta koolmeistrile raskem on. Põlgagu pääle! Meie aga, kes meie a-b-d koolmeistrid oleme, t a h a m e ja p e a m e seda teed kõndima. Kes niisugust teed oma lastega on õppinud käima, ei anna lastele muud, kui siin ja sääl mõne puuduwa sõna ja sõna seletuse; kõik muu (asja) laseb tema last ennast leida. Iga mõtte-käänd on üks ülesanne, k ü s i m i n e lapse kääst. Laps waatab, otsib ja — leiab. Kes geometriat kui walmis (walatud) õpetust lapsele annab, see teeb sellega ennam kahju, kui kasu. Meie oleme siin raamatu sees — ruumi puuduse pärast seda osalt walmis walatud kombel annud. Koolmeister aga peab laste jõudu mööda küsimise ja kostmise teel iga tükki isepäinis arutama. Pääasi, iseäranes hakatuses on, lapse tähelepanemist asja poole pöörata, last waatamisele, katsumisele ja seega nähtawa tõetundmisele ja tegewusele äritada ja harjutada. Mis laps oma enese nägemisega tuneb, see on temale alles selge ja kaksipidimõtlemata. Silmaga nähtud ja tuntud tött weel pärast põhjendada, on lapsele kogoni kentsakas. Sellegi pärast saab mõistlik laps o m a leitud tõele põhjusid andma, kui need ka sagedaste puudulikud ja ilma kindla wormita on. Sellest ei ole aga wiga; pärima peab koolmeister igaühe kääst otsust tema toimetamisest. — Ruumiõpetus ei ole mitte ükspäinis wälispidine täädmine, nagu loomuõpetus, waid ka (seestpidine) tundmine. Tee, mis pääl meie tundmisele saame, läheb meelte (silmade, kõrwade j. n. e.) läbi pähä ja pääst kätte ja sõnasse. Ruumiõpetus peab nähtaw olema, ja ruumiõpetuse õppija peab tõtt tundma ja — pruukima. Selle põhjusmõttega on see raamatukene walmistatud; sellepärast sai ka mõnda raamatust wäljajäetud, mis mitte lause meelte ette ei saa säätud ega meeltest wasta wõetud ja tuntud.

Ärgu arwaku keegi koolmeister, et tema siis ju kõlblik geometria õpetaja on, kui ta kõik õpetusetükid, mis selle raamatu sees seisawad põhjendada ja arutada wõib; ei ammugi weel mitte! Tahab ta kõlblik ja tubli õpetaja olla, siis peab ta ise enne iga tüki üle priitahtlikult mõtlema, seda tükki pöörama ja käänama, tõisi näitusi, korrutusi, arutamisi käsile wõtma, uusa tükka sellest tükist wäljaarwama ja selle tükile lisasid juure lisama, nimelt õpetustükka ümberpöörama, ühe sõnaga: ta peab geometria õpetuse üle walitsema, aga ei mitte õpetust enese üle walitseda laskma, ;ehk waewalt aga ühte põhjendust tükile tagawaraks hoidma. Alles siis, kui koolmeister ise waba — „lahti" — omas töös on, wõib ta lastele, nende priis otsimises abiks olla ja ei karda liialt laste otsimist, leidmist ja nende küsimist, nagu see ka paraku! ette tuleb, waid on rõõmus laste leiu üle. Niisugune õpetus on tõsine, waimukosutaw õpetus, kus õpija ja õpetaja juure õpiwad. Loodud õpetajale tulewad kõige paramad mõtted just õpetamise ajal. Ilmeksimata ei ole niisugune õpetaja iial, ei tunne ka seda kartust ega häbi, et ta laste ees „lõnga" jääb. Rõõmuga tunnistab ta, kui lapsed mõne tõise arutuse ühe tükile on leidnuwad, et ta seda weel ei ole tunnud! Üks hariw geometria õpetuse tund on waimu wabakstegemise töö, mis koolmeistrist küsimistega, ülesannetega, arutamisega, siin ja sääl — ühest ja tõisest lapsest — wasturääkimisega, sõrmeülestõstmisega alustatud saab. Kes ise otsida ei mõista, ega otsimisele ei ole harjunud, ei wõi ka tõisi sellele juhatada ja harjutada. Niisugusele ei jää siis muud nõu üle, kui ette öölda, „tuupida" — ja waesed õppijad peawad järeleütlema ja arusaamata järeletegema nagu papagoid ja ahwid. Kõige hirmsam töö koolis on „sissetuupimine" ja „sissetrehterdamine"! ja nende hulk, kes seda teewad, on suur! ei mitte üksi koolmeistrite, waid ka tõiste seas.

Õpetuse raamat näitab ühte teed, keda ta ise käib; isewaatamisega, isekatsumisega ja isetegemisega leitakse uusi teesid. Ilma nendeta ei saa mitte edasi. Sell' kombel geometriat õpetada on elaw waimukosutamine ja kosumine, ja õpijate kõige suurem rõõm! Sest õpijale ei anta mingi koormat kanda, ei sunnita teda iialgi palja pähäõppimisele ega meelejäämisele. Geometriat sell kombel õpetada, teeb ka kõige töntsema pää terawaks ja kõige wisama lapse tegewaks ja tugewaks.

Inimese waim on põld, põlluriistad on tähelepanemine, järelemõtlemine; põllusaak on tundmised ja waimu tublidus. Haritagu, küntagu, äästatagu hästi! küll siis põld saaki annab. Kingitud ei saa see wara kellegile, ei ka wanematest päritud; ja kui keegi ülewal nimetatud kombel tööd on teinud ja otsinud, see teab, missugust rõõmu niisugune otsimine ja — leidmine temale on toonud, — noorele, ja ka wanalegi weel.

Siin tahame nüüd weel selle raamatu pruukimisest isiäranis rääkida.

1) Iga tükk saab lastele ülesande wiisil antud, ja lapsed otsiwad waiksel wiisil igaüks oma tahwli pääl arutust. Kes arutuse leidnud, ehk arwab leidnud olewad, täätab seda sõrma ülestõstmisega, waiksel wiisil — koolmeister läheb tema juure ja laseb näidata, kuda ta seda teinud j. n. e. On tükk mitmet wiisi tehtud, seda parem. Selle järele saab asi kõigi lastega seinatahwle pääl käsile wõetud. Mingist asjast ei tunne õppija suuremat rõõmu, kui sellest, mis ta ise on otsinud ja leidnud, siin ühe tüki arutusest. Kes seda rõõmu ükskord on maitsnud, seda ei ole mitte enam waja tähelepanemisele sundida. Hästi ja õieti õpetatud lapsed ei tahagi (ma räägin siin üksi geometriast), et koolmeister neile walmis tehtud tõtt annab, ette ütleb; nemad tahawad ise otsida. Kui koolmeister lapsi mitte isiotsimisele ei ole wiinud, siis ei ole ta neid weel kuigi kaugele wiinud. Hää pää seisab selle wasta, kui temale tõtt antakse, mis ta ise leida wõib.

2) Koolilapsed peawad sellele harjutatud saama, et joona, winklid, kujusid ka tähtedega tähendatakse; aga seinatahwle pääl, kus koolmeister kepiga ehk sõrmega iga asja ise näitab, ei ole alati mitte tähta tarwis teha.

3) Igas koolis, kus geometriat õpetatakse, peawad riistad, nagu süllapuu, kus jalad, tollid pääle on märgitud, üks puust walmistatud loodwinkline kolmnurk, üks sirkel, mille tõise haru otsa kriit wõib pandud saada, üks täisruut puust ehk paksust paberist, mis wahest ühe ruutjala suurune on ja ruuttollideks on jaetud — täringid (kupitsed), kantsambad, ümargused sambad, trehtred, kuulid, — üks kupits, kelle

serw 1, 2, 3, 4, 5 tolli pikk on — üks kupitsjalg, kantjalg, kes 1728 sast kupitstollidest (kanttollidest) koku on pandud. Koolilastel olgu üks joonlaud, kus pääle tollid märgitud on, üks pisukene loodwinkline puust kolmnurk, üks mall (transportör) paksust paberist, kus winklid ja graadid pääl on, kui wõimalik ka sirkel j. n. e.

4) Põhjendused, mis ruumi puuduse pärast raamatu sees sagedaste lühendatud on ja wahemõted, mis kerged ja silma paistawad, wälja jäetud, peawad õpetamises täieste juure lisatud saama, sest et kõik põhjused, mis mõeldud saawad, ka täiesti wälja peawad saama öeldud. Mõtlemine sünnitab rääkimist, rääkimine awaldab mõtet. Mõned ette tulewad märgid — matematiku märgid (r^2 π) on ju igas kohas raamatus, kus nad ette tulewad seletatud ja wõiwad ka ära jääda. Kus nad aga pruugitud saawad, sääl peab nimi ja asi ise enne selgeste tuntud ja siis märk antud saama. Siis ei ole ta ka lastele mitte raske ega arusaamata. Kui lapsed mitte kümnendik murdudega tutwad ei ole, mis üks puudus kihelkonnakoolis on, siis ei saa nad ka geometria õpetuses mitte pruugitud; siis ei wõeta aga ka ringi wälja arwamiseks mitte Ludolphi arwu (3,14) waid arw: 7 : 22 he kohta.

5) Muidugi on mõista, et õppijale enne asja tundmist mitte ei öelda, mis põhjedamine, arutamine ehk tingimine on; aga pärast, kui ta õpetuse tükki on põhjendanud, ülesannet arutanud, tingimisi, mis all põhjendus sündis, näinud on, nääb ta ise, mis iga sõna tähendab ja annab sellest aru. Geometria peab alati matematiklik tundmine ja täädmine olema, ja õppija peab alati oma tundmise üle wõima aru anda.

6) Selle raamatu sisust on mull weel nii palju öelda, et temast meie kihelkonnakoolidele praegu küllalt on. Aga ka, kui meie kihelkonnakoolid hääd rahwakoolid tahawad olla, siis peab ka kõik, mis raamatu sees on, kihelkonnakoolis läbi wõetud saama, nimelt, kui meie kihelkonnakooliaeg 4 × 8 kuud, see on, neli talwet kestab. Muidugi peab õige koolmeister täädma ja oma laste jõust nägema, mis ta wälja jätab, kui ta midagi wälja jätta tahab. Raamatu kirjutaja teab ja tunneb kõige enam, kui puudulikud musted kirjatähed paberi pääl on ja, et nad ei iialgi koolmeistri elewa waimu wastu ei saa. Sellepärast jääb enam koolmeistri sõna toimetada; raamat aga näitab teerada, ehk püüab seda näidata. Koolmeistri waim aga jääb, nagu alati ja igal pool pääasjaks ja ülemaks toimetajaks.

7) Siin tahame lühidelt ühe eeskuju kallal näidata, kuda meie arwates geometria õpetust lastega käsile tuleb wõtta.

Kõige päält saab põhjustükk kinni peetud: ei saa mitte ette ööldud, — ei saa mitte pähä õpitud, ega sisse tuubitud ja lastest järele öölдud; Koolmeister: Jautage ühte antud sirget joont (kolme, nelja, wiie, 2c.) ühesuurusteks jagudeks.

Saab see tükk parajal kohal ja õigel ajal antud — mis pääasi on, siis on selle tüki ees juba need ülesanded käinud: sirget joont ja winkelt kaheks ühesuuruseks jauks jautada, ja neid jälle uuesti kaheks — seega täit joont ja winkelt neljaks — ja seda wiisi edasi. Lapsed oskawad siis ju sirgid joona ja winklid kaheks ja neide jälle uuesti kaheks, see on: neljaks jauks j. n. e. jautada, ja ei mitte üksi umbes ehk käsikaudu, waid geometrialikul kombel, mis muid riistu ei luba pruukida, kui joonlauda ja sirkelt.

Lapsed otsiwad, igaüks ise wagusi oma tahwli pääl. Et lapsed seda ju täädwad, et ühesuguseharulise kolmnurga põhjusjoon seeläbi kahte jakku langeb, kui põhjusjoone wasta seiswat winkelt poolitatakse, siis wõiks ehk üks ja teine selle mõtte pääle tulla, et winkli (kolmeks, wiieks) jagamisega ka põhjusjoon (kolmeks, wiieks) jautatud saab — ja teewad antud sirge joone pääle ühesuguseharulise kolmnurga. Koolmeister lasku lapsi teha; nad nääwad aga pea (üks kõik, kas silmaga, wõi mõne eesolnud tüki pruukimisest), et sel kombel tööd toimetade wõimalik ei ole, ehk kui nad nüüd weel oma eksitusest aru ei saa, siis tuleb neile wiimaks meele, et nad weel seda ei teagi, kuda ühte winklit kolmeks, wiieks, seitsmeks ühesuuruseks jauks jautatakse. See tükk peaks aga, nagu nad pea leiawad enne ees käinnd ja arutatud saanud olema. Selle otsimisele ei sunni koolmeister lapsi mitte enam, sest ta teab, et lapsed ilma abita seda tükki ise arutada ei suuda. Et nad ise otsiwad, sest ei ole wiga, sest see saadab neid eemale waatama.

Olgu nüüd, et lapsed otsiwad ja katsuwad, aga siiski ei leia — mis siis?

Nüüd ei tohi koolmeisler õppijaid mitte nii kaua wäsitada, et nad ju ära tüdinewad (unistamine ja haudumine ühe tüki kallal lõdwendab lapse waimu), waid paneb kõigile, ehk aga mõnele mõne küsimise ette, ehk juhib neid mõne abijoonega asja poole. Ees seiswas tükis ütleb koolmeister: Pange ometigi antud sirgi joone ühe otsapunkti külge sirge joon, nii pikk kui tahes, kes antud sirge joonega ühte winkelt — nii suurt kui tahes — sünitab! (waata kuju 86). Kui see neid mitte weel teele ei juhi, siis laseb koolmeister abijoone pääle, winklipunkti otsast kinni hakates, kolm, wiis, seitse 2c. (nii palju kui jagusid on päritud) ühesuurust jagu — nii pikad kui tahes — lõigata. Kui lapsed neid jagusid, mis abijoone pääle on lõigatud, antud jaetawa sirge joonega tähele panewad, neid ja nende seisu tõine tõisega kokku säädwad ja siiski weel antud joone jagamise pääle ei tule, siis täädku koolmeister, et ta oma lapsi mitte õiete ei ole juhtinud.

Nad peawad nüüd abijoone *i* punkti antud (jagatawa) sirge joone otsapunktiga (*b*ga ühendama ja ühendawa joone *i b* ga abijoone jagamise punktidest (*h*, *g*, *e*, *d*) *i b* ga kõrwujooned tõmbama — tükk on arutatud — walmis. Nüüd põhjendus (waata ühekfsas päätükk — Lisa — kuju 86). Põhjendust wõib ka selle tükile sellest saada, et kolmnurgad tõine tõisega ühed on; ühesugusid (katjaid) kolmnurke saame meie, kui antud joone *a b* jagamise punktidest (*k*, *l*, *m*, *n*) abijoonega kõrwujooned tõmbame.

Tõine eeskuju. Koolmeister ütleb: Walmistage kolme antud sirgu joonega (*a*, *b*, *d* — kuju 24) üks kolmnurk! Lapsed ei mõista wast seda kerget kuju antud kolmest joontest teha; siis juhib koolmeister neid küsimiste läbi nii kaugele, et nad märkawad, et sirge joone *a* läbi juba isegi 2 kolmnurga otsapunkti määratud saawad ja nüüd aga üksi tarwis on, kolmnurga kolmandamat punkti ülesse leida. Kolmas punkt seisab *a* joone ühest otsapunktist *b* joone pikkuses ja *a* joone tõisest otsapunktist *d* joone pikkuses. Otsitaw punkt peab siis nende kahe wibude sees seisma, mis *a* joone otsapunktidest *b* ja *d* joone sirkle otsa wahedega tõmmatud saawad ja nimelt sääl punktis, kus need kaks wibu tõinetõisest läbi langewad (tõine tõist lõikawad).

Kuda nüüd, kui lapsed ühe ülesande kätte on saanuwad? — Nüüd säädwad lapsed oma tööd kindla wormi ja selge sõnadega kokku, — esiteks: ülesande; tõiseks: kuju walmistamise (arutamise); kolmandaks: põhjused (tunnistused), et ta õige on. Iga ühe selle tüki kolme jau (ülesande, arutamise ja põhjendamise) wahel peawad koolilapsed selge wahe tegema, ja iga tähtjas (enam tähendaw) sõna iseäranis kõwema rõhuga ööldud saama.

8) Üleüldised **algõpetused**, mis siin selle numre all ette tulewad, saawad lastele siin ja sääl, just kääs olewa tüki kallal, aga **sagedaste** selgeks tehtud, ja ei mitte **ühe** korraga õpetatud. Enamiste igamehele on nad tutwad, ta toimetab igapääwases elus nende najal oma asju, aga ta ei wõi selget otsust neist anda. Harjitud inimene peab aga igast asjast selge sõnaga otsust andma ja omast tööst aru tegema, sellepärast peab ta ka selles harjutatud saama. Koolmeister ei hakka aga mitte algõpetuste seletustega pääle, waid lisab neid siin ja sääl, parajal kohal tüki wahele ehk otsa j. n. e.

1. Iga asi on oma enese suurune; winkel a = winkel a, joon ab = joon ab.

2. Täis on suurem, kui täie jagu, ja kõik täie jaud ühte kokku on täie suurused.

3. Kui kaks asja (suurust) ühe ja sellesama kolmandama asja sugused on, siis on nad isekeskes ka ühesugused. Kui winkel a = winkel d, winkel b ka = winkel d on, siis on winkel a ka = winkel b. ehk: kui Mats on Tooma suurune ning Toomas Jaani suurune, siis on ka Jaan Matsi suurune. Esimine suurus Mats, tõine suurus Toomas kolmas suurus Jaan; ehk: esimine asi a, tõine b, kolmas d.

Kui $a + b = 2$ loodwinklid, $d + e = 2$ loodwinklid: siis on $a + b = d + e$. Esimine suurus $a + b$, tõine suurus $d + e$, kolmas suurus 2 loodwinklid.

Kolmas suurus wõib, nagu esimesed kaks, ka kokkupandud suurus olla.

4. Kahest ühesugustest suurustest wõib ühte tõise asemel wõtta.

5. Ühepalju ühepaljuse juure arwatud annab ühepalju $2 \times 3 = 6$ seega ka $2 \times 3 + 4 = 6 + 4$. Kahe ühesuguste suuruste summad on ühed.

6. Ühepalju ühepaljust ära wõtta jätab ühepalju üle $12 = 10 + 2$; seega ka $12 - 8 = 10 + 2 - 8$. Kahe ühesuguste (ühesuuruste) asjade wahe on üks (ühesuurune).

7. Ühepalju ühepaljuga kaswatada ehk jagada annab ühepalju. $56 = 7 \times 8$; seega $7 : 56 = 8$.

8. Mis wiiendama-, kuuendama-, seitsmendama-numre all seisab, wõime ka nende sõnadega kokku wõtta: ühesugused toimetused ühesuguste suurustega, annawad ühesugusid otsusid (wäljatulikuid); Waimu- ja looduse-elu kohta pruukides, ütleksiwad need sõnad seda: nääme meie siin ehk sääl ühed ehk needsamased wäed ja jõuud liikumas, siis wõime juba ette äraöölda, et need samad otsused saawad wälja tulema ja olema. Ühesugused algused, ühesugused edenemised, ühesugused lõpikud. Kõik sünnib kindla sääduste järele.

9. Ühesugused mitmesuguste, ehk mitmesugused ühesuguste juure arwatud, ja ühesugused mitmesugustest, ehk mitmesugused ühesugustest ära wõetud: annawad mitmesugust wälja. Kus pool enam ehk wähem suurem ehk pisem arw wälja tuleb, on kerge aru saada, põhjendada. Niisama ka kaswatamises ja jagamises!

10. Kui kolmest suurustest (asjust) esimine suurem on kui tõine ja tõine suurem kui kolmas, siis on ka esimine (seda) suurem kui kolmas. Mis suuremast suurem on, on ka (seda enam) pisemast suurem. On a suurem kui b, ja b suurem kui d, siis on ka a suurem kui d; ehk: kui $a > b$, $b > d$, siis on $a > d$; ehk kui Jüts suurem on kui Jaak, ja Jaak suurem kui Tõnn, siis on ka Jüts (seda) suurem kui Tõnn.

11. Kui kaks joont, lagendikku ehk ruumi (kas teus ehk mõttes) nõnda wõiwad pandud saada, et nad kõigi oma jagudega kokku langewad, tõinetõist katawad, siis on nad ühed — ühesugused — ühesuurused.

12. Need õpetused on kõik a l g õ p e t u s e d (igawesed tõed), kes iial endid ei muuda, kes elades tõisiti ei ole, ega olla ei wõi, sellepärast, et meie neid tõisiti mõelda ei suuda. Igal pool Maakera pääl on $2 \times 2 = 4$, ei kusagilgi wiis, ja sirge joon on ka pääwa pääl kõige lühem tee kahe punkti wahel — on üks siht.

13. A l g õ p e t u s on niisugune õpetus, kes nii silmapaistaw ja kerge on, et temmast kohe aru wõib saada, et ta õige on, et tema mitte põhjendamist ei pruugi oma põhjenduseks, aga küll ühte seletust ja näitust. Algõpetus ei wõi (tohi) elades wale olla.

14. Õ p e t u s ehk õ p e t u s t ü k k on üks tükk, mis põhjendust pärib, tema wõib põhjendatud saada. Eeskuju: kõige winklite summa ühes kolmnurgas on (teewad) 2 loodwinkelt.

15. Ühte tükki põhjendama on: tema tõtt teistest tükkidest, kes tõed on tuntud, tunnistama; näitama, et tema õige peab olema, sest et teised õiged on j. n. e. (Tunnistada wõib aga seda, mis tunnistataw on, aga ei mitte seda, mis tunnistataw ei ole).

16. Iga õpetus saab **tingimiste** all antud, (keegi ütelus ehk õpetus ei ole tuulest wõetud). Eeskuju: Pütagoräuse õpetuse juures on tingimine, et kolmnurk **loodwinkline** kolmnurk peab olema. Kui tingimisi õieti peab tuntama, siis on hää, et koolmeister õpetust „kui" ga alustab: **Kui** see üks loodwinkline kolmnurk on, siis on loodkülgede ruudud loodwinkli wastasseiswa külje (hüpetunuse) ruuduga ühesuurused. **Kui** kahel kolmnurgal kõik küljepaarid ühed on, siis j. n. e.

17. Õpetustükki **ümberpöörma** tähendab: tingimisi saagiks, saaki tingimisteks tegema. Õpetus: kui *a* on, siis on *b*; ümberpöördud: kui *b* on, siis on *a*. Kui 2 sirget joont kõrwulised on, siis on sisemised wastaswinklid kokku 2 loodwinkelt. Ümberpöördud: kui sisemised wastaswinklid kokku kaks loodwinkelt on, siis on jooned kõrwujooned. Ülepää wõib öölda: Kui õpetustükk õige on, siis on ka ümberpööre õige. Et see aga ka alati ei ole, nääme sellest: kui wihma sajab, siis on maa märg; kui maa märg on, siis sajab wihma?

18. **Ülesanne** on tükk, mis pärib, et midagi toimetatud (ette wõetud) peab saama. Kuda see toimetus tehtud saab, näitab **arutamine**. (Arutada wõib aga arutatawat, ja ei ole mitte arutamata — wõimata — asja).

Ülesanded wõiwad **üleüldised** olla, nagu: ühesuuruse külgedega kolmnurk walmistada, ehk saab aga ka päritud, et ühe, ehk mitme määratud tükkidega üks anne peab walmistatud saama, nagu: ühe joone pääle peab, **määratud pikkusega** ühesuguse külgedega kolmnurk walmistatud saama. Niisugustest määratud tükkidest ööldakse: nad on **antud**.

19. Niisugusid tükka ei wõi mitte alati priitahtlikult anda, waid peawad sagedaste rajatud saama, kui ülesannet täita wõib. Kui, eeskujuks, kolme antud küljege üks kolmnurk walmistatud peab saama, siis peawad juba 2 külge kokku suuremad olema, kui kolmas külg. Kui ei oleks see mitte nõnda, siis ei wõiks see anne ehk arutus mitte toimetatud saada. Ülesanne peab seepärast sagedaste määratud piiride sisse jääma.

20. Nagu üks õpetus sagedaste mitmel kombel põhjendatud wõib saada, niisama wõib ka üks ülesanne mitmel teel arutatud saada. Sellepärast ei ole ülesanne aga mitte määramata. Eeskuju: missugused kaks arwu annawad kokku 12? 11 + 1, 10 + 2, 9 + 3 j. n. e.

21. Seletus on tükk, mis näitab, mis üks asi, ehk missugune tema iseloom on, nagu: üks sirgejoonline kolmnurk on ühetasane kuju, kellel 3 sirget joont küljedeks on. Niisugusel kolmnurgal on palju omadusi ehk märka, mis seletuse sees seisawad ja säält wälja paistawad ning tunda on. Õige seletuse sees seisawad ülemad ja alamad arud ehk märgid, tähendused, sõnad: kolm-, neli-, paljunurk on kõik „kujud"; kolm-, neli-, paljunurk on alamad — „kuju" ülem aru, märk, tähendus, sõna.

Saagu sellest sisse juhatamiseks küll! Meie arwame, et iga tähelepaneja sellest, mis siin öelnud oleme, aru wõib saada, kuda rahwakoolides geometriat õpetatud peab saama, ja missugusest seisukohast see raamat on walmistatud. Öölda oleks meil weel küllalt; aga meil tulewad ühe saksamaa laulikü sõnad meele, mis nõnda käiwad: „Sõnad on küll hääd, aga nad ei ole kõige paramad; kõige param asi ei saa mitte sõnadega selgeks." Kõige param asi on igas õpetuses koolmeistri waim ja himu asjale.

A. Planimetria.

Esimine päätükk.

Täring *) (kuubus), ümargune sammas (tsülinder), pind (lagendik), joon, punkt (täpp).

1. Igal täringil on 6 küljepinda (küljelagendikku), 8 nurka (nukka), 12 serwa ehk serwajoont.

2. Kõik küljepinnad on ühesuurused, — üks on all, üks ülewal, neli nende kahe (ülemise ja alumise) wahel, külgede pääl püsti; igaüks küljepind on neljast serwast (serwjoonest) sisse piiratud, on neljaküllega, — ja et küljejooned kõik ühepikkused on, on küljepind neljaserwjooneline, korraline kuju.

3. Täringi 12 serwjoont, mis ühes neljanurkade küljejooned on, on sirged- ehk sihtjooned, on kõik ühepikkused, igaüks on kahe lagendikule (pinnale) piiriks, igaühte nurka tulewad 3 serwjoont kokku, igaüks (hakkab) algab ühest nurgast ja lõpeb tõise nukka ära.

Tähendus koolmeistrile. Kui meie siin raamatus ruumi puuduse pärast kõik seda, mis nääme ja tähele paneme, nii hästi täringi, kui ka tõiste kehade ja kujude juures (küljes) ise nimetame, siis ei pea koolmeister seda mitte tegema. Koolmeistri töö olgu, lastele asja, (ülewal täringit) näidata, ette sääda, nende käest küsida, aga ei mitte neile öölda (walmis tehtud kätte anda), mis nad ise leida wõiwad. Muidugi ei saa laste

---

*) Täring on kaheksanurgeline, kahetõistkümneserwiline keha, — saksakeele „würfel". — Nii hästi täringi, kui ka tõiste kehade wälimised wõrgud seisawad selle raamatu taga otsas, kus kehade mõõtmisest jutt on. — Need kehad, paksust paberist, ehk puust peawad koolis olema, kus geometriat õpetatakse. Nende kehade kallal algab esimene ruumiõpetus näidates, küsides ja kostes.

kostmised alati täielikud ja karwa päält õiged olema; aga sellest et ole wiga, kus wastus puudulik on, siis aidaku ja õiendagu koolmeister nõnda, et wastus wiimaks täielikuks saab. On asi ehk asja nimi lastel täädmata, siis on isienesest mõista, et koolmeister asja nimetab. Koolmeistri päätöö olgu küsimine, juhtimine, sõrmega näitamine, kus tarwis õiendamine, parandamine j. n. e. Koolmeister tehku wast nõnda:

Koolm. Mis teie näete selle täringi küljes?

Lapsed. Meie näeme selle täringi küljes 6 külge, üks all, kelle pääl täring seisab, üks ülewal, 4 külgede pääl püsti — 8 nurka, — 4 all 4 ülewal j. n. e.

Koolm. Waadake, kas mõned neist tükkidest ühed on?

Lapsed. Kõik nurgad on ühesuurused, kõik 6 küljepinda on ühesuurused j. n. e.

Koolm. Mitme serwjoone pääl seisab igaüks serwjoon loodis? Mitme küljepinna pääl seisab üks küljepind loodis? Mitu küljepinda seisawad (praegu) kaalus*)? Mitu loodis? Mitu serwjoont on ükstõisega kõrwujooned? j. n. e.

4. Täring (nagu iga muu keha) tarwitab ruumi, temal on suurus: pikkus, laius ja kõrgus. Need kolm lautust on tema juures (küljes) kõik ühesuurused, see on: tema on niisama pikk, kui lai, kui kõrge. Pindadel, mis täringi küljes piiriks on, on kaks lautust: pikkus ja laius. Serwjoontel, mis pindade (wäljade) piirid on, on üks lautus: pikkus. Joone ots lõpeb punktisse ära. Punktil ei olegi lautust — on lautuseta.

Koht ruumi sees, kellel lautust ei ole, hüütakse punktiks, — üks lautus on joonel, kaks pinnal, kolm kehal.

5. Ümargune sammas on kolmest pinnast rajatud, millest, kui ta püsti seisab, üks all, üks ülewal, üks külje pääl on. Ülemine ja alumine pind on tasapinnad (ühetasased), küljepind on kõwer. Ülemise ja alumise pindade pääl wõiwad igale poole sirged jooned, ehk sihtjooned tõmbatud saada, küljepinna pääle üksi ülewalt alla ja alt ülesse. Tõised jooned on kõik kõwerad.

6. Kui üks punkt omast kohast ära läheb ja edasi liigub, siis on see tee, mis ta käib (teeb) joon; sirge joon, kui ta oma sihti ei muuda, — kõwer joon, kui ta oma sihti iga silmapilk muudab. Tee mis punkt käib, wõib aga ka sirgist ja kõwerist joontest kokku säätud olla. Niisugust joont hüütakse segajooneks. Kõwera joone jaud — ka kõige pisemad — ei wõi iial sirged olla.

---

*) Mis sõnad „kaalus", „loodis" tähendawad, peab lastele öeldud saama — ja näidetud.

7. Nändab üks sirge joon ühte sihti edasi, siis sünnib üks pikem s. s. (sirge joon); läheb ta aga lapiti külje poole, siis on tema teel, mis ta käib, pikus ja laius, on üks pind. Pind wõib olla ühetasane ehk kõwer (küürus). On pind küürus, siis hüütakse teda ülepää pinnaks (wäljaks), on ta ühetasane, siis nimetatakse teda tasapinnaks. Ka kõwera joone tee wõib, kui ta lapite edasi läheb, tasapinda ja pinda sünnitada. Tasapinna pääle wõib iga pidi sirgid joona tõmmata; pinna pääle aga ei mitte alati; kõwera pinna (nagu ümarguse samba) pääle aga üksi ühte sihti (ülewalt alla); kuuli pinna pääle ei wõi kuhugi poole sirgid joona tõmmata. Igaüks tasapind on alati ka pind, aga ei mitte igaüks pind ei ole alati tasapind.

8. Kui tasapind ühte sihti edasi läheb, siis sünnib pikendatud tasapind; läheb ta aga lapiti ühe ehk teise külje poole, siis käib ta kehalikust ruumist läbi ja sellel ruumil on siis 3 lautust: pikkus laius ja kõrgus (sügawus).

9. Täädus, mis arwudega ja ruumidega tegemist teeb, hüütakse matematikuks; aritmetik toimetab üksi arwudega, geometria ruumisuurustega; sellepärast nimetatakse geometriat ka mõõdukunstiks ehk ruumiõpetuseks. Geometrial ehk ruumiõpetusel on toimetamist punktidega, joontega, pindadega ja kehadega.

Kehal on 3, pinnal 2, joonel 1 lautus. Punkt on lautuseta. Keha piirid on pinnad; pinna piirid on jooned; joone piirid on punktid.

