Kerged ja lühikesed

Geometria õpetused.

Rahwa koolide kasuks

kirja pannud

J. Tülk.

Tartus.
Schnakenburgi trükk ja kulu.
1879.

30 + 20

3758

Eesti

Kirjameeste Seltsi

Toimetused.

№. 24.

Kerged ja lühikesed

Geometria õpetused.

Rahwa koolide kasuks

kirja pannud

J. Tülk.

Tartus.
Schnakenburgi trükk ja kulu.
1879.

Zensuri poolest lubatud. Tallinnas, 13. Oktobril 1878.

Eessõna.

Kõigist õpetustest, mis inimeste mõistus on ülesleidnud ja neid üheks juhatuseks kokku seadnud, on Geometria üksine, mis oma esimese põhjuse peale on seisma jäänud. Kõik tõised õpetuse (ehk juhatuse) raamatud on ikka ja ikka ümber muudetud ja mitme suguse paranduse läbi jälle uuendatud saanud. Seesugune lühikene tähendus näitab meile, et esimesed Geometria õpetuste kogujad terawa mõistusega ja sügawa läbimõtlemisega oma tööd on teinud. Sellepärast on siis nende õpetus kasulikuks juhatajaks kõige rahwale olnud, kes seie ajani selle õpetusega tuttawad oliwad.

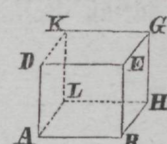
Et nüüd meie noored Eestlased ka Geometria õpetusega wõiksiwad tuttawaks saada, ja ka nende koolis wõiks selle õpetusega algada; selle pärast on see wäikene raamat nõnda kirjutatud, et kõik Geometria õpetused ja õpetuste tõendused, lühikeselt, kergelt aga siiski kindla mathematika seaduste järele üks teisega kinni köidetud on, ja iga õppija nende waral oma mõtteid kord korralt terawamaks ihub, neile laiemad tundmise piirid rajab ja sedawiisi samm sammult julgeste edasi astub. Muidugi on teada, et Geometria õpetused mitte wäga kerged ei ole ja sagedaste natukene peamurdmist sünnitawad. Sest ei ole wiga; iga mehel on teada: mida raskem töö, seda röömsam meel, kui töö tehtud ja waew nähtud.

Õpetuse wiis on siin enamiste Prantslaste kooliraamatute järele rajatud, sellepärast et nende õpetused kerged on. Nimelt on mul juhatajaks olnud: Legendre, Vincent ja Amiot. Saksa keelest: Wittstein, Lüsen ja Hechel.

Ka ruut-arwamist olen ma püüdnud lühidelt õpetada, sellepärast et ilma tema abita mõnest Geometria seletusest mitte aru ei wõi saada. Geometria ülesanded olen ma nõnda jautanud, et need, mis tsirkle ja liniali abiga leida wõib, ette seadsin, ja need, mis arwamise läbi leida wõib, pärast pooleks jätsin. Ükfi kõige tarwilikumad õpetused ja ülesanded olen ma üles wõtnud, nõnda kui see minu tundmise järele sündlik näitas olewat. Wiimaks pean ma tunnistama, et mul Eestikeel mitte nõnda lahke ei ole, kui sellel peaks olema, kes Geometria raamatut tahab kirjutada. Ma olen küll Eestimees, aga et ma rohkem kui 14 aastat wõera rahwa seas elasin, olen ma oma ema keelega natukene wõeraks jäänud, aga selle puuduse paranduseks sain ma kasulikku abi lektori herra Dr. Weske käest.

Geometria eesjuhatus.

Ruum on, kus kõik loodud kehad, olgu nemad eluga ehk eluta, oma teed käiwad ehk ka meie silma nähtawal seisawad. Ruum on taewa lautus, kus meie päikene iga pääw ülestõuseb ja jälle looja läheb, kus tuul puhub ja wesi woolab. Selle järele on ruum ilmlõpmata ja iga keha ehk ruumi=keha on jagu tema sees. Igal kehal on oma piirid; nõnda on majal seinad ja katus; pähklil koor; kastil neli külge, kaas ja põhi. Kus kaks külge kastil, majal ehk muul teisel kohal kokku jooksewad, seal sünnitawad nemad **nurga**. Wahenurk, alt senni kui ülesse nimetakse **jooneks**. Kus joon peale hakkab ja ära lõpeb on **punkt**. Ülepea on ruumikeha piirid **wäljad**; wälja piirid on **jooned**; joone piirid on tema hakatuse ja lõpetuse **punkt**. ABDE on üks külg (ehk wäli), BHGE teine, HLKG kolmas ja ALKD neljas külg. Kus esimine külg ABED ja teine BHGE kokku jooksewad, seal sünnitawad nemad nurga BE, mis meie siin õigeks jooneks nimetame. Selle joone hakatus on punkt B ja tema lõpetus punkt E.



Juhataja.

I. Geometria alusjuhatused . . . . . § 1 — § 52.
II. Kreis, ja tema winklid . . . . . § 53 — § 68.
Geometria ülesanded A, ja ruutarwamine B.
III. Ühejaulised ja ühekujulised Geometria suurused . . . . § 69 — § 91.
Ülesanded D.
IV. Ühekülјelistest hulknurkadest. Kreisi joonepikkusest ja tema wälja suuruse arwamisest . . . . § 92 — § 96.
V. Stereometria (ehk ruumi kehade mõetmine) § 97 — § 106.
Ülesanded E.

Tähendused.

= ühe sugune (. . . kellega).
< wähem kui (üks teine).
> suurem kui (üks teine).
|| jooksewad ühtlasi.
△ kolmnurk.
▭ pikruut.
□ ruut.
∾ ühekujuline.
≅ täisühtlane.
∠ winkel.
⊥ ristlood.

Geometria alusjuhatused (Principien).

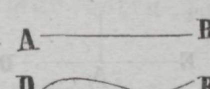
Geometria õpetab üksi niisugust ruumi mõetma, kellel piirid on.

§ 1. **Ruumikehal** on kolm mõetu, **pikkus**, **laius**, **kõrgus** (ehk **sügawus**).

§ 2. **Wäljal** on kaks mõetu, **pikkus** ja **laius**.

§ 3. **Joonel** on üks mõet, **pikkus**.

§ 4. **Punkt** on ilma mõeduta, tema on paljalt **näitus**, kus üks joon peale hakkab ja ära lõpeb.



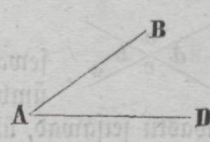
§ 5. **Õige joon** AB on kõige lühem tee kahe punkti wahel.

§ 6. **Joont**, mis mitte õige ega õigist joonteſt 'pole kokku seatud, nimetakse **kõwerjooneks**, DE. Ülepea on **Geometria õpetusel** kaks joont teada: õige ja **kõwer**, kõik teised jooned on kokku pandud jooned.

§ 7. **Ühetasane-** ehk **tasane wäli** on nõnda kui weepind.

§ 8. **Kumer wäli** on niisugune, kellel sugugi tasadust ei ole.

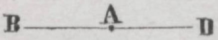
§ 9. **Geometriat**, mis ühe wälja peal seiswaid suurusi mõetma õpetab, nimetakse **Planimetriaks** (ehk wälja mõedu õpetused).



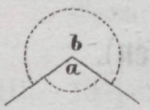
§ **10**. Kui kaks joont, AB ja AD, ühe punkti peale (A) kokku jooksewad, siis sünnitawad nemad **winkli**, BAD.

§ **11**. **Winkli suurust** ei mõeda mitte tema külgede pikkus, waid nende **lautus**.

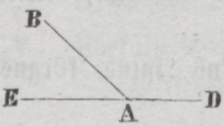
§ 12. **Kaks winkelt on ühesuurused**, kui nemad oma ühenduse punktist ühe ja sellesama lautusega wälja jooksewad.



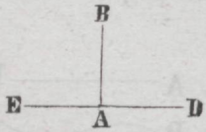
§ 13. **Winkelt**, kelle küljed ühenduse punkti A mõlemile poole, AB ja AD, õiges joones wälja jooksewad, nimetatakse **õigeks winkliks**, ABD.



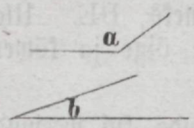
§ 14. **Winkelt**, mis wäiksem on kui õige winkel, nimetakse **õõneswinkliks** (konkaw) nõnda a, ja mis suurem on, kui õige winkel, seda nimetakse **kõrgeks winkliks** (konweks) b.



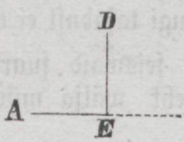
§ 15. **Kui õige winkel** EAD, õige joone AB läbi kaheks winkliks jautud saab, nõnda kui siin, DAB ja BAE, siis nimetakse neid **kõrwu-winkliks** (Nebenwinkel). **Kõrwu winklitel on üks ühenduse punkt**, (siin A), **üks ühtlane külg**, AB, ja nende kaks teist külge, AE ja AD, **seisawad õige joone peal.**



§ 16. Kui kaks kõrwuwinkelt ühesuurused on, siis nimetakse neid **täiswinkliks** (rechter Winkel), nõnda DAB ja EAB.



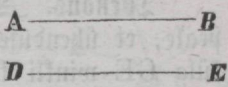
§ 17. **Winkelt**, mis suurem on, kui täiswinkel, nimetakse **nüriks winkliks** (siin a), ja mis weiksem on kui täiswinkel, **terawwinkliks** (siin b).



§ 18. Kui kaks joont, AE ja DE, teine teisega ühe punkti peal kokku puuduwad ja ühe **täiswinkli** sünnitawad, siis on nemad mõlemad teine teise peal **ristloodis.**

§ 19. Kui kaks joont teine teisest läbi jooksewad, siis sünnitawad nemad oma ühenduse punkti ümber neli winkelt, kellest need kaks, mis teine teise wastu seisawad, ühesuurused on, nõnda $\angle a = \angle e$ ja $\angle d = \angle b$; neid nimetakse **ristwinkliks** (Scheitelwinkel).

§ 20. Kaks joont (siin AB ja DE), mis teine teisega nõnda ühtlasi jooksewad, et nemad ilmaski kokku ei puudu, nimetakse **ühtlaseks ehk parallel-jooneks.**



§ 21. **Põhjusõpetused.**

1) Kaks suurust, mis ühe kolmandaga ühesugused on, on ka teine teisega ühe suurused; nõnda on:

$$4 + 8 = 12,\quad A = D$$
$$5 + 7 = 12,\quad B = D$$
$$(4 + 8) = (5 + 7),\quad A = B;$$

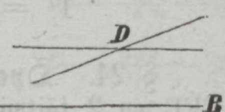
2) Iga täissuurus on suurem kui tema jagu, ja kõik jausuurused kokku annawad jälle täissuuruse.

3) Ühesugused suurused ühte wiisi kaswatud ehk kahandatud jääwad ikka ühesuguseks, nõnda oleks:

$$(5 + 9) \times 2 = 28;\quad (8 + 6) \times 2 = 28$$
$$(14 - 5) = 9;\quad 14 - (2 + 3) = 9.$$

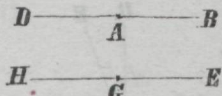
4) Kaks õiget joont wõiwad teine teisest ühe ainsa ühtlase punkti läbi jooksta; on neil rohkem kui üks punkt ühtlane, siis langewad nemad kokku ja sünnitawad ühe ainsa joone.

5) Ühe ainsa punkti üle on wõimalik ühte ainust õiget joont teise õige joonega ühtlasi tõmmata; olgu siin AB üks joon, D see punkt, siis on D üle wõimalik ühtainust joont tõmmata, mis joone ABga ühtlase jookseb. Kõik teised jooned, mis üle D tõmmatakse, kui nad pikendatud saawad, peawad üksteisest läbi jooksma.



§ 22. Õpetus. **Kõik õiged winklid on ühesuurused.** Ööldud:

∠ DAB ja ∠ HGE on õiged winklid.



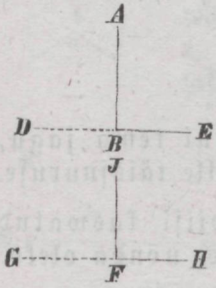
Tõeks tehtud peab saama:

$$\angle DAB = \angle HGE.$$

(Ütle: winkel DAB on winkli HGE-ga ühesugune).

Tõendus. Wõta ∠ HGE ja pane teda nõnda ∠ DAB peale, et ühenduse punkt G ühenduse punkti A peale, ja winkli külg GE winkli külje AB peale langeb, siis peab ka põhjus-õpetuse (§ 21, 4) järele winkli külg HG winkli külje AD peale langema, sellepärast et neil rohkem kui üks punkt ühtlane on.

§ 23. Õpetus. **Kõik täiedwinklid on ühesuurused.**



Öõldud:

∠ ABE ja ∠ JFH on täiedwinklid.

Tõeks tehtud peab saama.

∠ ABE = ∠ JFH.

Tõendus. § 22 järele on kõik õiged winklid ühesuuruused, ∠ GFH = ∠ DBE, siis peawad ka kõik õige-winkli pooled ühesuurused olema. § 16 näitab meile, et õige winkli pooled täiedwinklid on; selle järele on siis ∠ JFH = ∠ ABE.

Lisa õpetus. Täiswinkel on põhjusmõet kõige teiste winklitele, ja tema suurust jautakse 90 kraadi, kraadi 60 minuti, minut 60 sekundi ja tähendatakse nende märkidega:

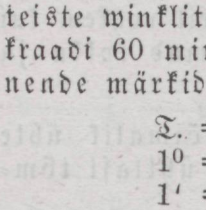
T. = 90^0 (**täiswinklil** on 90 kraadi)
$1^0 = 60'$ (**kraadil** on 60 minutit)
$1' = 60''$ (**minutil** on 60 sekundi).

§ 24. Õpetus. **Kahe kõrwuwinkli summa** ∠ AFE + EFB **on 2 täitwinkelt.** Öõldud:

∠ AFE ja ∠ EFB on kõrwuwinklid.

Tõeks tehtud peab saama:

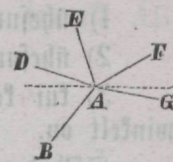
∠ AFE + EFB = 2 täitwinkelt.



Tõendus. Tõmbame F punkti peale ristloodi DF, siis on ∠ AFE + ∠ EFB = ∠ AFD + ∠ DFE + ∠ EFB = ∠ AFD + ∠ DFB = 2 täitwinkelt.

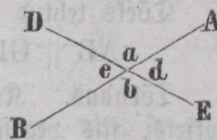
Lisa õpetus. On kahest kõrwuwinklist üks teraw, siis peab teine nüri olema.

2) Kõik winklid ühe punkti, A, ümber, $\angle BAD + \angle DAE + \angle EAF + \angle FAG + \angle GAB$, on kokku 4 täit winkelt.



Tõendus. Tõmbame õige joone läbi A, siis seisawad ülewel ja al pool seda joont 2 täitwinkelt, see on kokku 4 täitwinkelt.

§ 25. **Opetus. Ristwinklid $\angle$ e ja $\angle$ d on ühesuurused.** Ööldud:



$\angle$ e ja $\angle$ d on ristwinklid.

Tõeks tehtud peab saama:

$\angle$ e = $\angle$ d.

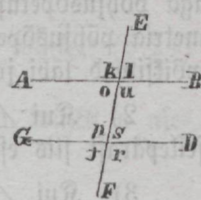
Tõendus. $\angle$ e + $\angle$ a = 2 täitwinkelt (§ 22)

$\angle$ a + $\angle$ d = 2 täitwinkel.

Wõtame mõlemilt poolt a ära, siis jääb $\angle$ e = $\angle$ d (§ 21, 3).

§ 26. **Seletused.**

Kui kahest ühtlasi jooksjaist joontest (von zwei Parallel-Linien), **AB || GD** (ütle: joon AB jookseb GD joonega ühtlasi), üks kolmas joon, EF, läbi jookseb, siis sünnitawad nemad oma 2 ristpunkti ümber 8 winkelt, kellest k l t r **wäliseks** ja o u p s **sisemiseks winkliks** nimetakse.

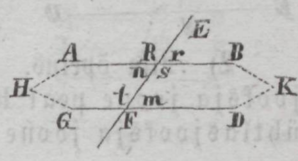


Kaks läbi jooksja joone EF ühe külje peal, üks wäline ja teine sisine winkel, k ja p, o ja t, nenda ka l ja s, u ja r nimetakse **küliswinkliteks** (correspondirende Winkel).

Kaks teine teise pool läbi jooskjat joont seisjad winkelt, u ja p, o ja s nimetakse **wahetuswinkliks** (Wechselwinkel).

Kaks ühelpool läbi jooksjad joont EF seisjat winkelt o ja p, u ja s nimetakse **wastuwinkliks** (Gegenwinkel).

§ 27. **Opetus. Kaks joont** AB **ja** GD **on ühtlasi jooksjad, kui nemad kolmanda joonega** EF, **mis neist läbi jookseb**



1) ühesuurusid wahetuswinklid (m = n) sünnitawad, ehk
2) ühesuurusid küliswinklid (m = r) sünnitawad, ehk
3) kui kahe wastuwinkli suurus (n + t) kokku 2 täitwinkelt on.

Ööldud on:

1) $\angle m = \angle n$
2) $\angle m = \angle r$
3) $\angle n + \angle t$ = 2 täit winkelt.

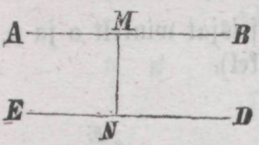
Tõeks tehtud peab saama:

AB || GD. (AB on ühtlasi jooksja GD^ga^).

Tõendus. Kui joon GD mitte joonega AB ühtlasi ei jookseks, siis peaksiwad nemad, kui nad mõlemad pikendatud saaks, ükskord teine teisest läbi jooksma. Sünniks see läbijooksmine K juures, siis tõstaks meie oma mõtete sees wiguri KRF üles, käänaks ümber ja paneks teda jälle teise poole wiguri peale nõnda, et need ühesuurused winklid m ja n, t ja s ühte langeks; siis langeb ka pool wiguri külge RB teise poole wiguri külje FG peale; nõnda ka FD RA peale; sellepärast peaks siis ka RA ja FG nõndasamati ühe punkti H juures kokku jooksma, kus see punkt K seisma tuleks. Selle järele jookseksiwad siis mõlemad jooned AB ja GD teine teisest kahe punkti pealt läbi, see on aga põhjusõpetuse (§ 21, 4) wastu; nõndasama on wastu geometria põhjusõpetust, et AB ja GD ühe külje pool teine teisest wõiksiwad läbi joosta, sellepärast on siis AB || GD.

2) Kui $\angle m = \angle r$ on, siis on ka $\angle m = \angle n$ (§ 25), sellepärast siis esimise tõenduse järele jälle AB || GD.

3) Kui $\angle n + \angle t$ = 2 täitwinkelt on, siis on ka $\angle m + \angle t$ = 2 täitwinkelt, ja jälle on $\angle m = \angle n$ sellepärast AB || DG.



1) Lisa õpetus. Kaks õiget joont AB ja ED jooksewad teine teisega ühtlasi, kui nende wahel üks joon MN mõlemate peal ristloodis seisab.

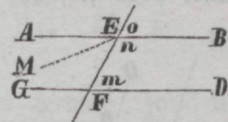
2) Lisa õpetus. Õige joon MN, mis ühe ühtlasi jooksja joone peal ED ristloodis seisab, seisab ka teise ühtlasjooksja joone AB peal ristloodis.

§ 28. **Õpetus.** **Kui kahest ühtlase=jooksja joonest** AB **ja** GD **kolmas joon** EF **läbi jookseb, siis on:**

1) **wahetuswinklid ühe suurused,**
2) **küliswinklid ühe suurused**
3) **ja kahe wastuwinkli summa 2 täitwinkelt.**

Höldud on: AB || GD

Töeks tehtud peab saama:



$\angle$ AEF = $\angle$ m,

$\angle$ o = $\angle$ m,

$\angle$ n + $\angle$ m = 2 täitwinkel.

Töendus. 'Poleks $\angle$ AEF mitte ühesuurune waid suurem kui $\angle$ m, siis olgu $\angle$ MEF = $\angle$ m, ja selle järele peaks ME ühtlasi GD=ga jooksma (§ 27, 1) siis wõiks ühe punkti E läbi kaks ühtlasi jooksjat joont ühe kolmanda joonega tõmmata, see ei ole geometria põhjusõpetuse järele mitte wõimalik (§ 21, 5). Nõndasama ei ole ka mitte wõimalik, et $\angle$ AEF wäiksem oleks kui $\angle$ m, sellepärast peab $\angle$ AEF = $\angle$ m olema.

2) Teada on, et $\angle$ AEF = $\angle$ o ristwinkel
ja $\angle$ AEF = $\angle$ m wahetuswinkel,
sellepärast $\angle$ o = $\angle$ m (§ 21, 1).

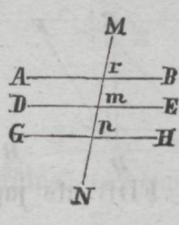
3) Teada on, et $\angle$ o + $\angle$ n = 2 täit winkelt (§ 24)
ja $\angle$ o = $\angle$ m,

siin wõib sellepärast et $\angle$ o = $\angle$ m, winkel m winkli o asemele pandud saada ja siis on:

$\angle$ m + $\angle$ n = 2 täit winkelt.

§ 29. **Õpetus.** **Kui kaks joont** AB **ja** GH **ühtlasi ühe kolmanda joonega** DE **joksewad, siis joksewad nemad teine teisega ühtlasi.**

Höldud on: AB || DE
GH || DE.



Töeks tehtud peab saama:

AB || GH.

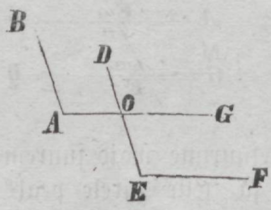
Tõendus. Tõmbame ühe joone MN, siis on

$\angle r = \angle m$, sellepärast AB || DE

$\angle p = \angle m$ nõndasama GH || DE.

Selle järele on $\angle r = \angle p$, ja AB || GH.

§ 30. Õpetus. **Kaks winkelt, BAG ja DEF on ühesuurused, kui nende küljed ühtlasi jooksewad, ja mõlemate lautus ühel pool seisab.**



Ööldud on: BA || DE

AG || EF;

lautused BAG ja DEF seisawad ühel pool.

Tõeks peab tehtama:

$\angle BAG = DEF.$

Tõendus. $\angle BAG = \angle DOG$ küliswinklid.