10. Igal kehal on oma tuum ehk sisu ja tegumood, kuju ehk nägu. Geometria ei waata mitte keha tuuma, waid ükspäinis keha näu pääle. Keha nägu on jälle seda moodi, nagu tema pind on, mis teda sisse piirab; on keha pinnad kõwerad, siis on keha kõwer, on nad tasased, siis on keha ka ühetasane. — Ühte matematiku ehk geometria keha ei wõi meie mitte näha ega näidata, teulikult teda ei olegi, teda wõib aga küll arwata (mõelda). Tema suurust ja nägu wõime meie mõelda. Niisama ei wõi ka matematiku pinda, joont ja punkti näidata. — Igapääwases elus saawad need kolm lautust: pikkus, laius ja kõrgus — ka teiseti hüütud. Kraawi kõrgust nimetatakse sügawuseks, laua ja palgi kõrgust paksuseks j. n. e. Põllu mõõtmise juures on meil üksinda pinna suurust, see on: pikkust ja laiust tar-

wis tääda; maantee mõõtmise juures ükſi pikkust, aga ei mitte laiust; ühe torni mõõtmise juures ükſi kõrgust, aga ei mitte torni paksust.

Üks punkt ei tähenda mitte muud, kui ühte määratud kohta, kellel mingi lautust ei ole.

11. Märgitud saab üks punkt täpiga, joon peenikese kriipsuga. Pindasid on igalpool kehade küljes, tahwli, laua, paberi pääl näha; rajame meie neid peenikeste joontega, siis saame ühe kuju.

Ka kõige peenem täpp ja joon tindiga ehk kriidiga tehtud on kehalik; aga meie ei waata geometria õpetuses mitte tema keha pääle, waid punkti juures mõtleme aga paljalt ühte määratud kohta, ja joone juures paljalt joone pikkust.

Mitmest punktidest, kes ükstõise pääle langewad, saame ühe punkti, mitmest ükstõise pääle langewast joontest saame ühe joone, aga ei mitte pinna, mitmest ükstõise pääle langewast pinnast saame ühe pinna, aga ei mitte keha.

Tõine päätükk.

Punkt.

1. Matematiku punktil ei ole mingi lautust, tema tähendab (näitab) paljalt ühte kohta. Tahetakse teda nähtawaks teha, siis peab muidugi seks ühte täppi wõetama, kellel jälle lautus on. See täpp tehakse aga nii pisuke kui wõimalik.

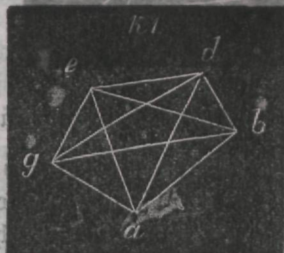
2. Ei mitte ükſi kehaliku ruumi, waid ka pinna ja joone sees wõime meie arwamata palju punkta arwata.

3. Arwaksime meie kaks punkti ükstõisest eemal (lahutatud), siis on sirge joon kõige lühem tee nende kahe punkti wahel. Kahe punkti wahel wõib aga ühte sirget joont mõelda. Tõised jooned, mis nende kahe punkti wahel seisawad, on kõik kõwerad (peawad kõik kõwerad olema).

Sirge joone pikkus, nii kui ka tema siht ehk seis saawad kahe punkti läbi äramääratud.

4. Arwaksime meie 3 punkti, kes mitte ühes sihis ei seisa, siis seisaksiwad nende kolme punkti wahel 3 sirget joont, kes ühte tasapinda sisse piirawad. See pind oleks kolmeküljeline kuju, üks kolmnurk (triangel).

5. Arwatataks ühe tasapinna pääl 4 punkti, kes ükstõisest eemal seisaksiwad ja mitte ühes sihis ei ole, siis saadakse, kui igaühte igaühega (tõisega) sirge joonega ühendatakse 6 sirget joont. Igaüks wõib igaühega ühendatud saada ja igaüks ka kolme tõistega. Igast punktist lähewad 3 sirget joont wälja, kõigist neljast punktist 4 kord 3. Et aga iga s. j. 2 punkti ühendab, siis on kõikide sirge joonte päris arw pool nii suur, ehk pool wähem, 4 korda 3 — jagatad kahega $= \frac{4 \times 3}{2} = 2 \times 3 = 6.$



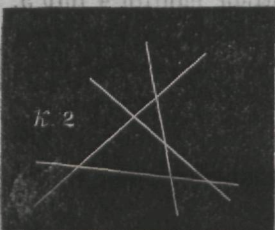
Ühendataks 5 punkti *a*, *b*, *d*, *e*, *g* (kuju 1) ühes tasapinnas, kellest mitte kolm punkti ühes sihis ei seisa, ükstõisega sirge joonte läbi, siis läheks igast wiiest punktist 4 sirget joont wälja, teeb 5×4; et aga iga s. j. 2 punkti ühendab (kahe punkti jauks on), siis on kõigi sirge joonte arw pool wähem, $\frac{5 \times 4}{2} = 10.$

Nõnda seisawad	kuue	punkti wahel	$\frac{6 \times 5}{2}$	=	15	sirget joont,
"	seitsme	"	$\frac{7 \times 6}{2}$	=	21	"
"	kaheksa	"	$\frac{8 \times 7}{2}$	=	28	"
"	kümne	"	$\frac{10 \times 9}{2}$	=	45	"
"	kahekümne	"	$\frac{20 \times 19}{2}$	=	190	"
"	saja	"	$\frac{100 \,.\, 99}{2}$	=	4950	"

see on: tahetakse sirge joonte arwu kätte saada, mis hulga punktide wahel wõimalik on, siis kaswatatakse punktide arwuga ühte tõist arwu, mis ühe pisem on kui punktide arw ja jagatakse kaswatust kahega.

6. Ülesanne. Mitmes punktis wõiwad (kõige rohkem) 2, 3, 4 j. n. e. sirget joont ükstõist läbilõigata?

Arutus: 2 sirget joont lõikawad ükstõist ühes punktis läbi. Kolmas sirge joon wõib jälle neid mõlemid läbilõigata; seega tulewad 2 läbilõikamise-punkti weel esimese juure, teeb 1 + 2. Neljas sirge joon wõib neid endist kolme sirget joont (waata kuju 2) läbilõigata, seega tulewad 3 p. (punkti) weel juure: $1+2+3=6^{es}$ punktis. 5 sirget joont lõikawad $1 + 2 + 3 + 4 = 10^{nes}$ punktis, 6 sirget joont lõikawad $1+2+3+4+5=15^{nes}$ punktis j. n. e.; igaüks järgmine s. j. annab nii palju uusa punkta juure, kui palju enne joona oli; kümnes s. j. 9, 20^{nes} s. j. 19, 100^{as} s. j. 99 uut läbilõikamise-punkti.



Tahetakse kõigi punktide arwu leida, mill sirged jooned ükstõist (kõige rohkem) läbilõikawad, siis arwatakse kõigi arwude rida ühest kunni selle arwuni, keda tääda tahetakse saada — ilma wiimse arwuta — kokku; kahhetõistkümne sirge joone juures:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66 \text{ p.}$$

Tõine arutus. Kui meil 6 s. j. on, siis lõikab igaüks nendest kuuest joonest ühte tõist, see on 5 joont igaühte ühes punktis; meil on seega 6×5 $(6 \,.\, 5)$ punkti. Et aga iga punkt kahe sirge joone jauks on, siis on kõikide arw $\frac{6 \,.\, 5}{2} = 15$ p.

Niisama lõikab, hulga sirge joonte juures, iga s. j. tõist, ja sünnitab seega nii palju punkta, kui pääle tema enese aga sirgid joona on. Kui nüüd sirge joonte arwu sirge joonte arwuga — wähem 1 — kaswatatakse, siis saadakse, sest et iga punkt kahe s. joone jauks on, kahewõrdne arw kõikidest punktidest, kellest aga siis ühewõrdne arw (õige arw) saadakse, kui kahewõrdsest arwust pool wõetakse, ehk kui kahewõrdest arwu kahega jagatakse.

5 sirget joont annawad seega $\frac{5 . 4}{2} = 10$ punkti,

10 " " " $\frac{10 . 9}{2} = 45$ "

20 " " " $\frac{20 . 19}{2} = 190$ "

100 " " " $\frac{100 . 99}{2} = 4950$ "

ehk: 100 sirget joont annawad $\frac{100 . (100 - 1)}{2} = 4950$ p.

n *) sirget joont annawad $\frac{n . (n - 1)}{2}$ p.

Lisa. Mööda läinud tükkide ümberpöördud ülesanne oleks see: Sirge joonte arwu läbilõikamise punktide arwust leida.

Kolmas arutus. Eesseiswatest tükkidest nägime, et läbilõikamise punktide arwu seeläbi leiti, et sirge joonte arwuga ühte teist arwu, mis ühe pisem oli kui sirge joonte arw ise — kaswatati ja seda kaswatust kahega jagati. Läbilõikamise punktide arw on siis pool kaswatusest, ja kaswatus on kahe arwu kaswatamisest sündinud, kellest teine ühe pisem oli kui üks. Sellepärast pruugime aga antud läbilõikamise punktide arwu kahega kaswatada ja kaks täit arwu otsida, kelle kaswatus läbilõikamise punktide kahekordse arwu annab, ja kellest üks arw ühe pisem on kui teine. Suurem neist kahest kaswatajast annab sirge joonte otsitawat arwu kätte. — On 45 punkti antud, ja meie peame neist sirge joonte arwu leidma, siis wõtame seda kaks korda, see on 90 = 10 . 9. Sellega on sirge joonte otsitud arw 10. — On punktide arw = 66, siis on nende kahewõrdne arw = 132 = 12 . 11; seega sirge joonte arw = 12.

Tähendus. Kerge on näha, et punktide arwu, kelles sirged jooned ükstõist läbilõikama peawad, mitte üsna priitahtlikult (tingimata) antud ei wõi saada. Sest punktide arw, mis kahe, kolme, nelja, wiie, kuue, seitsme, kaheksa, üheksa sirge joone läbilõikamisega sünniwad, on 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 j. n. e. Saaks nüüd üks arw antud, mis nende arwude wahel seisab, nagu 40, kui kõige ülem läbilõikamise punktide

*) Matematika juures saawad ka sagedaste tähed arwude asemel pruugitud, mis koolmeister lastele äraseletama peab — eeskujude kallal.

arw, siis ei olekski sirgid joona, kes ükstõist 40nes punktis läbilõikawad; sest 8 sirget joont annaksiwad 28, ja 9 sirget joont 36, ja 10 sirget joont 45 punkti. Tahetakse iga arwu priitahtlikult wõtta, siis peab ülesanne tõisel kombel antud saama, wast nõnda: „Mitu sirget joont on kõige wähem ehk kõige rohkem tarwis, kui nii, ehk nii palju läbilõikamise punkta tahetakse saada.“

Kas koolmeister niisugusid ülesandid lastele koolis wäljaarwamiseks anda tahab, wõi mitte, jääb tema oma teha. Geometria ei sunni just mitte seda kõik õpetama. Meie oleme mõnda sija ülesse pannud — mis ka ära wõib jääda — laste otsimise himu kaswatamiseks, mõistuse teritamiseks j. n. e. On kooliaeg napp, mis ta enamiste ka meie maal on, siis peawad niisugused ülesanded muidugi andmata ja õpetamata jääma.

Kolmas päätükk.

Sirged jooned ja winklid.

1. Sirge joone iseloomus on tema lautus ühes sihis (pikkus). Tema otsapunktide kaugus ükstõisest on tema pikkus.

2. Igaühte sirget joont wõib tema mõlemist otsapunktidest pikendatud arwata; teda wõib ka ühelt ehk mõlemilt poolt küljest rajamata arwata.

3. Sirge joone seis ehk siht saab kahe punkti läbi rajatud. Kui sellepärast kahel sirgel joonel 2 ühekaugust punkti on, siis langewad need 2 joont ühte, neil on üks siht.

Tähendus. Sel kombel wõib katsuda, kas joonlaud õige wõi kõwer on. Joonlaud pannakse oma mõlemate otsadega kahe punkti külge, kes nii kaugel ükstõisest eemal on, kui joonlaud pikk, ja tõmmatakse tema külje na'al üks joon, pööratakse nüüd joonlaud ümber ja tõmmatakse seda sama külge mööda, nende sama punktide wahel jälle üks joon. Langewad nüüd need 2 tõmmatud joont ühte (katawad nad ükstõist), siis on joonlaud hää — sirge ja õige. Niisama katsub puusepp, kas laua küljed (küljepinnad) ja ääred õieti hööweldatud on j. n. e.

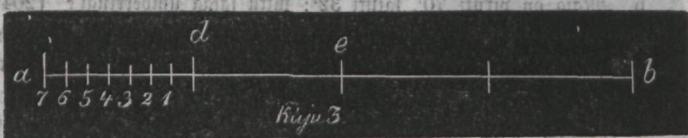
4. Tahetakse ühe joone pikkust mööta, siis wõetakse selletarwis nähtaw ja tuttaw joone mööt, süllapuu, jalg, toll, küünar j. n. e. Kui pikk süld, jalg, toll, küünar j. n. e. on, õpitakse silma ja käega tundma. Möödud on igal maal isesugused. Wenemaal on kõige pikem mööt

werst, 1 werst on 500 raudsülda, 1 raudsüld 7 jalga, 1 jalg 12 tolli, 1 toll 12 liini. Märgitud saab süld (°), jalg ('), toll ("), liin ('''); 8°, 5', 6", 10''', loe: 8 sülda, 5 jalga, 6 tolli, 10 liini.

Tahetakse ühe wälja-, aia- ehk põllupikkust mõõta, siis pistetakse selle wälja sisse kõige esite 2 sirget teiwast püüsti (loodi), sihitakse (wisiritakse) neist teiwastest mööda otse kohe edasi tõiste teiwaste juure, mis ka püsti on pandud, nõnda, et teiwad kõik ühte sihti seisma tulewad. Et nüüd kahe teiwa (punkti) läbi sirge joone pikkus määratud on, mõõdetakse nüüd latiga, kus pääl jala, tolli ehk küünra märgid seisawad, sirge joone pikkus ära. Seda mõõtmist wõib ka mõõtnööri, ehk mõõtahelaga ette wõtta. — Mõõtahel on raudahel, mis jalapikkustest liikmetest kokku on pandud, mille kumbagis otsas üks raudwarras on, mille läbi ahel sirgeks saab tõmmatud. Iga niisugune ahel on enamiste 25 küünart ehk 50 jalga pikk. 70 niisugust ahela täit on ühes werstas. Üks werst on 1750 küünart ehk 3500' pikk.

Kui pikkusid paberi pääle tahetakse joonitada, siis pruugitakse selle tarwis ühte lühendatud mõõ:lauda, ehk lühendatud mõõtu. Üks lühendatud mõõt on õige (sirge) kepp, ehk sirge joon, kes ühesuurusteks jagudeks on jautatud, kellest iga niisugune jagu tolli, jalga ehk sülda wõib tähendada.

Sirge joon (kuju 3) *ab* tähendagu nelja sülla pikkust joont. Süld *ad* on 7 meks jauks (jalaks) jautatud.



Tahetakse nüüd maja pikkust, mis 15° 4' on, ja tema laiust, mis 5° ja 2' on, paberi pääle panna, siis ei wõi see elades sel kombel sündida, et pikkus ja laius paberi pääl niisama suur on, kui looduses, waid see wõib üksi lühendatud mõõdu abiga sündida. Et maja pikkus 15° 4' on, siis wõetakse *ab* sirkli harude wahele ja pannakse 3 niisugust pikkust ükstõise otsa paberi pääle, see teeb, et iga pikkus 4° on (tähendab) 12°. Et aga maja 15° 4' pikk on, siis puudub paberi pääl weel 3° 4'. Seda puuduwat pikkust saadakse aga siis, kui sirkli haru üks ots punkt *b* pääle ja tõine ots punkt nummer 4ja pääle pannakse ja see sirkle harude wahe, kahetöistkümne süllа otsa, paberi pääle lisatakse. — Sel kombel oleks nüüd maja pikkus, lühendatud, paberi pääl. Niisama tehakse ka laiusega: Esmalt wõetakse jälle punktid *a b* sirkli harude wahele ja kantakse seda paberi pääle; see teeb 4°. Nüüd puudub weel 1° 2′; seepärast wõetakse punkt *e* ja punkt 2 sirkli kahe haru wahele ja pannakse nelja sülla otsa; sest punkt *e*[eft] kunni punkt *d*[ni] on 1 süld, ja *d*[st] kunni nummer kaheni on 2 jalga.

Tahetakse sel kombel mäja-, õue-, aiaplaani j. n. e. walmistada, siis peab selle maja-õue-aia-plaani lühendatud mõõt plaani juures seisma; sest muidu ei wõi plaanist maja, õue, aia j. n. e. suurust mitte kätte saada (mõõta). Lühendatud mõõdu pääl wõiwad süllad, jalad, küünrad j. n. e. nii suured olla, kui keegi ise teha tahab.

Tähendus. Lühendatud mõõdu ja tema pruukimisega tehku koolmeister lapsi hästi tutwaks! Tema lasku lapsi endid lühendatud mõõtusi tahwli pääle walmistada ja nende abiga koolitoa-, koolimaja-, õue-, aia-plaanisid tahwli ja paberi pääle joonitada. Kui lapsed ise kõiki täiesti el mõista teha, siis olgu koolmeister neile sõna ja teuga abiks. Siin seda kõik laialt seletada ei ole wõimalik.

Ülesanded. Sirged jooned, kelle pikkused arwudega on antud, saawad kokkuarwatud ja mahaarwatud sellel kombel, nagu nimega arwud kokku- ja mahaarwatud saawad. Muidugi tääda, peawad arwud ühenimelised olema.

a. Kui suur on tuba ümberringi, kui tema 28′ pikk ja 18′ lai on? (92′).

b. Maja on pikuti 70′, laiuti 32′; mitu jalga ümberringi? (204′).

d. Maantee, mis 200′ pikk, peab puudega mõlemilt poolt teeäärt istutatud saama, kus puud 10′ ükstõisest eemal on; mitu puud on maantee juures tarwis? (42).

e. Teekäija läheb kõndides 200iast telegrahwi-sambast mööda; iga samba wahe on 15°; mitu wersta on ta käinud? ($\frac{200 \times 15}{500} = \frac{3000}{500} = 6$ wersta).

g. Linna salguulits, mis 500′ pikk on, peab laia paekiwidega prügatud saama, kellest igaüks kiwi 2′ 4″ pikk ja 1′ 10″ lai on; mitu niisugust paekiwi on selle uulitsa prügamiseks tarwis, kui kiwid pikuti, mitu, kui kiwid laiuti ükstõise kõrwa saawad pandud? ($\frac{500 . 12}{2 . 12 + 4} = 214\frac{2}{7}$ ja $\frac{500 . 12}{1 . 12 + 10} = 272\frac{8}{11}$ kiwi).

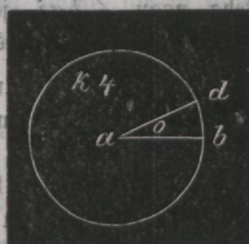
h. Aia 4 külge on 16°, 20° 6′, 12° 10′ ja 8° pikad, selle aia ümber peab piha tehtud saama, kellest igaüks jalg 7 kopikat maksma tulleb; kui palju maksab terwe piha? $(16 . 7 + 20 . 7 + 6 + 12 . 7 + 10 + 8 . 7) . 7 = (112 + 146 + 94 + 56) . 7 = 28$ rubla 56 kop.).

i. Kuu on, ümarguſe arwudega ööldud, 50,000, päike 20 miljooni penikoormat maaſt kaugel; kui pika aja ſees jõuaks auruwanker, mis tunnis 5 penikoormat edaſi lähäb, maakera päält kuu pääle — ja päikeſe pääle? ($\frac{50,000}{5 . 24} = 416\frac{2}{3}$ päävaga ja $\frac{20,000,000}{5 . 24} = 456$ aasta $226\frac{2}{3}$ pääwaga).

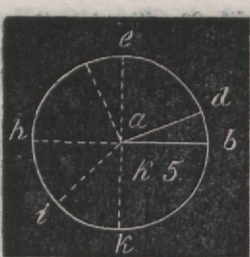
k. Kasti pikkus on 12', laius 10', kõrgus 8'; tema peab keskelt risti witsrauaga rautatud ſaama; mitu jalga witsrauda on rautamiseks tarwis? ($2 . 12 + 2 . 8 + 2 . 10 + 2 . 8 = 76'$).

5. Mõtleme taſapinna pääl ühte ſirget joont nõnda, et tema oma ühe otſapunkti ümber niikaua edaſi liigub, kunni ta oma wana koha juure jälle tuleb, ſiis on tee, mis ſee ſirge joon ära on käinud **üks ring**, eneſe ſiſſe on ſee ring ümariku ruumi piiranud, keda **ringpinnaks** (ringlagendikuks) nimetatakſe, kõwerat joont ennaſt, mis ringpinda ſiſſe piirab, hüütakſe **ringjooneks** (periferiiks). Koht, kuſt ringjoon igalt poolt ühekauguſel on, nimetatakſe **keſkpunktiks** (tſentrum). Kaugus keſkpunktiſt kunni ringjooneni hüütakſe **poolmõõtjaks** (raadius).

6. Mõtleme meie kaks ühesuguſt ſirget joont, ſiis wõime neid mõlemid nõnda arwata, et nad oma otſapunktides ükstõiſe pääle langewad ja ſiis ükstõiſe ſees ſeiſawad, ükstõiſt katawad — **ühed on**. — Mõtleme aga weel, et üks neiſt ſirgiſt joonteſt (kuju 4) ſeisma jääb, tõine aga taſaſe maa (taſapinna) pääl, oma ühe otſapunkti ümber edaſi liigub, ſiis ſünnib otſapunkti juures, kus kahe ſirge joone otſad koos on — **winkel**, winkel *o* ehk winkel *dab* ehk *bad*. See winkel ſeiſab kahe **harude** *ba* ja *da* wahel. Winkli otſa nimetatakſe **haripunktiks** (laepunktiks) (*a*).



Sirgejoonene winkel (∠) on kahe ſirge joone ſeiſu wahe, mis ühte punktiſſe kokku tulewad. Mõlemad jooned *ba* ja *da*, kes winkelt *dab* ſünnitawad, hüütakſe ∠ *dab* **haruks**. Winkli ſuuruſt ei ſünnita mitte tema harude **pikkus**, waid harude **kaugus** ükstõiſeſt. Harude lühendamine ega pikendamine ei tee winkelt ei piſemaks ega ſuuremaks. Peab üks winkel ſuuremaks ehk piſemaks ſaama, ſiis wõib ſee ükspäinis ſeeläbi ſündida, et meie tema harusid ükstõiſeſt eemale ehk koomale ſäeme, laiendame ehk kitſendame, — ülepää, harude ſeiſu muudame.



7. Olgu meil 2 sirget joont *ad* ja *ab* (kuj. 5). Laseme sirge joone *da* otsa *d* edasi liikuda, siis sünnitab tema punkti *a* ümber ühe ringi. Selle tee pääl, mis sirge joon *da* edasi liikus, sai tema ükskord sinna kohta, kus ta *ba*ga ühe sirge joone sünnitas, *ab* ja *ah* — ja kaks korda sinna kohta, kus ta *ab* ja *ah* wasto ühte wiisi seisis, *ae* ja *ak* juures.

Kui kahel sirgel joonel niisugune seis on ükstõise wastu nagu ea^1 ja ka^1 *ba* ja *ha* wastu, siis nimetatakse neid winklid loodwinkliks (L), $\angle\, eab = L$, $\angle\, hae = L$, $\angle\, kah = L$, $\angle\, kab = L$.

On winklid pisemad kui loodwinkel, siis on nad terawad winklid, $\angle\, dab$, $\angle\, gae$ j. n. e.; on nemad suuremad kui L, siis hüütakse neid tömbiks, $\angle\, bag$, $\angle\, eai$ j. n. e.

Neid kahte (lood) = L-winkelt *bae* ja *eah* kokku wõime meie üheks winkliks *bah* arwata; niisugust winklit nimetatakse sirgeks ehk madalaks winkliks. Sirget winkelt wõime meie weel suuremaks teha, nagu $\angle\, bai$, ja hüütakse teda siis küürwinkliks ehk konweks-winkliks, mis nelja loodwinkli suuruseks wõib kaswada.

Siis on meil winklid, mis
pisemad on kui $2\,L$, õõned (konkaw) $\angle$;
just $2\,L$, sirged (madalad) $\angle$;
suuremad kui $2\,L$, küür (konweks) $\angle$.

Iga õõnes $\angle$ on suurem ($>$)*) o, pisem ($<$) $2\,L$;
sirge $\angle$ on $= 2\,L$;
küür $\angle$ on $> 2\,L$, $< 4\,L$.

Õõnes $\angle$ on $\gtreqless L$, see on: õõnes winkel on üks loodwinkel, ehk üks tömp, ehk üks teraw winkel.

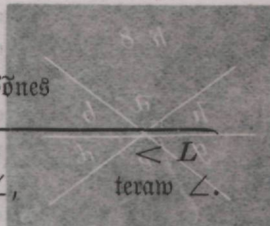
Loodwinkel on $= L$;
tömp $\angle$ on $> L$;
" " on $< 2\,L$;
teraw $\angle$ on $> o$;
" " on $< L$.

*) Märk „$>$“ tähendab „surem“; „$<$“ tähendab „pisem“

Winkel

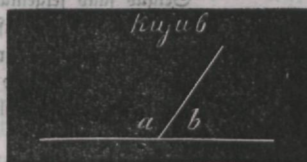
$= 2\,L$ sirge $\angle$, $\quad > 2\,L$ küür $\angle$, $\quad < 2\,L$ õõnes

$= L$ lood $\angle$, $\quad > L$ tömp $\angle$, $\quad < L$ teraw $\angle$.



Lisa. Loodwinklid ja sirged winklid ei muuda iial oma suurust, teised kõik; nii häste õõned (terawad ja tömbid), kui ka küürwinkled on muutlikud, wõiwad wahest suuremad, wahest pisemad olla.

8. Kõik winklid ühe punkti ümber kokku on 4 L, ja kõik winklid sirge joone ühe külje pääl ühes punktis on kokku 2 L; a ja b (k. 6) on kõrwalwinklid; nii palju kui $\angle b < L$ on, on $\angle a > L$. Sellest tuleb siis, et, kui meie ühte ruumi ühe punkti ümber tasapinna pääl täita tahame, meil selle tarwis 4 L, 3 tömpi $\angle$ ja köige wähem 5 terawat $\angle$ tarwis on; ja kui meie ühe kõrwalwinkli suurust tääme, siis ka teise suurust tääda saame. On $\angle b$ teraw, siis on $\angle a$ tömp; on $\angle bL$, siis on ka $\angle aL$.



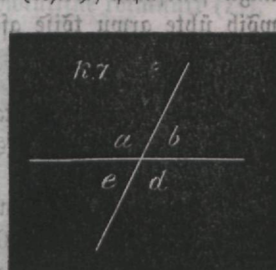
9. Langewad kaks sirget joont (kuju 7) ükstõisest läbi, siis nimetatakse neid, ükstõise harja pääl seiswaid winklid hariwinkliks, b ja e, a ja d. Hariwinklid on ühesuurused (ühed); sest:

$a + b = 2\,L$ (kõrwalwinklid)
$b + d = 2\,L$ (kui kõrwalwinklid)

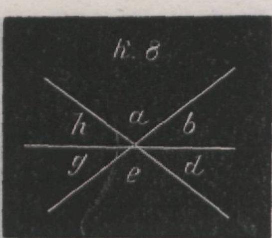
seega on $a + b = b + d$ (kui kaks suurust kolmandamagu ühed on, siis on nad ka isikeskes ühed)

$b = b$ (iga asi on oma enese suurune)

seega ka $a = d$.



Hariwinklid on alati ükstõisega ühesuurused, lõigaku nii mitu sirget joont ükstõist ühes punktis kui tahes (kuju 8).



$$\angle a = \angle e.$$

$$\text{Sest: } a + b + d = 2\,L$$
$$b + d + e = 2\,L$$
$$\text{siis on } a + b + d = b + d + e$$
$$b + d = b + d$$
$$\text{seega on } a = e. \text{ j. n. e.}$$

Tähendus. Ülewal seiswa põhjustel on kindel matematiklik tõendus. Lapsed peawad nende põhjendustele harjutatud saama. Iga mõtte juures lasku koolmeister last põhjendused öölda. Kõrwalwinklid on = 2 loodwinklid; kui 2 snurust (ka summa ehk asja) ühe kolmandamaga ühesugused on, siis on nad ka eneste keskel ühesugused; ühepalju ühepaljust ära wõtta, ehk juure arwata, jätab ühepalju järele. Selgus saab selgemaks, kui põhjendawad põhjused kokku saawad säätud. — Esmalt saab niisugune kindel matematiklik põhjendus harjumata ja raske olema; aga ärgu jätku koolmeister mitte sellest järgi! Wastused olgu wigata, selged ja lühikesed. Matematika on mõttelik tundmine (arusaamine) ja tubli keeleharjutamine.

10. Winkel *bae* (kuju 5) täidab neljandamat osa ruumi punkti *a* ümber; niisama on wibu *be* neljas osa ringjoonest. Sirgewinkel $hab = 2\,L$ saab poolest ringjoonest *beh* ümberpiiratud; nii mitmes jagu üks $\angle$ neljast loodwinklist on, nii mitmes jagu on ka wibu ringjoonest, keda tema ümberpiirab. On $\angle\, bad = \frac{1}{2}\,L$, siis on wibu $bd = \frac{1}{2}\,L, = \frac{1}{2}\,be$, on $\angle\, bag = 1\frac{3}{4}\,L$, siis on wibu *beg* $1\frac{3}{4}\,beh = \frac{7}{4}\,beh$; seega seisab 1 $\angle$ nelja loodwinkli kohta niisama, nagu sellesama winkli wibu täie ringjoone kohta. Sellesama pärast wõib ühte arwu tõise asemel wõtta, winklite arwu wibude ja wibudearwu winklite asemel.

Selle tarwis jautatakse ringjoon 360^{mne} ühesuuruse jagudesse, ehk 360^{mne} graadidesse. Üks graad on seega siis 360^{mnes} osa ringjoonest.

Loodwinkel saab ringjoone neljandamast osast piiratud; sellepärast öeldakse, tema on = 90 graadi (= 90°). — Sõna graad tähendab siis nii häste 90^{mnest} osa ringjoone neljandamast jaust, kui ka 90^{mnest} osa loodwinklist. Mitu graadi winklil on, setu graadi on ka wiul, mis seda winkelt sisse piirab.

Järgmises näituses saab asi kohe selgeks:

terav ∠ on > 0°
" " " < 90°
tömp ∠ on > 90°
" " " < 180°
sirge ∠ on = 180°
küür ∠ on > 180°
" " " < 360°

Sel kombel saab winklite suurus graadide järele arwatud. Graadid annawad winklite arwu loodwinkli kohta kätte; loodwinkel on, et temal alati ühesugune suurus on, tõiste winklite mõõt (mõõtja). Kõik loodwinklid on ühesuurused, niisama ka kõik sirged winklid; aga ei mitte õõned ja küürwinklid.

Iga graadi, nii häste winkli- kui wiugraadi jautatakse 60[mne] ühesuuruste jagudesse (minutitesse), wiu- ja winkliminutit 60[mne] sekundidesse, ja märgitakse neid °, ′, ″, nõnda, et 24° 36′ 48″ loetakse: 24 graadi, 36 minutit, 48 sekundi.

Tähendus. Süldi, jalgu, tolla tähendatakse just nende sama märkidega, nagu eespool juba nägime. Asi ise näitab, kas räägitakse graadidest, minutitest, sekundidest, wõi süldadest, jalgadest, tollidest. Et aga minutid ja sekundid ka ajajagusid tähendawad, siis öeldakse ka, kui muidu segadust arwatakse tulewad, aja- ja wibu- ehk winkli-minutid j. n. e.

11. Puumeistrite j. n. e. igapäine ja asjaline winklimõõt on kaheharuga puust ehk rauast walmistatud winkel, mille sääred (harud) ükstõise pääl loodis on. Puu- ja müürisepad pruugiwad teda iseäranes oma toimetuste juures, kus nad loodwinklid tarwitawad. Ka on puuseppadel pisukene puust walmistatud loodwinkline kolmnurk (△), kelle terawad winklid $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ ∟ on.

Winklimõõt, kellega winkelt paberi pääle märgitakse, hüütakse mallikS (päälekandjaks ehk transportööriks), mis enamiste wasest walmistatud on*). Eessei-

*) Kes selgemat aru mallist saada tahab, muretsegu teda enesele.

saw kuju (kuju 9) näitab teda. Ühe pisukese joonlaua pääl seisawad mitu (siin 4) poolringi. Poolringid on jagudeks (graadideks) jautatud. Jagamise kriipsude tõised otsad on kõik poolringi keskpunkti poole säätud. —

Tahetakse nüüd malli (transportööri) abiga ühte winkelt, mis paberi pääl on, mõõta, siis pannakse malli nõnda paberi pääle, et tema keskpaik *a* just winkli nurga otsa seisma tuleb, malli joonlaua*) ülemine äär winkli alumise haru pääle langeb; siis näitab winkli tõine (päälmine) haru malli wiu pääl graadide arwu. — Kerge on aru saada, et malli abiga kõiki winklid paberi pääl wõib mõõta — ja ka paberi pääle märkida.