$\angle DOG = \angle DEF$

Sellepärast $\angle BAG = \angle DEF.$

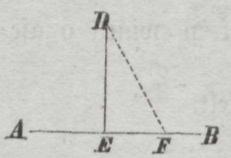
§ 31. Õpetus. **Ühest punktist wõib üks ainus ristlood teise õige joone peale tõmmatud saada.**

Ööldud on: DE $\perp$ AB.

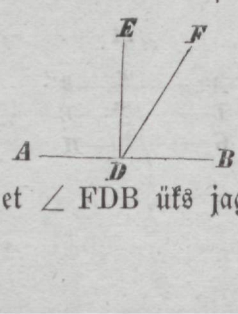
(DE seisab ristloodis AB peal).

Tõeks peab tehtud saama:

et punkti D pealt üks ainus ristlood AB peale wõimalik on.



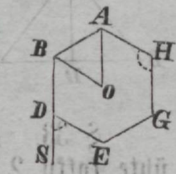
Tõendus. Kui wõimalik oleks D pealt kaks ristlooti AB peale tõmmata, nõnda et DE ja DF mõlemad AB peal loodis seisaks, siis peaks need kaks joont DE ja DF § 27 lisaõpetuse järele teine teisega ühtlasi jooksma. Siin jooksewad mõlemad jooned D peale kokku, sellepärast ei ole rohkem wõimalik D pealt, kui üks ainus ristlood AB peale tõmmata.



2) Seisab punkt D joone AB peal, ja oleks wõimalik weel D pealt üht teist ristlooti DF tõmmata, siis peaks $\angle EDB = \angle FDB$ olema, mis wastu geometria põhjusõpetust seisab (§ 21, 2), sellepärast et $\angle FDB$ üks jagu $\angle EDB$ suurusest on.

§ 32. Seletused.

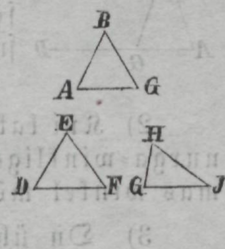
1) Üht iga külje pealt õige joontega ümberpiiratud wälja nimetakse õige joone wiguriks, ehk **hulknurgaks** (Poligon): nõnda siin AHGEDB.



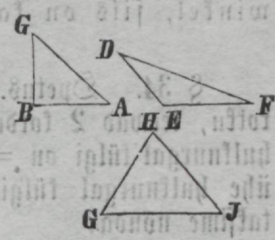
2) Õigid piiri jooni, mis üheteisega kokku puuduwad, nimetakse **wiguri külgedeks**, ja kokku puutuse punktid wiguri **nurkadeks** ehk **wahendusteks**. Kõik wiguri küljed oma pikkuse järele kokku ühendatud, nimetakse wiguri piirideks, nõnda AH + HG + GE + ED + DB + AB.

3) Winklid, mis kaks külge üheteisega teewad, ja kelle lautus wiguri sisepoole kannab, nimetakse **wiguri winkliteks**, nagu AHG, ja winkel mis selle läbi sünnib, et üks wiguri külg pikendud saab, nagu SDE, nimetakse **wäliseks winkliks**. Seisab ühe winkli nukk kesk wiguri sees ja jooksewad tema küljed wiguri külgede peale wälja, siis nimetakse teda **keskwinkliks**, nõnda siin AOB. (Centriwinkel).

4) Üks hulknurk on ühtlaste külgedega, kui kõik küljed ühe pikkused on, ja ükswinklane, kui kõik winklid ühesuurused on. Hulknurke nimetakse külje aru järele **kolmnurgaks**, **nelinurgaks**, **wiisnurgaks** j. n. e. Hulknurgal on niisama palju winklid kui külgi.



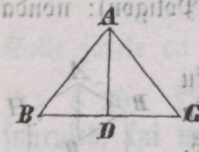
5) Iga kolmnurk on kolmest õigest joonest ümberpiiritud jagu ühest ühetasasest wäljast. Kolmnurka, kellel küljed ühe pikkused on, nimetakse **ühtlaseks kolmnurgaks** ABG (gleichseitig), kellel kaks külge ühe pitkused on, **küliseks kolmnurgaks** DEF (gleichschenklig), kellel kõik kolm külge isesugused, nimetakse **kolmnurk** (ungleichseitig), GHJ.



6) Kolmnurk wõib olla oma winkli suuruse järele **täiewinkline** GBA (rechtwinklig), **nüriwinkline** (stumpfwinklig) DEF, ehk **teräwwinkline** (spitzwinklig) GHJ.

Täiewinkli kolmnurgas seisawad need kaks külge, mis täiewinkli sünnitawad, **ristloodis teine teise peal**, neid nimetakse **lootkülged** GB ja AB;

ja see külg, mis selle täie winkli lautuse pool seisab AG, nimetakse **lautuse külg.** (Hypotenuse).



Kolmnurgal nimetakse enamiste see alumine külg BG **põhjusküljeks**, ja tema kõrgus on ristloodiks AD, mis põhjuskülje wastusest winklist (siin A) põhjuskülje peale tõmmatakse.

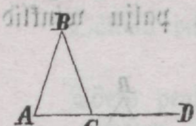
§ 33. Õpetus. **Iga kolmnurga kolmwinkli suurust on ühte kokku 2 täitwinkelt.**

Ööldud on: ABG kolmnurk.

Tõeks peab tehtama:

$\angle$ GAB + $\angle$ ABG + $\angle$ BGA = 2 täitwinkelt.

Tõendus. Pikendame ühe kolmnurga külje AG senni kui D juure ja tõmbame G pealt GE || AB, siis on wahetuswinkel B = $\angle$ BGE ja küliswinkel A = $\angle$ EGD, selle järele $\angle$ BGD = $\angle$ B + $\angle$ A. Nüüd on G juures kolm winkelt $\angle$ DGE + $\angle$ EGB + $\angle$ BGA, mis selle kolmnurga winklitega ühesuurused ja kokku 2 täitwinkelt on.



Lisa õpetused. 1) Kolmnurga wäliwinkel BGD on ikka kahe tema wastuseisja seestpidise winkliga A + B ühesuurune.

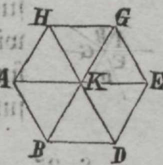
$\angle$ BGD = $\angle$ A + $\angle$ B.

2) Kui kaks winkelt kolmnurgas kahe teise kolmnurga-winkliga ühesuurused on, siis on ka nende kolmas winkel mõlemil ühesuurune.

3) On ühes kolmnurgas üks täis ehk üks nüri winkel, siis on kaks teist terawad winklid.

§ 34. Õpetus. **Kõik winklid hulknurgas (ehk n-nurgas) kokku, teewad 2 korda niipalju täiswinklid wähem 4, kui selle hulknurgal külgi on = 2n — 4. See täht n ütleb, kui palju ühe hulknurgal külgi on. Oleks siin üks 6nurk, siis kirjutaksime nõnda:**

2 . 6 — 4 = 8 täitwinkelt.



Ööldud on:

ABDEGH on n=nurk.

Tõeks tehtud peab saama:

n nurga winkli summa on 2n — 4 täitwinkelt.

Tõendus. Tõmbame ühest punktist sees poolt n=nurka iga nurga peale ühe õige joone, siis sünnib meile niipalju kolmnurki kui n=nurgal külgi on. Iga kolmnurga winkli summa teeb 2 täitwinkelt, se on 2n täitwinkelt. Wõtame nüüd need 4 täitwinkelt ära, mis K ümber seisawad, siis jääb meile 2n — 4 täitwinkelt järele.

Lisa õpetused. Nelinurga winkli summa on 4 täitwinkelt,

5nurga winkli summa on	$2 . 5 - 4$	$=$	6	täitwinkelt,
6nurga „ „ „	$2 . 6 - 4$	$=$	8	„
7nurga „ „ „	$2 . 7 - 4$	$=$	10	„
8nurga „ „ „	$2 . 8 - 4$	$=$	12	„
n nurga „ „ „	$2n - 4$	$=$	$2n - 4$	„

On ühe n nurgal kõik winklid ühesuurused, siis leitakse üksiku winkli suurust, kui tema winkli suuruse summa, külje summa läbi jautud saab,

nõnda on: $\frac{2n-4}{n} = 2 - \frac{4}{n}$ täitwinkelt.

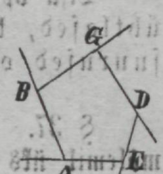
Oleks siin hulknurga üksiku winkli suurust waja teada, siis leiame seda nõnda:

$$\frac{2 . 6 - 4}{6} = 2 - \frac{4}{6} = \frac{4}{3} = 120^0$$

$$7^{me}\text{ nurk} = \frac{2 . 7 - 4}{7} = 2 - \frac{4}{7}$$

$$= \frac{180 . 7 - 360}{7} = 180 - \frac{360}{7} = 128\tfrac{4}{7}^0.$$

2) n nurga ehk hulknurga wälise winkli summa on kokku 4 täitwinkelt.



Tõendus. Iga nurga peal teewad sisine ja wäline winkel kokku 2 täitwinkelt; n nurga peal 2n täitwinkelt; wõtame sest summast n nurga seespidise winklisumma 2n — 4 täitwinkelt ära,

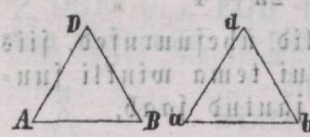
siis jääb 4 täitwinkelt järele. Wõtame need wälised winklid $A + B + G + D + E$ paneme nad ühe punkti ümber kokku, siis teeb, nõnda kui siin näha on, nende summa 4 täit winkelt.

§ 35. **Seletused.** Wigurid, mis teine teisega nõnda ühtlased, on, et neid oma winkli külgedega järestiku wõib ühtteise peale panna, senni kui nemad kokku langewad ja üheks ainsa wiguriks jääwad, niisugusid nimetakse **täis ühtlased** ehk (kongruent).

2) Kahes niisugustes täisühtlases kolm- ehk hulknurgas nimetakse neid külgi ehk nurki, mis järestiku teine teisega ühtlasi seisawad **ühtlasi seisjad** küljed ehk nurgad.

3) **Kahel täisühtlasel kolmnurgal** seisawad **ühesuurustel külgedel ka ühesuurused winklid wastu.**

§ 36. **Õpetus. Kaks kolmnurka on täisühtlased, kui neil kaks külge ja nende külgede waheline winkel mõlemil ühesuurused on.**



Öeldud on: $AB = ab$
$AD = ad$
$\angle A = \angle a$.

Tõeks tehtud peab saama:

$\triangle ABD \cong \triangle abd$.

(Ütle nõnda: kolmnurk ABD on täisühtlane kolmnurga abd[aa]).

Tõendus. Wõtame kolmnurga abd ja paneme teda nõnda kolmnurga ABD peale, et a just A, ja ab täieste AB peale langeb, siis peab ka ad nõndasama AD peale langema, sellepärast et $ad = AD$ ja $\angle A = \angle a$ on, selle järele langeb siis bd ka BD peale ja $\triangle ABD \cong \triangle abd$.

Lisa õpetus. Kaks täiswinkli kolmnurka on täis ühtlased, kui nende mõlemite ristloodide küljed ühesuurused on.

§ 37. **Õpetus. Kaks kolmnurka on täisühtlased, kui neil mõlemil üks külg ja need selle külje peal seisjad winklid ühesuurused on.**

Ööldud on: AB = ab

$\angle$ A = $\angle$ a

$\angle$ B = $\angle$ b

Tõeks peab tehtama:

$\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ abd.

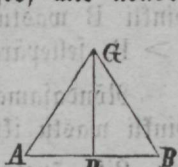
Tõendus. Paneme ab nõnda AB peale, et a just A ja b just B peale langeb, siis peawad ka küljed ad ja bd, AD ja BD peale langema, sellepärast et neil ühe suurused winklid on; nõndasama peab ka punkt d, mis mõlema külje AD ja BD peal ühtlasi seisab, just D peale langema ja siis on $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ abd.

Lisa õpetused. Kaks kolmnurka on täisühtlased, kui neil mõlemil üks külg, üks selle külje pealne, ja teine selle külje wastu seisja winkel ühesuuruased on.

2) Kaks täiswinkli kolmnurka on täisühtlased, kui neil *a*) üks ristloodi külg ja üks teraw winkel ühesuurused on, *b*) kui neil lautuse külg ja üks teraw winkel ühesuurused on.

§ 38. Õpetus. **Kui ühel kolmnurgal kaks külge ühesuurused on, siis on ka need winklid ühesuurused, mis nende külgede wastu seisawad.**

Öölдud on: AG = BG.



Tõeks tehtud peab saama;

$\angle$ A = $\angle$ B.

Tõendus. Poolitame $\angle$ G ristloodi GD läbi, siis on $\triangle$ AGD $\cong$ $\triangle$ BGD (§ 36), sellepärast $\angle$ A = $\angle$ B.

§ 39. Õpetus. **Kui ühel kolmnurgal 2 winkelt ühesuurused on, siis on ka need küljed, mis nende winklite wastu seisawad, ühesuurused.**

Ööldud on: $\angle$ A = $\angle$ B.

Tõeks tehtud peab saama:

AG = BG.

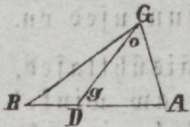
Tõendus. Poolitame winkli G ristloodi DG läbi, siis on $\triangle$ AGD $\cong$ $\triangle$ BGD, sellepärast (§ 37, 1 järele) AG = BG.

Lisa õpetused. 1) Ühtlasel kolmnurgal on kõik winklid ühesuurused, ja iga winkli suurus on $^2/_3$ täis-winkelt ehk 60^0.

2) Igas ühekülises kolmnurgas on need kaks winkelt, mis tema põhjuskülje peal seisawad, ikka terawad winklid.

3) Igas ühekülises täiswinkli kolmnurgas on mõlema terawa winkli suurus $^1/_2$ täitwinkelt ehk 45^0.

§ 40. Õpetus. Ühes kolmnurgas AGB seisab suurema külje wastu ka suurem winkel.



Öeldud on: AB > AG
(külg AB on suurem kui külg AG).

Tõeks tehtud peab saama:
$\angle$ G on suurem kui $\angle$ B.

Tõendus. Paneme selle külje AG, mis winkli B wastu seisab, AB peale, siis ulatab tema senni kui D juure; sealt ühendame meie DG ühe õige joonega, siis sünnib küline kolmnurk AGD, kellel AG = AD ja $\angle$ g = $\angle$ o on. Nüüd on $\angle$ g winkli B wastu wäline winkel ja (§ 33, 1 järele) g > B, ja o > B, sellepärast siis ka G > B.

Nõndasama teeme meie tõeks, et ühes kolmnurgas suurema winkli wastu ikka suurem külg seisab.

Lisa õpetused. 1) Ühe nüri ehk täiewinkli wastu seisab kolmnurgas igakord suurem külg.

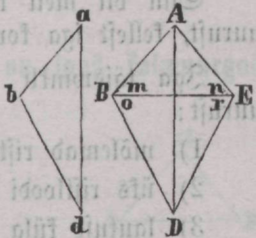
2) Ühe weiksema külje wastu seisab kolmnurgas ka terawam winkel.

§ 41. Õpetus. Kaks kolmnurka on täisühtlased, kui nende kolm külge teine teisega ühesuurused on.

Öeldud on: AB = ab
BD = bd
AD = ad

Tõeks tehtud peab saama:

$$\triangle ABD \cong \triangle abd.$$



Tõendus. Paneme $\triangle$ abd nõnda $\triangle$ ABD kõrwa, et nemad oma suurema külgedega ad ja AD, a just A ja d just D peale langewad, siis on $\triangle$ AED $\triangle$ abd asemelle seatud. Tõmbame meie joon BE, siis on nendes ühekülistes kolmnurkades BAE ja BDE $\angle m = \angle n$, ja $\angle o = \angle r$, nõnda ka $\angle m + \angle o = \angle n + \angle r$ ja sellepärast (§ 36) $\triangle ABD \cong \triangle AED \cong \triangle abd$.

§ 42. Õpetus. **Kaks kolmnurka on täisühtlased, kui neil kaks külge ja winkel, mis suurema külje wastu seisab, ühesuurused on.**

Öõldud on: $AD = ad$
$BD = bd$
$\angle B = \angle b.$

Tõeks peab tehtama:

$$\triangle ABD \cong \triangle abd.$$

Tõendus. Paneme $\triangle$ abd nõnda $\triangle$ ABD kõrwa, et ad just AD peale langeb, siis tuleb b just E kohta seisma, ja $\triangle AED \cong abd$, sellepärast on $\angle B = \angle E$ ja $AB = AE$. Tõmbame meie weel joon BE, siis on ühekülises $\triangle$ BAE $\angle m = \angle n$, nõnda ka $\angle o = \angle r$ ja $\triangle$ BDE sees on $BD = DE$, siis peab (§ 36 ja 38 järele) $\triangle ABD \cong \triangle AED \cong abd$ olema.

Lisa õpetus. Kaks täiewinkli kolmnurka on täisühtlased, kui nende lautuse ja üks ristloodi külg ühesuurused on.

§ 43. Neist täisühtlaste kolmnurkade tõendustest oleme õppinud, et iga kolmnurka selgeste wõib ära tunda:

1) kahest küljest ja sest winklist, mis nende wahel seisab;
2) ühest küljest ja kahest winklist;

3) kolmest küljest;

4) kahest küljest ja suurema külje wastu seisjast winklist.

Siin oli meil kolmnurga selgeks teaduseks waja, kolme suurust, kellest iga kord kõige wähem üks külg teada pidi olema.

Iga täiswinkli kolmnurga selge teaduseks on waja kaht suurust:

1) mõlemad ristloodi küljed;

2) üks ristloodi külg ja üks teraw winkel;

3) lautuse külg ja teraw winkel;

4) lautuse ja ristloodi külg.

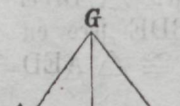
On meil tarwilikud suurused, mis siin ülestähendatud, ühest kolmnurgast teada, siis wõime meie seda kolmnurka tsirkli ja liniali abiga ülesseihkendada, ehk tema suurust arwamise läbi teada saada.

§ 44. Õpetus. **Kui külise kolmnurga winklist, mis tema põhjuskülje wastu seisab, joon nõnda tõmmatud saab, et tema neist kolmest küsimistest:**

1) saab põhjuskülje wastane winkel poolitud?

2) saab põhjuskülg ise poolitud?

3) seisab joon ristloodis põhjuskülje peal? — ühe ära wastab, siis saawad need kaks teist küsimist ka selle läbi wastatud.



Ööldud on:

1) $\angle AGD = \angle \frac{1}{2} AGB$,

2) $AD = BD$,

3) $GD \perp AB$.

Tõeks tehtud peab saama:

$$\triangle AGD \cong \triangle BGD.$$

Tõendus. 1) Kui $\angle AGD = \angle BGD$ on, siis on $\triangle AGD \cong \triangle BGD$ (§ 36).

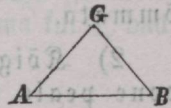
2) Kui $AD = BD$ siis on $\triangle AGD \cong \triangle BGD$ (§ 36).

3) Kui $GD \perp AB$, siis on $\triangle AGD \cong \triangle BGD$ (§ 37, 1).

Need tõendused näitawad, et igakord need kolm küsimist 1) $\angle AGD = \angle BGD$? 2) $AD = BD$? 3) $GD \perp AB$? wastatud saawad.

§ 45. **Õpetus. Kaks külge kokku on igas kolmnurgas ikka suuremad kui tema kolmas külg.**

Ööldud on: AGB kolmnurk.



Tõeks tehtud peab saama:

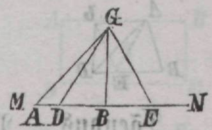
$$AG + BG > AB$$

(ütle: külg AG ja külg BG on kokku suuremad kui külg AB.)

Tõendus. Õige joon AB on kõige lühem tee A juurest B juure (§ 5), sellepärast peab murtud joon $AG + BG$ suurem olema kui AB.

§ 46. **Õpetus. Tõmbame punkti G pealt, mis wäljaspool ühte õiget joont MN seisab, selle peale ühe ristloodi GB ja mitu wiltu joont, GE, GD ja GA, siis on:**

1) ristloodi joon GB lühem, kui teised wiltu jooned.



2) kaks wiltu joont, GD ja GE, mis ristloodi jala punktist B oma jala punktidega ühe kaugusel seisawad (BE = BD) on ühe pikkused.

3) kahest wiltu joonest on see pikem, mis oma jala punktiga ristloodi joonest kaugemal seisab.

Ööldud on:

1) $GB \perp MN$

2) GD ja GE wiltu jooned

3) $AB > BD$.

Tõeks peab tehtama:

1) $GB < GE$ ja GD

2) $GE = GD$

3) $GA > GD$.

Tõendus. 1) Iga täiswinkli kolmnurgal GBD ja GBE on ristloodi külg $GB < DG$, ja $GB < GE$. (§ 40).

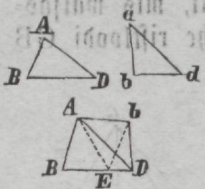
2) Kui BD = BE, siis on △ GBD ≅ △ GBE ja sellepärast (§ 36) GD = GE.

3) GDB on teraw winkel, ja GDA on nüri winkel, kolmnurga GDA sees on siis GA > GD (§ 40 1).

Lisa õpetused. 1) Üheſt punktist ei wõi ühe õige joone peale mitte rohkem kui kaks ühe pikkust joont tõmmata.

2) Kõige lühem joon, mis üheſt punktist õige joone peale tõmmata wõib, seisab selle joone peal ristloodis.

§ 47. **Õpetus.** **Kui kahes kolmnurgas ABD ja abd kaks külge ühe pikkused on, aga winkel mis nende wahel seisab, ühes kolmnurgas suurem kui teises, siis seisab ka suurema winkli wastu suurem külg.**



Öeldud on: AB = ab
AD = ad
∠ A > ∠ a.

Tõeks peab tehtud saama:
BD > bd.

Tõendus. Paneme mõlemad kolmnurgad ABD ja abd nõnda teine teise kõrwa, et nende ühesuurused küljed AD ja ad just üheteise peal seisawad, ja poolitame selle nüüd sündinud nelinurga ABDb winkli BAb joone AE läbi, siis peab AE winkli BAb külgede wahele langema. Tõmbame weel joon Eb, siis on △ BAD ≅ △ bAE (§ 36), sellepärast BE = bE. Nüüd on bE + ED > bd, ja BE + ED > bD, ja sellepärast ka BD > bD ehk BD > bd.