12. Tahetakse katsuda, kas jooned ja pinnad (lagendikud) kaalus (weepinnalised) on, ehk tahetakse neid kaalu panna, siis sünnib see loodlaua ja waaderbassi läbi. Loodlaud on üks kahejala pikkune lauakene, kelle ülewal otsas keskpaigas üks lood nööri otsas ripub. Säätakse nüüd loodlaud ühe joone pääle, ja langeb loodnöör otsekohe joone sisse, mis lauakese pääl on, siis on alumine joon, kelle pääl loodlaud seisis, kaalus, ehk weepinnas. Pinna pääl säätakse loodlaud mitmet pidi, sest et pind küll ühtepidi kaalus wõib olla, aga ei mitte tõistpidi; sellepärast katsutakse pinda mitmetpidi. Waaderbass on kolmnurk, kelle ülewal otsas niisama üks loodnöör ripub. — Temast siin pikemalt rääkida, ei tee ometigi asja üsna selgeks. Igal puumeistril on need riistad; kes neid tundma tahab õppida, küsigu säält**).

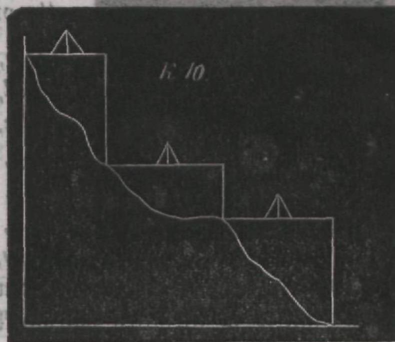
Tähendus. Koolilapsed lõikawad paksust paberist ümargused rattad (ringid), jautawad neid kahe sirge joone läbi keskpunktist nelja ühesuuruse jausse, jautawad nüüd, ühest joone otsapunktist pääle hakates terwe ringjoone kümnegraadilise jagudesse, nõnda, et iga ringjoone neljandama jau pääle 9 jagu, ehk 90°, kõige nelja jau pääle 4 × 9 jagu = 36 jagu = 360° tuleb, tõmbawad tindiga iga jau juure keskpunktist sirge joone. Nüüd pistab koolmeister ratta keskpunktist traadi läbi, pöörab traadi otsa kõweraks, mis graadisid ringi pääl näitab ja laseb lapsi näidata: kõiki sugu winklid, kõige pisemid, kõige suuremid, terawat ja tömpi, sirgid ja loodwinklid, graadisid nimetada, kui suur keegi näidatud

---

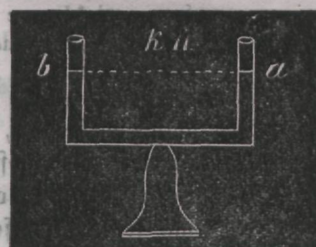
*) Malli alumist õiget lauakest nimetame meie malli joonlauaks, tema päälmist kõwerat jagu wiuks.

**) Igal koolmeistril olgu need riistad, ja tehku neid ja nende pruukimist lapsele tutwaks!

winkel on j. n. e. — Niisugune õpetus harib, kosutab ja teritab laste silma, mõtlemist ja mõistust. Koolmeistri küsimised olgu selged ja elawad ja laste wastused täielikud ja weata.



Lisa 1. Sagedaste tuleb ette, et koha (punkti) kõrgust tääda tahetakse saada. Niisugune mõõtmine sünnib, nagu kuju 10 näitab, sell kombel: Wõetakse sirged latid ja pannakse neid waaderbassiga (loodlauaga) kaalu. Lati otsade alla pannakse teiwas loodi püsti. Arwame meie nüüd kõikide loodis seiswa teiwaste pikkust kokku, siis tääme, kui palju päälmine punkt kõrgem on alumisest punktist. Seda tööd nimetatakse weeloodimiseks ehk niweliirimiseks; see töö tuleb raudtee mõõtmises, heinamaa- ja põllu-kraawi-lõikamises, kus heinamaad ja põldu kuiwaks teha tahetakse — ette. Tuleb niisugune mõõtmine sagedamine käsile, siis pruugitakse selle tarwis tõist riista, keda kanaalkaaluks ehk weekaaluks nimetatakse. See on üks õõnes, kahe loodis seiswa harudega klaastoru, kelle sees wesi on ja ühe jala pääl püsti seisab (kuju 11).



Et nüüd wesi mõlemate torude sees, mis alumise kaalus seiswa toru läbi ühendatud saab, ühe kõrgusel seisab, siis pruugitakse aga ühe toru sees seiswa weepinna *a* päält tõise toru sees seiswa weepinna *b* pääle sihtida ja saadakse seega kaalus seisaw sirge joon *a b* kätte.

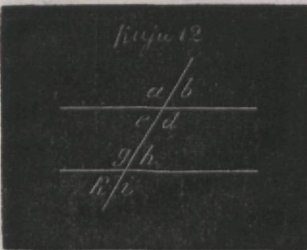
Niisuguse weekaalu läbi wõime leida, kui palju üks koht tõisest kõrgem wõi madalam on. Seda riista tarwitawad weeloodijad.

Lisa 2. Mitu graadi on winklid suured, mis tunnikella tseigerid mõlemad kell 1, 2, 3, 4, 5, 6 j. n. e. ükstõisega näitawad? Mitu wiuminutid käib kella suur tseiger wiies, ühes j. n. e. ajaminutis? ($1^{\circ} = 60$ wiuminutid).

Wiies ajaminutis läheb suur tseiger 12mne juurest ühe junre, käib selle aja sees $\frac{90^{\circ}}{3} = 30^{\circ}$ läbi $= 30 . 60 = 1800$ wiuminutit, seega siis ühes ajaminutis $\frac{1800}{5} = 360$ wiuminutit $= \frac{360}{60} = 6^{\circ}$.

13. 2 sirget joont wõiwad ühe tasapinna pääl nõnda seista, et nemad alati ühekaugusel ükstõisest on, ei ligemale, ega kaugemale ükstõisest ei lähe, kui meie neid ka otsata pikaks tõmbaksime. Niisugused jooned hüütakse kõrwujooned ehk paralleljooned.

Saawad 2 kõrwujoont ühest kolmandamast joonest läbilõigatud, siis sünniwad mitmed moodi winklid, kellel igaühel oma isesugused nimed on (kuju 12), kellest juba mõned ette on tulnud.



a ja b, a ja e 2c. on kõrwalwinklid;
a ja d, b ja e „ hariwinklid;
a ja k, b ja i „ wälimised wastaswinkl.
e ja g, d ja h „ sisemised wastaswinklid
a ja i, b ja k „ wälimised põikwinklid;
e ja h, d ja g „ sisemised põikwinklid;
a ja g, b ja h, k ja e, i ja d on wälimised ja sisemised wastaswinklid (rindwinklid); a ja h, b ja g, k ja d, i ja e on wälimised ja sisemised põikwinklid.

Tähendus. Õppijad peawad nende nimedega kuju kallal tutwaks tehtud saama. Kergituseks olgu see, et need 4 winklet, mis kõrwujoonte wahel on sisemised ja tõised wälimised on. Nüüd hakkab küsimine. Missugune winkel on a hariwinkel? Missugused on tema kõrwalwinklid? Missugune on tema sisemine wastaswinkel? tema wälimine põikwinkel? j. n. e.

Seda tääme meie juba, et $a = d$, $b = e$, $h = k$ $g = i$ on, kui hariwinkli paarid; siis täädsime ka, et a ja $b = 2$ loodwinklit, $b + d = 2\,L$, kui kõrwalwinklid on. Pääle selle on iseenesest selge, et kõrwujooned oma seisu ükstõise wastu ei muuda, nende seis ükstõise wastu üheks jääb, kui ka üks kolmas joon neist läbilangeb; sellepärast on siis ka $a = g$, $b = h$, $k = e$, $i = d$; see on:

a) wälimised ja sisemised wastaswinklid on ühed (ühesuurused).

$d + h = 2\,L$; $e + g = 2\,L$;
sest $b = h$ (wastaswinklid)
$d = d$ (iga asi on oma enese suurune)

siis on $b + d = h + d$ (ühepalju ühepalju juure)
$b + d = 2\,L$ (kõrwalwinklid)
seega $h + d = 2\,L$; see on:

b) sisemised wastaswinklid kokku on $= 2\,L$.

Niisama on $a + k = 2\,L$; $b + i = 2\,L$;

$$\begin{aligned} \text{sest: } a &= g \\ k &= k \\ \hline a + k &= g + k \\ g + k &= 2\,L. \\ \hline a + k &= 2\,L; \text{ see on:} \end{aligned}$$

d) wälimised wastaswinklid kokku $= 2\,L$.

Sedasama wiisi on $e = h$, $d = g$;

$$\begin{aligned} \text{sest: } e + g &= 2\,L. \\ h + g &= 2\,L. \\ \hline e + g &= h + g \\ g &= g \\ \hline e &= h; \text{ see on:} \end{aligned}$$

e) sisemised põikwinklid on ühed.

Selsamal kombel on $a = i$, $b = k$;

$$\begin{aligned} \text{sest: } a &= g \\ g &= i \\ \hline a + g &= g + i \\ g &= g \\ \hline a &= i; \text{ see on:} \end{aligned}$$

g) wälimised põikwinklid on ühed.

Nõnda on $a + h = 2\,L$, $b + g = 2\,L$, $i + e = 2\,L$, $k + d = 2\,L$;

$$\begin{aligned} \text{sest: } a &= g \\ h &= h \\ \hline a + h &= g + h \\ g + h &= 2\,L. \\ \hline a + h &= 2\,L; \text{ see on:} \end{aligned}$$

h) wälimised ja sisemised põikwinklid on kokku $= 2\,L$.

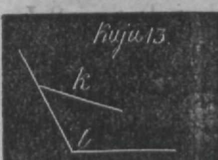
Lisa. Sellest, et kaks kõrwujoont kolmandamast läbilõigatud saiwad, saime meie 6 õpetust, mis meie ülewal põhjendasime ja siin uueste weel kokku wõtame:

a) $a = g$; see on: wälimised ja sisemised wastaswinklid on ühed;
b) $h + d = 2 L$; see on: sisemised wastaswinklid kokku $= 2 L$;
d) $a + k = 2 L$; see on: wälimised wastaswinklid kokku $= 2 L$;
e) $e = h$; see on: sisemised põikwinklid on ühed;
g) $a = i$; see on: wälimised põikwinklid on ühed;
h) $a + h = 2 L$; see on: wälimised ja sisemised põikwinklid kokku on $= 2 L$.

14. Pöörame need õpetustükid ümber, siis on nad ka õiged. Ümber pöörma oleks: tingimist saagiks, saaki tingimiseks tegema. Ümberpöördud oleksiwad ülemised tükid nõnda: kui 2 sirget joont kolmandamast läbilõigatud saawad ja

a) wälimised ja sisemised wastaswinklid ($a + g$, $b + h$ j. n. e.) ühed on, siis on sirged jooned kõrwujooned — kõrwulised (#); seesama kestab ka
b) kui sisemiste wastaswinklite ($e + g$, $d + h$), ehk wälimiste wastaswinklite ($a + k$, $b + i$) summa $= 2 L$ on; ehk
d) kui sisemised ja wälimised põikwinklid ($e = h$, $d = g$, $a = i$, $b = k$) ühed on, siis on sirged jooned kõrwulised (#).

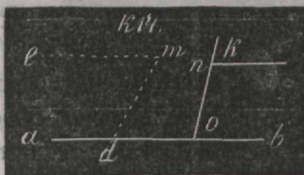
Tähendus. Harjumatadele on tüki ümberpöörmine eestotsa wõeras ja raske; koolmeister harjutagu õppijaid ja tehku asja eeskujude najal selgeks, nagu: kui a on, siis on b; ümberpöördud: kui b on, siis on a. Ehk: kui Mats rumal on, siis kirjutab ta sandid tähed; ümberpöördud: kui Mats sandid tähed kirjutab, siis on ta rumal.



15. Kui üks, teine ehk kolmas mitte ei ole, siis ei ole jooned ka mitte #. Kui k (kuju 13) suurem on kui l, siis lõikawad sirged jooned ükstõist paremal poolel, kui neid pikendatakse ja lähwad pahemal poolel ükstõisest hoopis kaugemale.

16. Järgmistest tükkidest (kuju 14) on selgest näha, kuida sirgid joona tõmmatakse, mis kõrwulised on.

Peame meie punkt m juurest sirge joone ab-sa kõrwujoone tõmdama, siis ühendame meie punkt m ühe (priitahtlikult wõetud) punktiga sirge joone ab sees sirge joone md läbi ja paneme dm külge $\angle dme = \angle mdb$ *), siis on sirge joon em $\#$ sirge joone ab ga. Ehk meie tõmbame punkt n läbi sirge joone ab juure (pääle) ja teeme $\angle k = \angle o$. — Asjalikult sünnib see kolmenurgelise joonlaua abiga, mille üks külg sirge joone pääle pannakse ja tõist külge mööda põikjoon tõmmatakse. Kui põik-joon tõmmatud on, siis nihutatakse kolmenurgeline joonlaud sedasama joont mööda edasi ja tõmmatakse sedasama külge mööda tõine põik-joon, siis on mõlemad põikjooned üks-tõisega $\#$.



Puusepad tõmbawad laudade pääle **reismaakrega** kõrwujoona.

Kasulikud harjutused.

Riistadega harjutamine on koguni kasulik. Silm ja käsi saawad kindlaks Joonitamised peawad täielikud, selged, puhtad ja nägusad olema.

1. Loodwinklid peawad walmistatud saama:
   a. winklikolmnurgaga;
   b. poolringi najal;
   d. malli abiga;
   e. loodwinkliga;
   g. sirge joone keskpaika ja otsa punktidesse.
2. Winklid peawad joonitatud saama, mis 30°, 45°, 60° suured on:
   a. malli abiga;
   b. sirkliga.
3. Winklid peawad jautatud saama:
   a. kahte, nelja, kaheksasse jakku;
   b. kolme, wiide, kuude jakku.
4. Kõrwujooned peawad tõmmatud saama:
   a. kõrwulise joonlauaga;
   b. winklikolmnurgaga;
   d. reismaakriga.
5. Sirged jooned peawad jautatud saama:
   a. kahte, nelja, kaheksasse jakku;
   b. kolme, wiide, 7me ühesuurusesse jakku j. n. e.

*) Siin saab alles winkli-mõõdu-, malli- j. n. e. abiga käsikaudu toimetatud, pärast geometrikul kombel — sirkliga.

Neljas päätükk.

Kolmnurgad.

Igaüks pind, mis joontest sissepiiratud on, hüütakse kujuks ehk wiguriks. On pind kõwer, siis hüütakse kuju kõwerapinnaliseks, on ta ühetasane, siis tasapinnaliseks ehk sirgepinnaliseks kujuks. Meil on siin tasapinnaliste kujudega tegemist. On tasapinnad sirgest joontest sissepiiratud, siis on nad sirgejoonelised kujud, on nad kõwaratest joontest ehk segajoontest *) rajatud, siis hüütakse neid kõwera- ehk sega-jooneliseks kujudeks. Ring on kõwerajooneline, tasapinnaline kuju. Jooned, mis kujusid sisse piirawad, hüütakse kuju külgedeks. Piirawad 3 joont ühte kuju, siis nimetakse seda kuju kolmnurgaks (trianglikš), piirawad 4 joont, siis hüütakse teda nelinurgaks j. n. e. Ühte kuju, kellel enam külga on, kui 4, nimetatakse paljunurgaks. Siin tahame sirgejoonilisi, tasapinnalisi kolmnurke tähele panna.

1. Kolmnurk (△) on üks kuju, kellel 3 külge, 3 winkelt (∠) ja nende kolme külje wahel seisaw ühetasane, kolmenurgeline pind (tasapind) on.

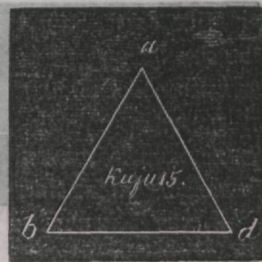
2. Iga kahe külje wahel seisab 1 ∠, iga külje wastu on 1 ∠, iga winkli wastu seisab 1 külg.

3. Küljed on, kas kõik ühepikkused, ehk aga 2 ühepikkused, ehk ei sugugi ühepikkused. On küljed kõik ühepikkused, siis nimetatakse kolmnurka ühesuguse külgedega kolmnurgaks; on aga paljalt 2 külge ühepikkused, siis nimetatakse teda ühesuguse harudega kolmnurgaks; on iga külg isepikkune, siis on ta mitmesuguse külgedega kolmnurk. — Ühesuguse harudega kolmnurga kolmat külge, mis mitte tõiste kahe külgede suurune ei ole, hüütakse põhjusjooneks (baasis), seisku tema all, ülewal ehk külje pääl. Iga muu kolmnurga juures wõib üks külg (olgu missugune külg tahes) põhjusjooneks wõetud saada (arwata). Loodjoon (perpendikel), põhjusjoone wastu seiswast punktist põhjusjoone pääle lastud, annab kolmnurga kõrgust täädа.

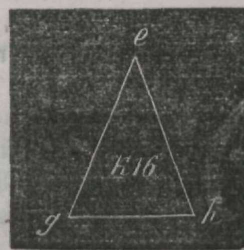
---

*) Segajooned on niisugused jooned, kes kõwaratest ja sirgetest joontest kokku on pandud.

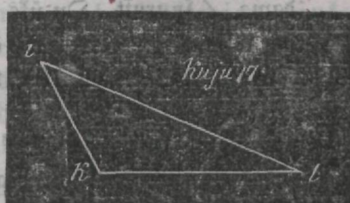
4. Kui kolmnurgal abd^1 (kuju 15) kõik kolm külge ühesugused (ühed) on, siis on ka tema 3 ∠ ühed (ühesuurused); see on silmaga nähä ja meil ei ole põhjusid, et see nõnda ei oleks. On kolmnurga winklid kõik ühed, siis on ka tema küljed ühed: ta on ühesuguse külgedega △.



Kui kolmnurga *egh* (kuju 16) külg *eg* = *eh* on, siis on ka ∠ *egh* = ∠ *ehg*; see on: ühesuguse harudega kolmnurgal on winklid põhjusjoone küljes ühed ja ümberpöördud: kui ∠ *egh* = ∠ *ehg* on, sis on ka mõlemad küljed, mis põhjusjoone pääl seiswad, ühed.



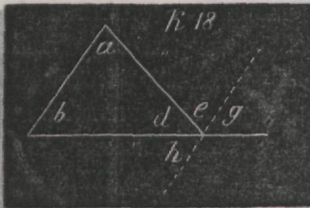
Mitmesuguse külgedega kolmnurga *ikl* (kuju 17) küljed on kõik isesugused, seepärast on ka kõik winklid isesugused, ja nagu silmaga nähä, seisab kõige suurema külje *il* wastu kõige suurem ∠ *ikl*, keskmise külje *kl* wastu keskmine ∠ *lik*, ja kõige pisema külje *ki* wastu kõige pisem ∠ *ilk*; niisama ka ümberpöördud seisab kõige suurema winkli wastu kõige suurem külg ja kõige pisema winkli wastu kõige pisem külg.



5. Igas (sirgejoonelises) kolmnurgas on 2 külge kokku (kahe külje summa) suuremad, kui kolmas külg (üksi); *ik* + *kl* (kuju 17) suurem kui *il* (*i* juurest *l* juure *k* kaudu on pikem tee).

6. Wõtame nüüd kõigi winklite summa kolmnurgas kokku ja waatame neid!

Olgu meil △ *abd* (kuju 18). Meie pikendame kolmnurga ühte külge *bd*, ja tõmbame tema otsapunkti *d* läbi kõrwusjoone *ab*ga-
Nüüd on



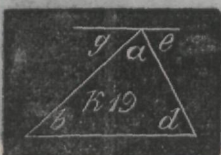
$g = b$ (wälimised ja sisemised wastaswinklid)
$e = a$ (sisemised põikwinkl.)
$d = d$ (iga asi on oma enese suurune)

*) ─────────────
$g + e + d = b + a + d$ (summa)
$g + e + d = 2\,L$ (winklid sirge joone ühel küljel)

─────────────
$b + a + d = 2\,L$; see on:

sirgejoonilise kolmnurga winklite summa on 2 loodwinkelt.

Ehk (kuju 19): $\angle e = \angle d$



$$\angle g = \angle b$$
$$\angle a = \angle a$$
$$\overline{\angle e + \angle g + \angle a = \angle d + \angle b + \angle a}$$
$$\angle e + \angle g + \angle a = 2\,L$$
$$\overline{\angle d + \angle b + \angle a = 2\,L.}$$

7. Ülemisest (№ 6 all) õpetustükist wõime palju otsusid saada.

I. Tääme meie kolmnurga kahe $\angle$ suurust, siis tääme ka kolmandama $\angle$ suurust. On üks $\angle = \frac{3}{4} L$, tõine $\angle = \frac{4}{5} L$, siis on kolmas $\angle = \frac{9}{20} L$, ehk $2 - (\frac{3}{4} + \frac{4}{5})\,L$.
Ehk: Üks $\angle$ on 70°, tõine $\angle$ on 80°, siis on kolmas $\angle = 180° - 150° = 30°$.

II. Ühesuguse külgedega $\triangle$sas on iga $\angle = \frac{2}{3} L = 60°$.

III. Täätakse ühesuguseharudega kolmnurgas ühe $\angle$ suurust, siis täätakse ka kõikide suurust. On tutaw $\angle$ põhjusjoone wastu (ülewal otsas), siis wõtame tema suurust kahe loodwinkli suurusest (ehk: 180nest graadist) ära ja jautame ülejäädawat arwu kahte jakku, siis on meil põhjusjoone küljes seiswa winklite suurus tääda. On täätaw $\angle$ põhjusjoone küljes; siis wõtame tõist nii palju weel kahest loodwinklist ära, siis on ülejäädaw arw kolmandama (põhjusjoone wastu seiswa), winkli suurus.

*) Üks põikjoon tähendab ühte otsust, et see mis allpool joont on, sellest on saadud mis päälpool joont seisab. Suusõnaga saab tema „seega" ehk „siis on" öõldud; Ladina keeles sõnaga: ergo.

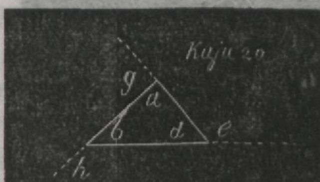
IV. Ühes kolmnurgas wõib aga üks $\angle$ loodwinkel olla; teised kaks peawad siis terawad olema. Niisugust kolmnurka hüütakse loodwinkline $\triangle$.

V. Ühes kolmnurgas wõib aga üks tömp $\angle$ seista; teised mõlemad on siis terawad. Niisugune $\triangle$ on siis tömpwinkline $\triangle$.

VI. Kolmnurga 3 winkelt wõiwad, et nemad kõik kokku 2 loodwinkelt teewad, kõik terawad olla. Niisugune $\triangle$ on siis terawwinkline $\triangle$. Igas kolmnurgas peawad siis alati kõige wähem kaks terawat winkelt olema; kolmas wõib tömp-, lood-, ehk terawwinkel olla.

VII. Ühesuguse külgedega $\triangle$ on alati terawinkline; ühesuguse harudega $\triangle$ wõib tömp-, lood- ja terawwinkline olla. Winklid, mis ühesuguse harudega kolmnurga põhjusjoone küljes on, on alati terawad; otsawinkel üksi wõib otsust anda, kas ühesuguse-harudega $\triangle$ teraw-, lood- wõi tömpwinkline on. Mitmesuguse külgedega $\triangle$ wõib iga moodi olla. Loodwinkline ja tömpwinkline $\triangle$ wõib ühesuguse harudega ja mitmesuguse külgedega olla; terawwinkline $\triangle$ wõib ühesuguse külgedega ehk ühesuguse harudega ehk mitmesuguse külgedega olla.

8. Nummer 6[e] all (kuju 18) oli $g = b$, $e = a$, seega $g + e = b + a$. $g + e$ on kolmnurga abd wälimine winkel, mis kolmnurga ühe külje pikendamise läbi sünnib. Wälimine winkel on siis niisama suur, nagu kolmnurga need 2 sisemist winkelt, kellest kumbki wälimise $\angle$ kõrwal ei seisa — tema kõrwalwinkel ei ole. $(g + e = a + b)$.



Pikendame nüüd $\triangle$[sa] iga külge (kuju 20), siis on:

$$\begin{aligned} e &= a+b \\ g &= d+b \\ h &= a+d \\ \hline e+g+h &= a+b+d+b+a+d \\ &= 2a+2b+2d \\ &= 2.(a+b+d) \\ &= 2.2L = 4L; \end{aligned}$$

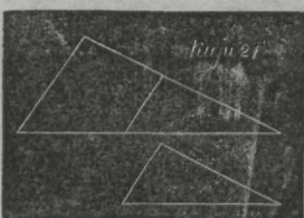
$$\text{ehk:}\quad \begin{aligned} h+b &= 2\,L \\ g+a &= 2\,L \\ e+d &= 2\,L \\ \hline h+b+g+a+e+d &= 6\,L \\ b+a+d &= 2\,L \\ \hline h+g+e &= 4\,L; \end{aligned}$$

see on:

kõige kolme wälimiste winklite summa ühe kolmnurga juures annab = 4 L.

Tähendus. Palju neist winklitest, joontest ja kujudest, mis siin kriipsude najal oleme toimetanud ja põhjendanud, wõiwad ka pisukese, peenikese puupulgakestega laste silma ette säätud saada. Lapsed lõigaku omale mitme pikkused, aga ühe paksused pulgakesed ja säädku neid koolmeistri käsu pääle niisugusteks kujuks, nagu kästakse, — kas terawaks-, lood-ehk tömpwinkliks, — kas ühesugusekülgedega-, ühesugusehaarudega-, mitmesugusekülgedega-kolmnurgaks j. n. e. Pööratakse pulke nõnda, et nad ühe otsaga tõise, paigalseiswa otsapunkti ümber pooltringi ehk ringi sünnitawad, siis astuwad endised põhjendused ja õpetustükid uuesti lapse waimu silma ette, aga jälle tõisel kombel. Niisugused muutmised on kasulikud, sest et nad lapsi ühe asja mitmekombelise tegewusele harjutawad.

9. Tõmbame meie kolmnurga sisse ühe sirge joone (kuju 21), mis kolmnurga ühe küljega kõrwuline (parallel) on, siis on pisukesel kolmnurgal, suure kolmnurga sees, niisamasugused winklid kui suurel. Winklid annawad kolmnurkadele nende nägu (wormi) ehk kuju. Neil mõlemil kolmnurkadel on ühesugused $\angle\angle$, seepärast on neil ka ühesugune nägu. Ühesuguse näulised kujud nimetatakse ühenäulisteks kujudeks. Kolmnurgad on ühenäulised ükstõisega.

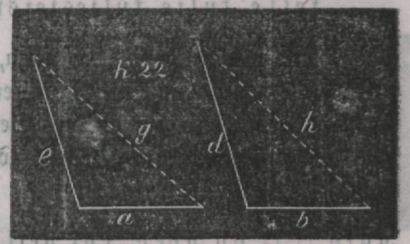


10. Ilma suure tähelepanemiseta wõib aru saada, et 2 $\triangle\triangle$ ühesuuruse ruumilised wõiwad olla, ilma, et nad ühenäulised on. Niisugustest öldakse siis: neil on ühesugune suurus, nad on ühepinnalised.

11. Nüüd wõiwad aga 2 $\triangle\triangle$ ühes ühenäulised ja ühepinnalised

olla, nii, et üks △ igas tükis just niisugune on kui teine △, ja kõige oma üksiku jagudega, teise pääle pandud, teist üsna katab ja siis üks △ on. Niisugust ühte olemist nimetatakse üheks ehk katmiseks (kongruenziks). Nende sõnadega tähendatakse näu ja pinna ja ruumi ühesugust suurust. Kui kolmnurgad ükstõisega ühed on, siis on nende 3 küljepaari nii häste, kui ka nende 3 winklipaari ükshaawal ühesugused. Niisama on ka nende pinnad ühed ja langewad ükstõise pääle, kui neid ükstõise pääle lükatakse, ehk lükatud arwatakse.

12. Wõtame ometigi 2 ühesugust sirget joont a ja b (kuju 22), paneme nende kumbki ühe otsapunkti külge ühesuurused ∠∠ ja teeme nende winklite harud e ja d ühesuguseks, siis on harude e ja d otsapunktide seis seeläbi ka määratud. Need otsapunktid määrawad kolmandama küljepaari g ja h suurust ja seisu, ning sellega ka kõiki winklid. Neil kahel kolmnurgal on kõik üksikud tükid üks haawal ühed; neid wõib üsna

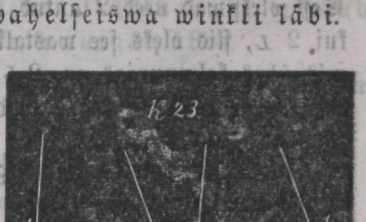


kokku-langewad mõelda, b a pääle, d e pääle j. n. e., nad katawad ükstõist, nad on ühepinnalised ja ühenäulised (≅); ühesuguste küljepaaride a ja b, e ja d wastu seisawad ühesugused winklipaarid ja ühesuguse winklipaari wastu seisaw küljepaar g ja h on üks.

Kolmnurkade esimine õpetustükk on siis:

Kaks kolmnurka on ühed, kui 2 küljepaari (üks haawal wõetud) ja nende kahe küljepaaride wahelseisaw winklipaar ühed on; ehk: kolmnurga nägu ja suurus saab määratud kahe külje ja nende külgede wahelseiswa winkli läbi.

13. Olgu (kuju 23) sirge joon $a = b$, $\angle d = \angle g$, $\angle e = \angle h$, see on: üks küljepaar ja selle küljepaari küljesseiswad winklipaarid olgu ühed, siis on kolmas winklipunkt neil mõlemil kolmnurkadel selsamal kombel määratud ($d + e$ ei tohi aga mitte



suuremad olla kui 2 loodwinkelt). Need 2, sel kombel walmistatud △△ langewad ükstõise sisse, kui neid ükstõise pääle lükatakse (*a* langeb *b* pääle, ∠ *d* langeb ∠ *g* pääle j. n. e.), kõik üksikud jaud katawad endid, need kolmnurgad on ≅. Jälle on see winklipaar, mis küljepaari *a* ja *b* wastu seisab, ja need küljepaarid, mis winklipaaride *d* ja *g*, *e* ja *h* wastu seisawad ühed.

Kolmnurkade teine katte-õpetus on:

Kaks △△ on ühed, kui neil üks küljepaar ja mõlemad, selle küljepaari küljesseiswad winklipaarid ühed on; ehk: kolmnurga nägu ja suurus saab määratud ühe külje, ja selle külje küljesseiswa mõlemi winkli läbi.

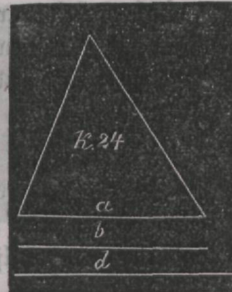
Lisa. Seda wõib pea näha, et lugu seesama on, kui kolmnurga üks külg, ja üks selle külje küljes-seisaw, ning teine, selle külje wastuseisaw winkel määratud on. Sest siis on ka teine selle külje küljesseisaw winkel määratud. Seda teist õpetustükki wõib siis ka nõnda öölda:

Kaks △△ on ühed, kui neil üks küljepaar ja 2 kohastiku seiswat winklipaari ühed on.

Nende mõlemite õpetustükkide järele: kui 2 külge ja nende kahe külje wahelseisaw winkel, — ja kui 1 külg ja 2 selle küljesseiswad (ehk üks selle küljesseisaw ja teine selle külje wastuseisaw winkel) winklid määratud ehk antud on, wõib aga ühte kolmnurka walmistada, kellel samad tükid on; walmistatakse neid mitu, siis on nad kõik ühed. Kahe antud winkli suurus ei wõi aga ka mitte igasugune olla; antud kahe winkli suurus kokku peab pisem olema kui 2 *L*. Sest oleksiwad need 2 antud ∠∠ = 2 *L*, ehk koguni suuremad kui 2 *L*, siis oleks see wastaline mõte, sest et kõik 3 winkelt kokku, mis ühes kolmnurgas on, 2 *L* on, ning seepärast 2 ∠∠ kokku pisemad peawad olema kui 2 loodwinkelt.

14. Olgu meil kolme sirge joone *a*, *b*, *d* (kuju 24) pikkus määratud, ometigi nõnda, et kahe joone pikkus kokku suurem on, kui kolmandama. Tõmbame meie nüüd joone *a* ühest otsapunktist joone *b* pikuse sirkle harude wahega ühe ringwibu ja joone *a* teisest otsast

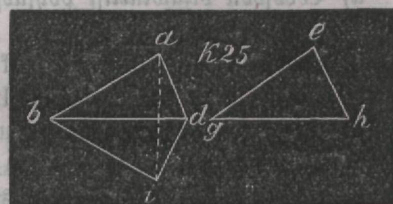
(otsapunktist) joone *d* pikkuse sirkli harude wahega tõise ringwibu, siis langewad need 2 ringwibu ükstõisest, ühes punktis läbi ja määrawad seega kahe tõise külgede (*b* ja *d*) pikkust külje *a* üle walmistatawas kolmnurgas, kelle kõik tükid — nägu ja suurus — selle läbi määratud on:



Kolmnurga nägu ja suurus saab määratud, tema kolme külje suuruse läbi.

Et see kolmas õpetustükk kolmnurkadest õige on, on kerge põhjendada:

Olgu neil kahel kolmnurgal *abd* ja *egh* (kuju 25) ühte moodi seiswad küljepaarid *bd* ja *gh*, *ba* ja *ge*, *da* ja *he* üks haawal ühed. Wõiksime meie seda näidata, et neis kahes kolmnurgas üks winklipaar ühesuurus on,



siis oleksiwad need kaks kolmnurka ühed, esimise õpetustüki (№ 12, k. 22) järele. Katsume seda teha! Lükkame *gh* *bd* pääle nõnda, et punkt *g* punkti *b* pääle langeb. Mõtleme nüüd, et kolmnurk *egh* sinna seisma tuleb kus *ibd* on ja tõmbame *ia*; siis on *abi* ühesuguse haruline △ ja niisama ka *adi*, mõlemad põhjusjoone *ai* pääl; seega on winklid põhjusjoone pääl ühed, seega ka täis ∠ *a* (*bad*) niisama suur kui täis ∠ *i* (*bid*), kui ∠ *e*.

Seega on kolmas katte-õpetus siis:

Kui kahe kolmnurga kolm küljepaari ükshaawal wõetud ühed on, siis on ka kolmnurgad ühed.

Jälle on winklipaarid ühed, kes ühepikkuste küljepaaride wastu seisawad.

Selle järgi saab siis kolmnurga nägu ja suurus määratud:

a) kahe külje ja nende külgede wahelseiswa winkli läbi;

b) ühe külje ja tema küljesseiswa kahe winkli läbi;

d) kolme külje läbi.

Ehk, 2 kolmnurka on ühed, kui neil ühed on:

a) 2 külge ja nende wahelseisaw winkel;

b) 1 külg ja 2 ühesseiswad winklid;

d) 3 külge.

Et kolmnurgad ülemiste tingimiste all ühed on, siis on ka kõik teised tükid $\triangle^{ga}$ sees ja küljes ühed: ühesuguste küljepaaride wastu seisawad ühesugused winklipaarid, ühesuguste winklipaaride wastu seisawad ühesugused küljepaarid. Täätakse ühte, siis arwatakse sellest teist.

15. Et ühesuguste harudega kolmnurgas all seiswad õpetused õiged on, wõib kolmnurkade sündimisest näha.

a) Loodjoon otsawinklist põhjusjoone pääle lastud, langeb põhjusjoone keskpaika.

b) Loodjoon põhjusjoone keskpaika säätud, läheb läbi kolmnurga otsawinkli ja poolitab otsawinkelt.

d) Sirge joon otsast põhjusjoone keskpaika tõmmatud, seisab loodis põhjusjoone pääl ja poolitab otsawinkelt.

e) Loodjoon otsawinklist põhjusjoone pääle lastud, seisab põhjusjoone keskpaigas loodis ja jagab otsawinkelt kahte ühesuurusesse jakku.

g) Sirge joon, kes otsawinkelt poolitab, poolitab ka põhjusjoont ja seisab põhjusjoone pääl loodis.

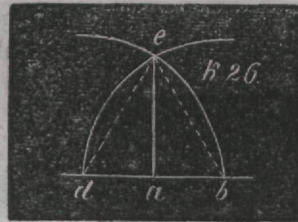
16. Korraline (reguläär) kuju on niisugune kuju, kelle küljed ja winklid ühed on. — Seega on iga ühesuguse külgedega kolmnurk korraline $\triangle$.

17. a) Loodwinklises kolmnurgas hüütakse seda külge, mis loodwinkli wastu seisab hüpotenuseks; mis loodwinkelt sisse piirawad, neid külgi nimetatakse loodkülgedeks (kateetideks).

b) Kui loodwinklilistes kolmnurkades 2 paari ühesseiswaid külgi (seisku need kus tahes) ühed on, siis on ka kolmnurgad ühed.

18. Ülesanded.

a) Ühe sirge joone pääle, ühest määratud punktist peab üks loodjoon tõmbatud saama. — Olgu sirge joone pääl määratud punkt a (kuju 26). Nüüd lõigatakse a punktist sirge joone pääl (nii kaugel a punktist kui tahes) ühekauguselt kaks punkti



d ja *b*, tõmmatakse *d* punktist *b d* sirkli-wahelaiuse otsaga üks wibu ja *b* punktist sellesama laiusega tõine wibu. Need wiud langewad ühes punktis (ülewal ja all), siin *e* punktis ükstõisest läbi. Ühendatakse nüüd *e* ja *a* ühe sirge joone läbi, siis seisab *ea* loodis *db* pääl. Sest

$$\begin{array}{l} da = ba \\ de = db = be \\ ea = ea \\ \hline \triangle dae \cong \triangle bae \\ \angle dae = \angle bae \\ \hline \end{array}$$

ea loodis.

Ehk:

$$\begin{array}{c} de = db = eb \\ \hline \angle d = \angle b \\ da = ba \\ \hline \triangle eda \cong \triangle eba \\ \hline \angle ead = \angle eab \\ \hline \end{array}$$

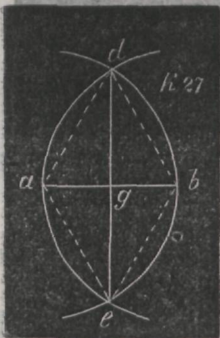
ea = loodjoon.

Tähendus. Iga tüki põhjendamise juures peawad lapsed tunnistawaid põhjendusi nimetama, kas nõnda, et lapsed ilma koolmeistri küsimata juba neid ütlewad (mis muidugi param on), ehk, et koolmeister küsib ja lapsed kostawad. Wiimase tüki juures sündku se wast nõnda: Mikspärast on joon $da = ba$? Wastus: Sellepärast on joon $da = ba$, et joon *da* *ba*sa ühesuuruseks on mõõdetud. — Mikspärast on $de = db = be$? *de*, *db* ja *be* seisawad ühekauguse sirkle haru otsadega tõmbatud wibude wahel. — Mikspärast on $ea = ea$? Iga asi (suurus) on oma enese suurune. — Mikspärast on $\triangle dae \cong \triangle bae$sa? Sest et nende kohastikku seiswad küljed ühed on, seepärast peawad nemad ise ka kolmandama katte-õpetuse järele ühed olema. — Mikspärast on $\angle dae = \angle bae$? Kui kolmurgad ühed on, siis on ka kõik ühtepidi seiswad kolmnurga winklid kolmnurkade sees ühed, — ja kui 2 kõrwalwinklid ühe sirge joone pääl, ühes punktis ühed on, siis on mõlemad loodwinklid. — Mikspärast on *ea* loodis *db* pääl? Loodwinkli küljed (loodküljed), kes loodwinkelt sisse piirawad, seisawad ükstõise pääl loodis.

Sellel kombel saagu iga põhjendamise juures tehtud. Ilma põhjuse andmata ei tohi lapsed (iseäranis geometria juures) midagi toimetada.

b) Antud sirget joont peab kaheks ühesuuruseks jauks jautatama (poolitatama):

ab sirkle harude laiuse wahega tõmmatakse (kuju 27) *a* ja *b* punktist wiud; kes mõlemil pool sirget joont *ab* ükstõisest punktides d ja e läbi langewad, ühendatakse d ja e sirge joone läbi, siis on ab — g punktis poolitatud.



$$\text{Sest } de = de$$
$$\left.\begin{matrix} da = db \\ ea = eb \end{matrix}\right\} = ab$$
$$\triangle dae \cong \triangle dbe$$
$$\angle ade = \angle bde$$
$$\angle dag = \angle dbg$$
$$da = db = ab$$
$$\triangle dag \cong dbg$$
$$ag = bg.$$

Lisa. Tehakse ag^{ga} ja $b\,g^{ga}$ niisama, nagu ab^{ga} ülewal tehti, siis saab ab nelja ühesugusesse jakku jautatud j. n. e.

d) Ühest punktist, mis sirgest joonest wäljas on, üks **loodjoon** selle joone **pääle lasta!**

Antud a punktist (kuju 28) tõmmatakse üks wibu, mis sirget joont kahes punktis, b ja d punktis, läbilõikab, poolitatakse nende kahe punkti (b ja d) wahelseiswat sirget joont ja ühendatakse antud punkti a poolitaja punkti e^{ga}, siis on ae **loodjoon.**

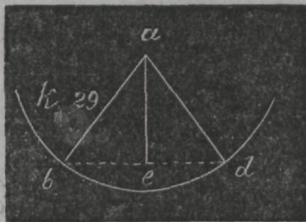
$$\text{Sest } ab = ad$$
$$be = de$$
$$\angle abe = \angle ade$$
$$\triangle abe \cong \triangle ade$$
$$\angle aeb = \angle aed$$
$$ae \text{ loodis.}$$

e) Ühte winkelt peab **poolitatama.**

Tõmmatakse antud winkli a punktist (k. 29) üks nii suur wibu kui tahetakse, ühendatakse punkt b ja d, jautatakse bd kahte ühesuurusesse jakku, tõmmatakse ae, siis on $\angle a$ poolitatud. Sest:

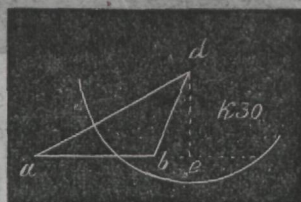
$$\begin{aligned} be &= de \\ ba &= da \\ ea &= ea \\ \hline \triangle aeb &\cong \triangle aed \\ \hline \angle bae &= \angle dae \\ \hline \end{aligned}$$

$\angle a$ poolitatud.



Lisa. Tehakse $\angle a$ pooltega niisama, nagu a täiega tehtud sai, siis saab täis $\angle a$ nelja ühesugusesse jakku jaututud. Nii wõib jautamist ikka edasi ajada.

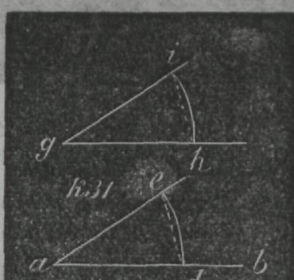
Tähendus. Kolmnurga kõrgust saadakse tääda, kui ühest winkli otsapunktist (missuguse winkli otsapunktist tahes) loodjoon selle winkli wastuseiswa külje pääle lastakse. Sagedaste peab kolmnurga ühte külge pikendatama, kui kolmnurga kõrgust kätte tahetakse saada. Waata kuju 30, kus ab pikendatud sai, et kõrgust de tääda saaks. — See külg (siin ab) mille pääle lood lastakse, on kolmnurga põhjuskülg. Iga kolmnurga külge wõib tema põhjusjooneks wõtta; siis annab loodjoon tema wastuseiswast winklist põhjusjoone pääle, kolmnurga kõrgust tääda.



g) Ühte winkelt (geometrialikul teel, ei mitte käsikaudu) walmistada, kes ühe tõise antud winkliga ühesugune (üks) on!

Sirge joone ab külge, punkt a sisse (kuju 31) peab antud winkel g pandud saama ja temaga üks olema.

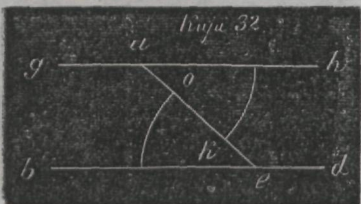
Punkt g ja a ümber tõmmatakse g ja a punktist sirkliharude ühesuguse laiusega wiud, wõetakse hi sirkli otsade wahele ja tõmmatakse selle wahega punkt d seest üks wibu, kes esimist wibu e punktis lõikab, tõmmatakse ae. Nüüd on:



$$gh = ad$$
$$gi = ae$$
$$ih = ed$$
$$\triangle igh \cong \triangle ead$$
$$\angle g = \angle a$$

kolmnurga kolmandama katte-õpetuse järele.

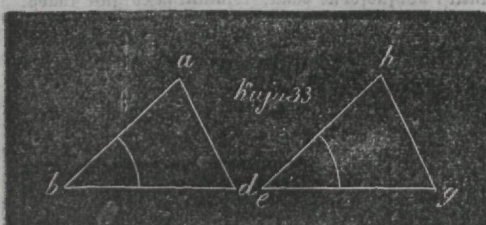
h) Sirget joont ühe punkti külge panna, mis ühe teise joonega kõrwuline (#) on.



Olgu antud punkt a (kuju 32). Meie tõmbame a punktist antud joone bd pääle sirge joone ae, teeme $\angle o = \angle k$ (niisama nagu kuju 31^be^-juures), tõmbame sirge joone gh. Nüüd on $gh \# bd$ga.

i) Kolmnurk peab walmistatud saama, kes teise antud kolmnurga abdga ühesugune ja ühenäuline on.

Selle kolmnurga walmistamiseks pruugime meie ühte kolmnurga katte-õpetust, teeme (kuju 33) $eg = bd$, $\angle e = \angle b$, $eh = ba$ ja tõmbame hg; ehk lõikame $eg = bd$, teeme $\angle e = \angle b$, $\angle g = \angle d$; ehk teeme $eg = bd$ ja tõmbame e punktist ba sirkliharude wahega ja g punktist da sirkli harude wahega wibud, siis on päritud $\triangle$ kolmel wiisil walmistatud.

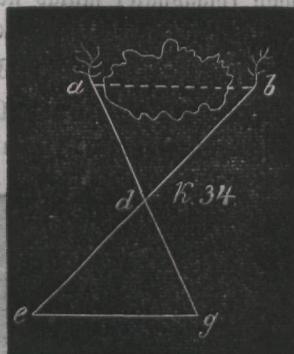


Tähendus 1. Meie nääme päälmise tüki juures, et meil kolmnurga walmistamiseks küll kõik kolmnurga winklid puududa wõiwad, aga ei mitte kõik küljed; üks külg peab meil ikka olema. Asjaliku tallitamise juures tehakse kõige paremine, kui uut kolmnurka antud kolmnurga kolme küljega walmistatakse. Joone pikkusid wõib õigemine sirkli abiga paberi pääle panna, kui winkli suurusid malli abiga.

Tähendus 2. Tahetakse kolmnurka walmistada, mis ühe antud kolmnurgaga aga ühenäuline on, siis ei ole muud tarwis, kui antud kolmnurga sisse sirget joont tõmmata, mis kolmnurga ühe küljega kõrwuline on (waata kuju 21). — Kuda ühte kolmnurka walmistatakse, mis üksi ruumi poolest tõisega ühesuurune on, seda saab pärast näidetud.

k) **Sirge joone** ab (kuju 34) **pikkust mõõta, mis** a **juurest** b **juure sihilt mõõta ei saa** (wahest järwe ehk raba pärast, mis nende wahel on).

Selle tarwis wõetakse punkt d, kelle juurest a ja b juure mõõta wõib, tõmmatakse ad ja bd ja tehakse mõlemad d^{est} otse mööda pikemaks, nii et $dg = da$, $de = db$ on.



$$ad = gd$$
$$bd = ed$$
$$\angle adb = \angle gde$$
$$\overline{\triangle adb \cong \triangle gde^{ga}}$$
$$\overline{eg = ab.}$$

Praegusest näitusest wõib aru saada, et kahe koha kaugust küll mõõta saab, ilma et ühe koha juurest sihilt tõise juure mõõdetakse.

Ülesanded joonitamiseks.

1. Ühesuguse külgedega $\triangle$ walmistada, millest antud on:
   a) üks külg; b) kõrgus.
2. Ühesuguse harudega $\triangle$, millest antud on:
   a) põhjusjoon ja üks $\angle$; b) üks haru, 1 $\angle$; d) põhjusjoon ja kõrgus; e) põhjusjoon ja üks haru; g) üks haru ja kõrgus.
3. Loodwinkline-, ühesuguseharuline $\triangle$, kui antud on:
   a) üks haru; b) hüpotenuus; d) hüpotenuus ja kõrgus.
4. Tõmpwinklilist-, terawwinklilist-, ühesuguseharulist kolmnurke, milledest kõrgus antud on.
5. Loodwinkliline $\triangle$, kui antud on:
   a) üks loodkülg ja üks teraw winkel; b) hüpotenuus ja üks teraw $\angle$; d) üks loodkülg ja hüpotenuus; e) hüpotenuus ja kõrgus.

Tähendus. Need ülesanded peawad kõik geometrialikul teel sirkli ja joonlauaga toimetatud saama. Koolmeister lasku wahest siin ja sääl ka põhjusid öölda!

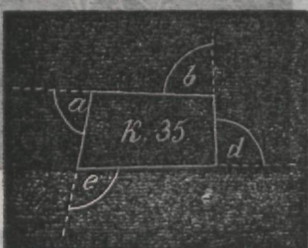
Wiies päätükk.

Nelinurgad.

Iga neljast küljest piiratud kuju hüütakse nelinurgaks. Siin räägime meie paljalt tasapinnalisest, neljaküljelisest, sirgejoonilisest nelinurgast, kellel, nagu iseenesest mõista, seepärast 4 sirgejoonilist winkelt, 4 sirget külge ja üks tasapind on.

1. Kõige nelinurga winklite summa on = 4 *L*. — Üks nurkjoon (diagonale) jautab nelinurku kaheks kolmnurgaks. Igas kolmnurgas on winklite summa = 2 *L* (kuju 18 ja 19), seega kahes kolmnurgas (ehk: nelinurgas) = 2 × 2 = 4 *L*.

2. Winklid, mis seeläbi sünniwad, et meie nelinurga igas winklipunktis ühe külje pikemaks teeme, hüütakse nelinurga wälimisteks winkliteks. (Kuju 35) *a*, *b*, *d*, *e* on nelinurga wälimised ∠∠. — Nelinurga wälimiste winklite summa on ka = 4 *L*. Sest iga wälimine ∠ on oma kõrwalwinkliga, mis nelinurga sees on = 2 *L*, seega kõik 4 oma nelja sisemistega kokku 4 × 2 = 8 *L*. Sisemised kokku = 4 *L*, seega ka wälimised kokku = 4 *L*.



3. Missugune suurus wõib igal nelinurga sisemise winklil üks haawal olla (kas tõmp, loodwinkel, teraw j. n. e.)?

Number ühe all nägime, et kõige winklite summa ühes nelinurgas = 4 loodwinkelt oli. Selle järele ei wõi juba mitte kõik 4 tõmbid, ega terawad olla. (Kas kõik 4 loodwinklid wõiwad olla?)

Kui meie läbi katsume, siis saame pea kätte, et järgmised winklid nelinurga sees wõiwad olla:

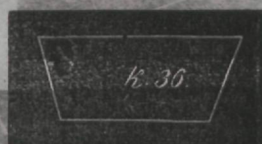
a)	1	küür	∠	1	tõmp	∠	—	*L*	2	terawat	∠
b)	1	"	∠	—	"	∠	1	*L*	2	"	∠
d)	1	"	∠	—	"	∠	—	*L*	3	"	∠
e)	—	"	∠	3	"	∠	—	*L*	1	"	∠
g)	—	"	∠	2	"	∠	1	*L*	1	"	∠

h) — küür ∠ 1 tömp ∠ 2 L 1 terawat ∠
i) — " ∠ 1 " ∠ 1 L 2 " ∠
k) — " ∠ 1 " ∠ — L 3 " ∠
l) — " ∠ — " ∠ 4 L — " ∠

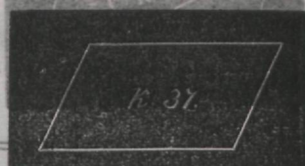
Meie näeme siis, et küll kõik winklid nelinurga sees loodwinklid wõiwad olla, aga ei mitte kõik terawad, ega tömbid, see on: meil wõib küll loodwinklilisi nelinurke, aga ei mitte teraw- ega tõmpwinklilisi nelinurke olla.

4. Iseenesest wõib aru saada, et neist neljast nelinurga külgedest kõik, ehk aga 3, ehk 2 ühesugused wõiwad olla; ehk ka kõik isesugused wõiwad olla.

Nii nagu nelinurgad mitmesugused on, nii on ka nende nimed mitmesugused:

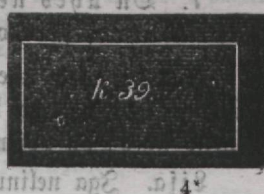


a) On nelinurgal paljalt üks paar wastasseiswad külga kõrwulised (#), siis on ta nimi roopnurk (kuju 36), paralleltrapez.

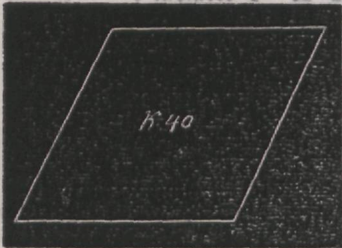


b) On mõlemad wastasseiswad külje-paarid #, siis nimetatakse teda kõrwujoonnurk (kuju 37), parallelogramm.

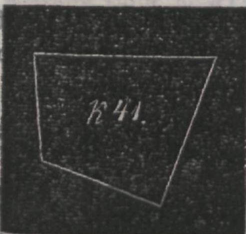
d) On nelinurgal kõik küljed ühed (ühepikkused) ja kõik neli winkelt loodwinklid, siis on nelinurga nimi käisruut ehk kwadraat (kuju 38.)



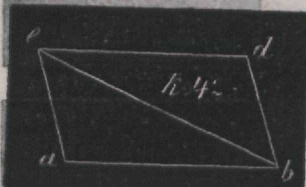
e) On nelinurgal kõik 4 winkelt loodwinklid, aga üksi wastasseiswad küljed ühed (et küljed # on, on iseenesest mõista, sest et winklid kõik loodwinklid on), siis hüütakse nelinurka pikkruuduks (k. 39), oblongumiks.)



g) On nelinurgal kõik küljed ühed, aga winklid wiltu (2 tömpi, 2 terawad), siis on ta nimi **wiltruut** (kuju 40) **rombus**.



h) On nelinurgal kõik küljed isemoodi ja winklid wiltu, siis on tema nimi **romboid** (kuju 41).



5. Igas kõrwujoonnurgas on **wastasseiswad küljed ja winklid ühed**. Tõmmatakse üks nurkjoon eb (kuju 42), siis saab kõrwujoonnurk kaheks ühe suguseks kolmnurgaks; sest

$$\angle deb = \angle abe$$
$$\angle aeb = \angle dbe$$
$$eb = eb$$
$$\overline{\triangle deb \cong \triangle abe}$$

$$de = ba,\ bd = ae,\ \angle edb = \angle bae.$$
$$\angle aeb + \angle deb = \angle dbe + \angle abe.$$

6. **Tõmmatakse kõrwujoonnurgas mõlemad nurkjooned, siis sünniwad seeläbi 4 kolmnurka, kelledest wastasseiswad kolmnurgad ühed on.**

Neil kolmnurgadel on üks küljepaar ja nende küljes seiswad winklipaarid ühed.

Lisa. Nurkjooned poolitawad ükstõist wastastikku.

7. **On ühes nelinurgas wastastikku seiswad küljepaarid ühed, siis on nelinurk kõrwujoonnurk.**

Sest kui meie ühe nurkjoone tõmbame, siis sünniwad 2 $\triangle\triangle$, mis ühed on; on aga kolmnurgad ühed, siis on ka winklid, kui põikwinklid ühed; on põikwinklid ühed, siis on ka küljed kõrwujoonilised.

Lisa. Iga nelinurk on kõrwujoonnurk:

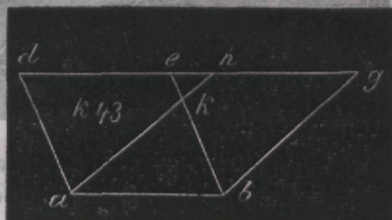
a) kui 2 wastasseiswat winkelt ühed on;

b) kui üks winkel (olgu missugune tahes) oma kumbki tõisega, mis tema ligemal seisab kokku 2 loodwinkelt on;

d) kui nelinurga 2 wastuseiswat külge ühed ja $\#$ on;

e) kui nurkjooned wastastikku ükstõist poolitawad.

8. **2 kõrwujoonnurka, mis ühe põhjusjoone** ab (k. 43) **pääl seiswad, ja samaste kõrwujoonte** ab **ja** dg **wahel on** (ehk, milledel üks ja seesama kõrgus on), **on ühesuuruse pindadega.**



Põhjendus:

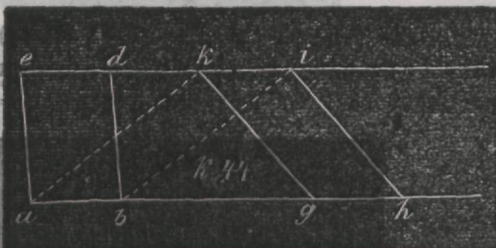
$$ab = de$$
$$ab = hg$$
$$\overline{de = hg}$$
$$eh = eh$$
$$\overline{\underbrace{de + eh}_{dh} = \underbrace{hg + eh}_{eg}}$$
$$ad = be$$
$$ah = bg$$
$$\overline{\triangle adh \cong \triangle beg}$$
$$\triangle keh = \triangle keh$$
$$\overline{\underbrace{\triangle adh - \triangle keh}_{adek} = \underbrace{\triangle beg - \triangle keh}_{bkhg}}$$
$$\triangle akb = \triangle akb$$
$$\overline{\underbrace{adek + \triangle akb}_{\text{kõrwujoonnurk } abed} = \underbrace{bkhg + \triangle akb}_{\text{kõrwujoonnurk } abgh}}.$$

Tähendus. Mööda läinud kujus seisab punkt h paramal-pool e punkti; tema wõib aga ka e punktiga ühte langeda, ehk wasakulpool e punkti olla; nende seisu kohtadele saawad kujud sellsamal kombel walmistatud ja põhjendamine on niisama kerge kui enne.

9. **On kõrwujoonnurkadel ka tõised, aga ühesugused põhjusjooned ja üks kõrgus** (see on: seisawad nad nendesama kõrwujoonte wahel), **siis on nende pinnad ühesuurused.**

Kui $ab = gh$ on (kuju 44) ja $ah \# ei^{ga}$, siis on kõrwujoonnurk $abde = ghik$.

Meie tõmbame abijooned ak ja bi, siis sünnib üks wahel seisaw kuju $abik$, millel esimise kõrwujoonnurgaga üks põhjusjoon ab ja tõise kõrwujoonnurgaga jälle üks põhjusjoon ki on. ab on = ja kõrwuline ki^{ga}; ak saab bi^{ga} kõrwuline olema. Sest:



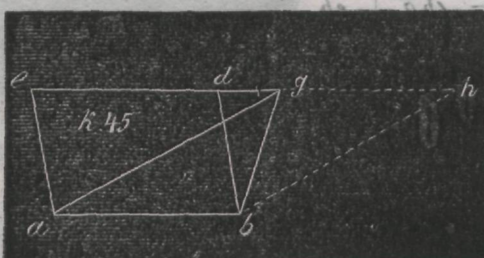
$\triangle aek \cong \triangle bdi$

$\angle ake = \angle bid$

$ak \# bi$

$abik$ kõrwujoonnurk, mis mõlemate kõrwujoonnurkadega $abde$ ja $ghik^{ga}$ ühesuurune on. (Kui 2 suurust kolmandamaga ühed on, siis on nad ka isekeskes ühed.

10. On kolmnurgal ja kõrwujoonnurgal ühesuurune ehk seesama põhjusjoon ja seisawad nad mõlemad nendesamaste kõrwujoonte wahel, siis on kolmnurga pind pool kõrwujoonnurga pinnast (kuju 45.)



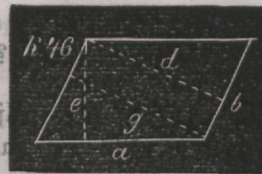
$\triangle abg = \frac{1}{2} abde.$

Tõmbame $bh \# ag^{ga}$, siis on kõrwujoonnurk $abde$ = kõrwujoonnurk $abhg^{ga}$

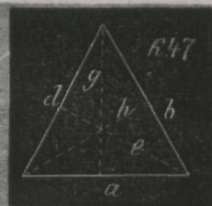
$\triangle abg = \frac{1}{2} abhg$ (kuju 42 — nummer 5)

$\triangle abg = \frac{1}{2} abde.$

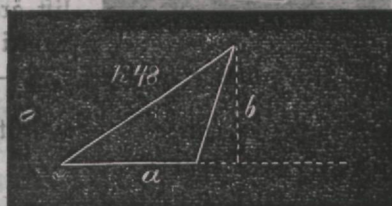
Lisa. Loodjoon ühe kõrwujoonnurga külje päält tema wastasseiswa külje pääle, annab kõrwujoonnurga kõrgust tääda; loodjoon kolmnurga winklipunktist sellesama winkli wastasseiswa külje, ehk selle külje pikenduse pääle tõmmatud, annab kolmnurga kõrgust tääda.



Iga kõrwujoonnurga külg wõib põhjusjooneks wõetud saada. On a (k. 46) põhjusjoon, siis on e kõrgus; on külg b põhjusjoon, siis on punktiline joon d, ehk g kõrwujoonnurga kõrgus.



On kolmnurga põhjusjoon a (kuju 47), siis on punktiline joon g tema kõrgus; on b põhjusjoon, siis on h tema kõrgus; saab d põhjusjooneks wõetud, siis annab joon e kolmnurga kõrgust kätte.



Tõmpwinklilises kolmnurgas (kuju 48) on a põhjusjooneks wõetud ja b wäljaspool kolmnurka, mis põhjusjoone pikenduse pääl loodis on, annab kolmnurga kõrgust tääda.

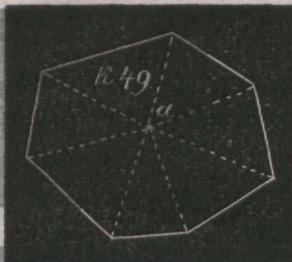
Et kõrwujooned kõigis punktides ühekaugusel ükstõisest ära on (ei iial kaugemale ükstõisest ei lähe, ega ükstõise ligemale ei tule, kui neid ka otsata pikendatakse), siis on kõrwujoonnurkadel ja kolmnurkadel, kui nad nendesamade kõrwujoonte wahel seiswad ühesugused kõrgused. Sellepärast wõib ka ülewal seiswast tükkidest nõnda öölda:

Kõrwujoonnurgad, kellel *ühed põhjusjooned* ja *ühed kõrgused on, on ka ühesuuruse pindadega*; ja kolmnurgad, kellel kõrwujoonnurkadega ühed põhjusjooned ja ühed kõrgused on, on *pooled* kõrwujoonnurkadest.

Et ka kolmnurkadel, kellel ühed põhjusjooned ja ühed kõrgused on, (kui nemad ka mitte ühenäulised ei ole) *ühesuurused pinnad* on, on iseenesest selge. Sest iga kolmnurk on pool sellest kõrwujoonnurgast, kellel temaga üks põhjusjoon ja üks kõrgus on. Et nüüd need kõrwujoonnurgad, kellel ühed põhjusjooned ja ühed kõrgused on, ühed on, siis on ka kolmnurkadel nende tingimiste all, ühesuurused pinnad.

11. Kui suur on kõige winklite summa sirgejoonelises paljunurgas? (Mittu loodwinkelt teewad nad kokku?)

Wõtame ühes paljunurgas ühe punkti a (kuju 49) ja tõmbame sellest punktist iga paljunurga winklipunktisse ühe sirge joone, siis saame paljunurgast nii palju kolmnurke, kui paljunurgal külga on, — seitsmenurgast seitse kolmnurka. — Igas kolmnurgas on kõik winklid kokku $= 2\,L$, seitsmes $\triangle$ nurgas siis $= 7 \,.\, 2 = 14\,L$. Need 7 winkelt, mis paljunurga sees, a punkti ümber on, ei ole aga mitte seitsmenurga winklid, peawad seepärast 14^{mnest} loodwinklist ärawõetud saama. Kõik winklid ühe punkti ümber teewad kokku $= 4\,L$; siis jääb seitsmenurga winklitele $14 - 4 = 10\,L$.