§ 48. **Õpetus.** **Kui kahes kolmnurgas ABD ja abd kaks külge ühe pikkused on, aga kolmas külg ühes kolmnurgas suurem on kui teistes, siis seisab ka suurema külje wastu suurem winkel.**

Öeldud on: AB = ab
AD = ad
BD > bd.

Tõeks tehtud peab saama:

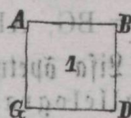
$\angle$ BAD suurem kui $\angle$ bad.

Tõendus. Oleks $\angle$ A = $\angle$ a, siis oleks $\triangle$ BAD $\cong$ $\triangle$ abd ja BD = bd (§ 36), ja oleks $\angle$ A weiksem kui $\angle$ a, siis oleks külg BD weiksem kui külg bd.

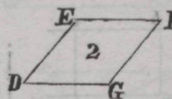
Mõlemad tõendused näitawad, et nemad **wastu** geometria õpetust on, sellepärast peab siis $\angle$ BAD suurem olema kui $\angle$ bad.

§ 49. Seletused.

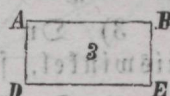
Iga nelinurk on neljast õigest joonest ümberpiiritud jagu ühest ühetasasest wäljast.



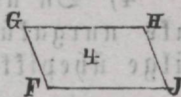
1) **Ruut on nelinurk** ABDG, kellel kõik küljed ühepikkused ja winklid ühesuurused on.



2) **Wilturuut** DEFG on nelinurk, kellel küljed ühepikkused, aga winklid mitte kõik ühesuurused ei ole.

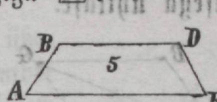


3) **Pikkruut** ABED on nelinurk, kellel 2 wastastikku külge ühe pikkused ja winklid ühesuurused on.

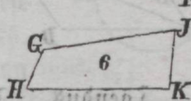


4) **Wiltu pikkruut** FGHJ on nelinurk, kellel kaks wastastikku külge ühepikkused, aga nende winklid mitte ühesuurused ei ole.

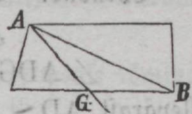
Neli esimest nelinurka, k lle wastastikud küljed ühtlasi jooksewad, nimetakse üleüldise nimega **parallelogrammiks = ühtlasijooksjaks nelinurgaks** ja tähentakse selle märgiga ▱.



5) **Trapets** on nelinurk BDFA, kellel 2 külge ühtlasi jooksewad, aga kelle küljed ja winklid mitte ühesuurused ei ole.

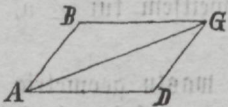


6) **Trapetsoid** on nelinurk GJKH, kelle küljed mitte ühtlasi ei jookse.



Joont AB, mis kaks nurka ühe wiguri sees ühendab, nimetakse **ühendajaks**. Leikab joon ühe wiguri läbi, nõnda kui siin AG, siis nimetakse teda **leikjooneks**.

§ 50. **Õpetus. Igal nelinurgal (ehk parallelogrammil), kelle küljed ühtlasi jooksewad, on wastastikud küljed ja winklid ühesuurused.**



Ööldud on:

ABGD on parallelogramm.

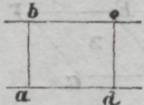
Tõeks tehtud peab saama:

$$AD = BG$$
$$AB = DG$$
$$\angle D = \angle B$$
$$\angle BAD = \angle DGB.$$

Tõendus. Tõmbame ühenduse joone AG, siis on $\triangle ADG \cong \triangle ABG$, sellepärast

$AD = BG$, $AB = DG$ ja $\angle D = \angle B$, $\angle DAB = \angle DGB$.

Lisa õpetused. 1) Ühenduse joon AG jautab iga parallelogrammi kaheks täisühtlaseks kolmnurgaks.

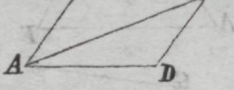


2) Ühtlasi jooksjad jooned, ühtlasi jooksja joonte wahel, on ikka ühe pitkused, $ab = de$.

3) On ühe ühtlase külgedega nelinurgal üks täiswinkel, siis on ka teised winklid täiedwinkid.

4) On ühe ühtlasi jooksja külgedega nelinurgal kaks nurgakülge ühepikkused, siis on ka kõik neli külge ühepikkused.

§ 51. **Õpetus. On ühes nelinurgas kaks wastastikku külge ühepikkused, siis jooksewad ka wastastikud küljed teine teisega ühtlase.**



Öölbud on: $AD = BG$

$AB = DG.$

Tõeks tehtud peab saama:

$AD \parallel BG$, $AB \parallel DG$.

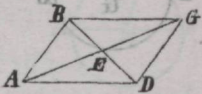
Tõendus. Tõmbame ühe ühendusejoone AG, siis on

$\triangle ADG \cong \triangle GBA$ (§ 41)

$\angle ADG = \angle ABG$, $\angle DAG = \angle BGA$,

sellepärast $AD \parallel BG$ ja $AB \parallel DG$.

§ 52. Õpetus. **Kaks ühenduse joont AG ja BD poolitawad teine teist ühes nelinurgas, kelle wastuseisjad küljed ühtlasi jooksewad.**



Ööldud on: AB = DG

Tõeks tehtud peab saama:

AE = GE; BE = DE.

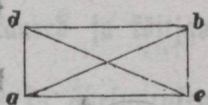
Tõendus. Teada on (§ 51) et

$\angle ABE = \angle GDE$

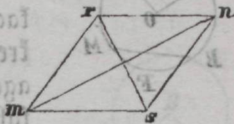
$\angle BAE = \angle DGE$,

sellepärast on siis $\triangle ABE \cong \triangle GDE$ ja

AE = EG, BE = DE.

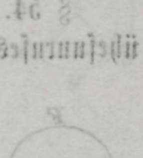


Lisa õpetus. Täiewinkliga nelinurkades on mõlemad ühenduse jooned ühepikkused, ab = de. Wiltuwinkliga nelinurgas on üks ühenduse joon pikem kui teine, ja ühepikkuse külgedega nelinurgas seisawad mõlemad ühenduse jooned teine teise peal ristloodis, mn $\perp$ rs.



II. Kreis ja tema winklid.

§ 53. **Seletused.**

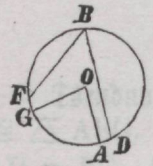


1) Wigurit mis selle läbi sünnib, et ühepikkust õiget joont GA ühe kindla punkti G ümber nõnda kaua pöörtakse, kunni tema oma esimese koha peale jälle tagasi tuleb, nimetakse **kreisiks**. Selle järele on siis kreisi **wäline piir** ehk **kreisijoon** (Peripherie) kindlast punktist G, keda meie **keskpunktiks** (Centrum) nimetame, igal pool ühe kaugusel.

2) Õiget joont, mis keskpunktist kreisijoone peale tõmmatakse, nimetakse **poolmõetjaks**, AG (Radius).

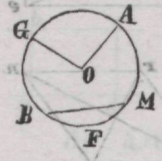
3) Õiget joont, mis kaks kreisi punkti ühendab, BD, nimetakse **köitjaks jooneks** (Chorde).

4) Jookseb õige joon kreisi keskpunktist läbi, BE, siis nimetakse teda **läbimõetjaks** (Diameter) ja tema pikkus on kaks poolmõetjat BG + GE.



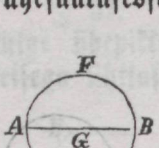
5) Sünnitawad kaks poolmõetjat ühe winkli, kelle ühenduse punkt kreisi keskpunkt on, siis nimetakse teda **keskwinkliks** (Centriwinkel), nõnda $\angle$ GOA. Sünnitawad aga kaks köitjat joont ühe winkli FBD, kelle ühenduse punkt kreisi piiri peal seisab, siis nimetakse seda winkelt **piiriwinkliks** (Peripheriewinkel).

6) Iga jagu kreisijoonest BFM nimetakse **kaareks.**



7) Seda jagu kreisi suurusest, mis ühe kaare ja köitjajoone läbi piiritud on, nimetakse **kreisileiguks** (Segment), nõnda siin BMF; on aga üks jagu kreisi suurusest, ühest kaarest ja kahest poolmõetjast ümberpiiritud, GOA, siis nimetakse seda **kreisi-wäljaleiguks** (Sector).

§ 54. **Õpetus. Läbimõetja AB jautab kreisijoone kahte ühesuurusesse jakku.**



Ööldud:

AB on kreisi läbi mõetja.

Tõeks peab tehtama:

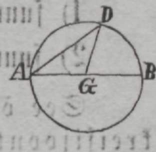
kaar AFB = kaar AEB.

Tõendus. Wõtame kaare AFB ja käaname teda nõnda ümber, et punkt A just A ja punkt B just B kohta seisma jääks, siis peawad ka kõik teised kaare punktid AFB ja AEB ühe teise peale langema, sellepärast et mõlemad ühe poolmõetja-pikkusega sünnitud on.

§ 55. **Õpetus. Kreisi läbimõetja** AB **on ikka pikem kui tema kõitjajoon** AD.

Hööldud:

AD on kõitjajoon ja AB läbimõetja.



Tõeks tehtud peab saama:

$$AB > AD.$$

Tõendus. Tõmbame poolmõetja GD siis on

$$AG + GD > AD; \text{ aga } AG + GD = AB,$$

sellepärast $AB > AD$.

§ 56. **Õpetus. Ühe ja sellesama, ehk ühesuuruse kreiside sees on:**

1) ühesuuruse keskwinklitel ühesuurused kaared ja kõitjad jooned,

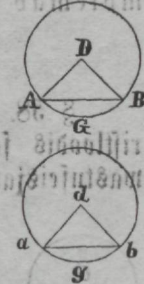
2) ja ühesuuruse kaarede peal seisawad ka ühesuurused keskwinklid ja kõitjad jooned.

Hööldud on: $\angle ADB = adb$.

Tõeks tehtud peab saama:

kaar AGB = kaar agb

kõitjoon AB = ab.



Tõendus. 1) Kui $\angle D = \angle d$ ja mõlemad kreisid ühepikkuse poolmõetjaga sünnitud on, siis wõib neid nõnda teine teise peale panna, et nende ühtlased punktid AGBD ja agbd kokku langewad ja sellepärast on

kaar AGB = kaar agb, kõitjajoon AB = ab.

2) On mõlemad kaared AGB ja agb ühesuurused, siis on ka nende kõitjad jooned ühesuurused ja $\triangle ADB \cong \triangle adb$ (§ 38) sellepärast $\angle D = \angle d$.

Lisa õpetused. 1) Ühesuuruse keskwinklitel ja kaaridel peawad ka ühesuurused kreisileigud ja kreisiwäljaleigud olema.

2) Suuremal keskwinklil peab ka suurem kaar olema.

§ 57. **Õpetus. Ühesuuruse kreiside, ehk ühe ja sellesama kreisi sees peab:**

1) suuremal kaarel suurem köitjajoon,

2) suuremal köitjajoonel suurem kaar olema.

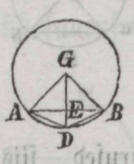
See õpetus kestab kaaridele mis weiksemad poolkreisijoont on.

Tõendus. 1) Kaar AGB > kaar AG. Tõmbame poolmõetjad AD, DB ja DG, siis on nende kolmnurkadel ADB ja ADG kaks külge ühe pikkused, aga nende külgede wahel seisjad winklid ADB > ADG, sellepärast AB > AG (§ 47).

2) Kui AB > AG. Meil on kolmnurkadest ADB ja ADG teada, et winkel ADB > ADG, sellepärast (§ 48) kaar AGB > kui kaar AG.

Lisa õpetus. Suuremal kaarel on weiksem köitjajoon, ja weiksemal köitjajoonel on suurem kaar, kui mõlemad kaared suuremad on kui poolkreisi joon.

§ 58. **Õpetus. Kui poolmõetja GD köitjajoone AB peal ristloodis seisab, siis poolitab tema köitjajoont ja köitjajoone wastuseisjat kaart.**



Ööldud on: GD $\perp$ AB.

Tõeks tehtad peab sama:

AE = EB

kaar AD = kaar DB.

Tõendus. $\triangle$ AGE $\cong$ $\triangle$ BGE (§ 47, 1), siis on AE = EB; nõnda ka AD = DB (§ 46, 2), sellepärast kaar AD = kaar DB.

Lisa õpetus. Kui õige joon köitjajoone peal ristloodis seisab, siis jookseb tema kreisi keskpunktist läbi, ja poolitab seda kaart, mis köitja joone üle seisab.

§ 59. **Õpetus.** 1) **Ühesuurused kõitjajooned ED ja GH on kreisi keskpunktist ühe kaugusel.**

2) **On üks kõitjajoon, GK, pikem kui teine, GH, siis seisab lühem joon kreisi keskpunktist kaugemal.**

Ööldud on: 1) $ED = GH$

2) $GK > GH$.

Tõeks tehtud peab saama:

$OJ = OF$

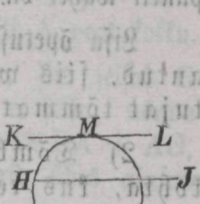
$OJ > OL$.

Tõendus. Tõmbame kesk ED ja GH peale ristloodid OF ja OJ; ühendame OE ja OG, siis on $EF = GJ$, $OE = OG$, $\angle F = \angle J$ ja $\triangle OEF \cong \triangle OGJ$ (§ 42), sellepärast $OJ = OF$.

2) Kui $ED < GK$, siis on ka kaar $ED < DHK$ (§ 57, 2). Teeme kaare $GH = ED$ ja tõmbame GH; laseme keskpunkti pealt $OJ \perp GH$ ja $OL \perp GK$. Nüüd on $OJ > OW > OL$ (§ 46, 1. 2.), sellepärast et $GH = ED$ (§ 56, 1. 2), $OJ = OF$ ja $OF > OL$.

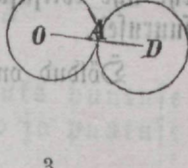
Lisa õpetus. Mida ligidamal kõitjajoon kreisi keskpunktile seisab, seda suurem on tema pikkus.

§ 60. Seletused.



Jookseb õige joon, HJ, kreisijoonest läbi, nõnda et tema pikkus sees- ja wäljaspool kreisi on, siis nimetatakse teda lõikjooneks (ehk Sekante).

On õigel joonel, KL, kreisi joonega üks ühtlane punkt, siis nimetatakse teda puutujaks (Tangente), ja punkt M, mis temal kreisijoonega ühtlane on, puutuse punktiks.

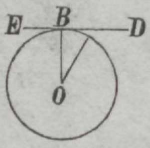


Kaks kreisi joont puuduwad teine teisega kokku, kui neil üks ainus puutuse punkt, A, on.

Ühendab üks õige joon, OD, kahe kreisi keskpunktid, siis nimetatakse teda keskpunkti jooneks (ehk Centraljoon).

§ 61. **Õpetus. 1) Kui õige joon ED poolmõetja OB otsa peal ristloodis seisab, siis on see joon kreisi puutuja (ehk Tangente).**

2) **Puutuja (Tangente) seisab selle poolmõetja peal ristloodis, mis puutusepunkti peale tõmmatakse.**



Ööldud on:

1) ED $\perp$ OB
2) ED puutuja (joon).

Tõeks tehtud peab saama:

1) ED puutuja
2) OB $\perp$ ED.

Tõendus. Puutujal on kreisiga üks ainus punkt ühtlane, oleks temal rohkem niisugusid punktisid, siis wõiks meie O pealt ka rohkem kui ühe poolmõetja tema peale tõmmata, mis siin mitte wõimalik ei ole, sellepärast on siis ED kreisipunkti B peal puutuja (joon).

2) Kui ED puutuja on, ja temal paljalt üks ainus punkt, B, kreisijoonega ühtlane, siis peawad kõik teised jooned, mis kreisi keskpunktist tema peale tõmmatakse, pikkemad kui kreisi poolmõetja olema, sellepärast et ristloodi-joon OB kõige lühem tee kahe punkti wahel on.

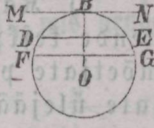
Lisa õpetused. 1) On kreisjoone peal üks punkt antud, siis wõib selle punkti peale üht ainsat puutujat tõmmata.

2) Tõmbame meie puutujajoone peale, sinna kohta, kus temal kreisi joonega ühtlane punkt on, ühe ristloodi, siis jookseb see ristloodi joon kreisi keskpunktist läbi.

§ 62. **Õpetus. Kaared, mis ühtlase jooksja köitjajoonte, ehk ühe köitjajoone ja puutuja wahel kreisis seisawad, on ühesuurused.**

Ööldud on:

$\left.\begin{array}{l}\text{DB ja BG}\\ \text{DF ja EG}\end{array}\right\}$ on kaared.



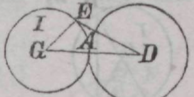
Tõeks tehtud peab saama:

BD = BE

DF = EG.

Tõendus. Tõmbame meie kreisi keskpunktist puutusepunkti B peale poolmõetja OB ristloodi, siis seisab ka tema nende kolme ühtlase jooksja joonte FG, DE ja MN peal ristloodis (§ 61, 2; § 27) ja nüüd on (§ 58 järele) kaar BF = BG, kaar BD = BE, sellepärast kaar DF = EG.

§ 63. Õpetus. Kui kahe kreisi, G ja D, keskpunkti-joon (Centrale) GD nõnda pikk on, kui nende mõlemate poolmõetjad kokku, AD + GA, siis puuduwad nende piirid wäljaspidi, — on aga keskpunkti joonepikkus paljalt ülejäädaw, mis selle läbi sünnib, kui meie wäiksema kreisi poolmõetja pikkuse suuremast maha arwame, siis puuduwad mõlemad kreisi piirid seespool, — ühe ainsa punkti peal kokku.



Öölbud on: 1) DG = DA + GA

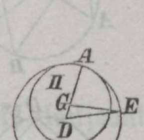
2) DG = DA — GA.

Tõeks tehtud peab saama:

1) Kreis G puudub kreisi D-ga wäljastpoolt ühe punkti A peal kokku.

2) Kreis G puudub kreisi D-ga seespoolt ühe punkti A peal kokku.

Tõendus. 1) Kui GD = DA + AG on, siis seisab G kreisist iga punkt E, mis mitte joone GD peal ei seisa, nõnda kui A, D-kreisist eemal, sellepärast, et GE + ED > DA + AG, ja DE > AD, puuduwad mõlemate kreiside piirid ühes ainsas punktis A kokku.



2) Kui DG = DA — GA, siis seisab nõnda-sama G-kreisist iga punkt E, D-kreisijoonest eemal ja on mõlemal kreisil paljalt üks punkt A ühtlane. Seda näitame nõnda: DG + GE > DE ja DE = DG + GA, sellepärast DG + GE > DG + GA ehk GE > GA.

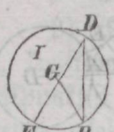
Lisa õpetused. 1) Kui kahel kreisil üks puutuse punkt on, siis seisawad nende keskpunktid ja puutuse punkt ühe õige joone peal.

2) Kaks kreisi jooksewad teine teisest läbi, kui nende keskpunktijoon lühem on, kui mõlemate poolmõetjate pikkus, ja pikem, kui mõlemate poolmõetjate ülejäädaw.

§ 64. **Seletus.**

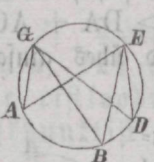
Nõndawiisi kui täiswinkel (§ 23, 1 õpetuse järele) 90 jausse ehk kraadi jautatud sai, jautatakse ka kreisijooni neljandat jagu, mis ühe täiskeskwinkli külgede wahel seisab, 90 jausse ehk kaarekraadi, ja täiskreisi joon 360 kraadi, iga kraad 60 minutisse ja iga minut 60 sekundi. Niisugune kaare ja winkli jautamine näitab, et kaare suurus kreisi joone suuruse wastu nõndasama on, kui winkli suurus, mis selle kaare peal seisab 4 täiswinkli suuruse wastu.

§ 65. **Õpetus. Kreisi keskwinkel** BGE **on pool suurem kui piiriwinkel** BDE, **mis sellesama kreisi kaare** BE **peal seisab.**



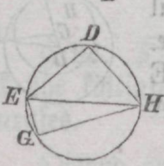
Tõendus. I. Seisab kreisi keskpunkt G piiriwinkli külje peal, siis on (§ 38) $\angle D = \angle B$ ja (§ 33, 1) $\angle BGE = \angle D + \angle B = \angle 2B$, sellepärast $\angle D = {}^1/_2 \angle BGE$.

II. Seisab keskpunkt G piiriwinkli wahel, ja tõmbame meie läbimõetja DE, siis on winkel $ADE = \angle {}^1/_2 AGE$ ja $\angle BDE = \angle {}^1/_2 BGE$, sellepärast $\angle ADB = \angle {}^1/_2 AGB$.



Lisa õpetused. 1) Piiriwinkli suurust mõedab poolkaar, mis tema külgede wahel seisab.

2) Kõik kreisi piiriwinklid A, B, D, mis ühe ja sellesama kaare GE peal seisawad, on ühesuurused.

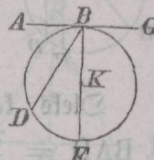


3) Üks piiriwinkel D, mis poole kreisijoone peal seisab, on täiswinkel.

4) Igas nelinurgas, kelle winkli ühenduse punktid kreisijoone peal seisawad, DEGH, on kahe wastastiku seisja winkli E ja H suurus ikka 2 täiswinkelt.

§ 66. **Õpetus. Ühe winkli suurust, keda puutuja ja kõitjajoon ABD sünnitawad, mõedab poolkaar BD, mis nende külgede wahel seisab.**

Öõldud on: AB on puutuja
DB on kõitjajoon.



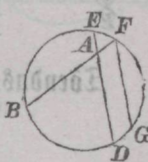
Tõeks tehtud peab saama:

$\angle$ ABD $= \angle\ {}^1/_2$ (BD)

Tõendus. Tõmbame puutuse punkti B pealt läbimõetja BE, siis on $\angle$ ABE täiswinkel, teda mõedab $= {}^1/_2$ (kaar BDE) ja $\angle$ DBE $= {}^1/_2$ (DE), sellepärast $\angle$ ABD $= {}^1/_2$ (BDE — DE).

Lisa õpetus. Winkel ABD, keda puutuja ja kõitjajoon sünnitawad on ikka piiri winkliga ühesuurune, mis sellesama kaare peal seisab.

§ 67. **Õpetus. Winkli BAD suurust, mis kahe kõitjajoone läbi sünnitud on, mõedawad kaks pooltkaari BD ja EF, mis tema külgede wahel seisawad.**



Tähendatud:

$\angle$ BAD $=$ kaar $\frac{BD + EF}{2}$.