Nii on siis wiienurga	winklite summa	$= 5 \,.\, 2 - 4 =$	$6\,L$
" " " kuuenurga	" "	$= 6 \,.\, 2 - 4 =$	$8\,L$
" " " seitsmenurga	" "	$= 7 \,.\, 2 - 4 =$	$10\,L$
" " " kaheksanurga	" "	$= 8 \,.\, 2 - 4 =$	$12\,L$
" " " üheksanurga	" "	$= 9 \,.\, 2 - 4 =$	$14\,L$
" " " kümmenurga	" "	$= 10 \,.\, 2 - 4 =$	$16\,L$
" " " kahekümnenurga	" "	$= 20 \,.\, 2 - 4 =$	$36\,L$
" " " sajanurga	" "	$= 100 \,.\, 2 - 4 =$	$196\,L$
" " " n nurga	" "	$= (n \,.\, 2 - 4)\,L$	

j. n. e.

Tahetakse siis paljunurga winklite summa kätte saada (see on: mitu loodwinkelt paljunurga winklid kokku teewad), siis kaswatatakse paljunurga külgede- ehk winklite- arwuga kahte ja arwatakse 4 juurest maha.

Wõib ka paljunurka, ühest tema winklipunktist, (missugusest ta hes) nurkjoonte läbi kolmnurkadeks teha. Seega sünniwad paljunurgast nii palju kolmnurke, kui paljunurgal külga on, wähem kahte. Nelinurgas oleks siis 2, wiisnurgas 3, üheksanurgas 7 kolmnurka j. n. e. Et nüüd kõige winklite summa ühes kolmnurgas $= 2$ loodwinkelt on, siis on winklite summa

ühes 4 nurgas $2 . 2 = 4\,L$
„ 5 „ $3 . 2 = 6\,L$
„ 6 „ $4 . 2 = 8\,L$
„ 10 „ $8 . 2 = 16\,L$
„ 100 „ $98 . 2 = 196\,L$
„ n „ $(n-2) . 2 = 2n - 4\,L$,

see on: wõetakse paljunurga külgede arwust 2 ära ja kaswatatakse üle jäänud arwu kahega.

On paljunurk korraline (regulär) kuju, see on: on kõik küljed ja winklid ühesuurused, siis on igal winklil järgmine suurus:

ühel 3 nurgal, et kõik $\angle\angle$ kokku $= 2\,L$, $\frac{2}{3}\,L = 60^{\circ}$
„ 4 „ „ „ $= 4\,L$, $\frac{4}{4}\,L = 90^{\circ}$
„ 5 „ „ „ $= 6\,L$, $\frac{6}{5}\,L = 108^{\circ}$
„ 6 „ „ „ $= 8\,L$, $\frac{8}{6}\,L = 120^{\circ}$
„ 7 „ „ „ $= 10\,L$, $\frac{10}{7}\,L = 128\frac{4}{7}^{\circ}$
„ 10 „ „ „ $= 16\,L$, $\frac{16}{10}\,L = 144^{\circ}$

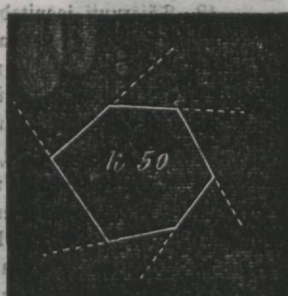
paljunurga külgede arwuga kaswab ka korralise kuju winklite suurus.

Tahetakse paljunurga ühe winkli suurust leida, siis otsitakse kõikide summa ja jautatakse seda külgeda arwuga.

Korralises kahekümnenurgas on kõige winklite summa $20 . 2 - 4 =$ 36 loodwinkelt, seega igaühe winkli suurus

$$\frac{20 . 2 - 4}{20} = \frac{36}{20} = 1\tfrac{4}{5}\,L;\ \text{n nurgal}\ \left(\frac{n . 2 - 4}{n}\right) L.$$

Lisa 1. Tõmmatakse korralise paljunurga keskpunktist winklipunktidesse sirged jooned, siis saab paljunurgast nii palju ühesugusid kolmnurki, kui paljunurgal külgi on. Keskpunkti winklite (tsentriwinklite) arw on siis kerge kätte saada.



Lisa 2. Niisama kerge on ka 4^{ja}-, wiie-, kuue-, 10^{nine} nurga wälimiste winklite summa leida, mis see läbi sünniwad, et iga paljunurga külge ühele poole pikendatakse (kuju 50). Wälimiste winklite summa, kõige sirgejooneliste kujude juures on = 4 loodwinkelt.

On kujul 6 külge, siis on sisemiste winklite summa $6 . 2 - 4 = 8\,L$; sisemiste ja wälimiste $\angle\angle$ summa $= 6 . 2 = 12\,L$; seega wälimiste $\angle\angle$ summa ükski $4\,L$.

12. Ülesanded.

1. Antud nelinurka järele joonitada!

Antud nelinurka jautatakse nurkjoonte läbi kaheks kolmnurgaks ja joonitatakse tutwal kombel kumbki △ sellessamas seisus järele nagu kolmnurk nelinurgas oli.

2. Missugused tükid peawad antud saama, kui neid neljatõugu kõrwujoonnurke tahetakse walmistada?

Täisruudile peab üks külg saama antud;
pikruudile kaks külge;
wiltruudile üks külg, üks ∠;
romboidele kaks külge ja üks ∠.

Kuda nüüd igaüks neist kujudest joonitatud peab saama, on kerge aru saada.

3. Antud paljunurk jäagu järele joonitatud!

Paljunurka jautatakse ühest winklipunktist nurkjoonte läbi kolmnurkadeks ja joonitatakse igaühte neist järele, seesamas seisus kuda nad paljunurgas seisiwad.

Lisa. Paljunurka wõib ka igast, tema sees mõeldud (wõetud) punktist (k. 49) kolmnurkadeks jautada, ja siis iga kolmnurka järele joonitada j. n. e.

4. Kõrwujoonnurk oma pinna poolest tõiseks tema suuruseks teha, kellest üks winkel antud on — üks wiltruut pikruudiks muuta j. n. e.

5. △, kellest üks ∠ antud, tõiseks tema suuruseks kolmnurgaks teha — üks kõwerwinkline △ loodwinkliliseks kolmnurgaks teha j. n. e.

6. Kõrwujoonnurk kolmnurgaks muuta, kellel niisama suur pind on!

7. △ kõrwujoonnurgaks muuta, kellel temaga ühesuurune pind on!

8. △ joonitada, kes 2, 3, 4, n kord nii suur on, kui antud kolmnurk on!

9. Kõrwujoonnurka walmistada, mis 2, 3, 4, n kord nii suur on, kui antud kõrwujoonnurk!

10. Ühte kolmnurka kahe, kolme, nelja ühesuuruse jagudesse jautada!

11. Üht kõrwujoonnurka kahe, kolme, nelja, n ühesuuruse jagudesse jautada!

12. Täisruuti joonitada, kellest antud on: nurkjoon!

13. Piknurka walmistada, kellest antud on:

a) üks külg ja nurkjoon;
b) üks külg ja üks winkel, kus nurkjooned ükstõisest läbilangewad;
d) üks külg ja üks winkel, keda nurkjoon antud küljega teeb.

14. Üht wiltruuti teha, kellest antud on:

a) üks külg ja üks nurkjoon;
b) mõlemad nurkjooned;
d) üks külg ja kõrgus;
e) üks nurkjoon ja kõrgus;
g) üks nurkjoon selle winkliga, keda ta jautab.

15. Ühte romboidi, kellest antud on:

a) 2 külge ja üks winkel;
b) 2 külge ja kõrgus;
d) 1 külg, 1 winkel ja kõrgus.

16. Üks 5e, 6e, 7me, 8, 9, 10mne küljega korraline kuju walmistada!

17. Mitu nurkjoont wõiwad tõmmatud saada ühes sirgejoonilises kujus, kellel 3, 4, 5, 6, 7, 8 (n) külge on?

18. Pööra need tükid ümber ja aruta neid!

Kuues päätükk.

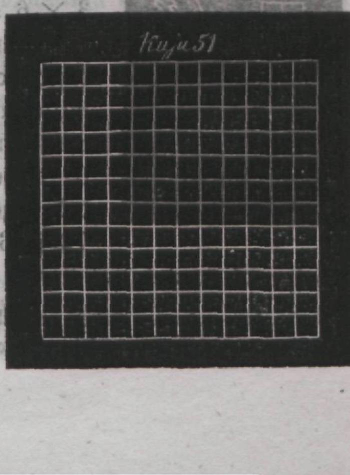
Pinnasuuruse arwamine.

Nii kui pikkused wõi jooned joontega mõõdetud saawad, saawad pinnad pindadega mõõdetud. Iga asi wõib aga omasuguse asjaga mõõdetud saada. Mõõt, kellega mõõdetakse, peab mõõtjale tuttaw olema, kas silmaga nähtud, ehk käega katsutud. Igal maal on enamiste isesugused mõõdud, mis mõõtmisele põhjuseks on säätud. Liiwimaal on wanad Liiwi- ja Wenemõõdud. Kõige suurem Wenemaa pikkusemõõt on werst (Liiwimaal penikoorem).

1 penikoorm = 7 wersta,
1 werst = 500 süldа, (ehk 1750 küünart),
1 süld = 7 jalga (ehk $3\frac{1}{2}$ küünart),
1 jalg = 12 tolli,
(1 küünar = 2 jalga = 24 tolli),
1 toll = 12 liini.

Pindade-põhjusmõõt on ühesuguse-küljeline, loodwinkliline, tasapind, ruut — ruutwerst, ruutsüld, ruutjalg, ruuttoll, ruutliin.

Üks raudsüld on 7 jalga; üks raudsüld ruutjalgadeks tehtud on $7 \times 7 = 49$ ruutjalga (□'). Üks jalg on 12 tolli, üks ruutjalg $12 . 12 = 144$ □'' (kuju 51).



1. Täisruudupinna suurust saadakse, kui tema küljepikkust oma enesega kaswattakse.

Seega on siis 1 süld = 7 jalga = 84 tolli = 1008 liini, üks ruutsüld = $7 . 7 = 49$ □' = (1 □' = 144 □'', 49 □' = $49 . 144 =$ 7056 □'' = (1 □'' = 144 □''', 7056 □'' = 7056.144) 1016064 □'''.

On täisruudu külje pikkus = 5′, siis on täisruudu pind = 5 . 5 = 25 □′.

On täisruudu külg 5′ 6″, siis on tema pind 66 . 66 = 4356 □″.

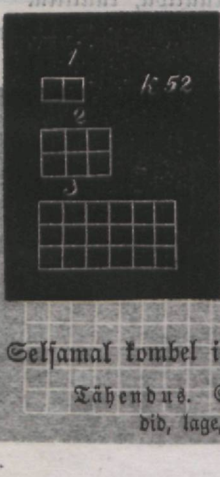
Lisa 1. On mitme täisruudu külgede pikkus ükstõise kohta, nagu 1 : 2^{be} : 3^{me} : 4^{ja} : 5^{e} kohta, siis on nende täisruutude pinna suurus ükstõise kohta nagu 1 : 4^{ja} : 9 : 16^{mne} : 25^{e} kohta, see on:

on täisruudu külg 1′ pikk, siis on tema pind 1 □′,
" " 2′ " " " " 2 . 2 = 4 □′;
" " 3′ " " " " 3 . 3 = 9 □′;
" " 4′ " " " " 4 . 4 = 16 □′;
" " 5′ " " " " 5 . 5 = 25 □′.

Tähendus: Sellepärast öeldakse ka kahe ühesuuruse arwu kaswatust ruutarwuks. 3^{me} ruutarw on 9, 7^{me} ruutarw on 7 . 7 = 49 j. n. e.

Lisa 2. Kui täisruudu pinnasuurus tääda on ja tahetakse pinna suurusest täisruudu külje suurust tääda saada, siis peaks seda arwu, mis täisruudu suurust tääda annab kaheks ühesuuruseks kaswatawaks lahutatama, nagu 100 peab 10 × 10^{neks}, 144 peab 12 × 12^{neks} j. n. e. lahutatud saama. Et iga arw kaswatawateks ennast lahutada ei anna, wõib katsumise najal pea nähä. Ligi kaudu wõib tõise astme looja otsimise läbi teda leida, keda aga siin wõimalik ei ole seletada.

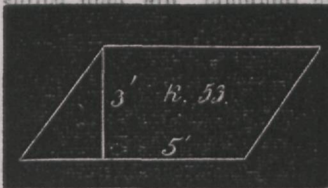
2. Selsamal kombel saab ka pikkruudu pinna suurus wälja arwatud, see on: kui nende ühes seiswa külgedega (külgede pikkustega) ükstõist kaswatame (pikkust laiusega); 1 × 2 = 2; 2 × 3 = 6; 3 × 6 = 18 □ (kuju 52).



Iseenesest on tääda, et aga ühesugused pikkused, tollid tollidega, jalad jalgadega (aga ei mitte jalad tollidega), süllad süldadega kaswatatud peawad saama. Oleks pikknurga üks külg 6′, tõine 6′ 4″ olema, siis peame mõlemad tollideks tegema ja siis kaswatama, nagu: 6 . 12 = 72 ja 6 . 12 + 4 = 76; 72 . 76 = 5472 □″.

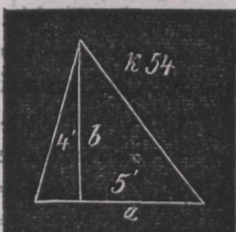
Selsamal kombel igal pool.

Tähendus. Sellest on nähä, kuda loodwinklisi pindasi, kua seina, põrmandid, lage, põlda, heinamaid j. n. e. arwatud wõib saada.



3. Et kõrwujoonnurgal pikkruuduga ühesugune kõrgus ja põhjusjoon on, siis saadakse tema pinna suurust kätte, kui tema **põhjusjoone** arwuga **kõr**-**guse** arwu kaswatatakse; $5 \,.\, 3 = 15$ □' (k. 53).

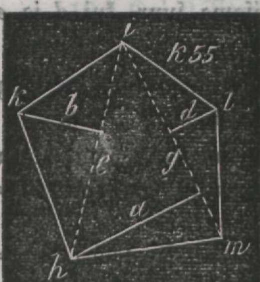
4. Nagu eespool (k. 45, nummer 10) nägime, on kolmnurk pool kõrwujoonnurgast, kui mõlemil ühesugune põhjusjoon ja üks kõrgus on. Sellepärast saadakse kolmnurga pinnasuurust kätte, kui kõrgust põhjusjoonega kaswatatakse ja kaswatust kahega jautatakse; (kuju 54)



$$\frac{a \,.\, b}{2} = \frac{a}{2} \,.\, b = a \,.\, \frac{b}{2},$$ ehk:

$$\frac{4 \,.\, 5}{2} = \frac{4}{2} \,.\, 5 = 4 \,.\, \frac{5}{2} = 10$$ □, see on: meie kaswatame poole põhjusjoonega täit kõrgust, ehk poole kõrgusega täit põhjusjoont.

5. On üks paljunurk (paljunurga pind) mõõta, siis saab tema nurkjoonte läbi kolmnurkadeks (kuju 55) tehtud, ja iga kolmnurga suurus isepäinis arwatud, selsamal kombel nagu kuju 54 — nummer 4 juures sündis; $\frac{e \,.\, b + g \,.\, a + g \,.\, d}{2}$,



ehk: on kolmnurga *hik* põhjusjoon *e* 10', kõrgus *b* 4', kolmnurga *mih* põhjusjoon *g* 12', kõrgus *a* 8', kolmnurga *mil* põhjusjoon *g* 12' ja kõrgus *d* 5', siis on kõigi kolmnurkade (paljunurga) suurus

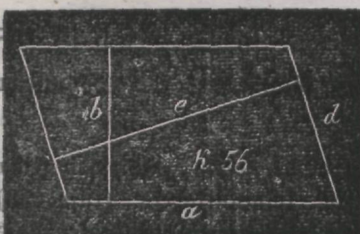
$$\frac{10 \,.\, 4 + 12 \,.\, 8 + 12 \,.\, 5}{2} = \frac{40 + 96 + 60}{2} = \frac{196}{2} = 98$$ □'.

On üks puhas, missugust kolmnurga külge meie põhjusjoon eks wõtame; kõrgus saab selle järele määratud.

Paljunurka wõib ka ühest, tema sees seiswast punktist kolmnurkadeks jautada, mis läbi meie nii palju kolmnurke saame, kui paljunurgal külga on. On paljunurk **korraline** kuju, nõnda, et tema keskpunktist igasse nurka sirgid joona wõib tõmmata, siis saab paljunurk nii mitmeks ühesuurusteks kolmnurkadeks jautatud, kui mitu külge paljunurgal on, ja meie pruugime aga ühte neist kolmnurkadest (ühe kolmnurga pinna suurust) wälja arwata ja selle suurusega paljunurga külgede arwu kaswatada. — Paljunurk on siis ühe kolmnurga suurune, kelle paljunurga külgede summa põhjusjooneks ja ühe kolmnurga kõrgus kõrguseks on.

Lisad: 1. Pikkruutu wõib täisruutudeks teha, kui kahte koosseiswat külgi ühesuuruseks jagudeks jautatakse ja neist jagude punktidest kõrwujooned tõmmatakse. Ühe wiltu kõrwujoonnurgaga ei wõi seda mitte teha. Temast wõib küll ka täisruutusid wäljalõigata; aga terawad tükid, mis mitte ruudud ei ole, jääwad üle. Sellepärast ei wõi neid mitte kohe mõõta, waid peawad enne pikkruuduks muudetud saama.

2. Sääl juures on üks kõik, missugust kõrwujoonnurga külge põhjusjooneks wõetakse; lood põhjusjoone wastuseiswa külje päält põhjusjoone pääle on siis tema kõrgus. On a (kuju 56) põhjusjoon, siis on b kõrgus; on d põhjusjoon, siis on e kõrgus; $a \,.\, b = d \,.\, e$. On $a = 2\,d$, siis on $e = 2\,b$. a ja b kaswatus on niisama suur, kui d ja e kaswatus.



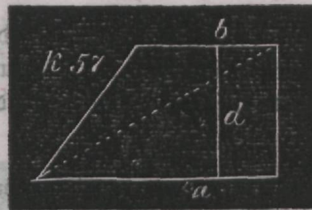
3. Et wiltruudu küljed ühed on, ja üks kõik on, missugune külg põhjusjooneks wõetud saab, siis peawad ka kõrgused ühed olema.

4. Kolmnurga juures wõib iga külg põhjusjooneks wõetud saada ja teda tema kõrgusega kaswatada. Need 3 kaswatust on kõik ühesuurused.

5. Jautatakse nelinurka, kelle suurust kätte tahetakse saada, nurkjoonte läbi kaheks kolmnurgaks, siis wõib küll nende kolmnurkade iga külge põhjusjooneks wõtta, aga kasulikum — et hõlpsam — on, kui nurkjoon põhjusjooneks saab wõetud, sest et tema mõlemate kolmnurkade põhjusjoon ühekorraga on. Siis on aga paljalt 3 külge, muidu 4 külge mõõta.

6. Niisama kasulik on ka nelinurga juures, kellel 2 külge kõrwulised on (roopnurk), ühte neist kahest kõrwujoontest pohjusjooneks wõtta.

$\frac{a \,.\, d + b \,.\, d}{2} = \frac{(a + b) \,.\, d}{2}$, (kuju 57)



see on: ühe roopnurga pinna suurust leitakse, kui kõrwujoonte summa nende kaugusega (kõrgusega) ükstõisest kaswatatakse ja kaswatust kahega jautatakse.

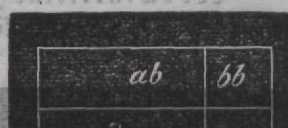
7. Et pikknurga pinna suurus põhjusjoone ja kõrguse kaswatus on, siis seisawad kahe pikknurga pinna suurused ükstõise kohta, nagu nende kaswatused. On nüüd kahel pikknurgal ühesuurused põhjusjooned, siis seisawad nad ükstõise kohta nagu nende kõrgused. On kõrgused ühed, siis seisawad nad ükstõise kohta nagu nende põhjusjooned.

8. Needsamad õpetused kestawad kõrwujoonnurkade ja kolmnurkade kohta.

9. Peab üks täis-ruut wälja arwatud saama, kelle pind ühe kõrwujoonnurga ehk kolmnurga pinna suurune on, siis ei ole muud teha, kui neist arwudest, mis kõrwujoonnurga ehk kolmnurga suurust kätte annawad, tõise astme loojat arwata. *)

Ühe kolmnurga põhjusjoon olgu 20′, tema kõrgus 10′, siis on tema pinna suurus 20 . 5 = 100 □′. Otsitud ruudu külg on 10′.

10. Kui 2 sirget joont a ja b (kuju 58) ükstõise otsa pannakse, nende mõlemate (a ja b) üle (pääle) üks täis ruut walmistatakse ja seda täis ruutu selkombel jautatakse, nagu kuju seda näitab, siis langeb see täisruut nelja jakku: täisruut a pääl (aa), täisruut b pääl (bb) ja 2 pikkruutu (ab ja ba), mis ühesuurused on; ehk: $a \,.\, a + b \,.\, b + 2 \,.\, a \,.\, b$.



Olgu $a = 6$, $b = 4$, siis on

$$\left.\begin{matrix}(6+4)^2 \\ 10^2\end{matrix}\right\} = 6^2 + 4^2 + 2 \,.\, 6 \,.\, 4 =$$

$100 = 36 + 16 + 48.$

---

*) Peab üks arw kaheks ühesuurusteks kaswatawateks lahutetud saama, siis nimetatakse seda „tõise astme looja" arwamiseks. 8^2 tähendab: kaswata kaheksat tema enesega, teeb 64. $\sqrt[2]{64}$ tähendab: otsi tõise astme loojat kuuesikümnest-neljast, teeb 8. — Astme looja arwamisest siin enam rääkida ei ole wõimalik.

Geometrialikult öölduv: Kui 2 joont saawad kokku pandud ja nende pääle üks ruut tehtud, siis on see ruut nii suur, nagu mõlemate üksikute joonte ruudud ja kahe pikkruudu summa kokku.

11. Ülesanded.

a. Kolmnurga pinna suurus on 30 ruutsülda, tema kõrgus 10 sülda, kui suur on tema põhjusjoon?

Et kolmnurga pinna suurus see läbi on sündinud, et tema põhjusjoon poole kõrgusega sai kaswatatud, siis saadakse põhjusjoone pikkust selkombel tääda, et pinna suurust poole kõrgusega jautame $(\frac{30}{5} = 6^0)$.

b. Kolmnurga pind on 10 ruutsülda ja 20 ruutjalga, põhjusjoon 20 jalga, kui suur on tema kõrgus?

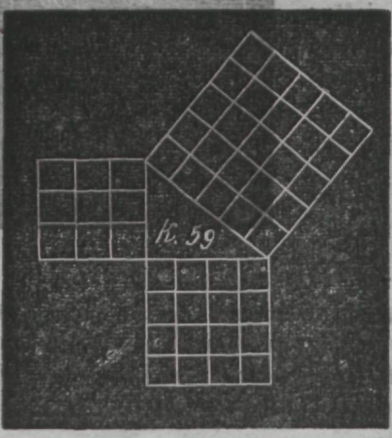
$$\left(\frac{10 . 49 + 20}{10} = 51' = 7^0 2'.\right)$$

d. Pikruut on 360 □' suur. Kui suured wõiwad tema koosseiswad küljed olla, kui nad üksi täides arwudes antud peawad saama? (1.360, 2.180, 3.120, 4.90, 5.72, 6.60, 8.45, 9.40, 10.36, 12.30, 15.24, 18.20).

Seitsmes päätükk.

Pytagoräuse õpetustükk.

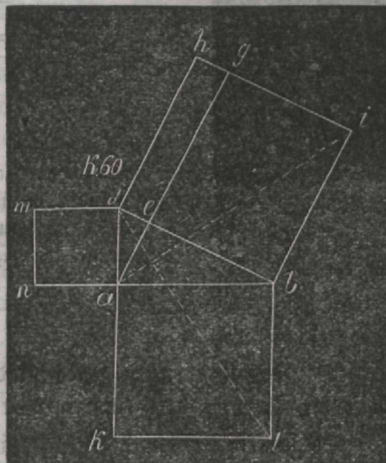
Loodwinkliline △ on iseäranis tähtjas, sellepärast tahame temast siin ka laiemalt kõneleda. Nagu eespool juba nägime, nimetatakse loodwinklilise kolmnurga kahte külgi, mis loodwinkelt piirawad loodjoonteks, ja seda külge, mis loodwinkli wastu seisab (kõige pikemat külgi) hüpotenuuseks.



Jautatakse loodwinklilise kolmnurga üks loodjoon kolme, teine nelja ühesuuruse jakku (kuju 59), tõmmatakse nüüd hüpotenuus ja mõõdetakse seda, siis tulewad just 5 niisugust jagu nagu loodjoonte pääl on, hüpotenuse pääle.

Tõmmatakse nüüd kolmnurga külgede saupunktidest ruudud, siis on 5 . 5 = 3 . 3 + 4 . 4, see on: hüpotenuuse ruut on nii suur, nagu loodjoonte ruudud mõlemad kokku.

See õpetustükk kestab kõige loodwinkliliste kolmnurkade kohta. Selle tüki leidja on kuulus Kreeka matemaatikus Pytagoras; sellepärast nimetatakse teda tema nime järele.



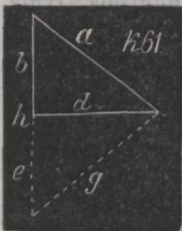
Selle tüki tõtt ei ole mitte raske põhjendada. Wõetakse üks loodwinkliline kolmnurk *abd* (kuju 60), tõmmatakse iga külje (kahe loodjoone ja hüpotenuuse) pääle üks ruut, lastakse *a* punktist joone *db* (hüpotenuuse) pääle lood, pikendatakse seda joont *g* punktini. Seeläbi langeb hüpotenuuse-ruut kaheks pikkruuduks *degh* ja *begi*. Tõmmatakse nüüd weel abijooned *ai* ja *dl*. Nüüd on:

$$bd = ib$$
$$ab = lb$$
$$\angle abl = L = \angle dbi$$
$$\underline{\angle abd = \angle abd}$$
$$\left.\begin{matrix}\angle abl + \angle abd \\ \angle dbl\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\angle dbi + \angle abd \\ \angle iba\end{matrix}\right.$$
$$\triangle dbl \cong \triangle iba \;{}^{8a}$$
$$\triangle dbl = \tfrac{1}{2} \text{ ruutu } ablk$$
$$\underline{\triangle iba = \tfrac{1}{2} \text{ pikruutu } bige}$$
$$\underline{\tfrac{1}{2} \text{ ruutu } ablk = \tfrac{1}{2} \text{ pikruutu } bige}$$
$$\text{täisruut } ablk = \text{pikruut } bige.$$

Niisama kerge on ka seda põhjendada, et täisruut *anmd* = pikkruut *degh* on.

Tähendus 1. Ümberpöördud on see õpetustükk ka õige: kui kolmnurga ühe külje ruut tõiste mõlemate külje ruutudega kokku ühesuurune on, siis on kolmnurk loodwinkliline, ja nimelt on see ∠ loodwinkel, mis kõige suurema külje wastu seisab.

Tähendus 2. Olgu $a\square = b\square + d\square$ (kuju 61). Tõmmatakse d pääle (h punktis üks loodjoon e, tehakse $e = b$ ja tõmmatakse g.



$$
\begin{aligned}
\text{Siis on } g\square &= e\square + d\square \\
&= b\square + d\square \\
&= a\square \\
\hline
g &= a \\
\hline
\triangle abd &\cong \triangle ged \\
\hline
\end{aligned}
$$

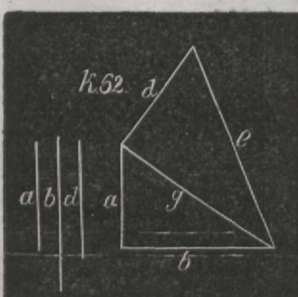
$\triangle abd$ nagu $\triangle ged$ loodwinkline j. n. e.

Sedda tükki pruugiwad puusepad, kui nad ühte loodwinkelt tahawad saada. Nemad jautawad ühte nööri sõlmedega nõnda, et ühe jau pääle 5, tõise pääle 4 ja kolmandama jau pääle 3 ühesugust osa tulewad. Sõlmitakse nüüd nöör kokku ja tõmmatakse iga jagu sõlme kohast sirgeks, siis saadakse üks loodwinkliline $\triangle$.

Ülesanded.

a) Üht täis ruutu walmistada, mis tõiste kahe täisruutude suurune on, see on: kaks täisruutu üheks täisruuduks teha.

Lõigatakse mõlemad antud täisruutude küljed loodwinkli harude pääle, tõmmatakse hüpotenuus ja tehakse selle pääle ruut; siis on see päritud ruut, mis nii suur on, kus antud 2 tõist.



Oleks weel üks kolmas ruut antud, siis lastakse uue (enne saadud) hüpotenuuse pääle lood, lõigatakse selle pääle kolmandama ruudu külg, tõmmatakse uue kolmnurga hüpotenuus, — waata kuju 62!

$$e\square = d\square + g\square$$
$$g\square = a\square + b\square;$$

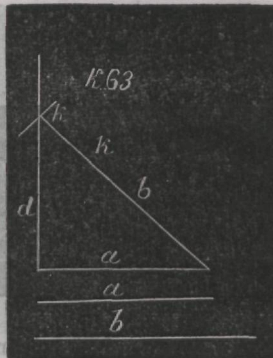
ehk:

$$e\square = d\square + a\square + b\square.$$

Tehakse seda wiisi edasi, siis wõib nii mitme ruudu pinnad kui tahes üheks ruuduks teha.

b) Peab kahe ruudu ülejäädaw ruuduks tehtud saama, siis walmistatakse üks loodwinkel (kuju 63), lõigatakse ühe winkli haru pääle pisema ruudu külg a ja tõmmatakse tema otsapunktist antud suurema ruudu külje b pikkuse sirkle wahega wibu, mis tõist loodwinkli haru k punktis lõikab, siis on pääritud ruudu külg leitud; sest

$$d\square = b\square - a\square.$$



d) Kõrwujoonnurka ja kolmnurka kahewõrraliseks, kolmewõrraliseks teha; pooleks ja kolmeks jautada j. n. e.

Et ruudud (täisruudud, pikkruudud, kõrwujoonnurgad j. n. e.) nii hääste kui ka kolmnurgad ühesuurused on, kui nende põhjusjooned ja kõrgused ühed on, siis pruugitakse aga, kui ruudu ehk kolmnurga pinda kahewõrraliseks ehk kolmewõrraliseks teha tahetakse, nende põhjusjooni kahe- ehk kolmewõrra pikendada, — ja kui ruudu, kõrwujoonnurka j. n. e., ehk kolmnurka kaheks ehk kolmeks (ühesuuruseks) jauks jautada tahetakse, siis aga põhjusjoont nii mitmeks jauks jautada pruugitakse ja kõrgust selleks samaks jäetakse, siis on ruut ja kolmnurk jautatud.

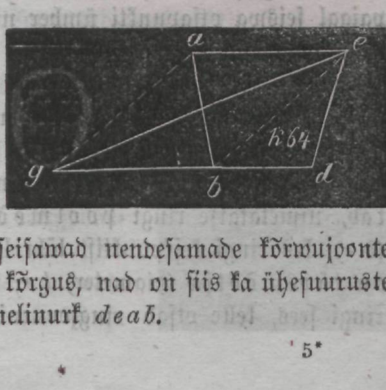
e) Ruudu pind peab kolmnurga pinnaks muudetud saama.

Et kolmnurk pool ruudust (kõrwujoonnurgast j. n. e.) on, kui neil ühesuurused põhjusjooned ja kõrgused on, siis ei ole muud tarwis teha, kui ruudu põhjusjoont poole pikemaks teha ja tema kõrgus jääb ka tehtawa kolmnurgale.

Ehk ruudu põhjusjoon jääb kolmnurgale ja kolmnurga kõrgus tehakse poole suuremaks (pikemaks).

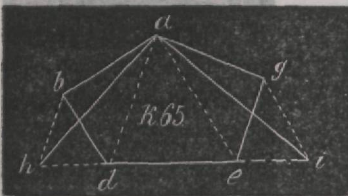
g) Nelinurk on kolmnurgaks muuta!

Jautatakse nelinurk *abde* (kuju 64) nurkjoone *eb* läbi kaheks kolmnurgaks, siis pruugitakse aga üht kolmnurka walmistada, mis kolmnurga *abe*-ga ühesuurune on, kelle põhjusjoon *db* joone pikendusesse langeb. Sellepärast pikendatakse *db*, tõmmatakse *a* punktist joon *ag*, kes *eb*-ga kõrwuline on ja tõmmatakse joon *eg*, siis on neil kahel kolmnurgal eba^{II} ja ebg^{I} üks ja seesama põhjusjoon *eb* ja seisawad nendesamade kõrwujoonte *eb* ja *ag* wahel, neil on seega üks kõrgus, nad on siis ka ühesuuruste pindadega, nii on siis $\triangle ged =$ nelinurk *deab*.



h) Wiisnurk on kolmnurgaks muuta!