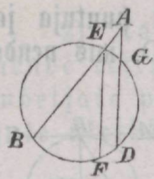
Tõendus. Tõmbame FG $\|$ ED, siis on (§ 28, 2) $\angle$ A $= \angle$ F. Piiriwinkelt F mõedab (§ 65, 1) $= {}^1/_2$ (kaar BDG) $= {}^1/_2$ (BD $+$ DG); aga kaar DG $=$ EF, sellepärast mõedab ${}^1/_2$ (BD $+$ EF) winkelt BAD.

Oleks kaar BD $= 80^0$ ja kaar EF $= 20^0$, siis oleks $\angle$ BAD $= \frac{80^0 + 20^0}{2} = 50^0$.

§ 68. **Õpetus. Ühe winkli suurust, keda kaks lõikjoont sünnitawad, mõedab pool kahe kaari ülejäädaw $\frac{BD - EG}{2}$, mis tema külgede wahel seisab.**

Tähendatud:

$\angle$ BAD $= \frac{\text{kaar BD} - \text{EG}}{2}$.



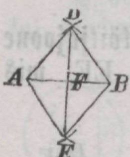
Tõendus. Tõmbame EF ∥ GD, siis on $\angle E = \angle A$, $\angle A =$ kaar $\frac{BF}{2}$; aga kaar GE = FD, sellepärast kaar BF = BD — FD = BD — EG, nõnda on $\angle BAD = \frac{BD - EG}{2}$.

Oleks kaar BD = 76^0, kaar EG = 24^0, siis oleks $\angle BAD = \frac{76^0 - 24^0}{2} = 26^0$.

A. Ülesanded.

1) Õiget joont AB poolitada.

Juhatus.

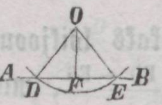


Kirjuta esite A pealt ühe tsirkle-laiusega kaks kaart D ja E, ja sellesama tsirkle-laiusega B pealt wastu, nõnda et need kaared D ja E juures teine teisest läbi jooksewad; siis poolitab ühenduse joon DE õiget joont AB, nõnda et AF = BF on.

Tõendus. △ ADE ≅ △ DBE (§ 41) ja
$\angle ADF = \angle BDF$; nõnda on siis
△ ADF ≅ △ BDF (§ 36), ja sellepärast
AF = BF.

2) Punkti O pealt ristlood õige joone AB peale tõmmata.

Juhatus.

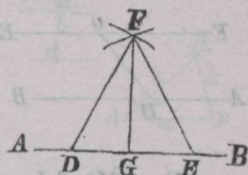


Pane üks tsirkle haru punkti O peale ja kirjuta teise haruga üks kaar, mis õigest joonest AB kahes punktis DE läbi jookseb; poolita joon DE punkti F läbi, siis seisab joon OF ristloodis AB peal.

Tõendus. Tõmba DO ja OE, siis on △ ODF ≅ △ OFE (§ 41 järele) kõik kolm külge ühesuurused $\angle OFD = \angle OFE$, sellepärast OF ⊥ AB.

3) Punkti G kohta, mis õige joone AB peal seisab, ristlood tõmmata.

Juhatus.

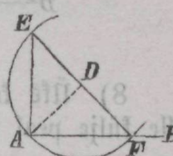


Wõta kaks punkti D ja E, mis G pealt ühe kaugusel on, ja kirjuta mõlemate üle kaks kaart, mis teine teisest F juures läbi jooksewad, siis on FG otsitud ristlood.

Tõendus. △ GDF ≅ △ GEF (§ 41) ja
∠ DGF = ∠ EGF, sellepärast
FG ⊥ AB.

4) Õige joone AB otsa peale ristlood AE kirjutada.

Juhatus.

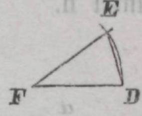


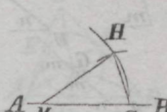
Kirjuta punkti D juurest tsirkle harulaiusega AD kaar EAF, mis joonest AB kahes punktis A ja F üle jookseb. Tõmba õige joon FD, ja pikenda teda seni kui tema E juures kaare peale ulatab, siis on ühenduse joon AE otsitud ristlood.

Tõendus. ∠ FAE on täiswinkel (§ 65, 3).

5) Õige joone AB peale winkelt teha, mis ühe teise winkliga, DFE, ühesuurune on.

Juhatus.

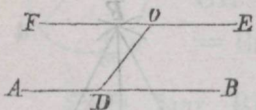




Kirjuta tsirkliga ühenduse punkti F pealt kaar DE, mis mõlemateft winklikülgedest, FD ja FE, läbi jookseb; sellesama tsirkle-laiusega kirjuta ka teine kaare joon AB üle, nõnda et üks tsirkle aru punkti M peal seisab ja teine kaare GH kirjutab. Nõndasama jälle G pealt DE laiusega kaare, mis esimesest H juures läbi jookseb, ja ühenda nüüd MH, siis on ∠GMH = ∠ F, sellepärast et △ EFD ≅ △ HMG.

6) Punkt O läbi õiget joont tõmmata, mis joonega AB ühtlase jookseb.

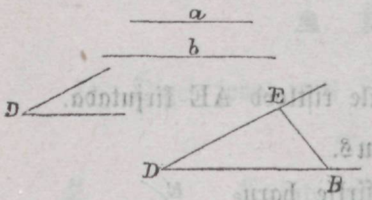
Juhatus.



Tõmba joon OD ja tee ∠ BDO = ∠ DOF, siis on § 27 ja § 28 järele FO || AB.

7) Üks kolmnurk teha, kui antud on: kaks külge a b ja nende waheline winkel D.

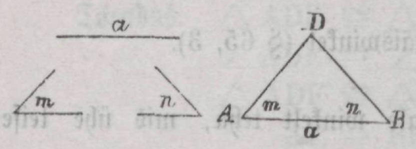
Juhatus.



Kirjuta esite winkel D = ∠ D. Pane ühe winkli külje peale pikkus a = DE ja teise peale b = DB, tõmba BE, siis on BDE see otsitaw kolmnurk.

8) Üks kolmnurk teha, kui antud on: üks külg a ja kaks selle külje peal seisjat winkelt m ja n.

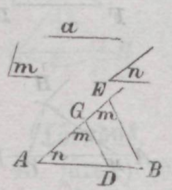
Juhatus.



Kirjuta antud külje a = AB ühe otsa peale ∠ m, ja teise otsa peale ∠ n, tõmba AD ja BD, siis on ABD otsitud kolmnurk.

9) Tee üks kolmnurk, kui sul teada on: üks külg = a, selle külje peal seisaw winkel m ja teine selle külje wastu seisja winkel n.

Juhatus.

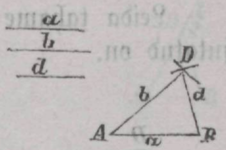


Tee AB = a, kirjuta winkel n, A juures, AB peale ja tõmba AE, siis pane G juures teine winkel m AE peale, nõnda et tema teine pikendatud külg GD, AB peale puutub, tõmba siis B pealt joon BE, mis ühtlasi GD^ga jookseb, sedawiisi on otsitaw kolmnurk AEB leitud.

10) Kolmnurk teha, kui kolm külge teada on:

Juhatus.

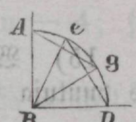
Tee $a = AB$ ja kirjuta tsirkliga A pealt b pikkusega, ja B pealt d pikkusega kaks kaart, mis D juures teine teisest läbi jooksewad; tõmba DA ja DB, siis on ABD otsitud kolmnurk.



11) Täiswinkelt ABD kolm ühtsuurusesse jakku jagada.

Juhatus.

Kirjuta ühenduse punkti B pealt kaar AD ja mõeda sellesama tsirkle-laiusega D pealt e juure ja A pealt g juure, tõmba Be ja Bg, siis on $\angle$ ABD kolme ühtsuuruse jakku jautatud. $Bg \perp De$ ja $Be \perp Ag$, sellepärast $Dg = eg = Ae$.



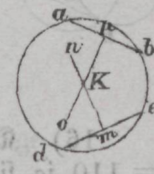
12) Kreisi keskpunkti K leida.

Antud: ○ kreis.

Leida tahame: kreisi keskpunkti K.

Juhatus.

Tõmbame kaks kõitjajoont ab ja de, ja teeme nende keskpunktide m ja p peale ristloodid $mn \perp de$ ja $po \perp ab$, siis jooksewad (§ 58, 1) mn ja op keskpunktist K läbi.



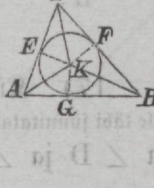
13) Kolmnurga ABD sisse kreis kirjutada.

Antud: $\triangle$ ABD.

Leida tahame: kreis GEF.

Juhatus.

Poolitame winkli A ja B, tõmbame siis üle poolituse punkti K kaks joont, mis K juures teine teisest läbi jooksewad. Siis on ka kolm ristloodi, mis K juurest kolmnurga küljede peale tõmmatud saawad $KG = KF = KE$, sellepärast ka $\triangle AKE \cong AKG^{ga}$.



14) Kolmnurga ABD ümber kreisi kirjutada.

Antud: $\triangle$ ABD.

Leida tahame: kreisi, mis kolmnurga nukkide ümber kirjutatud on.

Juhatus.

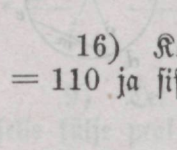
Tõmba kahe kolmnurga külje keskpunktide M ja N peale ristloodid MK ja NK, siis on ristloodi lõigupunkt K selle kreisi keskpunkt, mis ümber kolmnurga ABD kirjutada wõib; sellepärast et KD = KB = KA on.

15) Wäljaspool kreisi on punkt A antud, selle punkti pealt üks puutuja joon kreisi peale tõmmata.

Antud: punkt A.

Leida tahame: puutujat AD.

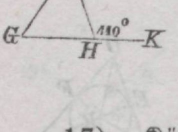
Juhatus.



Ühenda punkt A kreisi keskpunktiga; poolita siis ühenduse pikkust E juures ja kirjuta poolmõetja EA^ga^ jälle kreis; siis jookseb wiimane kreisi joon esimesest kreisist kahes punktis D ja B läbi, ja need läbijooksu punktid on siis puutuse punktid.

16) Kolmnurga GJH wäline winkli suurus JHK on = 110 ja sisemine $\angle$ J = 45°. Kui suured on $\angle$ G ja $\angle$ H?

Juhatus.



(§ 33, 1)

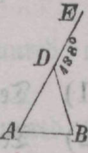
$\angle$ H + $\angle$ JHK = 180°

$\angle$ H = 180° — 110° = 70°

$\angle$ G = 180° — (70° + 45°) = 65°.

17) Küline kolmnurga ABD wälise winkli suurus (mis selle läbi sünnitatakse, et ühtlane külg pikendatud saab) on 138°. Kui suured on $\angle$ D ja $\angle$ A?

Juhatus.



$\angle A = \angle B$, ja $\angle A + \angle B = 138^0$

$\angle D = 180^0 - 138^0 = 42^0$

$\angle A = \frac{180^0 - 42^0}{2} = 69^0.$

18) Hulknurga winkli summa on 20 täiswinkelt. Mitu külge ja winkelt on selle hulknurgal?

Juhatus.

(§ 34). Hulknurga winkli summa on $2n - 4$; selle järele on siis

$2n - 4 = 20, \quad n = \frac{20+4}{2} = 12$ külge ja winkelt.

19) Üks ühtkülise hulknurga winkel on 165^0. Mitu külge on sel hulknurgal?

Juhatus.

$$\frac{2n-4}{n} = 165^0 = \frac{180^0 n - 360^0}{n} = 165^0$$

$$= 180n - 360 = 165n$$

$$= (180 - 165)n = 360.$$

$$15n = 360$$

$$n = {}^{360}/_{15} = 24 \text{ külge}$$

20) Üks kõrwuswinkel EBD on kolm korda nii suur kui teine. Kui suured on nad mõlemad?

Juhatus.

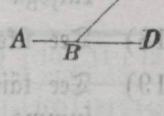
$\angle ABE + \angle EBD = 180^0$

$\angle ABE = 3\,EBD$

$\angle 4\,EBD = 180^0$

$\angle EBD = {}^{180^0}/_4 = 45^0$

$\angle ABE = 180^0 - 45^0 = 135^0.$



Katsu nüüd oma mõistuse abiga järeltulewad ülesanded wälja arwata.

1) Tee antud joonepikkusega A——B üks ruut.

2) Tee kahe joone pikkusega AB ja DE pikkruut.

3) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on: üks ristloodikülg AB ja lautuse külg BD.

4) Tee wiltupikkruut, kui teada on: mõlemad ühenduse jooned ja üks külje joon.

5) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on: 2 ristloodi külge.

6) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on: lautuse külg ja üks winkel b, mis lautuse ja ristloodi külje wahel seisab.

7) Tee küline kolmnurk, kui teada on: põhjusküg ja winkel, mis selle külje wastu seisab.

8) Tee küline kolmnurk, kui teada on: põhjusküg ja ristlood, mis põhjusküje wastuseisja winklist tema peale tõmmatud.

9) Tee küline kolmnurk, kui teada on: põhjusküg ja kolmnurga kõrgus.

10) Tee wilturuut, kui teada on: külg ja üks winkel.

11) Tee wilturuut, kui teada on: mõlemad ühenduse jooned.

12) Tee wilturuut, kui teada on: külg ja kõrgus.

13) Tee kreis, kui teada on: läbimõetja.

14) Tee kreis, kui teada on: kolm punkti, mis tema piiri joone peal seisawad.

15) Tee kreisi piiriwinkel niisama suureks, kui tema keskwinkel on.

16) Tee kolmnurk, kui teada on: kolme külje pikkuse summa, ja $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ D.

17) Kirjuta winkli külgede wahele kreis, nõnda et tema kummagi küljega ühes punktis kokku puudub.

18) Tee üks ruut, kui tema ühenduse joon teada on.

19) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on: kolme külje pikkuse summa ja üks winkel.

20) Üks kõrwuswinkel on 2 korda nii suur kui teine, kui suured on nad mõlemad?

21) Külise kolmnurgas on üks winkel 64^{0}, kui suured on kaks teist?

22) Külise kolmnurga wäline winkel on 112^{0}, kui suured on kolmnurga sisemised winklid?

23) Hulknurga winklisumma on 78 täiswinkelt, kui palju külgesid on sel hulknurgal?

24) Ühekülise hulknurga üksikwinkel on $172\frac{1}{2}{}^{0}$, kui palju külgesid on sel hulknurgal?

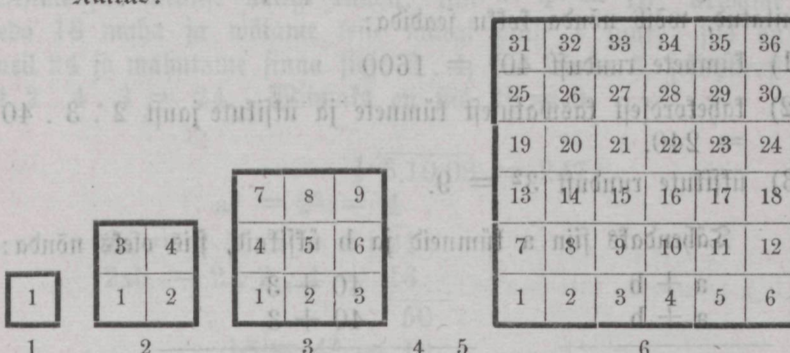
25) Ühtkülisel hulknurgal on 17 külge, kui suur on tema üksikwinkel?

B. Ruutarwamine.

Kui meie üht nummert iseenesega kaswatame, siis nimetame tema kaswatust **ruutnumbriks**, ja seda nummert, mis iseenesega kaswatatud saab, põhjusnumbriks, nõnda siin: $6 \times 6 = 36$.

6 on siin põhjusnummer, ja 36 tema ruutnummer.

Näitus:



1 2 3 4 5 6

Põhjusnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ruutnummer	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Kui üht põhjusnummert ruutnumbriks peab tõstetama, siis kirjutatakse seda nõnda:

$$6^2 = 36, \quad 12^2 = 144, \quad 25^2 = 625, \quad 100^2 = 10000.$$

Wäikene nummer 2, mis põhjusnumri üle on kirjutatud, tähendab, et tema iseenesega peab 2 korda kaswatatud saama $6 \times 6 = 36$. Oleks nõnda kirjutatud 6^3, siis tähendaks, et põhjusnummer 3 korda iseenesega peab kaswatatud saama:

$$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ ja nõnda edasi.}$$

Kui ruutnummer teada on, ja tahaks meie tema põhjusnummert leida, siis kirjutame seda nõnda: $\sqrt{36} = 6$, ehk $\sqrt{169} = 13$. Märk, mis nõnda $\sqrt{\ }$ ruutnumbri üle kirjutatud on, tähendab, et sest ruutnumbrist mis tema all seisab, põhjusnummert otsitakse.

On meil tarwis suurema numbridest põhjusnumbrid leida, siis peame ühe õpetuse otsima, kelle abiga seda kergest wõib leida.

Olgu siin:

$$43^2 = (40 + 3) \times (40 + 3) = 40^2 + 40 \,.\, 3 + 40 \,.\, 3 + 3^2$$
$$43 \times 43 = 40^2 + 2 \,.\, 3 \,.\, 40 + 3^2 = 1600 + 240 + 9$$
$$43 \times 43 = 1849 = 1600 + 240 + 9 = 1849.$$

Iga ruutnummert, mis kümnete põhjusnumbridest on sünnitatud, wõib nõnda kokku seadida:

1) kümnete ruudust $40^2 = 1600$
2) kahekordsest kaswatusest kümnete ja üksikute jaust $2 \,.\, 3 \,.\, 40 = 240$.
3) üksikute ruudust $3^2 = 9$.

Tähendaks siin a kümneid ja b üksikuid, siis oleks nõnda:

$$\begin{array}{ccc} a + b & & 40 + 3 \\ a + b & & 40 + 3 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 & = & 40^2 + 2 \,.\, 3 \,.\, 40 + 3^2 = 1849. \end{array}$$

Nõndawiisi, kui meie siin põhjusnumbridest ruutnumbrid sünnitasime, nõndasama wiisi wõime jälle ruutnumbridest põhjusnumbrid leida.

Olgu siin:

Nr. 1.

$$\sqrt{18{,}49} = 40 + 3 \quad (a + b)$$

$$\begin{array}{rl} a^2 = 40^2 = 40 \times 40 = & 16{,}00 \\ 2a = 2 \times 40 = 80 \,| & 249 \\ 2ab = 2 \,.\, 40 \,.\, 3 = & 240 \\ & 9 \\ b^2 = 3^2 = & 9 \end{array}$$

Lühemalt:

Nr. 2.

$$\sqrt{18{,}49} = 43$$

$$\begin{array}{rl} a^2 = 4^2 = & 16 \\ 2a = 2 \,.\, 4 = 8 \,| & 24 \\ 2ab = 2 \,.\, 4 \,.\, 3 = & 24 \\ & 9 \\ b^2 = 3^2 = & 9 \end{array}$$

Juhatus.

Teeme aluspoolt numbridest hakates, iga kahe numbri wahele üks märk, siis näitawad meile märgi wahed põhjusnumbri suurust. Otsime siis ülemise märgi ruudu, siin $= 4^2 = 16$, arwame teda 18 maha ja wõtame teise märgi jaust 4 juure, siis on meil 24 ja mahutame sinna sisse 2 . 4, siis leiame 3, sellepärast et 2 . 4 . 3 = 24. Wiimaks on siis $3^2 = 9$.

$$\sqrt{6{,}10{,}09} = 247$$

$$\begin{array}{rl} a^2 = 2^2 = & 4 \\ 2a = 2 \times 2 = 4 \,| & 21 \\ 2ab = 2 \,.\, 2 \,.\, 4 = & 16 \\ & 50 \\ b^2 = 4^2 = & 16 \\ 2a = 2 \,.\, 24 = 48 \,| & 340 \\ 2ab = 2 \,.\, 24 \,.\, 7 = & 336 \\ & 49 \\ b^2 = 7^2 = & 49 \end{array}$$

$$\sqrt{38,11,82,76} = 6174$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = 6^2 = & 36 \\
2a = 2 \,.\, 6 = 12 \,|\, & 21 \\
2 \,.\, ab = 12 = & 12 \\
& \overline{91} \\
b^2 = 1^2 = & 1 \\
2a = 2 \,.\, 61 = 122 \,|\, & 908 \\
2a \,.\, b = 2 \,.\, 61 \,.\, 7 = & 854 \\
& \overline{542} \\
b^2 = 7^2 = & 49 \\
2a = 2 \,.\, 617 = 1234 \,|\, & 4937 \\
2ab = 2 \,.\, 617 \,.\, 4 = & 4936 \\
& \overline{16} \\
b^2 = 4^2 = & 16.
\end{array}$$

Tuleb ette, et ruutnummer terwest ja kümnendikmurdudest on kokku seatud, siis otsime meie esite põhjusnummert terwetest — ja pärast murdude seest, olgu siin ruutnummer

$$= 937{,}5844 = \sqrt{9{,}37{,}58{,}44} = 30{,}62$$

$$\begin{array}{r}
9 \\
\hline
375 \\
360 \\
\hline
158 \\
36 \\
\hline
1224 \\
1224 \\
\hline
4 \\
4
\end{array}$$

Oleks murtud ruutnumbrist wäja tema põhjusnummert otsida, siis muudame otse murru kümnendikmurruks ümber.

Oleks siin:

$\frac{1}{4} = 0{,}25;\quad \sqrt{0{,}25} = 0{,}5;\quad \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$
$\phantom{\frac{1}{4} = 0{,}25;\quad \sqrt{}}0{,}25$

$\frac{4}{25} = 0{,}16;\quad \sqrt{0{,}16} = 0{,}4;\quad \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$
$\phantom{\frac{4}{25} = 0{,}16;\quad \sqrt{}}0{,}16$

$$
\begin{array}{l}
{}^3/_5 = 0,6; \quad \sqrt{0,60} = 0,774 \ldots \\
\qquad\qquad 4900 \\
\qquad\qquad \underline{110} \\
\qquad\qquad 98 \\
\qquad\qquad \underline{120} \\
\qquad\qquad 4900 \\
\qquad\qquad \underline{710} \\
\qquad\qquad 616 \\
\qquad\qquad \underline{940} \\
\qquad\qquad 16 \\
\qquad\qquad \underline{924 \ldots}
\end{array}
$$

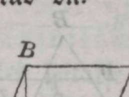
Pikkemat õpetust ruut=arwamise üle anda, ei ole siin tarwilik; seda peab rehkendamise raamatus tehtama.

III. Ühejaulised ja ühekujulised geometria suurused.

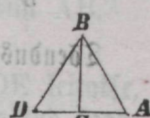
§ 69. **Seletused.**

1) Wiguri suuruseks arwame meie seda ruumijagu, mis ühetasase wälja peal igalt poolt joontega ümberpiiritud on.

2) Wigurid on ühesuurused, kui nende piiride sees ühepalju ruumi seisab, ilma et nemad oma külgede ehk nurkadega ühtlased oleks.

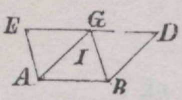


3) Wiguri kõrgust mõedab üks ristlood, mis tema ülemise nurga pealt alumise ehk põhjusjoone peale tõmmatakse. Siin on nelinurga kõrgus BD ja kolmnurga kõrgus BG.

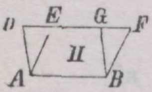


§ 70. **Õpetus. Kaks ühepikkuse ja ühtlasi=jooksja külgedega nelinurka on oma ruumisuurusega ikka ühtlased, kui nende põhjusjoon AB ja kõrgus ühesuurused on.**

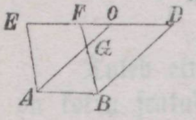
Tõendus. Nelinurgad, kellel põhjusjoon ja kõrgus ühesuurused on, wõiwad, kui nende põhjusjooned kokku langewad, kolmel wiisil üheteise peale seatud saada, nõnda kui siin näha on:



1) AE = BG, AG = BD ja $\angle$ EAG = $\angle$ GBD, $\triangle$ EAG $\cong$ $\triangle$ GBD. Arwame nüüd selle keskmise kolmnurga AGB $\triangle$ EAG juure, siis on meil $\square$ EABG; arwame teda aga teise kolmnurga GBD juure, siis saame meie $\square$ GABD, kaks korda ühesuurused jaud kokkuarwatud, annawad mõlemal korral ühesuguse suuruse.

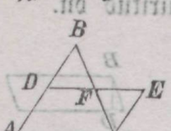


2) $\triangle$ DAE $\cong$ $\triangle$ GBF, sellepärast esimese tõenduse järele $\square$ DABG ja $\square$ EABF ühesuurused.



3) $\triangle$ EAO $\cong$ $\triangle$ FBD. Wõtame nüüd kolmnurgast EAO kolmnurga FGO ära, ja arwame temale $\triangle$ AGB juure, siis saame $\square$ EABF; siis wõtame kolmnurgast FBD kolmnurga FGO ära ja arwame temale $\triangle$ AGB juure, siis saame $\square$ ABDO. Nõnda on siis (§ 21, 3) põhjusõpetuse järele $\square$ EABF ja $\square$ OABD ühesuurused.

§ 71. Õpetus. **Iga ühtlaste külgedega nelinurk (parallelogramm) DAGE on kolmnurgaga ABG ühesuurune, mis tema põhja külje AG peal seisab ja temast 2 korda kõrgem on.**



Öeldud on: AG = AG,

AD = $^1/_2$ AB.

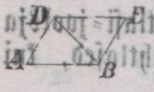
Tõeks tehtud peab saama:

$\triangle$ ABG = $\square$ DAGE.

Tõendus. DB = GE, $\angle$ B = $\angle$ G, $\angle$ D = $\angle$ E (§ 37)

$\triangle$ DFB $\cong$ $\triangle$ EFG, sellepärast

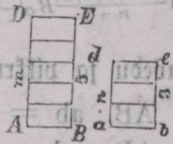
$\triangle$ ABG = $\square$ DAGE.



Lisa õpetus. Kolmnurk ABD, mis ühekülise nelinurga ABDE põhja külje AB peal seisab ja temaga ühe kõrgune on, on oma suurusega pool sest nelinurgast.

§ 72. **Õpetus.** **Kaks pikkruutu ABDE ja abde, kellel ühepikkused põhjusküljed AB = ab, on oma wälise ruumiga teine teisest nii palju suurem, kui üksteisest kõrgem on.**

Tõendus. On kõrgus AD ja ad ühe mõeduga mõedetaw, ja läheb see mõet AD sisse m = 5 korda ja ad sisse n = 3 korda, siis seisab kõrgus ja tema mõet nõnda teine teise wastu:



AD : ad = m : n; AD : ad = 5 : 3.

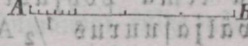
Tõmbame nüüd mõlema pikkruudu peale need ühtlased mõedu jaud, siis on ABDE = m ühesuuruseks pikkruuduks jautud, ja abde = n ühesuuruse pikkruuduks, sellepärast seisab siis nende suurus teine teise wastu:

ABDE : abde = m : n
ABDE : abde = 5 : 3 ehk
ABDE : abde = AD : ad.

§ 73. Seletused.

Wiguri wälja suurust ära mõeta, tähendab: ühe mõedu järele üles leida, kui mitu korda selle mõedu ruutsuurus tema sees seisab. Üheks niisuguseks mõeduks wõetakse ruuttoll, ruutjalg, ruutküünar ja nimetakse seda põhjusmõeduks.

Iga wiguri suurust, olgu tema põld, aed ehk mis tahte, mõedetakse õige joonte ehk sihtide abiga nõnda, et wiguri laiuse ja pikkuse peale õiged jooned tõmmatakse ja nende pikkust põhjusmõeduga järele mõedetakse ja siis rehkendamise abil tema suurust üles leitakse. Niisugune pikkuse mõet wõib olla: toll, jalg, küünar, süld — nõnda kudas see iga kord mõetmisel tarwilik on. Siin AB.

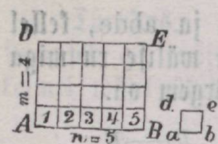


§ 74. **Õpetus.** **Pikkruudu wälja suurust ABDE leitakse, kui tema kõrgus AD põhjuskülje pikkusega AB kaswatud saab.**

Öeldud on: AD = m,
AB = n.

Tõeks tehtud peab saama:

Wſ. = m × n. (Wſ. tähendab wäljasuurust).

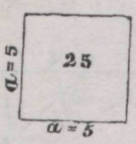


Tõendus. Siin tähendab täht m = 4, et põhjusmõet 4 korda kõrguse AD sees ja n = 5, et põhjusmõet 5 korda põhjuskülje AB sees käib. Olgu siin mõedu pikkus ab = 1, ja tema ruut abde. Siis seisab mõedu ja pikkruudu suurus nõnda teine teise wastu:

AB : ab = n : 1

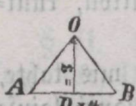
AD : ad = m ; 1, sellepärast (§ 72)

ABDE : abde = m × n : 1	20 : 1 = 4 × 5 : 1
ABDE = m . n . abde	20 = 4 . 5
ehk: Ws. = m × n	Ws. = 20.

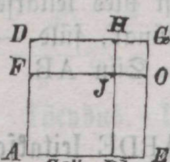


Lisa õpetused. 1) Ruudu wäljasuurust leitakse, kui tema külje pikkus iseenesega kaswatud saab. Tähendab a = 5 seda külje pikkust, siis on a × a = a^2, 5 × 5 = 5^2 = 25 ruutwälja suurus.

2) Kõik kolm- ja nelinurgad, kellel ühesuurused põhjusküljed on, seisawad oma wäljasuurusega nõnda teine teise wastu, kui nende kõrgus teine teise wastu seisab.



3) Kolmnurga AOB wäljasuurust leitakse, kui tema kõrgus OD poole põhjuskülje pikkusega kaswatud saab. Tähendab siin kolmnurga kõrgust OD = 3, ja tema põhjuskülje pikkust AB = 4, siis on tema wäljasuurus $\frac{1}{2}$ AB × OD = $\frac{1}{2}$. 4 . 3 = 2 . 3 = 6 □.



4) Ruut AEDG, mis üle kahe joone pikkuse AB = a, ja BE = b sünnitud, on üksi nii suur, kui kaks ruutu ABFJ ja HJOG, mis joone a ja b peal seisawad, ja kelle juure kaks pikkruuti BEOJ ja FJHD weel arwatakse.

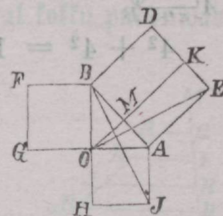
Olgu siin a = 4, b = 2, siis on:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (4 + 2)^2 = 4^2 + 2 . 4 . 2 + 2^2$$

$$16 + 16 + 4 = 36$$

$$6 \times 6 = 36.$$

§ 75. Õpetus. Ruut, mis üle täiswinkli kolmnurga lautuse külje ABDE sünnitud, on nõnda suur, kui kaks ruutu kokku, mis tema ristloodi külgede peal AOHJ + BFGO seisawad.



Ööldud: $\angle$ AOB = täiswinkel.

Tõeks tehtud peab saama:

$\square$ ABDE = $\square$ AOHJ + $\square$ BFGO.

Tõendus. Tõmbame täiswinkli O pealt OK $\perp$ AB ja weel OE ja BJ siis on

$\triangle$ JAB = $^1/_2$ $\square$ AOHJ

$\triangle$ OAE = $^1/_2$ $\square$ AMKE (§ 71, 1)

$\angle$ JAB = $\angle$ OAE ja küljed

AJ = AO, AE = AB,

Sellepärast $\square$ AMKE = $\square$ AOHJ.

Nõndasama wõib näidata, et BFGO = MBDK, selle järele on siis AMKE + MBDK = AOHJ + BFGO ehk $AB^2 = AO^2 + OB^2$.

1) Oleks siin kolmnurgas BOA ristloodi küljed BO = 8 ja OA = 6, siis oleks lautuse külg AO = 10, sest et: $10^2 = 8^2 + 6^2 = 100 = 64 + 36$. Selle järele on siin kerge üht täiswinklise kolmnurga külge ära arwata, kui kaks teist külge teada on.

2) Oleks meil teada, et üks ristloodi külg kolm jalga ja lautuse külg 5 jalga pikk on, siis wõime kolmandat külge nõnda leida $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$; $\sqrt{16} = 4$ jalga.

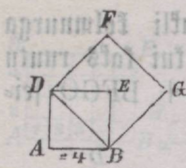
3) Oleks mõlemad ristloodi küljed teada, nõnda et üks 12 küünart ja teine 16 küünart pikk on, siis leiame lautuse külge nõnda:

$12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$; $\sqrt{400} = 20$ küünart

4

00

Lisa õpetus. BDFG, mis ühenduse joone DB peale sünnitud, on kaks korda suurem, kui ruut ABDE, kelle ühenduse joone peal tema seisab.



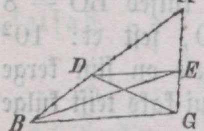
Oleks ruudu ABDE külg siin 4 jalga ja tahaks meie teada, kui pikk ruudu BDFG külg on, siis arwame seda nõnda:

$$4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32, \quad \sqrt{32} = 5{,}6 \text{ jalga.}$$

```
25,00
  70
  60
 100
  36
```

§ 76. **Opetus.** **Jookseb joon DE kolmnurkas BAG ühtlasi küljega BG, siis jautab tema kolmnurga küljed AB ja AG nõnda, et jagu AD jau DB wastu oma suurusega nõndasama seisab, kui teise külje AG peal, jagu AE jau EG wastu.**

Tähendus. On mõlemad küljed ühe mõeduga mõedetud, ja ulatab mõet AD peale 12, DB peale 8, ja AE peale 6, EG peale 4 korda, siis leiame nende jagude wahel niisugust wastastikku seisust:



$$AD : DB = AE : EG$$
$$12 : 8 = 6 : 4$$
$$\frac{12}{8} = \frac{6}{4}$$
$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ösldud on: DE ∥ BG.

Tõeks tehtud peab saama: AD : DB = AE : EG.

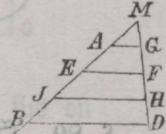
Tõendus. Tõmbame BE ja GD, siis on △ ADE ja △ BED, kelle põhjusjooned AD ja BD ühe õige joone peal seisawad, ja sellepärast, et neil üks nurk E ühtlane on, ühe kõrgused. Nõndasama on △ ADE ja △ GDE, kelle põhjusjooned AE ja GE jälle ühe õige joone peal seisawad, ka ühe kõrgused. Nõnda on siis (§ 74, 2) nende suurus:

$$\triangle ADE : \triangle BDE = AD : DB$$
$$\triangle ADE : \triangle GDE = AE : EG$$
$$\triangle BDE = \triangle GDE \quad (§\ 71,\ 1),$$

sellepärast AD : DB = AE : EG.

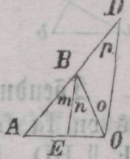
§ 77. **Õpetus.** **Kaks õiget joont** AB **ja** GD **saawad mitmest ühtlasest joontest** AG, EF, JH, BD, **ühtlaseks wastastiku jau suuruseks ära jautud.**

Tõendus. Kui AB ja GD punkti M peal kokku puuduwad, siis on § 76 järele:



ME : MF = AE : GF
ME : MF = EJ : FH nõndasama
AE : GF = EJ : FH
EJ : FH = JB : HD.

§ 78. **Õpetus.** **Kui õige joon** BE **ühe winkli** B **kolmnurka** ABO **poolitab, siis jautab ta ka tema külge** AO **nõnda kaheks jauks, et jaud** EA **ja** EO **oma suuruse järele teine teise wastu on, kui kaks külge** AB **ja** BO **oma suurusega teine teise wastu.**



Ööldud on: ∠ ABE = ∠ OBE.

Tõeks tehtud peab saama:

AE : EO = AB : BO.

Tõendus. Tõmbame punkti O pealt joone OD || EB, siis on § 76 ja § 77 järele

AE : EO = AB : BD

ja ∠ m = ∠ n = ∠ o = ∠ p (§ 28),

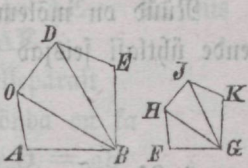
sellepärast BD = BO.

Nüüd wõime BD asemele BO panna, siis on:

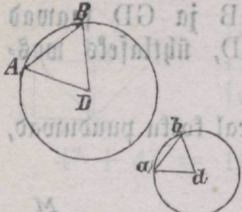
AE : EO = AB : BO.

§ 79. **Seletus.**

1) Kaks wigurit on ühekujulised, kui neil winklid ühesuurused ja nende järestiku küljed oma suuruse järele ühejaulised on.



2) Kahe ühekujulise hulknurgal peab ühepalju külgi ja winklid olema, ja nende ühesugused küljed ja winklid mõlemil järestiku seisma AODEB ∽ FHJKG.



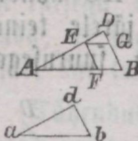
3) Kahe mitte ühesuuruse kreisi sees on kaared, kreisilõigud ja wäljalõigud ühekujulised, kui nemad ühesuuruse keskwinkli peal seisawad.

Kaar AB $\backsim$ ab.

Kreisi wäljalõik ABD $\backsim$ abd.

$\angle$ ADB $=$ $\angle$ adb.

§ 80. Õpetus. Kaks kolmnurka on ühekujulised, kui neil mõlemil kaks winkelt ühesuurused on, nõnda et $\angle$ A $=$ $\angle$ a ja $\angle$ B $=$ $\angle$ b, siis on $\triangle$ ABD $\backsim$ $\triangle$ abd.



Öõldud on: $\angle$ A $=$ $\angle$ a

$\angle$ B $=$ $\angle$ b.

Tõeks tehtud peab saama:

$\triangle$ ABD $\backsim$ $\triangle$ abd.

Tõendus. On kaks winkelt mõlemil kolmnurgal ühesuurused, siis on ka kolmas $\angle$ D $=$ $\angle$ d. Teeme AF $=$ ab ja tõmbame FE $\parallel$ BD, siis on

AF : AB $=$ AE : AD (§ 76)

ja $\triangle$ AFE $\cong$ $\triangle$ abd, sellepärast

ab : AB $=$ ad : AD.

Tõmbame weel EG $\parallel$ AB, siis on

AE : AD $=$ BG : BD,

ja sellepärast et BG $=$ FE $=$ bd, on

ad : AD $=$ bd : BD

ja ab : AB $=$ ad : AD $=$ bd : BD.

Nüüd on mõlemas kolmnurgas kõik winklid ühesuurused ja nende ühtlasi seisjad küljed ühejaulised, sellepärast

$\triangle$ ABD $\backsim$ $\triangle$ abd.

§ 81. Õpetus. Kaks kolmnurka ABO ja abo on ühekujulised, kui neil üks ühe suurune winkel ja need küljed, kelle wahel see winkel seisab, ühejaulised on.

Kui $\angle A = \angle a$ ja $AB : ab = AO : ao$,

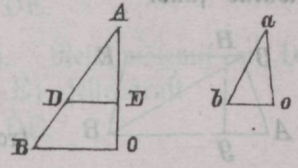
siis on $\triangle ABO \sim \triangle abo$.

Ööldud on: $\angle A = \angle a$

ja $AB : ab = AO : ao$.

Tõeks tehtud peab saama:

$\triangle ABO \sim \triangle abo$.



Tõendus. Teeme $AD = ab$ ja $AE = ao$ siis on

$\triangle ADE \cong \triangle abo$ (§ 36)

ja (§ 81) õpetab, et $AB : ab = AO : ao$, siis peab ka olema

(§ 76) $AB : AD = AO : AE$, sellepärast

$DE \parallel BO$, ja $\angle B = \angle ADE$ ja siis

(§ 80) $\triangle ABO \sim \triangle ADE$ ehk

$\triangle ABO \sim \triangle abo$.

§ 82. **Õpetus. Kaks kolmnurka on ühekujulised kui nende kolm külge ühejaulised on.**

Kui $AB : ab = AO : ao = BO : bo$, siis on

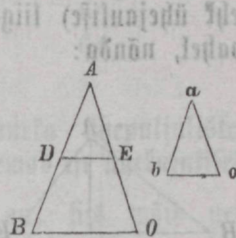
$\triangle ABO \sim abo$.

Ööldud on:

$AB : ab = AO : ao = BO\ bo$.

Tõeks tehtud peab saama:

$\triangle ABO \sim \triangle abo$.



Tõendus. Teeme jälle $AD = ab$ ja $AE = ao$ siis on § 82 õpetuse järele $AB : AD = AO : AE$

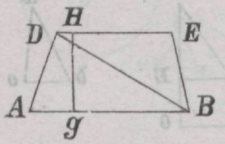
ja $\triangle ABO \sim \triangle ADE$ ja sellepärast

$AB : AD = BO : DE$ ja nõnda on ka

$AB : ab = BO : bo$, ja $AD = ab$

siis peab ka $DE = bo$ olema ja $\triangle ADE \cong \triangle abo$ (§ 41) selle järele on siis $\triangle ABO \sim \triangle abo$.

§ 83. Õpetus. Trapezi ABED wälja suurust leitakse, kui tema kõrgus = GH poole mõlemi küljega AB + DE kaswatud saab.



Hõlbud: ABED on trapez.

Tõeks tehtud peab saama:

trapezi wälja suurus on GH $\cdot \frac{(AB + ED)}{2}$.

Tõendus. Tõmbame BD, siis on

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \times GH$$

$$\triangle BED = \frac{1}{2} DE \times GH,$$

Sellepärast $ABED = GH \cdot \frac{(AB + ED)}{2}$.

Oleks siin trapezi kõrgus GH = 4, külg AB = 8, ja külg DE = 6, siis oleks trapezi wälja suurus

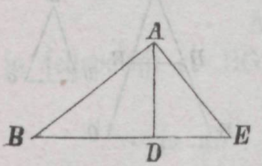
$$4 \frac{(8 + 6)}{2} = 4 \,.\, 7 = 28 \square.$$

§ 84. Õpetus. Kui iga täiswinkli nurgast A täiswinkli kolmnurgas BAE ristlood AD lautuse külje BE peale tõmmatakse, siis on:

1) iga ristloodi külg AB ehk AE keskmine proportsionaali (ehk ühejaulise) liige, külje BE ja tema jagude BD ja DE wahel, nõnda:

$$BE : AB = AB : BD,$$

$$BE : AE = AE : DE$$



2) ristlood AD on keskmine proportsionaali liige mõlemite lautuse külje jagude BD ja DE wahel

$$BD : AD = AD : DE.$$

Tõendus. 1) Ristlood AD jautab $\triangle$ BAE kaheks kolmnurgaks, nõnda, et mõlemad jau-kolmnurgad täis-kolmnurgaga ühekujulised on. Nõnda on $\triangle ABE \sim \triangle DBA$ § 80 sellepärast, et neil $\angle B$ ühtlane ja $\angle BAE = \angle ADB$ on. Ühejaulised küljed annawad meile siin niisuguse wastastiku jauseisuse.

$$BE : AB = AB : BD.$$

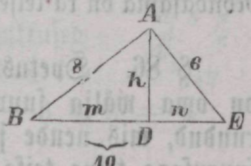
Nõndasama on $\triangle ABE \sim \triangle DAE$, sellepärast ka

$$BE : AE = AE : DE.$$

2) $\triangle DBA \sim \triangle DAE$ (§ 80). Neil mõlemil on D juures täiswinklid ja ka $\angle BAD = \angle E$; sellepärast

$$BD : AD = AD : DE.$$

Lisa õpetus. Oleks kolmnurga BAE küljed mõeduga ära mõedetud ja leitud, et AB = 8 sülda, AE = 6 ja BE = 10 sülda. Tahaks meie nüüd neid jaupikkusi BD = m ja DE = n ja ka kolmnurga kõrgust AD = h arwamise läbi üles leida, siis rehkendaks meie (§ 84) õpetuse järele nõnda:



$10 : 8 = 8 : m,\ 10m = 64,\ m = {}^{64}/_{10} = 6{,}4$ sülda

$10 : 6 = 6 : n,\ 10n = 36,\ n = {}^{36}/_{10} = 3{,}6$

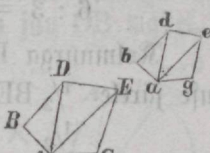
$6{,}4 : h = h : 3{,}6,\ h^2 = 23{,}04,\ h = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$

```
16
--
 70
 64
---
 64
 64
```

§ 85. **Õpetus. 1) Kui kaks hulknurka ühepaljulistest kolmnurkadest kokku seatud on, siis on ka nemad ise ühekujulised.**

2) Kui kaks hulknurka ühekujulised on, siis wõib neid järestiku ühepaljuseks kolmnurkadeks ära jautada.