Jautatakse wiisnurk *abdeg* (k. 65) nurkjoonte *ad* ja *ae* läbi kolmeks kolmnurgaks, siis on aga tarwis 2 kolmnurka teha, kes kolmnurkade *abd* ja *age*ga ühesuurused on ja kellede põhjusjooned selle sama põhjusjoone *de* pikendustesse seisma tulewad. Selle tarwis pikentatakse *de* mõlemile poole, tõmmatakse *bh* # *ad*ga, siis on △ *abd* = △ *ahd*ga, nagu (k. 64) seda nägime. Niisama tehakse ka tõise kolmnurga *age*ga. Kuju 65 näitab selgeste, et △ *ahi* = wiisnurk *abdeg* on.



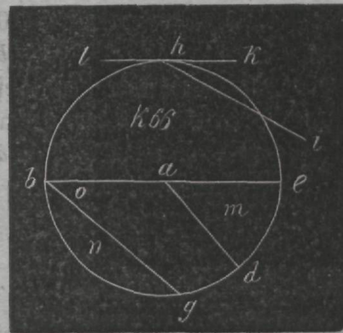
i) Üks △ kõrwusjoonnurgaks muuta!

Nagu seda juba tääme: Kas wõtame kolmnurga täie kõrguse ja anname kõrwusjoonnurgale pool kolmnurga põhjusjoont, ehk wõtame kolmnurga täie põhjusjoone ja anname temale kolmnurga pool kõrgust. Et nüüd iga sirgejoonilist kuju niisama suureks kolmnurgaks muuta wõib, siis wõib ka iga sirgejoonelist kuju kõrwusjoonnurgaks (wiltruuduks, ülepää: ruuduks) muuta.

Kaheksas päätükk.

Ring.

Ring sünnib seeläbi, et sirge joon tasapinna pääl oma ühe, paigal seiswa otsapunkti ümber nii kaua edasi (ümber) liigub, kunni tema oma endise koha sisse jälle seisma tuleb. Sirge joone seisaw otsapunkt ringi sees on ringi **keskpunkt** (tsentrum) *a* (kuju 66). Ringpinna ümberpiiret nimetatakse **ringjooneks** (*bgdeh*), ja ühte jagu ringjoonest (*bg*, *de* j. n. e.) **wiuks**. Sirget joont ennast, mis ringpinna läbi käis, ning keskpunktist kunni ringjooneni ulatab, nimetatakse ringi **poolmõõtjaks** (*ad*, *ae*, *ab*). Sirge joon (*b e*), kes ringi keskpunktist läbi läheb ja kelle otsad ringjoones seiswad, on **täismõõtja** (diameter) *be*; **siduja** (korde) *bg* on iga sirge joon ringi sees, kelle otsad ringjooneni ulatawad (kõige suurem siduja on



täismõõtja); iga joon, mis ringjoont läbilõikab on lõikaja (sekante) hi; sirge joon lk, mis, kui ta küll pikendatud saab, mitte ringjoont ei lõika, waid aga ühes punktis (h) teda riiwab, nimetatakse riiwajaks; punkt h, kus riiwaja ringjoonega ühte puudub, on riiwaspunkt; ringäralõige (segment) n on üks tükk ringpinnast, mis siduja ja tema otsadega ühendawa wiu wahel seisab; ringwäljalõige (sektor) m on tükk ringpinnast, mis kahe poolmõõtja ja nende otsadega ühendawa wiu wahel seisab; keskpunktiwinkel (tsentriwinkel ead ehk bad on sirgejooneline winkel keskpunktis, mis kahe poolmõõtja wahel seisab; ringjoonewinkel (periferii $\angle$) o on winkel, kelle haripunkt ringjoones seisab ja kelle harud sidujad on; keskpunktilised ringid on need, kes sessamas tasapinnas, ühest ja seestsamast keskpunktist, aga mitmesuguste poolmõõtjatega tõmmatud on. Et igas sirges joones arwamata palju punktisi seisawad, siis tõmbab üksainus sirge joon, kui ka ühte ringi teeb, arwamata palju ühekeskpunktilisi ringisi.

Juba ringi walmistamisest on arusaawlik, et järgmised õpetused õiged on:

1. täismõõtja on kahewõrra nii suur, kui poolmõõtja;

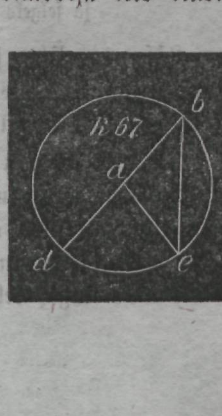
2. kahest sidujast on see suurem, mis keskpunkti ligemal on ja see pisem, mis keskpunktist kaugemal on;

3. täismõõtja on kõige suurem siduja; ühesuurused sidujad on ühekaugusel keskpunktist;

4. riiwaja riiwaspunkti juure tõmmatud poolmõõtja teeb riiwajaga loodwinkli ja seisab tema pääl loodis.

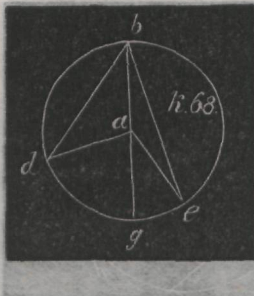
Järgmist tükki on kerge põhjendada:

5. Ringjoonewinkel on pool keskpunktiwinklist, kui nad ühe wiu pääl seisawad.



Keskpunkt wõib siin kolmel wiisil seista:

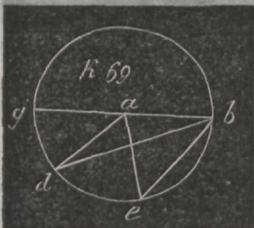
a) Keskpunkt a (kuju 67) seisab ringjoonewinkli ühe haru sees. $\triangle aeb$ on ühesuguse harudega, seega $\angle abe = \angle aeb$. $\angle dae = \angle abe + \angle aeb$ (k. 18 ja



20); siis on $\angle dae = 2 \angle abe$, ehk $abe = \frac{1}{2} \angle dae$.

b) keskpunkt a (kuju 68) seisab ringjoonewinkli harude wahel. Tõmmatakse sirge joon bag; siis on

$$\begin{array}{l} \angle dag = 2 \angle dbg \\ \angle eag = 2 \angle ebg \\ \hline \angle dae = 2 \angle dbe, \text{ ehk} \\ \angle dbe = \frac{1}{2} \angle dae. \end{array}$$



d) keskpunkt a (kuju 69) seisab wäljaspool ringjoonewinkli haru. Tõmmatakse täismõõtja bg, siis on

$$\begin{array}{l} \angle gae = 2 \angle gbe \\ \angle gad = 2 \angle gbd \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle gae - \angle gad \\ \angle dae \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2\angle gbe - 2\angle gbd. \\ 2 \angle dbe. \end{array}\right.$$

Sellest tükist tuleb ka see otsus, et ringjoonewinkel, mis pisema wiu pääl seisab, kui pool ringjoont on, teraw ehk < kui 1 loodwinkel on; mis poole ringjoone pääl seisab = 1 L on; mis suurema, kui poole ringjoone pääl seisab, tõmp ehk > kui 1 L on; sest kui ringjoonewinkel pisema wiu pääl seisab, kui pool ringjoont on, siis on sellesama wiu pääl seisaw keskpunktiwinkel pisem kui 2 loodwinkelt (wõib ka pisem olla kui 1 loodwinkel); kui ta just ringjoone poole wiu pääl seisab, siis on keskpunktiwinkel just 2 loodwinkelt; kui ta suurema wiu pääl seisab, kui pool ringjoont, siis on keskpunktiwinkel suurem kui 2 L (wõib ka suurem olla kui 3 loodwinkelt).

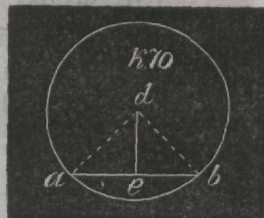
Tähendus. Neid tükka peab joonitamise läbi lastele silma ette pannema ja selgeks tegema: silmast ja käänst pähä!

Lisa 1. Ühe ja sellesama wiu pääl wõiwad arwamata palju ringjoonewinklid seista. Nad on, kui sellesama keskpunktiwinkli pooled, ükstõisega kõik ühesuurused.

Lisa 2. Nagu eespool (pääť. 3, 10) nägime, saab keskpunktiwinkel sellest wiust mõõdetud, kelle harude wahel tema seisab. Nii mitu graadi winklil on, nii mitu graadi on wiul. Ringjoonewinkel, et ta poole pisem on kui keskpunktiwinkel (ühe wiu pääl), saab siis selle poole wiuga, kelle pääl tema seisab, mõõdetud.

Lisa 3. Kolmnurga 3 winkelt ühe ringi sees, seisawad kolme wiu pääl, mis kokku ringi täit wibu (ringjoont) wälja teewad ja nende poole wibudega mõõdetud saawad on 180°. On ringi sisse nelinurk tehtud, siis seisawad kaks wastastiku seiswat winkelt täie ringjoone pääl (wõtawad terwe ringjoone oma wibudeks ära), on siis kokku 180°.

6. Loodjoon keskpunktist ühe siduja pääle lastud, langeb siduja keskpaika (kuju 70).



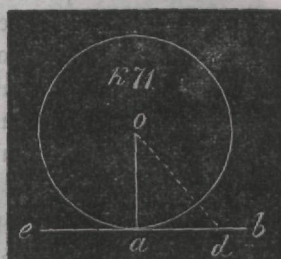
$$\angle dea = \angle deb$$
$$\angle dab = \angle dba$$
$$da = db$$
$$\overline{\triangle dea \cong \triangle deb}$$
$$ae = be.$$

Ümberpöördud: pannakse ühe siduja keskpunktisse lood, siis läheb see ringi keskpunktist läbi.

Siin kestawad ülepää need õpetused, mis päät. IV, 15 all ette tuliwad, sest et siduja otsade ühendamine sirge joonte läbi keskpunktiga ühesuguse harudega kolmnurka sünnitab.

7. Säätakse poolmõõtja otsapunktisse loodjoon, siis on see *riiwaja ringile.*

Kui $\angle oab$ = loodwinkel on (kuju 71), siis on eb — a punktis selle ringi riiwaja, see on, temal ei ole mitte ühte tõist punkti, mis seda ringi riiwaks.



Põhjendus: Wõtame ometigi sirge joone eb pääl ühe tõise punkti, wahest d, ja tõmbame od.

Siis on $\angle oab = L$
$\angle oad < L$
$od > oa$ (suurema $\angle$li wastu pikem joon),
$od >$ kui poolmõõtja.

Seega seisab punkt d ja kõik tõised punktid (mis ehk weel wõtta tahetakse), eb sees kaugemal keskpunktist, kui poolmõõtja pikkus on, see on, kõik tõised punktid eb sees (pääle a) seisawad wäljaspool ringi; sellepärast on eb riiwaja.

Umber pöördud: Säätakse riiwaja pääl, riiwaspunktis üks loodjoon, siis läheb see ringi keskpunktist läbi ja saab, kui teda pikendatakse täismõõtjaks. Lastakse ringi keskpunktist lood riiwaja pääle, siis langeb see riiwaja riiwaspunktisse.

Lisa. Et kõigis ühesuurustes ringides ühesuguste sidujatel ühesuuruseb keskpunktiwinklid on, siis wõib malli abiga, ülemist tükki pruukides, winklid mõõta ja paberi pääle märkida.

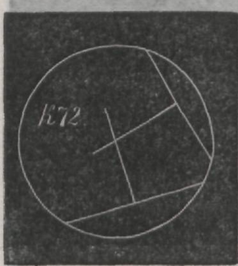
Tahetakse malliga winkelt paberi pääl mõõta, siis tõmmatakse winkli harude wahel, winkli otsapunktist malli poolmõõtjaga üks wibu, wõetakse wiu siduja sirkliharu otsade wahele, pannakse nüüd sirkliharu üks ots malli nulli pääle, siis näitab sirkliharu tõine ots malli poolringi pääl graadide arwu, mis mõõdetawa winkli suurust kätte annab.

Tahetakse malliga määratud winkli suurust ülesse märkida, siis tõmmatakse esite üks sirge joon, tõmmatakse malli poolmõõtja pikkusega selle sirge joone ühest otsapunktist üks wibu, wõetaksa tehtawa winkli suurust sidujat, sirkleharu otsade wahele ja lõigatakse selle sirkliharude wahega, sellest punktist, kus wibu endist sirget joont lõikas, tõmmatud wibu, ühendatakse siduja otsapunkti endise joone otsapunktiga, siis on määratud winkel tehtud.

8. Tähtsad ülesanded.

a) Ringi keskpunkti leida!

Kas tõmmatakse üks siduja (kui suur tahes), jautatakse teda kaheks ühesuguseks jauks, pannakse siduja keskpaika (poolitaja punktisse) loodjoon, pikendatakse seda mõlemile poole kunni ringjooneni, mis läbi täismõõtja sünnib, poolitatakse täismõõtjat, siis on ringi keskpunkt leitud.

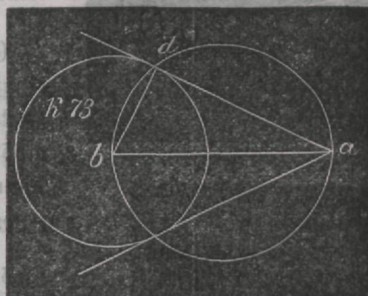


Ehk tõmmatakse 2 sidujat ja säätakse kumbki keskpunktisse loodjoon (kuju 72.) Mõlemad neist lähwad ringi keskpunktist läbi; seega on keskpunkt sääl, kus loodjooned ükstõisest läbilangewad.

b) Ringi walmistada, kelle ringjoon ühte sirget joont ühes antud punktis riiwab.

Säätakse sirge joone antud punktisse üks lood, nagu kuju 71 näitab, tõmmatakse selle loodjoone otsapunktist loodjoone pikkusega (poolmõõtjaga) ring, siis riiwab see sirget joont antud punktis.

d) Ringi külgi, ühest, wäljaspool ringi seiswast punktist üks riiwaja tõmmata!

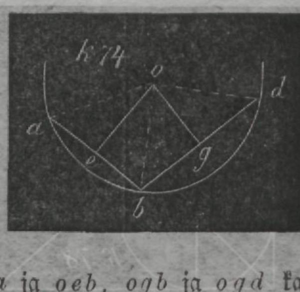


Et riiwaja poolmõõtja pääl loodis seisab, on meil juba tääda; antud punktist on siis üks sirge joon tõmmata, mis poolmõõtjaga loodwinkelt sünnitab (kuju 73). *ab* saab sel kombel sündiwa kolmnurga hüpotenuuseks. Poolitatakse nüüd *ab* ja tõmmatakse poolitamise punktist poole *ab*ga ring, mis antud ringi *d* punktis lõikab; tõmmatakse nüüd *ad*, siis on see päritud riiwaja.

Sest $\angle bda$ seisab poolringi pääl, wõi on ringjoonewinkel poolringi sees, seega = loodwinkel, sellepärast on *ad* loodis *bd* pääl; seega *ad* riiwaja.

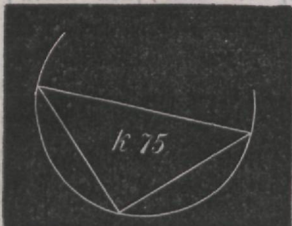
Et nende kahe ringi ringjooned kahes punktis ükstõisest läbilangewad, siis saadakse 2 riiwajat, kes ükstõisega ühesugused on. Igast punktist wäljaspool ringi wõib kaks ühesugust riiwaja ringi külge tõmmata. Winkel, mis nemad sünnitawad, saab sirge joone läbi, mis selle ringi keskpunktisse tõmmatakse, kelle riiwasjooned nad on, poolitatud.

e) Kolme punkti läbi, mis mitte õige joone sees (ühes sihis) ei seisa, on ring tõmmata!



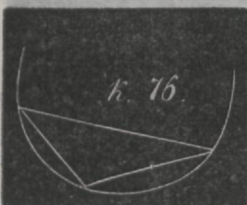
Need kolm antud punkti olgu *a*, *b*, *d* (kuju 74). Ühendatakse need punktid kahe sirge joone *ab* ja *db* läbi, siis peawad needsamad sidujateks saama. Poolitatakse neid kahte joont ja pannakse loodjooned poolitamise punktidesse, siis seisab otsitud ringi keskpunkt sääl, kus loodjooned ükstõisest läbi langewad, punkt *o* sees; *oa* (*ob* ehk *od*) on siis otsitud ringi poolmõõtja, kelle ringjoon mitte üksi *a*, waid ka *b* ja *d* punktist läbi läheb, sest et jooned *oa*, *ob*, *od* (kui ühesuguse harudega kolmnurkade küljed) ühed on ja sellepärast kolmnurgad *oea* ja *oeb*, *ogb* ja *ogd* ka ühed on ja kui neid ükstõise pääle pannakse, siis endid katawad.

Lisa. Et kolm punkti kolmnurka määrawad, siis on ülemise tükiga ka *see* ülesanne arutatud: kolmnurga ümber ühte ringi tõmmata.

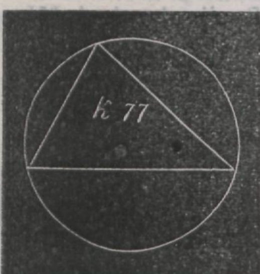


Kus pool seisab aga selle ringi keskpunkt loodwinklilises-, tõmpwinklilises- ja terawwinklilises-kolmnurgas?

Et loodwinkel poolringi sees (ehk poolringi pääl) seisab, nagu ka kuju 75 seda näitab, siis saab hüpotenuus ringi täismõõtjaks; otsitawa ringi keskpunkt seega hüpotenuuse keskpaigas; seda prungitakse aga poolitada.

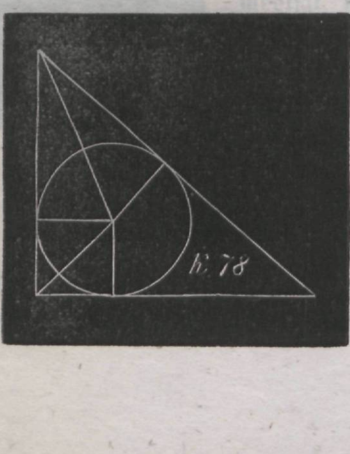


Tõmpwinkel seisab ühe niisuguse wiu pääl, mis suurem on kui poolringi (kuju 76); otsitawa ringi keskpunkt seisab seega ka *wäljaspool* kolmnurga tasapinda.



Iga terawwinklilise kolmnurga winkel seisab ühe wiu pääl, mis pisem on poolringist (kuju 77). Iga kolmnurga külg on niisuguse wiu siduja; otsitawa ringi keskpunkt seisab seepärast *seespool* kolmnurka.

g) Kolmnurga *sisse* üht ringi tõmmata, mis igat kolmnurga külge riiwab.



Et winkel, keda 2 riiwasjoont sünnitawad, sirge joone läbi, mis ringi keskpunktisse läheb, poolitatud saab (waata kuju 73 — *d*), siis pruugitakse aga 2 kolmnurga winkelt poolitada (k. 78); sääl, kus poolitajad jooned kokku langewad, on ringi keskpunkt, ja loodjoon keskpunktist iga kolmnurga külje pääle lastud, on otsitud ringi poolmõõtja.

Et need kolm, kolmnurga külgede

pääle lastud loodjoont ühed on, selgub kahe kolmnurga paaride kattmisest, ja et ringjoon kõiki kolmnurga külga riiwab, selgub sellest, et nad poolmõõtjate pääl loodis seiswad.

h) Missuguste nelinurkade s i s s e ja ü m b e r wõiwad ringid tõmmatud saada?

1. T ä i s r u u t u d e ja p i k k r u u t u d e ü m b e r ja s i s s e. Kuda see sünnib, selgub iseenesest.

2. Ülepää kõige nelinurkade ü m b e r, kelle wastu seiswa winklite summad ükstõisega ühed ehk 2 loodwinkelt on.

Sest iga ringi s e e s seiswa nelinurga wastasseiswa winklite summa on $= 2\ L$.

Nelinurga küljed saawad otsitawa ringi sidujateks, kust selgub, kuda otsitud ring leitud saab?

3. Iga nelinurga s i s s e, kelle wastasseiswa k ü l g e d e summad ühed on.

Alati on nelinurga wastasseiswa külgede summad ühed, kui nelinurk ringi ü m b e r on tehtud (k. 79).

$$ab + ed = ae + bd.$$

Sest $ai = ak$ (kuju 73 — d ja
$bi = bg$ k. 78 — g.)

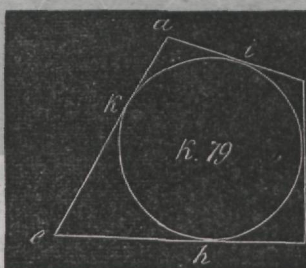
$$\left.\begin{matrix} ai + bi \\ ab \end{matrix}\right\} = ak + bg$$

$$eh = ek$$

$$dh = dg$$

$$\left.\begin{matrix} eh + dh \\ ed \end{matrix}\right\} = ek + dg$$

$$ab + ed = \left\{\begin{matrix} ak + bg + ek + dg \\ ae + bd. \end{matrix}\right.$$

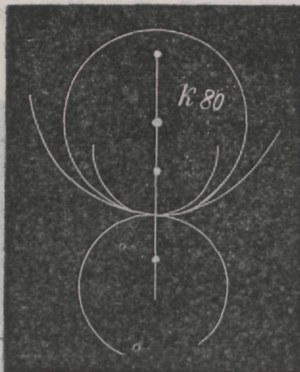


K. 79

Otsitawa ringi walmistamine selgub ülesandest g^{st} kuju 78.

i) Ringi walmistada mis ühte tõist ringi ühes määratud punktis riiwab.

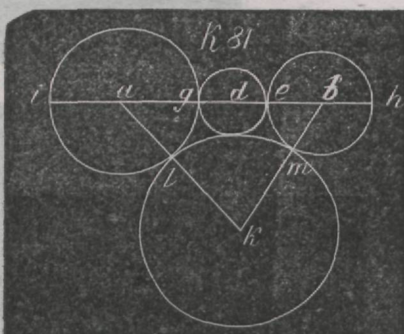
Tõmmatakse määratud punktisse poolmõõtja ja pikendatakse teda, siis wõib selle joone i g a s t punktist tema kaugusega määratud punktist ringisi tõmmata (kuju 80), mis läbi ülesanne täidetud saab. Neil



ringidel kõigel on antud punktis üks kõigele sündsa riiwaja; seega riiwawad nemad kõik ükstõist.

Need ringid seisawad kas wäljaspool wõi seespool antud ringi, ehk piirawad teda koguni ümber, nii, et tema nende sees seisab. Nõnda kui keskpunkti seis ja wõetud poolmõõtja suurus on, nõnda on ka riiwajad ringid sees- ehk wäljaspool antud ringi, nagu kuju seda näitab.

k) Ringi tõmmata, mis kahte antud ringi riiwab. Ühendatakse nende kahe antud ringide keskpunktid a ja b sirge joone ab ga (kuju 81), siis on silma nähä, et ringid, keda ge, ie, gh, ih keskpaigast nende poolte joontega tõmmatud saawad, seda ülesannet täidawad.

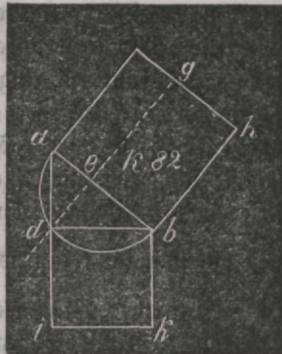


Wõib aga ka weel palju tõisi (arwamata palju) ringisid olla, mis seda ülesannet täidawad.

Arwame meie ühte niisugust ringi, kelle keskpunkt k oleks, siis on $lk = mk$. Mõlemate poolmõõtjate al ja bm otsa on siis ühesuuruseb tükid panna ja a ja b punktist seeläbi saadud joonte pikkusega wiud tõmmata, mis ükstõist k punktis lõikawad, mis siis otsitud ringi keskpunktiks tehtud saab j. n. e.

l) Antud pikkruut on täisruuduks muuta!

Pytagoräuse õpetustüki sees oli meil pikkruutusid, mis ruutudega ühesuurused oliwad: pikkruut $eghb$ = täisruut $dbki$ (kuju 82). Pääasi on siis see, et meie pikkruudu läbi ruudu külje db kätte saame. Punkt d seisab ge pikenduses; pikendame sellepärast eg^{b}, siis on selle pikenduse sees üks koht, kelle sees punkt d seisab. Joon $ab = hb$; sellepärast pikendame be^{b} ja teeme $ba = bh$. Nüüd on $\angle adb$ = loodwinkel ja ba kolmnurga adb hüpotenuus. Tõmmatakse nüüd ab (täismõõtja) keskpaigast ab üle poolring, siis lõikab see ge pikendust d



punktis. Nüüd on aga weel b ja d sirgejoonega ühendada ja sirge joone (db) pääle päritud täisruut walmistada.

Lisa. Meie oleme näinud, et iga paljunurka niisama-suuruseks kolmnurgaks, iga kolmnurka kõrwujoonnurgaks, seega ka ühes pikkruuduks muuta wõib, ja praegu näidetud teel wõib pikkruut täisruuduks muudetud saada. Seega wõib siis iga sirgejoonilise kuju pinda täisruuduks teha.

m) Ringpinna suurust wälja arwata!

Pannakse ringi sees tema kaks täismõõtjad loodi ükstõise pääle ja ühendatakse nende otsapunktid ükstõisega sirge joonte läbi, siis on ringi sisse täisruut walmistatud. Selle ruudu pind on pisem kui ringi pind.

Mõtleme üht korralist kuusnurka ringi sisse tõmmatud ja ühendame tema winklipunktid ringi keskpunktiga, siis saame 6 kolmnurka, kelle iga keskpunktiwinkel $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ loodwinkelt on, ja iga kuue kolmnurga winkel ka 2 loodwinkelt teeb. Need kolmnurgad on ühesuguse winklilised, seega ka ühesuguseküljelised; iga ringi poolmõõtja wõib 6 korda ringi sisse (ümber) pandud saada, see on: jautab ringi kuueks ühesuguseks jauks. Selle kuusnurga pind on juba enam ringi pinna suurune kui täisruudu pind.

Tõmmatakse ringi sisse üks korraline kakstõistkümnenurk seeläbi, et kuusnurga keskpunktiwinklid poolitatakse ja sidujatega poolmõõtjate otsapunktisi ühendatakse, siis on see pind jälle suurem, kui kuusnurga pind, ja tuleb oma suurusega juba ringpinna suuruse lähemale: mida enam külga korralisel kujul ringi sees on, seda enam ja enam saab tema suurus ringpinna suuruse sarnatseks.

Korralise kuju winklipunktide ühendamise läbi keskpunktiga sünniwad ringi sisse ühesugused kolmnurgad ühesuguste põhjusjoonte ja ühesuguste kõrgustega. Kolmnurgad, kellel ühesugune kõrgus on, on kokku ühe kolmnurga suurus, kellel seesama kõrgus ja niisama suur põhjusjoon on, kui tõistel kokku on. Mõtleme nüüd ühe ringi sisse üht korralist paljunurka, mitme (saja, tuhande j. n. e.) külgedega tõmmatud, nii et selle tasapind ringi tasapinnaga (pea aegu) üks on, ja mõtleme weel, et tema kolmnurkade summad ühe kolmnurga suuruseb on, kelle põhjusjoon niisama suur on, kui kõikide põhjusjooned kokku, see on, nii suur kui ringjoon, siis saame pea aru, et ringpind ühe kolmnurga suurune on, kelle põhjusjoon ringjoonega, ja kelle kõrgus poolmõõtjaga üks on; tema (ringpinna) suuruse leiame siis, kui ringjoone ja poolmõõtja suurust ükstõisega kaswatame ja kaswatust kahega jagame. Kui r ringjoont, p poolmõõtjat tähendab, siis on ringpinna suurus $= \frac{r \cdot p}{2} = \frac{r}{2} \cdot p = r \cdot \frac{p}{2}$.

Siin oleks nüüd weel waadata poolmõõtja suurust ringjoone suuruse kohta, ehk täismõõtjat ringjoone kohta määrata, see on: poolmõõtja- ehk täismõõtja-pikkusest ringjoone pikkust kätte saada. Et täis- ja poolmõõtja sirged jooned, ringjoon aga kõwer joon on, siis ei wõi nende suurust ükstõise kohta mitte karwa päält, waid aga läbi kaudu wälja arwata *). Seda on siis ka õpetatud mehed ammust ajast teinud; täismõõtja seis ringjoone kohta on seega, nagu 7 : 22$^{\text{he}}$, ehk, nagu 100 : 314$^{\text{mne}}$ kohta, see on: niisugusid jagusid, nagu täismõõtjal 7 ehk 100 on, on ringjoonel 22 ehk 314. Nimetame meie täismõõtjat t, ringjoont r, siis on $r = \frac{22}{7} \cdot t\ (= \frac{314}{100} \cdot t)$; $t = \frac{7}{22} \cdot r\ (= \frac{100}{314} \cdot r)$.

Näitus. t (täismõõtja) olgu 10′; kui suur on ringjoon ja ringpind?

Wastus. $r = \frac{22}{7} \cdot 10 = \frac{220}{7} = 31\frac{3}{7}'$; p (pind) on $= 31\frac{3}{7} \cdot \frac{10}{4} = 78\frac{4}{7}\square'$.

Tähendus. Oleks see wõimalik, et täismõõtja suurust ringjoone suuruse kohta karwa päält wõiks kätte saada, siis wõiksime ringpinda nagu kolmnurga pinda ja seda nagu täisruudu pinda wälja arwata. Siit saadik on see aga wõimata olnud ja ei saa elades wõimalikuks; sest et ühte kõwerat joont iialgi sirge joonega karwa päält mõõta ei wõi.

n) Laiem seletus täismõõtja (ühes ka poolmõõtja) pikkusest ringjoone pikkuse kohta.

---

*) Mõõdame meie ratta ringi niidiga ja paneme ringi suurust täis mõõtja suurusega ühte, siis nääme mõlemate wahet.

Tääme meie ühe tee pikkust ja ratta kodarate pikkust, mis seda teed jooksewad, siis wõime kergeste ära arwata, mitu ringi ratas tee pääl on jooksnud. Niisama wõib ümberkäimisest ja kodarast tee pikkust kätte saada.

1. Eespool sai lühidelt ringpinna wäljaarwamisest räägitud. Asi ise pärib, et temast siin laiemalt seletust teeme.

Seeläbi, et ringi sisse korralise paljunurga teeme ja paljunurga külga keskpunktiwinklite poolitamise läbi iga kord rohkemaks teeme, ja seda tööd ikka edasi ajame, nõnda, et paljunurgal õieti palju külga sünnib, siis wõime (peaaegu ilma weata) paljunurga pinda ringpinnaga, ja paljunurga külga ringjoonega ühesuuruseks arwata.

Et nüüd iga korraline paljunurk selle kolmnurga suurune on, kelle põhjusjoon paljunurga ringiga (külgede summaga) ja kelle kõrgus paljunurga kõrgusega (kaugusega paljunurga ühest küljest keskpunktini) üks on, siis on ringpind selle kolmnurga pinna suurune, kelle põhjusjoon ringjoone, ja kelle kõrgus ringi poolmõõtja suurune on; ringi pinna suurust leitakse siis, kui ringjoone arwu poolmõõtja arwuga kaswatatakse ja kaswatust kahega jautatakse. Saawad poolmõõtja ja ringjoon jalgedega mõõdetud, siis on ringpinna suurus ruutjalad, saawad nad tollidega mõõdetud, siis on pinna suurus ruuttollid j. n. e.

2. Laseme ringi seeläbi sündida, et üks sirge joon iseenese ümber keerutab, siis näeme pea, et ringjoone pikkus poolmõõtja pikkusest määratud saab, on poolmõõtja pikem, siis on ka ringjoon pikem, on ta lühem, siis on ka ringjoon lühem, see on: kahe ringi ringjoonte suurused (pikkused) seisawad ükstõise kohta, nagu nende pool- ehk täismõõtjad. — Et see iga ringi juures nõnda on, wõib igamees aru saada.

Peaks ükskord poolmõõtja pikkust ringjoone pikkuse kohta karwa päält kätte saadama, siis wõiks alati poolmõõtja pikkusest ringjoone pikkust „kriipsus" wälja arwata.