Tõendus. 1) Olgu $\triangle ABD \sim \triangle abd$, ja $\triangle ADE \sim \triangle ade$; sellepärast on siis ka kõik winklid mõlemais hulknurkades järestiku ühe suurused, ja ka $AB : ab = BD : bd$ ($= AD : ad$) $=$ $DE : de$ ($= AE : ae$) $= EG : eg$ . . . .



sellepärast $ABDEG \sim abdeg$

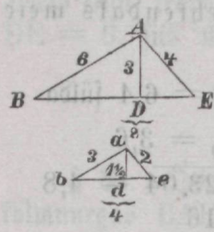
2) Olgu ABDEG $\sim$ abdeg. Tõmbame A ja a pealt ühenduse jooned AD, AE ja ad, ae; siis jautawad need jooned mõlemad hulknurgad ühepaljuse kolmnurkadesse, sellepärast, et neil mõlemil ühepalju külgi on. Ja jälle sellepärast, et nemad ühekujulised on, peab $\angle B = \angle b$ olema, ja siis on

$$AB : ab = BD : bd \text{ selle läbi}$$

$$\triangle ABD \sim \triangle abd.$$

Nõndasama on ka teised kolmnurgad ADE $\sim$ ade ja AEG $\sim$ aeg.

§ 86. Õpetus. **Ühekujulised kolmnurgad ja hulknurgad on oma wälja suurusega teine teise wastu, nõndasama kui ruudud, mis nende järestikku küljede peale sünnitud, oma ruutsuurusega teine teise wastu seisawad.**



Öeldud: $\triangle ABE \sim \triangle abe$.

Tõeks tehtud peab saama:

$$\triangle ABE : \triangle abe = BA^2 : ba^2.$$

Tõendus. Sellepärast et $\triangle ABD \sim \triangle abd$ on, on ka $BE : be = BA : ba$ ja

$$\frac{\triangle BAE}{\triangle bae} = \frac{BE \times BA}{be \times ba}$$

$$\frac{BA}{ba} = \frac{BE}{be}, \text{ nõnda on siis}$$

$$\frac{\triangle BAE}{\triangle bae} = \frac{AB^2}{ab^2}.$$

Oleks siin kolmnurga BAE küljed mõedetud ja leitud BE = 8, BA = 6 ja AE = 4 küünart, nõndasama ka kolmnurga bae küljed be = 4, ba = 3 ja ae = 2, siis oleks § 86 õpetuse järele nende külgede ja wälja suuruse wahel niisugused proportsionid

$$8 : 4 = 6 : 3 \qquad 64 : 16 = 36 : 9$$

$$6 : 3 = 4 : 2 \qquad 36 : 9 = 16 : 4.$$

Kolmnurga BAE ja bae wälja suurus on (§ 74, 3) õpetuse järele $\frac{1}{2}\,BE \times AD$ ja $\frac{1}{2}\,be \times ad$

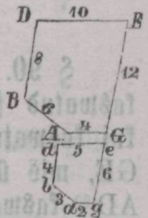
$$\tfrac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12; \quad \tfrac{1}{2} \times 4 \times 1\tfrac{1}{2} = 3.$$

$$\frac{4 \times 3}{3} = {}^{36}/_{9} \text{ ehk } 12 : 3 = 6^2 : 3^2$$

$$12 : 3 = 36 : 9.$$

§ 87. Õpetus. Kahe ühekujuliste hulknurkade piiri pikkused seisawad oma suuruse järele nõndasama teine teise wastu, kui nende järestiku ükfikud küljed oma pikkusega ühe teise wastu seisawad.

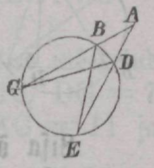
Tõendus. On ABDEG ∼ abdeg siis on AB : ab = BD : bd = DE : de = EG : eg; nõndasama AB + BD + DE + EG + GA : ab + bd + de + eg + ga = AB : ab.



Oleks mõlemite hulknurkade külje pikkused nõnda kui siin kõrwas näidatud, siis oleks:

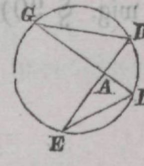
$$4 + 6 + 8 + 10 + 12 : 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 4 : 2$$
$$40 : 20 = 4 : 2.$$

§ 88. Õpetus. Kui kaks õiget joont, mis ühes punktis A teine teisest läbi jooksewad, ja neli punkti BDEG neil kreisi joonega ühtlased on, siis seisawad nende joonte ühtlased jaupikkused kreisi ja nende eneste läbijooksu punkti wastu niisuguses proportsionalis.



AB : AD = AE : AG.

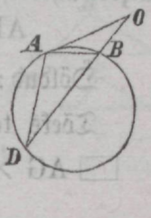
Tõendus. Lõigupunkt A wõib wäljaspool ehk ka seespool kreisi seista. Tõmbame abijooned BE ja DG, siis on △ ABE ∼ △ ADG. Sellepärast, et ∠ A = ∠ A ja ∠ E = ∠ G (§ 65, 2) siis on AB : AD = AE : AG, ehk ruutsuuruse järele □ AB × AG = □ AD × AE.



§ 89. Õpetus. Kui ühest wäljaspoolt punktist O, kreisi joone peale puutuja OA tõmmatakse, siis on see puutuja keskproportsionali liige, lõigu joone OD ja tema jau OB wahel.

Söldud: OA on puutuja.

Tõeks tehtud peab saama:



$$OD : OA = OA : OB \text{ ehk}$$
$$OA^2 = OD \times OB.$$

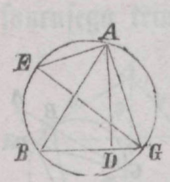
Tõendus. Tõmbame kaks köitjajoont AB ja AD, siis on $\triangle OAB \sim \triangle ODA$, sellepärast et

$$\angle O = \angle O \text{ ja } \angle OAB = \angle D, \text{ ja selle läbi}$$

$$OD : OA = OA : OB.$$

§ 90. Õpetus. **Kui kolmnurga ABG küljed AB × AG kaswatud saawad, siis on nende kaswatus just nõnda suur, kui kaswatus, mis selle läbi sünnib, et selle kreisi läbimõetja GE, mis ümber kolmnurga ABG kirjutud, kolmnurga ristloodi AD'ga kaswatud saab.**

Tähendatud: $AB \times AG = GE \times AD$.



Tõendus. Tõmbame abijoone AE, siis on $\angle ADB = \angle EAG$, $\angle B = \angle E$ (§ 65, 2. 3) ja $\triangle ABD \sim \triangle GAE$, sellepärast siis

$$AB : GE = AD : AG \text{ ehk}$$

$$\square AB \times AG = \square GE \times AD.$$

Lisa õpetused. Kolmnurga BAG wäljasuurust leitakse ka, kui tema kolm külge üheteisega kaswatakse, ja see kaswatus selle kreisi kahekordse läbimõetjaga, mis kolmnurga ümber seisab, jautud saab. (Waata wig. § 90).

$$\frac{AB \times AG \times BG}{2\,EG} = \triangle BAG.$$

$$\text{Oleks } \frac{13 \times 12 \times 11}{2 \times 14} = 61^2/_7.$$

§ 91. Õpetus. **Seisab nelinurk ABGD oma neljanukkiga kreisi joone peal, siis on, kui tema ühenduse jooned AG ja BD kaswatud saawad, nende kaswatus nõndasama suur, kui kaswatus, mis selle läbi sünnib, et nelinurga wastastiku küljed üheteisega kaswatakse**

$$AD \times BG + AB \times DG = AG \times BD.$$

Öeldud: ABGD on nelinurk.

Tõeks tehtud peab saama:

$$\square AG \times BD = \square AD \times BG + \square AB \times DG.$$

Tõendus. Teeme $\angle GBE = \angle ABD$ ja $\angle ADB = \angle BGA$, sellepärast et nemad mõlemad ühe kaare AB peal seisawad, siis on $\triangle ABD \backsim \triangle EBG$, selle läbi jälle

$$AD : GE = BD : BG \text{ ehk}$$
$$AD \times BG = GE \times BD.$$

Nõndasama on ka $\angle ABE = \angle DBG$ ja

$\angle BAG = \angle BDG$ selle läbi jälle

$\triangle ABE \backsim \triangle BDG$ ja

$$AB : BD = AE : DG \text{ ehk } AB \times DG = AE \times BD.$$

Arwame mõlemad kaswatused kokku, siis on

$$AD \times BG + AB \times DG = (GE + AE) BD = AG \times BD$$

ehk $\square\, AG \times BD = \square\, AD \times BG + \square\, AB \times DG.$

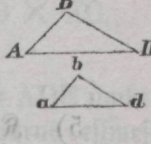
Tähendus: Oleks siin nelinurga $ABDG$ küljed mõedetud ja nende pikkus nõnda leitud: $AB = 10^2/_7$, $BG = 10$, $DG = 7$ ja $AD = 6$. Nõndasama ka ühenduse jooned $AG = 11$ ja $BD = 12$ sülda; siis on:

$$\square\, AG \times BD = \square\, AD \times BG + \square\, AB \times DG$$
$$11 \times 12 = 10 \times 6 + 7 \times 10^2/_7$$
$$132 = 62 + 72.$$

D. Ülesanded.

1) Joone a —— b üle kolmnurk abd teha, mis kolmnurkaga ABD ühekujuline on.

Juhatus.

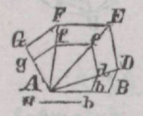


Tee $\angle d = \angle D$ ja $\angle a = \angle A$, pikenda siis mõlemad winkli küljed ab ja db, seni kui nemad punkti b peal teine teisega kokku jooksewad, siis on (§ 80) $\triangle abd \backsim \triangle ABD$.

$$ab : AB = bd : BD = ad : AD.$$

2) Antud joone pikkuse a——b üle hulknurka teha, mis teise hulknurgaga ABDEFG ühekujuline on.

Juhatus.

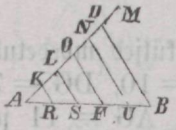


Tõmba suurema hulknurgas ABDEFG punktist A ühenduse jooned AD, AE, AF; pane ab nõnda AB peale, et a just A peale langeb ja b AB peal b juure ulatab; siis tõmba bd || BD, de || DE, ef || EF, fg || FG, selle järele on siis hulknurk abdefg ∾ ABDEFG (§ 85) ja

ab : AB = bd : BD = de : DE j. n. e.

3) Õiged joont AB mitme ühesuuruse jaule ära jautada; olgu siin wiite jakku.

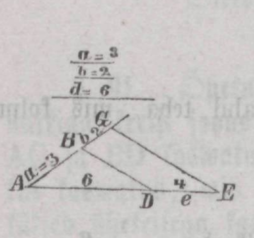
Juhatus.



Tõmbame A pealt joone AM, nõnda pikk kui ise tahame, mõedame tema peale tsirklega wiis ühesuurust jagu, ühendame siis wiimase jaupunkti D ja B ja tõmbame punkti N pealt NU || DB, nõndasama OF || NU, LS || OF ja KR || LS, siis saab nende ühtlasjooksja joonede läbi AB wiieks ühesuuruseks jauks jagatud (§ 76).

4) Kolme antud joonede a, b, d neljandad ühejaulist (proportsionaali joont e leida.

Juhatus.



Tee ∠ GAE ja pane külje AG peale a = AB, b = BG ja teise külje AE peale d = AD; ühenda BD ja tõmba GE || BD, siis on DE see neljas otsitaw proportsionaali joone pikkus (§ 76)

AB : BG = AD : DE

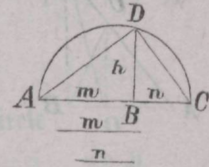
a : b = d : e

3 : 2 = 6 : 4.

5) Kahe joone wahel, m ja n keskmist proportsionaali joont h leida.

Juhatus.

Pane antud jooned m ja n õige joone AC peal teine teise wastu, kirjuta poolmõetja $\frac{m+n}{2}$ üle m + n = AC poolkreisi AC, tee ristlood BD selle punkti peale (B), kus m ja n kokku puutuwad, siis on DB = h otsitud kesk proportsionaali joon m ja n wahel ja (§ 84)

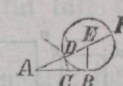


$$AB : BD = BD : BC$$
$$m : BD = BD : n.$$

6) Joont A——B nõnda kahe jausse jagada, et tema suurem jagu keskmine proportsionaali liige täie joone AB, ja tema wäiksema jau BC wahel on.

Juhatus.

Tee ristlood antud joone punkti B peale = $\frac{1}{2}$AB, kirjuta siis temaga kreis, kellel AB-ga üks punkt B ühtlane on, tõmba A pealt õige joon AF, siis on AD = AC see otsitaw keskmine proportsionaali joon (§ 89) ja

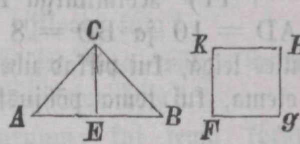


$$AF : AB = AB : AD$$
$$AB : AC = AC : BC.$$

7) Kolmnurka ACB tema suuruse järele ruuduks ümber muuta.

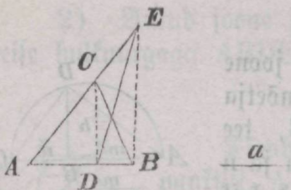
Juhatus.

Otsime kolmnurga põhjusküljse AB ja tema poole kõrguse CE wahel keskmise proportsionaali liige FG üles, siis oleme ka tema läbi otsitud ruudu külje leidnud.



$$AB : FG = FG : \frac{1}{2}EC \text{ ehk } FG^2 = \frac{1}{2}AB \times EC.$$

8) Kolmnurka ABC, üheks teiseks kolmnurgaks ADE ümber muuta, kelle põhjusküljg a teada ja tema wälja suurus esimese kolmnurgaga ühesugune peab olema.

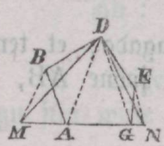


Juhatus.

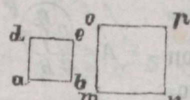
Tee AD = a, tõmba BE || DC, ühenda ED, siis on AED see otsitud kolmnurk.

9) Hulknurka ABDEG ühesuuruseks kolmnurgaks MDN ümbermuuta.

Juhatus.

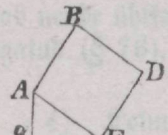


Tõmba ühenduse jooned DA ja DG, ja B pealt MB || DA, nõnda ka EN || DG; ühenda DM ja DN, siis on MDN otsitaw kolmnurk.



10) Ruut ABDE teha, mis nõnda suur on kui kaks teist ruutu abde ja mnop kokku.

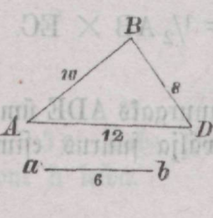
Juhatus.



Tee täiswinkli kolmnurk AGE, nõnda et ristloodi külg GA = ab ja ristloodi külg GE = mn on, siis on lautuse külg AE see otsitaw ruudu külg AB, kellega seda ruutu teha wõib (§ 75).

11) Kolmnurga ABD külgede pikkus on teada, AD = 12, AD = 10 ja BD = 8 tolli, mida wiisi wõib arwamise waral üles leida, kui pikkad ühekujulise kolmnurga kaks teist külge peawad olema, kui tema põhjuskülg 6 tolli mõedab?

Juhatus.



$AD : ad = AB : m, \quad m = {}^{60}/_{12} = 5$ tolli

$12 : 6 = 10 : m$

$AB : m = BD : n, \quad n = {}^{40}/_{10} = 4$ tolli

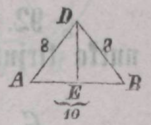
$10 : 5 = 8 : n$

12) Külise kolmnurga põhjuskülg AB on = 10, tema külg AD = 8 tolli, kui pikk on ristlood, mis D juurest põhjuskülje AB peale tõmmatakse.

Juhatus.

Külise kolmnurga kõrgus on (§ 75, 1) järele

$$\left.\begin{array}{l} AD^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2 = h^2 \\ 64 - 25 \qquad = h^2 \end{array}\right\} h = \sqrt{39} = 6{,}2\,..\text{ tolli}$$



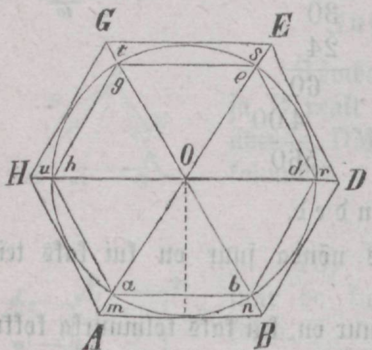
36 00
30
24
60
4 00
560

Ülesanded.

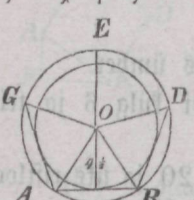
1) Tee üks ruut ABDE, mis nõnda suur on kui kaks teist ruutu kokku.
2) Tee üks ruut, mis nõnda suur on, kui kaks kolmnurka kokku.
3) Muuda üks nelinurk ühesuuruseks kolmnurgaks ümber.
4) Kirjuta kreis ruudu sisse, nõnda et kreisil iga ruudu küljega üks puutuse punkt ühtlane on.
5) Kirjuta kreis ümber ruudu nukkide.
6) Muuda kuusnurk ühesuuruse kolmnurgaks ümber.
7) Täiswinkli kolmnurgaks on üks ristloodi külg 6 ja teine 8 tolli; kui pikk on lautuse külg?
8) Täiswinkli kolmnurgas on lautuse külg 20 ja üks ristloodi külg 16 tolli; kui pikk on teine ristloodi külg?
9) Üks pikkruudu külg on 40 sülda ja tema wälja suurus on 800 □ sülda; kui pikk on tema teine külg?
10) Kui suur on kolmnurga wäljaruum; kui tema kõrgus 25 sülda ja põhjuskülg 36 sülda pikk on?
11) Kolmnurga wälja suurus on 400 □ sülda, ja tema kõrgus 24 sülda; kui pikk on tema põhjuskülg?
12) Kui kõrge on see kolmnurk kellest teada, et tema wälja suurus 60 □ sülda ja põhjusjoon 18 sülda pikk on?

IV. Ühekülјelistest hulknurkadest. Kreisi joone pikkusest ja tema wälja suuruse arwamisest.

§ 92. **Kreisi sisse ja wäljaspoole wõib ühekülјelist hulknurka kirjutada.**



Tõendus. Jautame kreisijoont nii mitmeks jauks, kui hulknurgal külgesid peab olema ja tõmbame üle jaupunktide õiged jooned, siis on kreisi sees ühekülјeline hulknurk sünnitud, ja kaar mn = nr = rs j. n. e.; nõnda ka kõitjajoon ab = bd = de j. n. e.; $\angle$ a = $\angle$ b = $\angle$ d = $\angle$ e; siis on $\triangle$aob $\cong$ $\triangle$bod $\cong$ $\triangle$doe ja sellepärast hulknurk abdegh ühekülјeline. Nõndasama wõib ka näidatud saada, et wäljaspoole kreisi ABDEGH wõib ühekülјelist hulknurka kirjutada.



Lisa õpetus. Ühekülјelise hulknurga ABDEG wälja suurust leitakse, kui tema külgede poolpikkust selle kreisi poolmõetjaga kaswatakse, mis tema sissepoole kirjutud on.

Tähendud: ABDEG on hulknurk ja tema wälja suurus on

$= \frac{1}{2}(AB + BD + DE + EG + GA) \times OW$

$= \frac{1}{2}(5 + 5 + 5 + 5 + 5)\ 4\frac{1}{2} = 56\frac{1}{4}.$

§ 93. **Õpetus. 1) Ühekülјelised hulknurgad ABDEGH ja abdegh on ühekujulised kui neil ühepalju külgesid on;**

2) nende piiri pikkused seisawad siis teine teise wastu, nõndasama kui kahe poolmõetjate pikkus MW ja mw nende

kreisidest, mis mõlema hulknurga nukkide ümber kirjutud on;

3) wälja suurus seisab neil teine teise wastu nõndasama, kui mõlemate poolmõetjate ruutsuurus $MW^2 : mw^2$.

Tõendus. 1) Kõik winklid on ühe-küljelistel hulknurkadel ABDEGH ja abdegh ühesuurused, sellepärast (§ 79, 2) $ABDEGH \sim abdegh$.

2) Tähendame kahe hulknurga külgede pikkust P ja p läbi, siis on § 87 järele $P : p > AB : ab$. On nüüd M ja m kreisi keskpunktid, MW ja mw poolmõetjad; sellepärast on siis, sest et kõik winklid ühesuurused on

$$\triangle AMB \sim \triangle amb \text{ ja } \triangle AMW \sim \triangle amw$$

$$\text{ja siis jälle } AB : ab = AM : am = MW : mw;$$

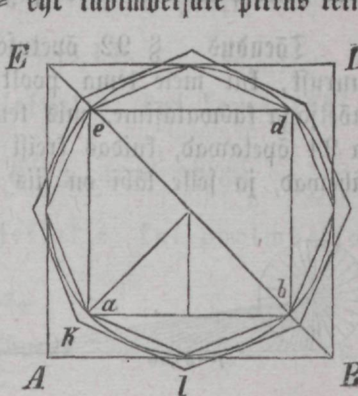
$$\text{nõnda ka } P : p = AM : am = MW : mw.$$

3) Niisugune hulknurkade wäljasuurus on nõndasama, kui meie seda § 86 tundma õppisime

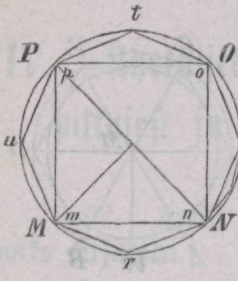
$$AB^2 : ab^2, \text{ nõnda ka}$$

$$AM^2 : am^2 \text{ ehk ka } MW^2 : mw^2.$$

§ 94. Opetus. **Kahe kreisi piiri pikkus seisab nõnda teine teise wastu, kui nende pool- ehk läbimõetjate pikkus teine teise wastu seisab.**



Tõendus. Kirjutame meie kahe kreisi sisse- ja wäljaspoole esite nelinurk, siis 8-nurk, 16-nurk ja nenda edasi, nii kui siin kõrwas ABDE ja abde, MNOP seda näitawad; siis kaswab iga kord, kui hulknurgal 2 korda rohkem külgesid juure tuleb, seespidise hulknurga suurus, ja wäljaspoolne jääb niisama wiisi



weikſemaks, ſenni kui nemad mõlemilt poolt juſt kreiſi joonega kokku langewad. Siis on muidugi mõista, et neil ilmlõpmata hulk külgeſid peab olema ja § 93 õpetus nõndaſama kreiſi joonte kui hulknurkade kohta käib.