Et aga poolmõõtja sirge joon ja ringjoon kõwer joon on, siis ei wõi poolmõõtjaga mitte karwa päält ringjoone pikkust mõõta. Juba tuhande aastate eest on matematikused töös olnud, täismõõtja suurust ringjoone suuruse kohta äramäärata, ja Arhimedes, kes kolmandamal saja aastal enne Kristust elas, määras täismõõtja suurust ringjoone kohta, nagu 7 : 22be ehk 1 : $3\frac{1}{7}$ku kohta, see on: täismõõtja läheb ringjoone sisse $3\frac{1}{7}$ korda.

Selle arwuga (7 : 22) wõiwad ka kõik igapäised arwamised toimetatud saada, kui mitte karwa pääl täit otsust ei pärita; ringjoon saab aga selle arwuga natukene liig suur wõetud ja niisama ka siis ruutpind.

Täielikumalt juba määras Kölni linna matematikus, nimega Ludolf täismõõtja suurust ringjoone kohta. Ludolfi arwamist mööda on täismõõtja pikkus ringjoone pikkuse kohta, nagu 100 : 314ne kohta (weel täielikumalt 1000 : 3142be, ehk 10000 : 31416ne kohta). On nüüd täismõõtja 1 (toll, jalg j. n. e.), siis on ringjoon 3,14 *), ehk 3,142, ehk 3,1416 j. n. e. Need arwud annawad täismõõtja suurust ringjoone pikuse kohta juba nii selgesti kätte, et esimese arwu juures mitte poolt sajandiku, tõise juures mitte poolt tuhandiku, ja kolmandama juures mitte poolt kümmetuhandiku ei puudu **).

Muidugi wõib nüüd ringjoone pikkust täismõõtja jagudes tääda anda. Seda arwu (1 : 3,14), mis seda tääda annab, nimetatakse leidja nime järele Ludolfi arwuks. Kui nüüd arwamisi lühidalt märkida tahetakse, siis tähendatakse Ludolfi arwu Kreeke keele tähega Π (ütle: pii), poolmõõtjad rga (raadius) ja pinda pga.

3) Kerge on nüüd nende tähtega järeltulewaid ülesandid märkida ja arwata.

a) On poolmõõtja r, siis on ringjoon $2\,r\,.\,\Pi$.

Eeskuju: r (poolmõõtja) $= 5'$; siis on ringjoon $= 2 . 5 . 3{,}14 = 31{,}4 = 31\frac{4}{10}'$.

b) Ringpinna suurus on ringjoone ja tema poole poolmõõtja kaswatus, ehk poole ringjoone ja täie poolmõõtja kaswatus:

$$2\,r\,\Pi\,.\,\frac{r}{2} = \frac{2\,r\,\Pi}{2}\,.\,r = r^2\,\Pi,$$

see on: ringpinna suurust leitakse, kui poolmõõtja tõise astmega Ludolfi arwu kaswatatakse.

Eeskuju: On poolmõõtja 5', siis on ringpind $=$

$$2 . 5 . 3{,}14 . \frac{5}{2}, \text{ ehk} = \frac{2 . 5 . 3{,}14 . 5}{2}, \text{ ehk } 5 . 5 . 3{,}14 =$$

$78\frac{1}{2}\,\square'$.

d) On ringjoon antud, siis leiame poolmõõtjat seeläbi, et meie poolt ringjoont Ludolfi arwuga jagame: $\frac{\text{ringjoon}}{2\,\Pi}$.

Eeskuju: Olgu ringjoon $43\frac{24}{25}'$, siis on poolmõõtja $=$

$$\frac{43\frac{24}{25}}{2 . 3{,}14} = 7'.$$

---

*) Need murrud on kümnendik murrud. — Kuda nendega arwatakse, seda õpetab Kallase „mõistlik rehkendaja" — lehekülg 242 j. n. e.

**) On täismõõtja 1, siis annab 3,1 ringjoont liig pisukese; 3,2 liig suure; 3,14 liig pisukese; 3,15 liig suure; 3,141 liig pisukese; 3,142 liig suure.

e) On ringpind tääda, siis leitakse poolmõõtjat, kui ringpinda Ludolfi arwuga jagatakse ja jau seest tõise astme looja wälja arwatakse.

Eeskuju: On ringpind $153\frac{86}{100}$□', siis on poolmõõtja =

$$\sqrt[2]{\frac{153,86}{3,14}} = \sqrt[2]{49} = 7'.$$

Tähendus. Kuda tõise astme loojat wälja arwatatakse ja et see suurema hulga arwude kallal aga ligikaudu sündida wõib, ei wõi siin mitte õpetatud saada; geometrialiku joonetamise läbi wõib tõise astme looja leitud saada. Olgu poolmõõtja ruut 400□', siis lahutame 400 kaheks kaswatawateks, 100 ja 4, 50 ja 8, 25 ja 16, 20 ja 20 ja joonitatakse üks pikkruut, kelle küljed nende kaswatawate suurused on, nagu 25 ja 16 j. n. e. Seda pikkruutu wõime meie täis ruuduks muuta, siis annab selle täisruudu külg otsitud tõise astme loojat kätte.

4) Siin tahame nüüd weel üksikuid ringpinna jagusid wälja arwata.

a) Poolmõõtjast ja keskpunktiwinklist nende wiu suurust arwata!

Poolmõõtjast arwatakse enne täie ringjoone suurus wälja (360°), ja siis wõetakse ringjoonest nii mitmes jagu, kui mitmes jagu antud winkli suurus 360^{mnest} graadist on.

Eeskuju: Olgu r = 12', keskpunktiwinkel = 36°.

Ringjoon $= 2 . 12 . 3,14 = 75\frac{9}{25}'$

wibu $= 2 . 12 . 3,14 . \frac{36}{360} = 75\frac{9}{25} . \frac{36}{360} = 7\frac{67}{125}'$.

b) Poolmõõtjast ja keskpunktiwinklist ringi wäljalõiget (sektori) arwata!

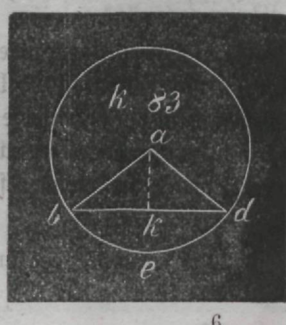
Kõige päält arwatakse ringpind wälja ja wõetakse temast nii mitmes jagu kui wäljalõike keskpunktiwinkel 360^{mnest} graadist on.

Eeskuju: r = 8', keskpunktiwinkel = 45°.

Ringpind $= 8 . 8 . 3,14 = 200\frac{24}{25}$□';

wäljalõige $= 8.8.3,14 . \frac{45}{360} = 200\frac{24}{25} . \frac{45}{360} = 25\frac{3}{25}$□'.

d) Poolmõõtjast, keskpunktiwinklist ja sidujast ringäralõiget (segment) wälja arwata!



Mil kombel ringwäljalõiget arwati, nägime üleval. Ringäralõige on wäljalõikest üks osa. Eeskujuks olgu äralõige *bdeb* (kuju 83) wälja arwata. — Kõige päält arwatakse ringwäljalõike *bade* suurus wälja, siis kolmnurga *bad* suurus, see läbi, et meie põhjusjoone (siduja) pikkusega poolt kõrgust ($\frac{1}{2}\, ak$) kaswatame, ja siis kolmnurga saadut suurust wäljalõike suurusest ära wõtame. Seega jääb siis äralõike suurus järele.

Ülesanded wälja rehkendamiseks. *)

1) Kui suur on ringi ringjoon, kui poolmõõtja 6′ on? ($37\frac{17}{25}$′).

2) Kui suur on ringjoon, kui tema täismõõtja 5′ 10″ pikk on? (18′ $3\frac{4}{5}$″).

3) Kui pikk on ringi täismõõtja, kui tema ringjoon 50′ pikk on? ($15\frac{145}{157}$′).

4) Kui pika peab puusepp ümmarguse laua tegema, kelle ümber 12 inimest istuda wõiwad ja iga inimesele $2\frac{1}{2}$′ ruumi arwatakse? ($9^{87}/_{157}$′).

5) Wankre esimeste rataste täismõõtja on 3′, tagumiste $4^1/_2$′; mitu korda käiwad tagumised oma telje ümber, kui esimised 1000 korda ümber käiwad? ($\frac{1000 . 3}{4^1/_2} = 666^2/_3$ korda.)

6) Kui suur on laua pind, kui tema täismõõtja 5′ on? ($19^5/_8$ □′).

7) Kui suur on weski wesiratta poolmõõtja, kui temal 86 kühwellauda on ja iga kühwellaud ükstõisest 6″ kaugel seisab? (6′ $10^{26}/_{157}$″).

8) Sihilaskmise laua sisemine musta ringi täismõõtja on 6″, kõige täie laua läbimõõtja 3′; kui suur on täie laua, kui suur musta ringi pind? (täie laua pind 1017,36 □″; musta ringipind 1017,36 — 28,26 = 989,10 □″ = 6 □′ $125^1/_{10}$ □″).

9) Ringi täismõõtja on 15′, ruudu külg on niisama pikk; kuda seisawad mõlemate ringsuurus, kuda mõlemate pinnasuurus ükstõise kohta? (471 : 600 ja $176^5/_8$: 225.)

10) Ringi täismõõtja olgu 5″; tõise ringi täismõõtja 20″. Kuda seisawad nende kahe ringi täismõõtjad, kuda nende ringjooned, kuda nende pinnasuurused ükstõise kohta? (Nagu 1:4ja; 1:4ja; 1:16mne kohta).

Üheksas päätükk.

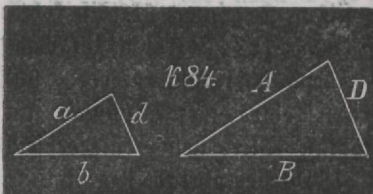
Ühenäulised kujud.

1. On ühel inimesel seda moodi silmad, nina, suu, juuksed j. n. e. nagu tõisel, siis öeldakse: tema on tõise nägu. Niisama ühe inimese kuju (pilt) inimese enese näuline, — sarnane. On inimese enese nägu ümargune, pikergune, teraw; siis peab ka tema kuju ümargune, pikergune, teraw olema; see on: näu worm peab kuju wormiga ühte

---

*) Need ülesanded on siin Ludolfi arwuga arwatud; kes tahab wõib 7:22 ka arwata.

moodi olema. Kui see nõuda on, siis ütleme meie: nad on ühenäulised, ühesarnatsed. Selsamal kombel räägime meie ka ühenäulistest kujudest. Kaks kolmnurka on ühte nägu, kui neil üks worm, kui nad ühtemoodi, kui nende winklipaarid ühed on. Kui aga kolmnurkadel kaks winklipaari ühed on, siis teame ka, et kolmas winklipaar üks on; siis saab meile küllalt sellest, et kaks winklipaari ühed on, kui tahame tääda saada, kas kolmnurgad ühenäulised on. Kahest ühenäulistest kolmnurkadest (kuju 84) wõime pisemat nõuda suurema pääle lükata (lükkatud mõelda), et pisema kolmnurga üks winkel suurema kolmnurga ühte winkelt katab. Siis on mõlemate kolmnurkade küljed, kes ühesuguste winkelte wastu seisawad, kõrwulised. Ja kui a joon pool wõi kolmandik A joonest on, siis on ka b joon pool wõi kolmandik B joonest, ja niisama ka d joon D joonest. Ühte moodi seisjad küljepaarid on ühenäulistel kolmnurkadel ühesuguses seisus üksteise kohta: $a:A = b:B = d:D$ ja seega ka



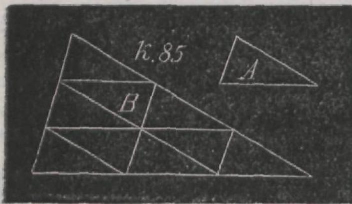
$$a:b = A:B;\ a:d = A:D;\ b:d = B:D.$$

Kui mitmes jagu ühe kolmnurga üks külg tõise kolmnurga, seda sama wiisi seiswast küljest on, niisama mitmes jagu on ka selle kolmnurga tõine ja kolmas külg sedasama wiisi seiswatest tõise kolmnurga külgedest. On a 3" ja A 6", b 2", d $1\frac{1}{2}$", siis on ka B 4" ja D 3". Kahe ühenäuliste kolmnurkade ümberringid seisawad üksikute (kohastiku seiswate) küljepaaridega, niisama nagu ühesugused winklipaarid kohastiku seiswa küljepaaridega wõrdluses (proportsionis).

See kestab aga üksi kolmnurkadest, ei mitte neli- ja paljunurkadest. Kahel neli, wiis-, kuusnurgal j. n. e. wõiwad küll ühed winklipaarid olla, ilma et kohastiku seiswad küljepaarid wõrdluses on. Seda nääme pea, kui mitmesugusid pikkruuta joonitame. Neil on küll ühesugused winklipaarid, aga nende küljepaarid ei prugi sugugi üksteisega wõrdluses olla. Täisruudul on pikruuduga ühed winklid, aga pikruudu küljed ei seisa täisruudu külgedega mitte wõrdluses.

Kui 2 neli- ehk paljunurka ühenäulised peawad olema, siis peawad winklipaarid ühed, ja kohastiku seiswad küljepaarid wõrdluses olema.

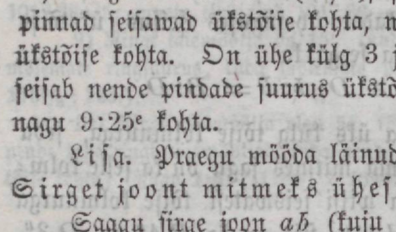
2. Olgu A ja B (kuju 85) ühesuguste winklitega (seega ühenäulised) kolmnurgad, ja kolmnurga A küljed olgu kolmnurga B kohastiku seiswaist külgedest kolmas jagu (kolmandik), siis wõib B kolmnurka, tema külgede jautamise ja kõrwujoonte tõmbamise läbi kolmnurkadeks teha, kellest igaüks A kolmnurgaga üks on. Meie nääme, et B kolmnurgast 9 A kolmnurka saadakse. Sellest on siis näha, et kui kahe ühenäulise kolmnurga kohastiku seiswad küljed ükstõise kohta nagu $1:3^{me}$ kohta seisawad, siis nende pinnad ükstõise kohta nagu $1:9 = 1:3\,.\,3^{e}$ (kohta) seisawad.



Niisama leiame pea, et kui kahe ühenäuliste kolmnurkade küljed ükstõise kohta seisawad, nagu $1:4^{ja}$ (kohta), nende pinnad siis ükstõise kohta seisawad nagu $1:16^{ne}$ (kohta). Oleks nende külgede seis ükstõise kohta nagu $2:3^{me}$ (kohta), siis oleks nende pindade seis ükstõise kohta nagu $2\,.\,2:3\,.\,3^{me}$ (kohta), see on: kahe ühenäuliste kolmnurkade pinnad seisawad ükstõise kohta, nagu nende külgede tõise astme suurus ükstõise kohta. On ühe külg 3 ja tõise kohastiku seisaw külg 5, siis seisab nende pindade suurus ükstõise kohta, nagu $3\,.\,3 = 5\,.\,5^{e}$, ehk nagu $9:25^{e}$ kohta.

Lisa. Praegu mööda läinud kuju juhib meid selle õpetuse pääle: **Sirget joont mitmeks ühesuuruseks jauks jautada.**

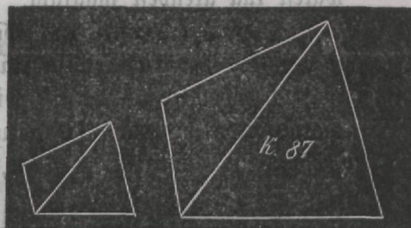
Saagu sirge joon ab (kuju 86) **wiieks** ühesuguseks jauks jautatud. — Paneme ab külgi a punktisse priitahtlikult ühe winkli, teeme ai pääle wiis ühesuurust jagu (kui pikka tahes) $ad = de = eg = gh = hi$, ühendame i punkti b punktiga ja tõmbame h, g, e ja d punktidest kõrwujooned ib^{sa}. Need kõrwujooned jautawad ab joont wiieks ühesuurusteks jagudeks. Sest



$$ad:de = ak:kl$$
$$ad = de$$
$$ak = kl$$
$$ae:eg = al:lm$$
$$ae = 2\,eg$$
$$al = 2\,lm$$
$$\left.\begin{array}{c}\frac{al}{2}\\ = \\ kl\end{array}\right\} lm$$
$$ak = kl = lm \text{ j. n. e.}$$

3. Kaks ühenäulist kuju wõib kohastiku seiswa nurkjoonte läbi kolmnurkadeks teha. Kumbki neist kahest ühenäulistest kolmnurkadest seisawad ükstõise kohta nagu nende nurkjoonte tõised astmed, ja need jälle kumbki nagu nende kohastiku seiswa külgede tõised astmed ükstõise kohta; seega seisawad ühenäuliste kujude pinnad ülepää ükstõise kohta nõnda, nagu nende kujude kohastiku seiswa külgede tõise astma arwud.

Näituseks seisku (kuju 87) kahe ühesnäuliste kujude kaks kohastiku seiswat külge ükstõise kohta, nagu 3:7me (kohta), siis seisawad nende pinnad ükstõise kohta, nagu 3 . 3:7 . 7me, ehk nagu 9:49 (kohta); suurema kuju külg oli aga $\frac{7}{3}$ ehk $2\frac{1}{3}$ korda nii suur, kui pisema kuju kohastiku seisaw külg; aga suurema kuju pind on $5\frac{4}{9}$ korda nii suur kui pisema kuju pind. Pindade suurus kaswab siis hoopis rohkem, kui külgede suurus; pindade suurus kaswab tõise astme arwudega, kui külgede suurus ühekordselt kaswab.



4) Ühenäuliste kujude abiga wõiwad mitmed tükid wälja arwatud saada, kelle arwamised muidu suurt tööd päriksiwad.

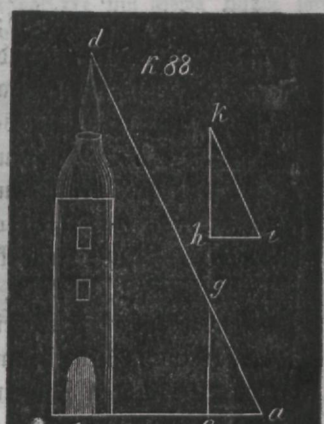
a) Torni kõrgust määrata, kelle otsa ei wõi maast minna.

Kaalus joone ab pikkus (kuju 88) torni jala juures mõõdetakse ära ja tehakse paberi pääl lühendatud mõõdu abiga $ab = ih$ (lühendatud), mõõdetakse winklimõõduga (malliga $\angle\, bad = \angle\, hik$, pannakse hi pääle h punktisse lood hk.

Siis on $\triangle\, ihk \backsim$*) $\triangle\, abd$

$ih : hk = ab : bd,$

ih, hk ja ab suurus on tääda; seega ka bd suurus. Olgu nüüd $ih = \frac{3}{4} hk$, $ab = 60'$, siis on $ab = \frac{3}{4} bd$, ehk $bd = \frac{4}{3} . 60 = 80'$.



*) Märk „$\backsim$“ tähendab „ühenäuline.“

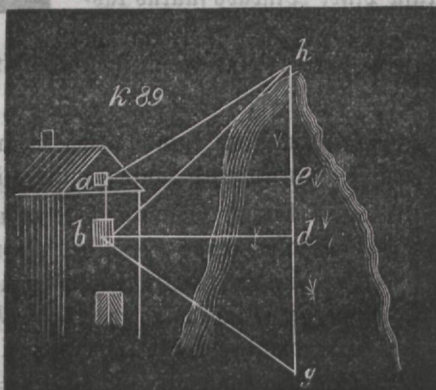
Tähendus. Pistetakse teiwas maa sisse loodi ja pannakse ühes ka torni warju, keda mõõta tahetakse ja teiwa warju tähele, siis sünniwad, et päikese kiired kõrwulised on, kaks ühenäulist kolmnurka, ja siis seisab teiwa warju pikkus teiwa pikkuse kohta niisama, nagu torni warju pikkus torni pikkuse kohta.

Eeskuju: On teiwa wari $6^2/_3{}'$, teiwa enese pikkus $3^3/_4{}'$, torni wari 240', torni pool paksust 10'. Kui pikk on torn?

$(\frac{20}{3} : \frac{15}{4} = (240 + 10) : X.\ (X = 140^5/_8{}')$.

b) Ühe koha (puu, mäe) kõrgust kahest kohastiku ükstõise pääl seiswatest tua akendest määrata.

Olgu *hd* (kuju 89) mõõdetaw kõrgus, mis kahest aknast *a* ja *b*, kes loodis tõinetõise pääl seisawad, toimetatud peab saama. Mõõdetakse *a* punktist winkel *hae*, mis mäe otsast tõmmatud sirge joone *ah* ja kaalusjoone *ae*[8a] sünnib; selle pääle mõõdetakse *b* punktist $\angle\, hbd$, keda sirge joon *bh* ja *bd* teewad; kõige wiimaks mõõdetakse sirge joone *ab* pikkus.



Et nüüd $\angle\, hab$ tääda on, siis on ka $\angle\, hae + eab = \angle\, hae + L = hab$ tääda; ka $\angle\, abd - \angle\, hbd = L - \angle\, hbd = \angle\, abh$. Nüüd täädakse kolmnurgas *hab* *ab* külge ja mõlemad selle külje külges seiswaid winklid; ja nüüd wõib lühendatud mõõdu ja winklimõõduga ühte kolmnurka walmistada, kes *hab* kolmnurgaga ühenäuline on. See läbi leiame *bh* pikkuse. Nüüd tunneme *bhd* kolmnurgas *bh* külge, *hbd* winkelt ja *hdb* = loodwinkelt, mis läbi *hd* pikkust määrata wõime. Tahme mäe kõrgust *g* punktini tääda saada, siis mõõdetakse weel $\angle\, dbg$, ja nüüd teame *bdg* kolmnurgas *bd* külje ja selle külje külges seiswat 2 winkelt. Seeläbi on ka *dg* külg määratud. Seega tääme $hd + dg$, see on: mäe täit kõrgust *g* punktist kuni *h* punktini.

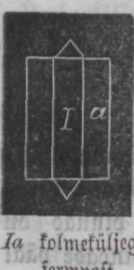
B. Stereometria.

(Kehade mõõtmine.)

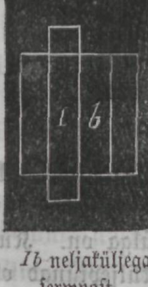
Kehaks nimetatakse kõiki seda, mis ruumi tarwitab. Igal kehal, olgu tema mihukene tahes, on kolm lautust: **pikkus**, **laius** ja **kõrgus**. — Meie ei räägi siin mitte igasugustest, waid üksinda korralistest kehadest ja nende mõõtmisest. — Korralised kehad on:

1. **Kandiline sammas** (serwpost ehk prisma), 2. **kuubus** (täring, kantius), 3. **ümargune sammas** (toro ehk tsülinder), 4. kandiline kuhi (**terawpost** ehk püramid), 5. **ümargune kuhi** (trehter), 6. **kuul**.

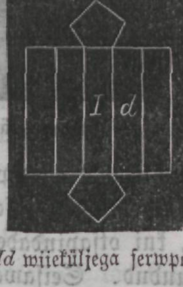
Tähendus. Et need kehad ja nende nimed mitte igaühele tutwad ei ole, siis paneme nende wälimised wõrgud (kujud) siia ülesse. Nende wõrkude järele wõib igamees kergel kombel kehasid walmistada. Koolilastele on see tulusaks toimetamiseks, kui nad **ise** siin seiswa kujude järele kehasid koolis paksust paberist walmistawad.



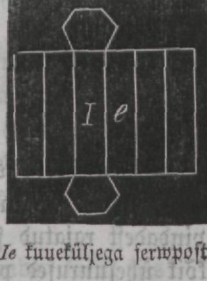
Ia kolmeküljega serwpost



Ib neljaküljega serwpost

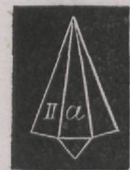


Id wiieküljega serwpost

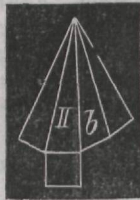


Ie kuueküljega serwpost

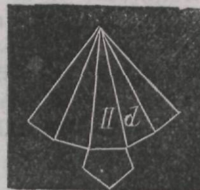
kandilised sambad ehk prismad.



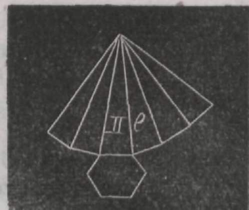
IIa kolmekülje-line terawpost



IIb neljakülje-line terawpost

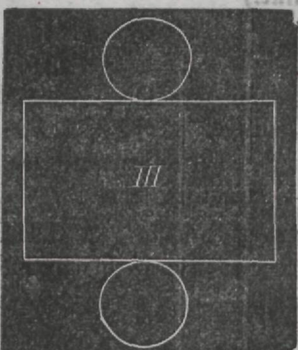


IId wiieküljeline terawpost

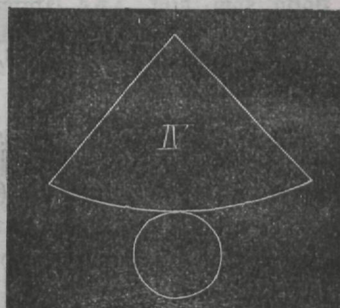


IIe kuueküljeline terawpost

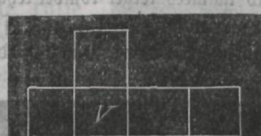
kandilised kuhjad ehk püramidid.



III ümargune sammas (toro ehk tsülinder).



IV ümargune kuhi (trehter).



V kuubus (täring).

Kandiliseks sammaks (serwpostiks) nimetatakse igaühte niisugust keha, kes kahest kõrwulistest otsa pindadest ja niimitmest küljepindadest rajatud saab, kui otsapindadel külga on. Külje pinnad on kõik ühesuurused pikkruudud. Seisawad küljepinnad otsapindade pääl loodis, siis on ta loodis kandiline sammas, muidu wiltu kandiline sammas.

On loodis serwpostil neli ühesuurust täis ruutu küljepindadeks ja kaks niisama suurust täisruutu otsapindadeks, siis hüütakse niisugust serwposti **kuubuseks** ehk **täringiks**.

On serwposti otsapinnad ka pikkruudud, siis nimetatakse teda **parallelopiipidiks**.

Ümargune sammas (toru ehk tsülinder) on niisugune keha, kelle kaks otsapinda ühesugused kõrwu seiswad ringpinnad on, ja kelle külg kõwerpind on. Küljepinna pääle wõiwad aga ühes sihis (ülewalt alla ja alt ülesse) sirged jooned tõmmatud saada, tõised jooned on kõik kõwerad. Seisab küljepind loodis otsapindade pääl, siis on see sammas loodis sammas, muidu wilto sammas.

Terawpostiks (kandiliseks kuhjaks ehk püramiidiks) nimetatakse ühte keha, kes rajatud saab ühest mitmenurgelisest, sirgeküljelisest põhjuspinnast ja niimitmest ühesugustest küljepääl seiswaist kolmnurkadest, nagu põhjuspinnal külga on, kelle otsad kõik terawas otsas ühendawad.

Ümargune kuhi (trehter) on üks keha, kellel üks ringpind põhjuspinnaks ja üks kuhja moodi külje pind on. Kõwera küljepinna ots on teraw.

Kuuliks hüütakse keha, kes ühest kõwerast pinnast rajatud saab ja kelle punktid kõik keskpunktist ühekaugusel on.

Kuda need kolm keha: Ümargune sammas, ümargune kuhi ja kuul sündida wõiwad, wõib sellest aru saada, kui arwame:

et üks pikkruut ühe oma külje ümber ringi pöörab, siis sünnib loodis toro ehk ümargune sammas;

et loodwinkline kolmnurk ühe oma loodkülje ümber pöörab, siis sünnib üks ümargune kuhi (trehter), mis loodis on;

Kui poolring oma täismõõtja ümber pöörab, siis sünnib kuul.

Ümberkäija pikkruudu paigal seisaw külg on toru wõi ümarguse samba telg, telje ringpinnalised otsad on tema põhjuspinnad, telje wastuseisaw külg, kes ümber käis, sünnitas toru küljepinda. Iga punkt, mis meie ümberkäija pikknurga küljejoone sees arwame (arwate wõime, tahame), teeb ühe ringjoone, kes otsaringide ringjoonte suurune on, nendega kõrwuline on. Kui toru ühest neist mõeldud kõrwujoontest läbilõigatatakse, siis sünniksiwad 2 toru.

Kui loodwinkliline kolmnurk oma ühe loodkülje ümber käib, siis on seisaw loodjoon loodis seiswa trehtre telg, tõine ümberkäija loodkülg sünnitab trehtre põhjuspinda, kolmas kolmnurga külg (hüpotenuus) teeb trehtre külge ehk mantelt. Iga sirge joon, kes kolmnurga sees seisab ja ümberkäija loodjoonega kõrwuline tõmmatud arwatakse, sünnitab trehtre põhjusjoonega kõrwulise ringi, kes seda pisem on, mida ligemal tema trehtre terawa otsa juures seisab. Lõikaksime meie trehtre selkombel kaheks, et lõige põhjuspinnaga kõrwuline oleks, siis saaksime kaks trehtert, kellest alumine tõmp ja päälmine, päris trehter ise, teraw oleks. Laseksime meie ühe töntswinklilise kolmnurga oma ühe (selle külje ümber, kes tömpwinkelt sisse piirab) külje ümber ringi käija, siis sünniks üks keha, kelle keskkoht üks õõnes trehter oleks ja kelle mantel sellest küljest sünnitud saab, kes tömpwinkle wastu seisab. Pööraksime meie tõmpwinklilist kolmnurka selle külje pääl ümber, mis tömpwinkli wastu seisab (kõige pikema külje ümber), mis sünniks siis? — ja mis siis, kui terawwinklilist kolmnurka ühe külje ümber pööraks?

Pöörab poolring oma paigalseiswa täismõõtja ümber, siis sünnib üks kuul; poolringi pind sünnitab ümberkäijes kuuli ruumi, poolringi wibu kuuli pinda. Iga sirge joon, mis täismõõtja pääl loodis on ja ringjooneni ulatab, teeb ringi, kelledest see ring kõige suurem on, kes keskpunkti kõige ligemal on ja see kõige pisem, kes keskpunktist kõige kaugemal seisab. On paigalseisaw täismõõtja kuuli telg, siis on tema otsapunktid poolid (nabad), kõige suurem ring ekwaator (poolitaja) ja temaga kõrwulised ringjoonend kõrwujooned (laiuse- ehk kõrguse-jooned), kelledest pöörijooned (kaljukitse- ja wähipöörijooned) $23\frac{1}{2}^{0}$ poolitajast eemal (üks põhja, tõine lõunapool) seisawad ja nabajooned $66\frac{1}{2}^{0}$, ehk $23\frac{1}{2}^{0}$ nabapunktidest kaugel on.

Ruumi, mis kehad tarwitawad, nimetatakse kant- ehk kupits-ruumiks, sellepärast, et seda ruumi kantidega, kas kantwerstadega, kantsüldadega, kantjalgadega ehk kanttollidega j. n. e. määratakse. Kantjalg on niisugune täring, kelle küljed üks jalg pikad, laiad ja kõrged on. Arusaadaw on ju muidugi, et keha, kes ka mitte kantjala moodi ei ole, niisama palju ruumi wõib tarwitada, kui üks päris kupitsjalg ehk kantjalg j. n. e.

1. Täringi (kuubuse) ruumi arwamine.

Olgu meil üks täisruut, kelle küljed 2 tolli pikad on, siis on selle täisruudu pind 4 ruuttolli. Tahetakse selle täisruudu pääle üks kuubus asutada, siis peab kaks neljakanttolilist kihti selle täisruudu pinna pääle pandama. Terwe täring (kuubus) on seega 8 kanttolli suur; põhjus-pind oli 2 . 2 ruuttolli ja täring ehk kuubus oli 2 . 2 . 2 kanttolli. Oleks ühe täringi külg 3 tolli pikk, siis oleks tema põhjuspind 3 . 3 = 9 ruuttolli ja tema kantsuurus 3 . 3 . 3 = 27 kanttolli olema. Tahetakse siis täringi (kuubuse) kantruumi leida, siis kaswatatakse seda arwu, kes ühe külje pikkust kätte annab, tema enesega 3 korda; ehk wõetakse küljepikkuse kolmandama astme arwu. Oliwad kuubuse pikkus salad, süllad, werstad j. n. e., siis tulewad ka wälja kantsalad, kantsüllad, kantwerstad j. n. e.