Liſa õpetus. Kaks kaari, AB ja DE, mis ühe ja ſelleſama keſkpunkti winkli peal ſeiſawad, aga AB ſuurema ja DE wäikſema kreiſi järele on, on oma ſuuruſega teine teiſe wastu nõnda, kui kreiſi poolmõetjad MD ja MA oma pikkuſega teine teiſe wastu:

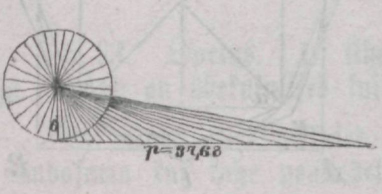
Näitus:

$\angle$ AMB : 4 täiswinklid = kaar AB kreiſijooni MA
ja $\angle$ DME : 4 täiswinklid = kaar DE kreiſijooni MD
$\angle$ AMB = $\angle$ DMB ſellepäraſt
kaar AB : kaar DE = kreiſijoon AM : kreiſijoon DM = AM : DM.

Oleks ſiin kaar AB = 60^0 }
DE = 60^0 } ſiis oleks
$\angle 60^0 : \angle 4 \,.\, 90^0 = 60^0 : 360^0$.

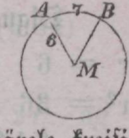
§ 95. Õpetus. Kreiſi wäljaſuurus leitakſe, kui tema pool piiri pikkuſt poolmõetjaga kaswatakſe.

Tõendus. § 92 õpetuſe järele leidſime hulknurga wälja ſuuruſt, kui meie tema poolt külgede pikkuſt, ſelle kreiſi poolmõetjaga kaswataſime, mis tema ſiſſepoole kirjutud oli, ja § 93 ja 94 õpetawad, kuidas kreiſi ja hulknurkade piiri ſuuruſed ühte lähewad, ja ſelle läbi on ſiis ülem õpetus tõendud.



Oleks ſiin kreiſi joone pikkus 37,68 küünart, poolmõetja 6 küünart, ſiis oleks tema wälja ſuurus

$= \frac{1}{2} pr = \frac{6 \times 37{,}68}{2} = 113{,}04.$



Lisa õpetus. Kreisilõigu AMB wäljasuurus leitakse, kui tema poolkaare pikkus $\frac{bB}{2}$ poolmõetjaga MA kaswatakse.

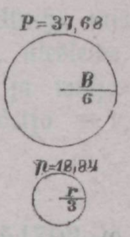
Tähendus. Lõigu wäli seisab oma suuruse järele kreisi wälja wastu, nõndasama kui lõigu kaare pikkus kreisi joone pikkuse wastu.

Lõik AMB : $^1/_2$AM $\times$ kreisijoon AM = kaar AB : kreisijoon MB.

Lõik AMB = $^1/_2$kaar AB $\times$ MA.

Oleks siin kaare joon 7 küünart, poolmõetja 6 küünart, siis oleks lõik $^1/_2 7 \times 6 = 21$ □küünart.

§ 96. **Õpetus. Igal kreisil on piirijoon ja läbimõetja ikka ühejauline.**



Tõendus. Tähendawad siin P ja p kaks kreisijoont, R ja r nende poolmõetjad, siis seisawad nemad oma pikkuse järele nõnda teine teise wastu.

$$P : p = R : r = 2R : 2r$$

$$P : 2R = p : 2r \text{ ehk numbritega}$$

$$37{,}68 : 18{,}84 = 6 : 3 = 12 : 6$$

$$37{,}68 : 12 = 18{,}84 : 6.$$

Lisa õpetus. Sellepärast et iga kreisil piiri joon ja läbimõetja ühejaulised on, tähendakse seda ühejaulikku olekut Geometria õpetuse järele, kreeka tähe π (ütle pii) läbi,

$$\pi = \frac{P}{2R} = \frac{37{,}68}{12} = 3{,}14.$$

2) Kreisi joone pikkus leitakse, kui tema läbimõetja π-ga kaswatakse.

$$p = 2r\pi, \text{ ehk } p = 2 . 6 . 3{,}14 = 37{,}68$$

3) Kreisi wäljasuurus leitakse, kui poolmõetja teada on, nõnda wiisi:

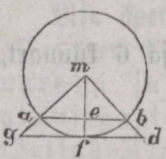
$$\text{Ws.} = r^2\pi.$$

Teada on (§ 95), et kreisi wälja suurus = $^1/_2$pr, p = $2r\pi$, siis on Ws. = $^1/_2 r(2r\pi) = r^2\pi$.

Olgu siin jälle numbritega rehkendud:

$$\left.\begin{array}{l} r = 6 \\ r^2 = 36 \\ \pi = 3{,}14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} r^2\pi = 36 \times 3{,}14 = 113{,}04, \text{ ehk ka nõnda:} \\ \frac{1}{2}\,pr = \frac{6 \times 37{,}68}{2} = 113{,}04. \end{array}$$

I. ülesanne: Arwamise läbi peab wäljaspoolse n-nurga külgede pikkus leitud saama, kui kreisi seespoolne n-nurga külg ab antud on.



Antud on: $ab = k$,

$ma = mb = r$.

Leida tahame:

$gd = K$.

Wäljarehkendamine: Sellepärast et $\triangle meb \sim \triangle mfd$ on kolmnurkade küljed ühesaulised

$$1)\quad me : mf = ab : gd$$

$$me^2 + eb^2 = mb^2 \quad (\S\ 75)$$

$$me^2 + \frac{k^2}{4} = r^2$$

$$me^2 = r^2 - \frac{k^2}{4} \quad (\S\ 75,\ 1)$$

$$me = \sqrt{r^2 - \frac{k^2}{4}}.$$

Paneme nüüd 1. proportsionaali liikmete asemele need ühesuurused jaud, ja tuletame meele, et $mf = r$ on, siis saame

$$\sqrt{r^2 - \frac{k^2}{4}} : r = k : K \text{ ja sellepärast}$$

$$K = \frac{rk}{\sqrt{r^2 - \frac{k^2}{4}}} \text{ ehk kui } r = 1, \text{ siis on}$$

$$K = \frac{2}{\sqrt{4 - k^2}}.$$

II. ülesanne: Hulknurga küljest $bd = k$, mis kreisi sissepoole kirjutud on, seda külge $ad = k'$ leida, mis 2 korda rohkem wõib kreisi joone peale mõeta, kui esimest.

Antud on: $bd = k$,

$mb = md = r$.

Leida tahame: $ad = k'$.

Wäljarehkendamine. $\triangle gad \sim \triangle dae$ (§ 84)

$$ag : ad = ad : ae, \quad ad^2 = ae \times ag$$

$$ad = \sqrt{ae \,.\, ag} \text{ (ja } ae = 2r) \text{ ehk siis } k = \sqrt{2r \,.\, ag}$$

$$ag = ma - mg = r - mg$$

$$mg = \sqrt{md^2 - gd^2} \ (75, 1) = \sqrt{r^2 - \tfrac{k^2}{4}}$$

$$ag = r - \sqrt{r^2 - \tfrac{k^2}{4}} \text{ ja } k' = \sqrt{2r \,.\, \left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{k^2}{4}}\right)}$$

$$k' = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{k^2}{4}}} \text{ ehk}$$

$$k' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - k^2}}.$$

On poolmõetja $r = 1$, siis on: $k' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - k^2}}.$

On meil nüüd teada, mida wiisi rehkendamise läbi wõib kreisi seest ja wäljastpoolt hulknurkade külgesid leida, siis wõime (§ 94 ja § 96, 1) nüüd ka ühejaulikku olekut (Verhältniß), mis kreisi läbimõetja ja kreisi joone wahel π läbi tähendud, ülesleida.

Olgu siis esimene n-nurk, mis meie kreisi sisse ja wäljapoole kirjutame, 6 nurk, ja wõtame siin kreisi poolmõetja $= r$, pikkuseks $= 1$, siis rehkendame nõnda:

Seespidise külje pikkus on $= 1$.

Wäljaspoolse külje pikkus on $= \frac{2}{\sqrt{4-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}54702$.

Teeme sellepärast, et meie oma rehkendamist paremine wõime ülewaadata, ühe weikese tahwli.

Külgede hulk.	Hulknurk, mis kreisi sisse on kirjutud.	Hulknurk, mis kreisi ümber on kirjutud.
6	r . 6,	r . 6,928202
12	r . 6,211656	r . 6,430780
24	r . 6,265256	r . 6,319320
48	r . 6,278700	r . 6,292172
96	r . 6,282062	r . 6,285428
192	. . . . .	. . . . .
384	. . . . .	. . . . .
768	r . 6,283184	r . 6,283186
	3,141592	3,141593

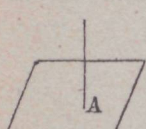
Jautame mõlemate hulknurkade külgede suurust 2 läbi, sellepärast et läbimõetja 2 korda suurem on kui poolmõetja.

Nõnda on see ühejaulik olek π kreisijoone ja tema läbimõetja wahel ülesleitud.

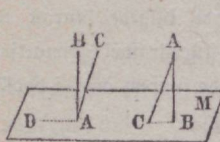
V. Stereometria.

§ 97. **Seletused.** Nõnda kuidas Planimetria (ehk wälja Geometria) niisuguste kujude seisu järele uuris, mis kõige külgedega enese suurust **ühe wälja peale** laiale lautasiwad, ja oma esimest seletust õige joonega algas, siis winklite seisu üks teise kohta näitis, ja kuidas kujud õige joonte ümberpiiramise läbi ühe wälja peal sünniwad, ning kuida nende kujude wäljasuurus äramõedeti ja rehkendamise abi läbi ülesleiti: nõnda uurib Stereometria (ehk kehade Geometria) kehade oleku järele, mis oma kehaliku ruumi suurust külgede läbi **mitme wälja peale** laiali lautawad, ja algab esimest seletust ühe wälja ja õige joonega, siis mitme wäljaga, näitab: mida wiisi mitme wälja (ehk külje) kokkujooksmine kehalikku nurka ja kehalikuid küljewinklid sünnitawad, kuidas kehalik ruum wäljadega ümberpiiratud on, ja õpetab wiimaks kehade suurust ehk nende kubikruumi wäljarehkendamist.

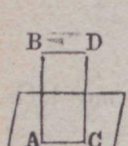
Tähendus: Stereometria teadus on kauniste laialine ja ei wõi siin temast mitte niisugust juhatust anda, mis mathematika põhjanduse läbi üht õpetust teisega köidab, waid saab paljalt kehaliku Geometria eesjuhatustest räägitud ja mõni niisugune õpetus üleswõetud mis iseäranis tarwilik teada on.



§ 98. On õige joone seis ühe wälja kohta niisugune, et temal selle wäljaga üks ainus punkt ühtlane on, siis jookseb see joon sest wäljast läbi, ehk seisab tema peal püsti.

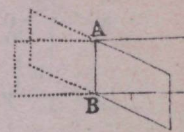


Kui ühe wälja punkti peal, siin A ehk B juures, üks joon BA ehk AB loodis seisab, siis sünnitab see loodjoon iga õige joonega, mis tema jala punktist selle wälja peale tõmmatakse AD ehk BC täiswinkli BAD ehk ABC.

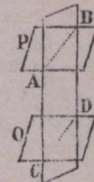


Joon BD jookseb ühe wäljaga M ühtlasi (parallel), kui tema ühe selle wälja peal seisja joonega AC ühtlasi jookseb.

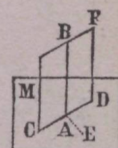
Tähendus: Iga põhjuswälja seis, kellest siin räägitakse, arwatakse ikka, nõnda kui weepind, kaalus olema.



Kui kaks wälja teine teisest läbi jooksewad (ehk lõikawad), siis on nende läbilõik AB õige joon.

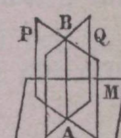


Kui kaks wälja P ja O üks teise wastu ühtlasi (parallel), seisawad ja neist mõlemist üks kolmas wäli läbi lõikab, siis seisawad ka need läbilõigu jooned AB ja CD teine teise wastu ühtlasi.

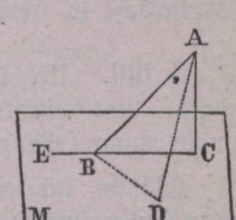


Kui üks õige joon AB ühe wälja M peal loodis seisab, siis seisab ka iga wäli CF, mis sest õigest joonest BA läbi jookseb, sellesama wälja peal loodis.

Tähendus: Ühest joonest wõib ilmlõpmata hulk wäljasid läbi jooksta, ja ühest punktist ilmlõpmata hulk jooni, sellepärast et neil Geometria õpetuse järele ühtegi kehaliku ruumi ei ole, waid paljalt mõtete pildid on.

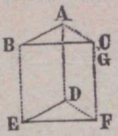


Kui kaks wälja P ja Q kolmandama wälja M peal loodis seisawad ja üks teisest läbi lõikawad, siis seisab see joon, mis selle kahe wälja läbilõikamise kohta BA tõmmatakse, ka selle kolmandama wälja (M) peal loodis.



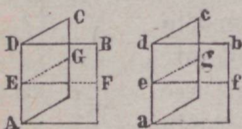
Kui punktist A, mis ühe wälja (M) üle seisab, selle wälja peale üks wiltu joon AB ja teine loodjoon AC tõmmatakse, siis nimetakse seda winkelt ABC, mis suuremaks kui täiswinkel ei toh kaswada, kaaluwinkliks (Neigungswinkel), sest kui ta suurem oleks ku itäiswinkel, siis kaaluks tema selle wälja kohta teise poole külge. See joon BC, mis kahe joone AB ja AC jalapunktid ühendab, nimetakse joone AB kujundikuks (Projection). Ja see wäli, kus peal see kujundik seisab, kujundiku wäljaks (Projectionsebene).

Kui kahe winkli küljed, mis mitte ühe wälja peal ei seisa, ABC ja DEF, aga siiski ühtlasi jooksewad ja oma lautusega



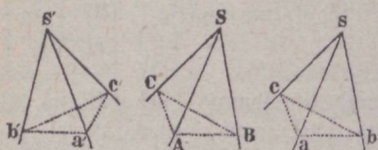
ühte wiisi seisawad, siis on need winklid ühesuurused ja nende wäljad ühtlased.

Kui kaks wälja kiilumoodi ühe wahendikuga kokku jooksewad, siis nimetakse seda winkelt *wäljawinkliks*, ja need mõlemad wäljad wäljawinkli külgedeks.



Kaks wäljawinkelt BADC ja badc seisawad nõndasama oma suurusega teine teise wastu, kui nende mõlemite kaaluwinklid FEG ja feg teine teise wastu seisawad.

Ruumi nukid.



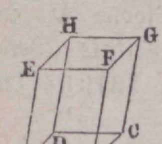
§ 99. Kui kolm ehk rohkem wälja ühe punkti peale kokku jooksewad, siis sünnitawad nemad ühe ruumi nuki. Olgu siin ASB üks, ASC teine ja BSC kolmas wäli, siis on S see nuki punkt ja SA, SB, SC on ruumi nuki serwad ehk kandid.

Iga kolmeküljega ruumi nukis SABC on kaks kandiwinkelt kokku ikka suuremad kui kolmas kandiwinkel. (Waata § 45).

Kehadest ja nende kubikruumi wälja rehkendamisest.

§ 100. Üks keha on igalt poolt küljewäljadega (ehk wäljadega) ümberpiiratud ruum. Kõik küljewäljade suurus kokku annab ruumi keha pinna suuruse.

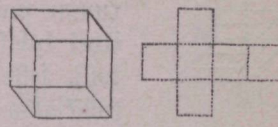
Wähem kui neljast küljewäljast ei wõi üks kandiline keha mitte ümberpiiratud olla.



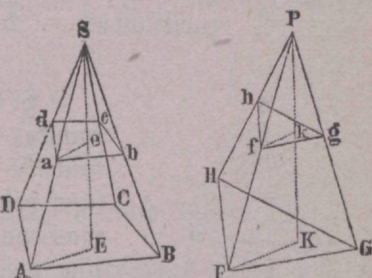
Ühesugune kandiline sammas (ehk Prisma) on iga keha, kelle alumine ja ülemine otsawäli ABCD $\#$ EFGH ühtlasi (parallel) seisawad, ja kellel niipalju küljewäljasid (ehk püstkülgi) on, kui ühe otsawäljal kantisid. Püstküljed on kõik ühtlasi seisjad (pagallelogrammid) pikkruudud, wiltu pikkruudud, ruudud ehk wilturuudud.

Kandilist sammast nimetakse ka **Parallelepipedon** kui põhjus- ehk otsaküljed (wäljad) parallelogrammid on.

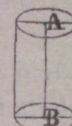
Nelinurgaline pakk (ehk Kuubus) on niisugune Parallelepipedon, kelle põhjus- ja püstwäljad kõik ühesuurused ruudud on ja kõik nurgad täiswinklis seisawad.



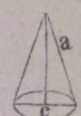
Kandiline terawsammas (ehk Pyramide) on niisugune keha, kelle põhjuswäli üks hulknurk ABCD ehk HFG ja kellel niipalju kolmnurgalisi küljewäljasid FPG, FPH, GPH on, kui põhjuswäljal kantisid. Kõik küljewäljad langewad ühe nuki punkti P peale kokku, ja see loodjoon, mis selle nuki punktist PK põhjuswälja peale tõmmatakse, on terawsamba kõrgus.



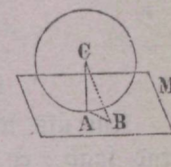
Ümmargune sammas (Silinder) on niisugune keha, kelle mõlemad otsawäljad A ja B ühesuurused kreisid, ja kelle küljewäli kumer on.



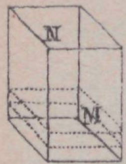
Ümmargune terawsammas (Kegel) on niisugune, kelle põhjuswäli c üks kreis on, ja kelle küljewäli a terawkumer on.



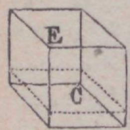
Kuul on niisugune ruumi keha, kelle pind üks ainus kumer wäli on, ja kelle keskpunkt (Centrum) C tema pinnast A igas kohas ühe kaugusel seisab.



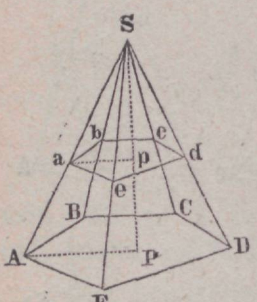
Tähendus: Kujude ruutruumi suurust, mis ühe wälja peal seisiwad, leidsime meie rehkendamise abi läbi, kui meil ühe kuju pikkus ja laius teada oli; kehade kubikruumi suurust leiame nõndasama rehkendamise abi läbi, kui meil keha pikkus, laius ja kõrgus teada on.



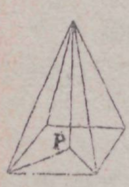
§ 101. Olgu ühesuguse kandilise samba (Prisma) NM põhjuswälja pikkus 20, laius 18 ja samba loodkõrgus 30 tolli, siis on tema kubikruumi suurus 20 × 18 × 30 = 10800 kubiktolli. Ühel kubikjalal on 12 × 12 × 12 = 1728 kubiktolli, selle järele on siis sel sambal $^{10800}/_{1728}$ = 6 kubikjalga ja 432 kubiktolli.



Nelinurga kandilise paku (Kubuse) EC kubikruumi suurus saab nõndasama arwatud. Olgu tema ühe külje pikkus siin 2 jalga, siis on tema kubiksuurus = 2 × 2 × 2 = 8 kubikjalga.



§ 102. Kandilise terawsamba (Pyramide) suurus on $^1/_3$ jagu sest ühesuguse kandilise samba suurusest, kellel nõndasama suur põhjuswäli ja kõrgus, kui terawsammas on. Olgu terawsamba põhjuswäli siin wiienurgaline ABCDE ja kõrgus SP, siis leiame tema kubiksuurust, kui meie $^1/_3$ jauga SP kõrgust põhjuswäljaga ABCDE kaswatame = $^1/_3$ SP × ABCDE. On põhjuswälja ABCDE ruutsuurus 800 □tolli ja kõrgus SP = 72 tolli, siis on Pyramide ABCDES kubiksuurus = 800 × $^{72}/_3$ = 800 × 24 = 19200 kubiktolli ehk $^{19200}/_{1728}$ = 11 kubikjalga ja 192 kubiktolli.



Kui terawsamba põhjuswäli pikkruudu kujuline on, nõnda et pikkus 3, laius 2 jalga mõõdab, ja samba loodkõrgus 5 jalga oleks, siis rehkendame tema kubiksuurust sedawiisi:

$$\frac{3 \times 2 \times 5}{3} = 10 \text{ kubikjalga.}$$

Kui üks terawkandiline sammas ABCDES nõnda läbi lõigatud saab, et tema lõiguwäli a b c d e põhjuswäljaga ABCDE ühtlasi (parallel) seisab, ja meil sest tömpsambast ABCDE a b c d e teada on: põhjuswälja ja ülemise wälja ruutsuurused ja ka tema loodkõrgus pP = h, siis wõime meie selle tömpsamba kubikruumi suurust järel näidatud wiisil wälja rehkendada. Esite katsume rehkendamise abiga seda kõrgust leida, mis sest täisterawsambast mahalõigatud on, seda leiame nõnda:

$W : w = (h + x)^2 : x^2$, ehk $\sqrt{W} : \sqrt{w} = (h + x) : x$

$$x = \frac{h\sqrt{w}}{\sqrt{W} - \sqrt{w}}.$$

W tähendab alumist tömpsamba ABCDE □suurust = 800 □tolli,
w tähendab ülemist tömpsamba abcde □suurust = 312,4 □tolli,
h = pP tömpsamba kõrgust = 27 tolli,
x = mahalõigatud terawsamba abcdeS kõrgust, mis teadmata on.

$\sqrt{800} : \sqrt{312,5} = (27 + x) : x$ ehk

$$x\sqrt{800} = 27\sqrt{312,5} + x\sqrt{312,5}$$

$$(\sqrt{800} - \sqrt{312,5})x = 27 . \sqrt{312,5}$$

$x = \frac{27\sqrt{312,5}}{\sqrt{800 - 312,5}} = 45$ tolli, mahalõigatud kõrgus.

On meil nüüd see mahalõigatud kõrgus teada, siis on meil ka selle terawsamba täiskõrgus ja tema kubiksuurus teada, ja ei ole meil muud waja, kui selle mahalõigatud terawsamba abcdeS kubiksuurust, sest täisterawsamba ABCDES kubiksuurusest mahaarwata, see oleks $= \frac{1}{3}$ SP $\times$ ABCDES $- \frac{1}{3}$ Sp $\times$ abcdeS ehk $= \frac{72}{3} \times 800 - \frac{45}{3} \times 312,5 =$ 14512,5 kubiktolli ehk 8 kubikjalga ja 688,5 kubiktolli. Aga et meil alati niisugused ülesanded kerged wälja rehkendada oleks, siis seame omale ühe rehkendamise abi ehk juhi kokku, kelle toel meie kergeste kõige niisuguste tömpsammaste kubiksuurust wõime wälja rehkendada, kui meil nende mõlemad otsawälja ruutsuurused ja kõrgus teada on.