Lisa 1. Mitu kantsalga on seitsmesalases- ja kuuesalases kant-süllas? Mitu kanttolli kantsalas?

$$1^0 = 7' \qquad\qquad 1^0 = 6'$$

$$1\,k^0 = 7\,.\,7\,.\,7 \qquad 1\,k^0 = 6\,.\,6\,.\,6$$

$$= 343\,k' \qquad\qquad = 216\,k'$$

$$1' = 12'' \qquad\qquad 1' = 12''$$

$$1\,k' = 12\,.\,12\,.\,12 \qquad 1\,k' = 12\,.\,12\,.\,12$$

$$= 1728\,k'' \qquad\qquad = 1728\,k''$$

$1\,k^0 = 343\,.\,1728 = 592704\,k''$ seitsmesalane.
$1\,k^0 = 216\,.\,1728 = 373248\,k''$ kuuesalane.

Lisa 2. Ühe terwe kuubuse pind on 6 korda nii suur kui tema ühe küljepind.

Lisa 3. Kui kuubuse kantsuurus tääda on, ja tahetakse tema ühe külje pikkust kätte saada, siis peaks seda arwu kolmeks ühesuurusteks kaswatawateks lahutatama; nagu $1000 = 10\,.\,10\,.\,10^{\text{neks}}$; $1728 = 12\,.\,12\,.\,12^{\text{mneks}}$; $343 = 7\,.\,7\,.\,7^{\text{meks}}$. Et seda aga kõige arwudega teha ei wõi, wõib katsumise läbi pea nähä. Ligikaudu saadakse teda kolmanda astme looja otsimisega kätte.

2. Serwposti (kandilise samba) ruumi arwamine.

Eespool ütlesime juba et täringit wõi kuubust ka neljaserwaliseks serwpostiks wõime nimetada. Arwame nüüd, et neljaserwalise serw-posti põhjuspind (ots) niisama suur oleks, nagu täringi üks küljepind; siis saaksime tema kantsuuruse kätte, kui tema põhjuspinna suurust (arwu) serwposti pikkusega (pikkuse arwuga) kaswataksime.

Arwaksime nüüd kuubuse põhjuspinna pääl ühte wiltu parallelo-piipit seiswa, kelle kõrgus kuubuse kõrguse suurune on, siis pärib see wiltu seisaw parallelopiip niisama palju ruumi, kui kuubus. Temaga on seesamasugune lugu nagu lood- ja wiltuwinklilise ruududega, kellel ühesuurune kõrgus ja põhjusjoon on. Serwpostid ülepää, kellel ühesuurused põhjuspinnad ja ühesuurused kõrgused on, päriwad ühe palju ruumi. Kui ka niisugustel serwpostidel mitte ühe palju külga ei ole, waid üks wiie-, teine kuue j. n. e. küljeline on, kui nende põhjuspindade suurus wälja arwatakse ja seda posti pikkusega kaswatatakse. Lühidelt: serwposti kantsuurust saadakse, kui põhjuspinda kõrgusega kaswatatakse.

Näitus: Parallelopiipi põhjuspind olgu 6′ pikk, 4′ lai ja post olgu 20′ kõrge; siis on serwpost 6 . 4 . 20 = 480 kantjalga suur.

Lisa 1. Kui loodis parallelopiipi pind (pinna suurus) määratud peab saama, siis on aga tarwis, sest et wastasseiswad küljepinnad ühed on, põhjuspinda ja kahe ühesseiswa küljepindade suurust wäljaarwata ja seda summa kahega kaswatatada.

Näitus. Oleks neist kolmest ühtekokku jookswaist parallelopiipi serwjoontest üks 5′, teine 6′ ja kolmas 8′ pikk, siis oleks parallelopiipi pind 2 . (5 . 6 + 5 . 8 + 6 . 8) = 2 . 118 = 236 □′.

Lisa 2. Pool kantsülda puid oleks üks serwpost, mis 7′ pikk, 7′ lai ja $3\frac{1}{2}$′ kõrge, siis oleks tema $7 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} = 171\frac{1}{2}$ kantjalga.

3. Ümarguse samba (toru) ruumisuuruse arwamine.

Ringi wõime paljunurga sarnatse arwata, kellel arwamata palju külga on, ümarguse samba wõime serwpoisti suguse arwata, kellel otsata palju küljepindasi on. Ümarguse samba kantsuurust saadakse seega, kui põhjus pinna suurust kõrgusega kaswatatakse. Loodis ümarguse samba telg on tema kõrgus, ühe wiltu ümarguse samba telg on pisem.

Näitus: Ümarguse samba (toru) põhjuspinna täismõõtja olgu 3′, tema kõrgus 20′; kui suur on tema kantruum?

Esmalt arwatakse samba põhjuspinna suurus ruutjalgades wälja ja kaswatatakse selle ruutjalge arwuga seda arwu, mis kõrgus kätte annab; sellega saadakse siis samba kantjala suurus kätte.

Posti põhjuspinna täismõõtja on 3′, ringjoon 3,14 . 3 = 9,42′, põhjuspind $9{,}42 \cdot \frac{3}{4} = 7{,}065$ □′. Ruumi suurus seega 7,065 . 20 = 141,3 *k*′.

Lühemalt: poolmõõtja tõise astmega kaswatatakse Ludolfi arwu ja seda saaki samba kõrgusega.

$(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 141{,}3$ kantjalga).

Lisa 1. Põllurulli otsapinna täismõõtja on 1', tema pikkus 7'; kui suur on põllurulli kantsuurus? (poolmõõtja olgu r ja kõrgus k)

$(r^2 \Pi \cdot k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 7 = \frac{1^{(2)}}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 7 = 5\frac{99}{200}$ k').

Lisa 2. Weskikiwi täismõõtja on 4', tema paksus 10"; wõlli tühi ruum (pilliauk) keskpaigas on neljakandilise posti sarnane, kelle põhjuspind 9" pikk ja lai kelle kõrgus 8" on. Kui suur on weskikiwi kantruum?

Weskikiwi saab nagu ümarguue sammas arwatud ja tühi ruum (pilliauk) keskpaigas kui parallelopiip temast maha arwatud.

$$
\begin{array}{rl}
2' = 24"; \; 24 \cdot 24 \cdot 3{,}14 \cdot 10 & = 18086{,}4 \text{ k}" \\
9 \cdot 9 \cdot 8 & = 648 \text{ k}" \\
\hline
\text{weskikiwi } 17438{,}4 \text{ k}" & = 10 \text{ k}' \; 158{,}4 \text{ k}".
\end{array}
$$

Lisa 3. Ühe marjawiina aami ruumi suurust wälja arwata!

Kõige päält mõõdetakse põhja täismõõtja ja punni august aami keskpaiga täismõõtja (sest aam on keskpaigast jämedam), arwatakse mõlemate läbimõõtjate (täismõõtjate) suurus (pikkus) kokku ja jagatakse seda kahega, seega saadakse aami keskmine paksus kätte ja arwatakse aami nüüd päris ümarguseks sambaks.

Näitus. aami põhja täismõõtja = 3'
punni august täismõõtja = 3' 4"

aami keskmine paksus (täismõõtja) = 3' 2"
aami pikkus = 6'

keskmine põhja poolmõõtja = $\frac{3' \; 2"}{2}$ = 19."

aami kantruum = $19 \cdot 19 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 12 = 81614{,}88$ k" = $\frac{81614{,}88}{1728}$ k' = 47 k' 398,88 k".

4. Terawposti (püramiidi) ruumi arwamine.

Kolmeküljelist serwposti wõib ruumi poolest kolmeks terawpostiks teha (seda nääb igamees silmaga!) Iga niisugune terawpost on siis kolmas osa ühest niisugusest serwpostist (kandilisest sambast). Et nüüd nelja-, wiie- ja paljukülgelist serwposti kolmekülgelisteks serwpostideks wõib jautada, siis kestab kõikide kohta see õpetus: terawpost (oma ruumi poolest) on kolmas osa serwpostist, kellel ühesuurused põhjuspinnad ja ühed kõrgused on. Terawposti ruumisuurust saadakse siis kätte, kui tema põhjuspinda tema kõrgusega kaswatatakse ja seda kaswatust kolmega jagatakse.

Näitus: Terawposti põhjuspind olgu üks pikkruut, kelle küljed 10′ ja 6′ pikkad on; terawposti kõrgus (lood terawast otsast põhjuspinna pääle) olgu 18′. Kui suur on terawposti ruumisuurus?

Wastus: $\frac{10 . 6 . 18}{3} = 360$ kantjalga.

Tähendus. Et üks serwpost kolmeks terawpostiks jautatud wõib saada, ehk et terawpost kolmandik serwpostist (kellel ühesuurune põhjus ja kõrgus) on, wõib ka kaaluga katsuda. Muidugi peawad mõlemad (serwpost ja terawpost) ühest puust tehtud saama. Seesama kestab ka ümargusest sambast ja trehtrest. Ka selkombel wõib seda katsuda, kui serwpost ühe riista sisse pannakse, ja riista weega täidetakse, — selle järele 3 terawposti (iseenesest mõista, et serwpostil ja terawpostil ühesuurune põhjuspind ja kõrgus peab olema) selle sama riista sisse, kus enne serwpost sees oli, siis saab riist jälle niisama täis, nagu ka serwposti ajal oli.

5. Kuhja (trehtre) ruumi arwamine.

Kuhja wõib terawposti sarnane arwata, kelle põhjuspinnal otsata palju külga on. Tema ruumisuurus on siis ka kolmas osa põhjuspinna ja kõrguse kaswatawast.

Näitus. Kartohwli unikn kõrgus (mis kuhjawiisi kokku on lükatud) olgu (loodis otsast põhjuspinna pääle) 6′, tema täismõõtja (maa pääl) 10′. — Kartohwli uniku ümbrus (ringjoon) on siis $10 . 3{,}14 = 31{,}4$, põhjuspind $31{,}4 . 2 = 62{,}8$ □′, kartohwli uniku kantruum $\frac{62{,}8 . 6}{3} = 125{,}6$ kantjalga.

Lühemalt: $\frac{r^2 \Pi . k}{3} = \frac{5 . 5 . 3{,}14 . 6}{3} = 125\frac{6}{10}$ k′.

Lisa. Loodis-kuhja küljepinda ehk mantelt wõime lahti lahutatud arwata. Siis saab kuhja (trehtre) küljepinnast ringwäljalõige, kelle wibu põhjuspinna ringjoon ja kelle kõrgus trehtre küljejoon on. Nüüd pruugitakse aga wiujoont küljejoonega kaswatada ja kaswatust kahega jagada, kui trehtre küljepinna suurust leida tahetakse.

6. Kuuli ruumi arwamine.

Nagu enne ju nägime, wõime kuuli sel kombel sündinud arwata, et poolringi oma enese täismõõtja ümber pöörame. Kuuli kõige suuremad ringid on need, kelle keskpunktid kuuli keskpunktiga ühte langewad; tõised ringid kuuli pääl on kõik pisemad. Poolitaja ja lõuneringid (meridianid) maakera pääl on kõige suuremad ringid; pööri- ja pooliringid on pisemad. Mida kaugemal ringjooned kuuli keskpunktist on, seda pisemad nad on, mida ligimal keskpunktile, seda suuremad.

Arwaksime meie kuulipinda (koort) õieti pisukesteks kujudeks jaotatud, nõnda et meie neid peaaegu tasapinnalisteks kujudeks wõiksime pidada, ja nende kujude winklipunktidest sirged jooned kuuli keskpunktisse tõmmatud, siis saaksime hulga terawposta, kelle ruumide summa kuuli ruumiga üks oleks. Et nüüd kõik terawpostid kokku ühe terawposti suurused on, kelle kõrgused ühed ja kelle põhjuspindade summad selle ühe terawposti põhjuspinna suuruue on; siis saaksime kuuli ruumisuurust kätte, kui kuulipinda kuuli poolmõõtja kolmandama jauga kaswataksime.

Nüüd oleks meil aga seda tarwis tääda, kuuda kuulipinna suurust määrata wõib.

Õpetatud mehed on seda wälja arwanud et kuulipind just 4 kord nii suur on, kui sellesama kuuli kõige suurem ringpind. Kuuli kõige suurem ringpind on aga see, kelle täismõõtja kuuli täismõõtjaga üks on.

Näitus. Oleks ühe kuuli poolmõõtja $= 10'$, siis oleks selle kuuli kõige suurem ringjoon $= 20 \,.\, 3{,}14 = 62{,}8'$; kõige suurema ringpinna suurus $= \frac{62{,}8 \,.\, 10}{2} = 314$ ruutjalga; kuulipind $= 4 \,.\, 314 =$ $1256 \,\square'$; kuuli kantruum $= \frac{1256 \,.\, 10}{3} = 4186\frac{2}{3}$ kantjalga.

Lühemalt: $\frac{r^2 \Pi \,.\, 4 \,.\, 10}{3} = \frac{100 \,.\, 3{,}14 \,.\, 4 \,.\, 10}{3} = 4186\frac{2}{3}\ k'$.

Lisa. Kuuli kõige suurem ring on $r^2 \Pi$. Seda neli kõrda wõtta, annab kuulipinna suurust $4\, r^2 \Pi$. Neli korda poolmõõtja tõist astmet on täismõõtja tõine aste. Kui kõige lühemal teel kuulipinda leida tahetakse, kaswatatakse täismõõtja tõist astmet Ludolfi arwuga ja kui seda kaswatust poolmõõtja kolmandama jauga kaswatatakse, siis saadakse kuuli ruumi suurust kätte. Ülemise tüki sees oli pind $20 \,.\, 20 \,.\, 3{,}14 = 1256 \,\square'$, kantsuurus $\frac{1256 \,.\, 10}{2} = 4186\frac{2}{3}\ k'$.

Ülesanded.

1. Tua kantruumi arwata. Mõõdetakse tua pikkus, laius ja kõrgus ja kaswatatakse neid arwusid ükstõisega. (Iseenesest on mõista, et kõik arwud ühe nime all peawad olema, kas kõik süllad, jalad, tollid j. n. e.)

2. Kraaw, mis 80' pikk, 10' lai, 6' sügaw peab mullaga täidetud saama. Iga koormaga kantakse 5 kantjalga mulda ja maksab koorem $33\frac{1}{3}$ kopp. Kui suur on kraawitäitmise kulu?

Kraawi kantruum on $80 . 10 . 6 = 4800$ kantjalga; koormate arw $= \frac{4800}{5} = 960$; hind $960 . \frac{1}{3}$ rbl. $= 320$ rubla.

3. Mitu telliskiwi läheb müüri tarwis, kui müür 60' pikk, 10' kõrge, 3' paks on ja iga kiwi lubjaga kokku ühe augu täidab, mis 6" pikk, 3" lai ja 2" paks on? ($\frac{60 . 10 . 3 . 1720}{6 . 3 . 2} = 86400$ kiwi).

4. Maakera pinna- ja ruumisuurust wälja arwata.

Meie maakera ümbrus (poolitaja ehk ekwaator) on 5400 penikoormat; täismõõtja sega 1719 ehk täie kümnetega 1720 peenikoormat. Kõige suurema ringi pind seega $\frac{5400 . 1720}{4}$ ja kuulipind nelja wõrdne $=$ 9288000 ruutpenikoormat. Kuuli suurus $= \frac{9288000 . 860}{3} =$ 2662560000 kantpenikoorm.

Lisa.

Ülesanded harjutamiseks.

I. Kujude walmistamine.
(geometrialikul kombel).

1. Ringi keskpunkt peab leitud saama, kui ringi poolmõõtja antud on.

2. Mitu graadi on tuulelipp käinud, kui ta põhjast põhjahommikusse, hommikusse, lõunahommikusse, lõunasse, lõunaõhtusse, õhtusse j. n. e. pöörab?

3. Missugusid winklid sünnitab tunnikella minutinäitaja (zeiger) ühe, poole, kolmandiku, weerendi tunni sees? kahe, wiie, kümne kahekümne wiie minuti aja sees?

4. Missugusid winklid sünnitawad mõlemad tunnikella näitajad ükstõisega kell 12, 3, 6, 9, $4\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{3}$?

5. Kui winkel 10^{o}, $30\frac{1}{2}^{o}$, 60^{o}, 80^{o} suur on; kui suur on tema kõrwalwinkel?

6. Kui suur on wälimiste winklite summa ühes 3, 4, 5, 6, 8, 10 nurgas?

7. Ühesuguse harudega kolmnurga otsa-winkel on 20^{o}; kui suur on iga winkel põhjusjoone küljes?

8. Ühesuguse harudega kolmnurga üks, põhjusjoone küljes seisaw winkel on $40\frac{1}{2}{}^{o}$; kui suur on otsa-winkel?

9. Ühesuguse harulise kolmnurga põhjusjoone küljes seisaw wälimine winkel on 120^{o}; kui suur on otsas seisaw wälimine winkel?

10. Kõrwujoonnurga üks winkel on 89^{o}; kui suured on tõised winklid?

11. Loodwinkel peab kolme ühesuuruseśse jakku jautatud saama.

12. Winklid joonitada, mis 60°, 30°, 45°, 15°, 75° suured on.

13. Mitu loodwinkelt on 16mne, 48, 90mne, 100ja nurga sees?

14. Missuguse palsunurga sees on kõigi winklite summa 20, 60, 90 loodwinkelt?

15. Missuguses winklites lõikawad mõlemad nurgajooned üksteist täisruudus, pikkruudus, wiltruudus?

16. Kui suur on keskpunkti winkel korralises 3, 4, 5, 6 nurgas?

17. Mitu nurgajoont wõib ühe 4ja, 5e, 6e, 10mne nurga sisse tõmmatud saada?

18. Üks kolmnurk peab walmistatud saama, kellest antud on:

a) üks külg, üks, selle külje küljes ja teine, selle külje wasta seisaw winkel;

b) kaks külge ja suurema külje wasta seisaw winkel;

c) kaks külge ja lühema külje wasta seisaw winkel.

19. Ühesuguse haruline kolmnurk peab walmistatud saama:

a) kelle põhjusjoon ja kõrgus antud on;

b) kelle põhjusjoon ja põhjusjoone küljes seisaw üks winkel;

d) üks külg (haru) ja põhjusjoone küljes seisaw winkel;

e) üks haru ja põhjusjoon.

20. Loodwinkliline kolmnurk walmistada, kellest antud on:

a) üks loodjoon ja selle küljes seisaw teraw winkel;

b) üks loodjoon ja tema wasta seisaw ∠;

d) loodwinkli wastaseisaw külg (hüpotenuus) ja üks teraw winkel;

e) hüpotenuus ja üks loodjoon.

21. Kolmnurk walmistada, kellest antud on:

a) üks külg, üks selle külje küljes seisaw winkel ja mõlemate teiste külgede wahe (differenz).

b) üks külg, üks winkel, mis antud külje külles, ja mõlemate teiste külgede summa.

22. Terawwinkliline kolmnurk peab muudetud saama:

a) loodwinkliliseks kolmnurgaks;

b) tömpwinkliliseks kolmnurgaks.

23. Täisruut peab muudetud saama:

a) kolmnurgaks;

b) pikknurgaks (pikkruuduks);

d) wiltuwinkliliseks kõrwujoonnurgaks.

25. Täisruutu walmistada, kes 4, 9, 16, 25, 100 kord nii suur on kui üks teine.

26. Ühte ruutu walmistada, kelle ümbrus antud on.

27. Täisruutu walmistada, kelle nurgajoon antud on.

28. Üks pikkruut peab walmistatud saama, kellest antud on:

a) üks külg ja nurgajoon;

b) üks külg ja üks neist winklitest, mis nurgajoonte läbilõikamise läbi sünnib;

d) üks külg ja üks winkel, mis nurgajoon ühe küljega sünnitab.

29. Ühte wiltruutu joonitada, kellest antud on:

a) üks külg ja üks nurgajoon;

b) mõlemad nurgajooned;

d) kõrgus ja üks nurgajoon;

e) üks külg ja kõrgus;

g) üks nurgajoon ja tema küljes seiswad winklid.

30. Ringi teha:

a) ühesuguse külgedega kolmnurga sisse;

b) ühesuguse harudega kolmnurga sisse;

d) mitmesuguse külgedega kolmnurga sisse;

e) täisruudu sisse;

g) wiltruudu sisse;

h) korralise paljunurga sisse.

31. Ringi tõmmata:

a) kolmnurga ümber;

b) täisruudu ümber;

d) pikkruudu ümber;

e) korralise paljunurga ümber.

32. Ringi ümber walmistada:

a) ühesuguse harulist kolmnurka;

b) mitmesuguse küljelist kolmnurka;

d) täisruutu;

e) korralist 5, 6, 7 nurka.

33. Ringi sisse walmistada;

a) korralist kolmnurka;

b) korralist nelinurka;

d) korralist 5, 6, 7 nurka.

34. Ringi walmistada, kelle ringjoon:

a) kahest antud punktist läbi langeb;

b) ühte sirget joont ühes antud punktis riiwab;

d) ühte ringi ühes antud punktis riiwab;

e) kolmest antud punktist läbi langeb.

35. Ringi walmistada, kes 4, 8, 16, 25, 100 kord nii suur on, kui üks tõine ring.

36. Ringi joonitada, kes kahe tõise ringi suurune on.

37. Ringi joonitada, kes 2, 3, 5, 20 kord nii suur on, kui üks tõine ring.

38. Ringi walmistada, kelle ringjoon kahewõrra nii suur on, kui ühe tõise ringi ringjoon.

II. Wäljarehkendamine.

a) Pikkuse arwamine.

1. 1512″ on mitu sülda? (18°).

2. Täisruudulise aia külg on 15° 3′; mitu sülda ja jalga on ta ümber ringi? (61° 5′).

3. Ukse laius on 2′ 6″, ümber ringi on uks 17′ 4″; kui kõrge on uks? (6′ 2″).

4. Kui suur on ühesuguse külgedega kolmnurga ümbrus, kui üks külg 3′ 4″ pikk on? (10′).

5. Mitmesuguse külgedega kolmnurga ümbrus on 4′ 8″; kui pikk on kolmas külg, kui üks külg 1′ 4″, tõine külg 2′ 1″ pikk on? (1′ 3″).

6. Ühesuguse harudega kolmnurga kumbki haru on 4′ 5″ ja põhjusjoon 6′ 3″; kui suur on tema ümbrus? (15′ 1″).

7. Kui pikk on loodwinklilise kolmnurga hüpotenuus, kui tema üks loodkülg 6′, tõine 8′ pikk on? (10′).

8. Kui pikk on loodwinklilise kolmnurga üks külg, kui hüpotenuus 40′ ja tõine loodkülg 24′ pikk on? (32′).

9. Korralise wiisnurga ümbrus on 7′ 6″; kui pikk on iga külg? (1′ 6″).

10. Korralise kaheksanurga ümbrus on 25′ 4″; kui suur on iga külje pikkus? (3′ 2″).

11. Ringi täismõõtja on 3′ 4″; kui suur on ringi ringjoon? (10′ $5\frac{3}{5}$″).

12. Kui pikk on ringi täismõõtja, kui ringi ringjoon 16′ 8″ on? (5′ $3\frac{109}{157}$″).

13. Palgi tüwi täismõõtja on 1′ 2″, ladwa täismõõtja 10″; kui suur on palgi keskmine täismõõtja; kui suur on keskmine täismõõtja ringjoon (ümbrus)? (1′ $3\frac{7}{50}$′).

14. Kui suur on wibu, mis 60° on, kui ringjoon 90″ on? (10″).

15. Ringi poolmõõtja on 5″ pikk; kui pikk on selle ringi wibu, mis 30° on? ($2\frac{37}{60}$″).

b) Pinna arwamine.

16. 3 □° 4 □′ 21 □″; mitu ruuttolli? (21744 □″).

17. 43488 □″; mitu □° □′ □″? (6 □° 8 □′ 42 □″).

18. Kui suured on järgmiste täisruutude pinnad, kelle külg a) 5″, b) $10\frac{1}{2}$″, d) 1′ 2″, e) 5°, g) 5° 4′ 6″? (a) 25 □″, b) $110\frac{1}{4}$ □″, d) 1 □′ 52 □″, e) 25 □°, g) 30 □° 89 □′ 80 □″).

19. Kui täisruudu ümbrus 7′ 8″ on; kui suur on siis tema pind? (3 □′ 97 □″).

20. Pikkruuduline põld on 12° 6′ pikk ja 3° 4′ lai; mitu ruutsülda on seesama? ($45\frac{45}{49}$ □°).

21. Tuba, mis 20′ pikk ja 18′ lai peab laudpõrmanda saama; kui palju laudu on põrmandaks tarwis, kui lauad 12′ pikad ja $\frac{3}{4}$′ laiad on? (40 lauda).

22. Wiltruudu (raute) põhjusjoon on $5\frac{1}{2}$″ pikk ja kõrgus 3″; kui suur on tema pind? ($16\frac{1}{2}$ □″).

23. Wiltruudu (raute) ümbrus on 10″; tema kõrgus, ehk kõrwujoonte kaugus ükstõisest $1\frac{1}{2}$″; kui suur on tema pind? ($5\frac{1}{4}$ □″).

24. Roopnurga kõrgus on 4′ 8″; mõlemate kõrwujoonte pikkus on 8′ 4″ ja 10′ 6″; kui suur on tema pind? (43 □′ 136 □″).

25. Roopnurk on 198 □″; tema üks kõrwujoon on 10″ ja tõine 12″: kui kõrge on roopnurk? (18″).

26. Ühe ruudu külg on 9″ pikk; kui suur on siis tõise ruudu külg, mis 4, 9, 16, 25, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ kord nii suur on? (18″, 27″, 36″, 45″, $4\frac{1}{2}$″, 3″).

27. Kolmnurga kõrgus on 7′ 3″ ja põhjusjoon 4′ 6″; kui suur on kolmnurga pind? (16 □′ 45 □″).

28. Kolmnurga pind on 324 □″; kui kõrge on ta, kui ta põhjusjoon = 30″ on? ($21\frac{3}{5}$″).

29. Loodwinklilise kolmnurga loodküljed on 4′ 4″ ja 8′ 9″; kui suur on tema pind? (18 □′ 138 □″).

30. Loodwinklilise kolmnurga pind on $48\square'$; kui pikk on tema lühem loodkülg, kui pikem $10'$ on? ($9\frac{3}{5}'$).

31. Kahel kolmnurgal on ühesuurused põhjusjooned, see on $18''$ nende kõrgus on ühel $7''$, tõisel $9''$; kuida seisawad nende pinnad ükstõise kohta? (7 : 9).

32. Kahel kolmnurgal on ühesugune kõrgus $= 8''$; ühe põhjusjoon on $6''$, tõise põhjusjoon $8''$; kui suur on kumbagi pind, ja kuida on nende suurus ükstõise kohta? ($24\square''$ ja $32\square''$; 3 : 4).

33. Kolmnurga põhjusjoon on $10^0\ 4'$ pikk; kui kõrge peab kolmnurk olema, kui tema pind pikkruudu pinna suurune on, ja pikkruudu pikkus $10^0\ 4'$, laius $6^0\ 4'$ on? ($13^0\ 1'$).

34. Pikkruudu nurgajoon on $15''$, tema üks külg $12''$; kui suur on tema pind? ($108\square''$).

35. Loodwinklilise kolmnurga hüpotenuus on $25''$, üks loodkülg $20''$; kui suur on tema pind? ($150\square''$).

36. Ühesuguse harudega kolmnurga pind on $300\square''$, tema kõrgus $15''$; kui pikk on kumbki haru? ($25''$).

37. Maja on $70'$ pikk ja $35'$ lai, wundamendist kunni katuksent $15'$ kõrge, ja otsad kuni harjani $30'$ kõrged. Seesama peab õliwärwiga wärwitud saama. Mis tuleb wärwimine maksma, kui $\square'$ 10 kop. maksab ja aknad ja uksed kõik täie ette saawad arwatud? ($367\frac{1}{2}$ rubla).

38. Roopnurga nurgajoon on $40''$ pikk ja kolmnurkade otsapunktidest nurgajoone pääle lastud loodjooned on $30''$ ja $36''$; mitu ruutjalga on roopnurk? ($8\frac{17}{36}\square'$).

39. Korralise wiisnurga külg on $40\frac{1}{2}''$; loodjoon wiisnurga keskpunktist külje keskpaika on $24\frac{3}{4}''$; kui suur on wiisnurga pind? ($19\square'$ $51\frac{3}{16}\square''$).

40. Ringi täismõõtja on $5''$ pikk; kui suur on selle ringi pind? ($19\frac{5}{8}\square''$).

41. Ringi ringjoon on $25\frac{3}{25}''$; kui suur on ringi pind? ($50\frac{6}{25}\square''$).

42. Ümarguse laua ümber wõiwad 10 inimest istuda, kellest iga üks $2\frac{1}{4}'$ ruumi pruugib; kui suur on laua pind? ($40\frac{465}{1256}\square'$).

43. Ringi poolmõõtja on $10''$; kui suur on selle ringi pool pinda? neljandik pinda? ($157\square''$; $78\frac{1}{2}\square''$).

44. Ringi wäljalõike wibu on 60 graadi, ringi poolmõõtja $10''$ pikk; kui suur on wäljalõike pind? ($52\frac{1}{3}\square''$).

45. Kui kolmnurk kõrwujoonilise nelinurga (parallelogrammi) suuruseks teha tahetakse, kui kõrgeks peab nelinurka tehtama, kui mõle-

mite põhjusjooned ühed, see on 12′ pikad on ja kolmnurga kõrgus 10′ on? (5′).

46. Kõrwujoonnurk peab kolmnurgaks muudetud saama. Mõlematel on üks kõrgus = 10′, ja kõrwujoonnurga põhjusjoon on 12′; kui suur peab kolmnurga põhjusjoon olema? (24′).

47. Ringi täismõõtja on 10″; kolmnurga kõrgus ka 10″; kui pikk peab kolmnurga põhjusjoon olema, kui tema pind ringi pinnaga üks peab olema? ($15\frac{7}{10}$″).

48. Kahes ühenäulises kolmnurgas on ühtemoodi seiswa külgede suurus ükstõise kohta nagu 4 : 7. Kui nüüd pisema kolmnurga külg 12′ pikk on, kui pikk on suurema kolmnurga ühtemoodi seisaw külg? (21′).

49. Ühe puu wari on 40′ pikk; kolmejalase kepi wari on selsamal ajal 5′ pikk; kui pikk on puu isi, kui paksuse pääle ei waadata? (24′).

d) Kehade arwamine.

50. 7 k° 3 k′ 4 k″; mitu kupitstolli? (4154116 k″).

51. 12456 k″; mitu kupitsjalga? ($7\frac{5}{24}$ k′).

52. Täringi (kuubuse) külg on 3″; mitu kupitstolli on täring suur? (27 k″).

53. Laud on 14′ pikuti, $\frac{3}{4}$′ laiuti ja $1\frac{1}{4}$″ paks; kui suur on laua kupitsruum? (1890 k″).

54. Mitu kupitsjalga õhku on tua sees, mis 20′ pikk, 15′ lai, 12′ kõrge on? (3600 k′).

55. Neljakandiline palk on $7\frac{1}{2}$″ paks ja 25′ pikk; mitu kupitsjalga? ($8\frac{551}{1728}$ k′).

56. Wilja salw aidas on 20′ pikk, 10′ lai, 8′ kõrge; mitu wakka wilja läheb salwe sisse, kui wakk igapidi $1\frac{1}{3}$′ suur on? (675 wakka).

57. Müür on 20′ pikk, 3′ paks ja 8′ kõrge. Maja omanik tahab teda $2\frac{1}{2}$′ kõrgemaks teha. Mitu telliskiwi tarwitab tema selle jauks, kui iga kiwi 1′ pikk, $\frac{2}{3}$′ lai ja $\frac{1}{4}$′ paks on? (900 telliskiwi).

58. Ümarguse sambaline wiljamõõt on $1\frac{1}{2}$′ lai, 10″ kõrge; mitu kupitsjalga on mõõt suur? ($1\frac{151}{320}$′).

59. Üks puu on ümbert ringi mõõta $2\frac{1}{2}$′, pikkus 18′; mitu kupitsjalga on puu suur? ($8\frac{1202}{1256}$′).

60. Ümarguse samba põhjuspind on $11\frac{1}{4}$ □″; sammas isi on 108 k″; kui pikk on sammas? ($9\frac{3}{5}$″).

61. Neljakandilise terawposti põhjuspinna külg, mis täisruudu külg on, on 4'' pikk, terawposti kõrgus on 18''; mitu kupitstolli on terawpost? (96 k'').

62. Kolmeküljelise terawposti põhjuspind on üks kolmnurk, kelle põhjusjoon 4'' ja kõrgus 3''; terawposti enese kõrgus on 24''; mitu kupitstolli on terawpost suur? (48 k'').

63. Kuhjawiisi kokku lükatud kartohwli hauna põhjuspinna täismõõtja on 10', hauna kõrgus 6'; mitu kupitsjalga on haunas kartohwlid? (157 k').

64. Kuuli täismõõtja on 10''; kui suur on kuuli pind? (314 □'').

65. Kuuli täismõõtja on 6''; mitu kupitstolli on kuul? ($113\frac{1}{25}$ k'').