Tömpsamba ABCDE abcde kubiksuurus on

$$= \frac{1}{3}\left[W . h + (W - w) . \frac{h\sqrt{w}}{\sqrt{W} - \sqrt{w}}\right] \text{ ehk}$$

$$= \frac{1}{3}h\left(W + \frac{W - w}{\sqrt{W} - \sqrt{w}} . \sqrt{w}\right),$$

aga $W - w$ on $= (\sqrt{W} + \sqrt{w})(\sqrt{W} - \sqrt{w})$ ja

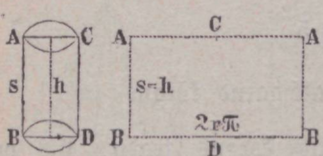
$$\frac{W - w}{\sqrt{W} - \sqrt{w}} = \sqrt{W} + \sqrt{w}, \text{ sellepärast}$$

$$= \frac{1}{3} h [W + (\sqrt{W} + \sqrt{w}) . \sqrt{w}]$$
$$= \frac{1}{3} h (W + \sqrt{W . w} + w),$$ ehk numbritega
$$= \frac{1}{3} . 27 (800 + \sqrt{800 \times 312{,}5} + 312{,}5)$$
$$= 9 (800 + 500 + 312{,}5)$$
$$= 9 . 1612{,}5 = 14512{,}5$$ kubiktolli ehk $\frac{14512{,}5}{1728} = 8$ kubikjalga ja 688,5 kubiktolli.

See leitud rehkenduse juht on siis:

$$\frac{1}{3} (W + \sqrt{W . w} + w),$$

kelle abiga meie niisuguste tömpsammaste kubiksuurust wälja rehkendada wõime.



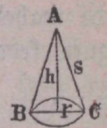
§ 103. Ümmarguse samba (ehk silindre) kubiksuurust leitakse, kui tema põhjuswälja ruutsuurus kõrgusega = h kaswatud saab. Olgu selle siin kõrwas seisja ümmarguse samba ACBD põhjuswälja poolmõetja pikkus $\frac{BD}{2} = 6$ ja samba kõrgus 30 tolli, siis rehkendame tema kubiksuurust nõnda:

$$r^2 . \pi . h = 6^2 \times 3{,}14 \times 30 = 3391{,}2$$ kubiktolli ehk,
$$\frac{3391{,}2}{1728} = 1$$ kubikjalg ja 1663,2 kubiktolli.

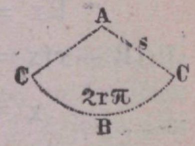
Kui meie ümmarguse samba kumera wäljapinna sirgeks lautaks, siis on tema pikkruut AA, BB, kelle üks külg BA = h samba kõrgus, ja teine külg BB samba ümmargus 2 . r . π on. Tema ruutsuurus on ikka 2 . r . π . h. Arwame weel mõlema otsawälja-ruutsuurus sinna juure, siis on meil ümmarguse samba täispinna □suurus teada:

$$2 . r^2 . \pi + 2 . r . \pi . h = 2 r \pi (r + h)$$
$$2 . 6^2 . 3{,}14 + 2 . 6 . 3{,}14 . 30 = 2 . 6 . 3{,}14 (6 + 30)$$
$$= 1356{,}48$$ □tolli ehk $\frac{1356{,}48}{144} = 9$ □jalga ja 60,48 □tolli.

§ 104. Ümmarguse terawsamba kubiksuurus on $\frac{1}{3}$ jagu sest ümmarguse samba kubiksuurusest, kellel temaga ühesuurune põhjuswäli ja kõrgus on. Olgu siin ümmarguse terawsamba



põhjuswälja poolmõetja $\frac{BC}{2} = 8$ ja kõrgus h $= 35$ tolli, siis on tema kubiksuurus: $\frac{1}{3}r^2 . \pi . h$ $= \frac{1}{3}8^2 . 3{,}14 . 35 = \frac{8^2 \times 3{,}14 \times 35}{3} = 2344{,}5$ kubiktolli ehk 1 kubikjalg ja 616,5 kubiktolli. Selle järele leitakse ümmarguse terawsamba kubiksuurust, kui tema põhjuswäli kõrgusega kaswatakse, ja see kaswatus siis kolme läbi jagatud saab.



Kui meie ümmarguse terawsamba BCA kumerwälja sirgeks laiale lautaks, siis oleks tema kuju nõnda, kui siin kõrwas näha = ACC, ja see on selle kreisi wäljalõiguga ühesuurune, kelle poolmõetja AC = s terawsamba kumerwälja wiltukõrgusega, ja kelle kaar CC terawsamba põhjuswälja piirijoonega ühepikkused oleksid. Seda kumerat wälja nimetakse sagedaste terawsamba mantliks ja tähendakse tema □suurust nõnda:

$M = r . \pi s$,

r = tähendab siin ümmarguse samba põhjuswälja poolmõetjat = 8 tolli,

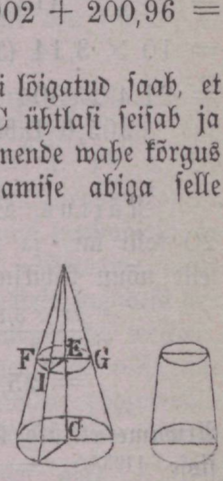
s = tähendab siin ümmarg. kumerwälja wiltu kõrgust $\sqrt{35^2 + 8^2}$.

Selle järele on siis kumerwälja □suurus:

$r . \pi . s = 8 . 3{,}14 . \sqrt{35^2 + 8^2} = 902, \ldots$ □ tolli.

Arwame weel ümmarguse samba põhjuswälja □suuruse seia juure, siis leiame tema üleüldise pinna □suuruse $902 + 200{,}96 = 1102{,}96$ □ tolli.

Kui ümmargune terawsammas nõnda läbi lõigatud saab, et tema ülemine lõiguwäli E alumise wäljaga C ühtlasi seisab ja meil mõlema wälja poolmõetjad R ja r, ja ka nende wahe kõrgus CE = h teada on, siis wõime meie rehkendamise abiga selle tömpsamba CFEG kubiksuurust leida.



Esite katsume meie mahalõigatud samba kõrgust wälja rehkendada, siis saame selle läbi teada, kui kõrge on täisterawsammas olnud, ja kui palju kubikruumi on temast mahalõigatud?

Olgu siin alumise wälja poolmõetja R = 12, ülemise wälja poolmõetja r = 8 ja nende wahekõrgus h = 30 tolli, siis leiame seda mahalõigatud kõrgust, keda meie x nimetame, nõnda:

$$x : h + x = r : R \qquad x : 30 + x = 8 : 12$$

$$Rx = rh + rx \qquad 12x = 8 . 30 + 8x$$

$$(R - r)x = r . h \qquad (12 - 8)x = 240$$

$$x = \frac{r . h}{R - h} \qquad x = \frac{240}{12 - 8} = 60 \text{ tolli.}$$

Nüüd teame meie, et täisümmargune sammas (30 + 60) = 90 tolli, ja mahalõigatud sammas 60 tolli kõrge on olnud; selle järele on siis tömpsamba CFEG kubiksuurus

$\frac{1}{3} R^2 . \pi . h - \frac{1}{3} r^2 . \pi . h$ ehk

$\frac{12^2 \times 3{,}14 \times 90}{3} - \frac{8^2 \times 3{,}14 \times 60}{3} = 9545{,}6$ kubiktolli ehk

$\frac{9545{,}6}{1728} = 5$ kubikjalga ja 905,6 kubiktolli.

Ka selle ümmarguse tömpsamba kergemaks wäljarehkendamiseks on üks rehkenduse juht kokku seatud, kelle toel kõige ümmarguste tömpsammaste kubiksuurust wõib kergel wiisil leida, see juht on:

$\frac{h \pi}{3} (R^2 + R . r + r^2)$

$= \frac{30 \times 3{,}14}{3} (12^2 + 12 . 8 + 8^2)$

$= 10 \times 3{,}14 (144 + 96 + 64)$

$= 31{,}4 \times 304 = 9545{,}6$ kubiktolli ehk 5 kubikjalga ja 905,6 kubiktolli.

Näitus. Oleks ühe ümmarguse nõuu põhi alt 30, ülewalt 20 tolli lai, ja tema kõrgus 2 jalga ehk 24 tolli, siis leiame selle nõuu kubiksuuruse ülewal näidatud juhi abiga nõnda:

$\frac{24 \times 3{,}14}{3} (15^2 + 15 \times 10 + 10^2)$ ehk

$= 25{,}12 \times 475 = 11932$ kubiktolli.

Arwame et üks toop 78 kubiktolli suur on, siis läheb selle nõu sisse $^{11932}/_{78} = 152{,}9$ toopi.

§ 105. Kuuli wõime sünnitada, kui meie ühe poolkreisi nõnda oma täismõetja ümber pöörame, et sel ümberpöörmise ajal täismõetja seis ühekohaline on; sellepärast on siis ka kuuli poolmõetja nõndasama kui kreisi poolmõetja oma pinna (wälise piiri) pealt igal kohal ühe kaugusel.

Lõikame ühe kuuli nõnda otse lõhki, et see lõik kuuli keskpunktist läbi läheb, siis on see kuul täitsa poolitud, ja see lõigu wäli on selle kuuli kohta see kõige suurem kreis, mis lõigu läbi sündida wõis. Kui meie nüüd selle kreisi ruutsuurust neljaga kaswatame, siis leiame meie kuuli pinna □suuruse. Selle järele on meil igakord wõimalik, kui meil kuuli läbi- ehk poolmõetja teada, selle kuuli pinna ruutsuurust wäljarehkendada.

Olgu siin kuuli läbimõetja 12 tolli, siis on selle kuuli pinna ruutsuurus

$4 \,.\, r^2 \,.\, \pi$ ehk $4 \,.\, 6^2 \,.\, 3{,}14 = 4 \,.\, 36 \,.\, 3{,}14 = 452{,}16$ □tolli.

Kuuli kubiksuurust leitakse igakord, kui tema poolmõetja teada on, niisuguse rehkenduse juhi läbi: $\frac{4}{3} \,.\, r^3 \,.\, \pi$.

r = tähendab siin kuuli poolmõetjat

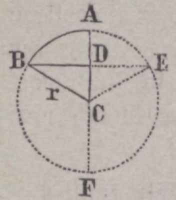
π = nõnda kui kreisi rehkenduse juures $= 3{,}14 \ldots$

On nüüd kuuli poolmõetja 6 tolli, siis on selle kuuli kubiksuurus:

$\frac{4}{3} \,.\, 6^3 \,.\, 3{,}14 = \frac{4}{3} \,.\, 6 \,.\, 6 \,.\, 6 \,.\, 3{,}14 = 904{,}32$ kubiktolli.

Küsime: Kuda wiisi on selle üle täielikult aru tehtud, et kuuli kubiksuurus just $\frac{4}{3} \,.\, r^3 \,.\, \pi$ peab olema?

Wastus: Sellepärast, et kuuli poolmõetja kuuli pinnast igas kohas ühe kaugusel seisab, arwati esite, „kui kuuli pind sirgeks lautud saab, siis on tema □suurus $= 4 \,.\, r^2 \,.\, \pi$, see oleks otse kui ühe terawkandilise ehk terawümmarguse samba põhjuswäli, ja selle samba kõrgus oleks siis kuuli poolmõetja ja kuuli keskpunkt, selle terawsamba wahendus.“ Arwame nüüd niisugust kuuli pinda ilmlõpmata hulgaks ühesugusteks jagudeks ära jagatud, siis on iga jagu selle kuuli pinna peal nõnda weikene, et meie teda ühetasaseks peaks pidama; aga iga ükfik niisugune weike kuuli pinna jagu on jälle ühe terawsamba põhjuswäli, ja kuuli poolmõetja selle terawsamba kõrgus; kõige nende terawsammaste kubiksuurus kokku on $\frac{1}{3}r \,.\, 4r^2 \,.\, \pi = \frac{4}{3} \,.\, r^3 \,.\, \pi$.



Lõikame meie ühe kuuli nõnda otse läbi, et see lõik BE mitte kuuli keskpunkti ei ulataks, ja meil on selle kuuli poolmõetja $r = 7$, ja lõigu kõrgus $DA = h = 3$ tolli teada. Mida wiisi leiame meie nüüd rehkendamise abiga, mitu kubiktolli see kuuli lõik BAE suur on?

Niisuguse ülesande tarwis on jälle üks rehkenduse juht kokku seatud, see on:

$h^2 . \pi (r - \frac{1}{3} h)$, numbritega

$3^2 . 3{,}14 (7 - \frac{1}{3} . 3) = 9 . 3{,}14 (7 - 1)$

$28{,}26 . 6 = 169{,}56$ kubiktolli.

Näitus: Kui suured on ühe kuuli mõlemad lõigud BAE ja BFE, kui selle kuuli poolmõetja pikkus 12 ja lõigu BAE kõrgus $= h = 3$ tolli on?

Wäljarehkendus: Täiskuuli kubiksuurus on $\frac{4}{3} . r^3 \pi$ ja lõigu BAE kubiksuurus $= h^2 \pi (r - \frac{1}{3} h)$, selle järele on siis teise kuuli lõigu kubiksuures

$BFE = \frac{4}{3} . r^3 . \pi - h^2 \pi (r - \frac{1}{3} h)$

$= \frac{4}{3} . 12^3 . 3{,}14 - 3^2 . 3{,}14 (12 - \frac{1}{3} 3) = 6924, \ldots$

kuuli lõik $BFE = 6924, \ldots$ kubiktolli

kuuli lõik $BAE = 311, \ldots$ kubiktolli

Tahaks meie teada: kui palju ruuttolli on selle kuuli lõigu BAE kumerpind suur, kui kuuli poolmõetja $r = 10$, ja lõigu kõrgus $DA = h = 4$ tolli on?

Rehkenduse juht on siin jälle: $2 . r . \pi . h$.

Kuuli lõigu kumerpind BAE on:

$= 2 . r . \pi . h$, ehk numbritega

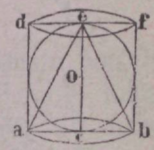
$= 2 . 10 . 3{,}14 . 4 = 251{,}2$ □tolli.

Näitus: Ühe ümmarguse tömptorni peale tahetakse kard katust katta. Torni poolmõetja on 18 jalga pikk, ja selle ümmarguse torni katuse kuju peab ühe kuuli lõigu sarnane olema, kelle kõrgus 6 ja kelle poolmõetja 20 jalga pikk on. Mitu ruutu kardplekki on selle katukse katmiseks waja, kui pleki ruutkülg 21 tolli mõedab?

$$2 \,.\, r \,.\, \pi \,.\, h$$

$$\frac{(2 \,.\, 20 \,.\, 3{,}14 \,.\, 6)144}{21 \,.\, 21} = 246, \ldots \text{ ruutu kardplekki.}$$

§ 106. Saab ühe kuuli ümber ümmargune sammas abdf, ja selle ümmarguse samba põhjus-wälja peale üks terawsammas aeb nõnda kirjutud, et ümmarguse ja terawsamba kõrgus kuuli läbi-mõetjaga ühe pikkused on, siis on nende kolme keha kubiksuurus, ühe teise kohta, niisugune:



(Kegel) (Kugel) (Cylinder)

ümmargune terawsammas : kuul : ümmargune sammas = 1 : 2 : 3.

Kui meie siin ümmarguse samba ja teraw-ümmarguse samba kubikruumi kuuli-poolmõetja läbi tahame tähendada, siis peame nende rehkenduse juhi sees h = kõrguse asemele = 2r panema, see oleks nõnda:

teraw-ümmarguse samba rehkenduse juht on:

$$\tfrac{1}{3} r^2 \pi h = \tfrac{1}{3} r^2 \pi \,.\, 2r = \tfrac{2}{3} r^3 \pi;$$

ümmarguse samba rehkenduse juht on:

$r^2 \,.\, \pi \,.\, h = r^2 \,.\, \pi \,.\, 2r = 2r^3\pi$, selle järele on siis:

terawümmarguse samba (juht)	kuuli (juht)	ümmarguse samba (juht)
$\tfrac{2}{3} \,.\, r^3 \,.\, \pi$	$\tfrac{4}{3} r^3 \pi$	$2r^3\pi$ ehk

$$\tfrac{2}{3} \,.\, r^3 \,.\, \pi : \tfrac{4}{3} r^3 \pi : 2r^3\pi = 1 : 2 : 3.$$

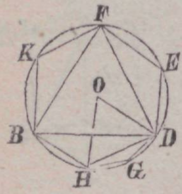
Niisuguse ruumi-kehade kokkusünnitamisega on rohkem kui 200 aastat enne Kristust üks kuulus Kreekamaa tark Archimedes palju tööd teinud, ja ka mõnesuguse ülesleidmisega inimese sugule kasu saatnud.

Pikemalt siin ruumikehade üle rääkida, ei ole selle weikese raamatu kohta mitte sündlik. Jõuab aga meie armas Eesti-rahwas oma teadusega edasi, siis saab ka pea mitmesugu teiste ruumikehade üle ühe uue raamatu sees täielikumad juhatust andud, ja nende üle sügawamad põhjendust tehtud.

E. Ülesanded.

1) Kreisi sisse 3, 6, 12 ühekülјelist nurka kirjutada.

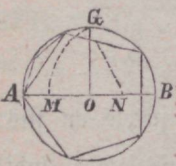
Juhatus.



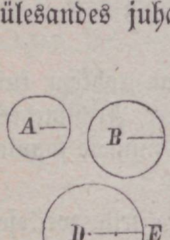
Poolmõetja ulatab iga kreisil 6 korda tema joone peale; sellepärast mõeda siin poolmõetja OD-ga kreisi joone peale punktid DE = EF = FK = KB = BH = HD ja tõmba köitjed jooned DE, EF, FK j. n. e., siis on selle läbi otsitaw 6 nurk sünnitud. Tõmba nüüd jälle üle kahe punkti FB, BD ja DF köitja jooned, siis on 3 nurk BFD sünnitud. Poolita kaar HGD ja tõmba HG ja GD, siis oled sa need pikkused leidnud, mis 12 korda kreisi joone peale lähewad.

2) Kreisi sisse 5, 10, 20 nurka kirjutada.

Juhatus.



Otsi kreisi poolmõetja pikkuse OG ja tema jau wahel keskmist proportsionaali liiget (§ 84, 1 ja ülesande D Nr. 6 järele) üles. Seda leiad siin nenda: Poolita poolmõetja OB punkti N juures ja kirjuta NG pikkusega kaar GM, siis on OM just see pikkus, mis kümme korda täieste kreisi piirijoone peale wõib mõeta. Tee siis nõnda kui esimeses ülesandes juhatud sai, siis leiad sa 5, 10, 15 nurka.



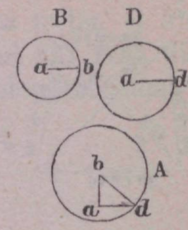
3) Üht kreisi D, teha, kelle piiri joon nõnda pikk on, kui kahel teisel kreisil A + B kokku.

Juhatus.

Kirjuta üks kreis, kelle poolmõetja DE just nõnda pikk on, kui nende kahe teise kreisi poolmõetjad kokku.

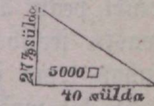
4) Üks kreis A kirjutada, kelle wälja suurus nõnda suur on, kui kahe teise kreisi B ja D wäljade suurus kokku.

Juhatus.



Tee täiswinkli kolmnurk bad, nõnda et üks ristloodi külg ühe kreisi poolmõetja ab, ja teine ristloodi külg ad teise kreisi poolmõetja on, siis on kolmnurga lautusekülg bd nii pikk, kui selle kreisi poolmõetja, kellega nii suurt kreisi wõib kirjutada kui need esimesed kokku on.

5) Allika Jaan annab oma sugulasele $1/2$ waka suurust, linamaad kaerakõrre peale, ja ta tahab seda 6 jalalise süllapuuga nenda ära mõeta, et üks wäljaspoolne külg 40 sülda mõedab; — mitu sülda peab teine külg mõetma, kui see põllunurk just täiswinkel on ja sulase linamaa tükk kolmenurgaline peab olema. Maamõetja käest on Jaanil teada, et wakamaa 10000 □ küünart, ja 6 jalane süllapuu 3 küünart pikk on.



Wäljarehkendus: 40 süülda = 120 küünart

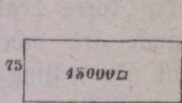
$1/2$ wakamaad = 5000 □ küünart

Kolmnurga wäljasuurust leitakse, kui pool külje pikkust kõrgusega kaswatud saab:

$^{120}/_2 : 5000 = 60|5000 = 83^1/_3$ ja $3|83^1/_3 = 27^7/_9$ sülda

```
60|5000 = 83 1/3        3|83 1/3
   480                    6
   ---                   --
   200                   23
   180                   21
   ---                   --
    20/60                 2
```

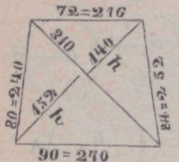
6) Kiwisilla Jüri tahab heinamaad juure laastada. Maa tükk on just pikkruut, ja üks külg on 200 küünart, teine 75, — kui suur on see maatükk?




```
  200
   75
 ----
 1000
1400
-----
15000
```

15000 □ küünart ehk $1^1/_2$ wakamaad.

7) Wiira Peeter wõtab metsmaast ühe tüki oma põllule juure, ja ta tahab 6 jalase süllapuuga ära mõeta, kui palju wakamaad see tükk suur peaks olema; tema mõedab ja leiab:



Üks külg 90 sülda, teine 80, kolmas 72 ja neljas 84; see on jälle küünra aru järele 270, 240, 216, 252; kirjutab siis selle nelinurga wäiksema mõedu järele ülesse ja mõedab nüüd tsirkliga mõlema kolmnurga kõrgust:

h = 140 küünart
h' = 152 küünart
= 310 ühenduse joon.

ja arwab Geometria õpetuse järele

$\triangle = 140 \times 155 = 21700$
$\triangle = 152 \times 155 = 23560$

45260 □ küünart = $4\frac{1}{2}$ wakamaad.

8) Rautseppa Märt tahab oma metsmaast 10 wakamaad rendi peale anda. Sellepärast, et temal metsmaa teise talu piiri wastu seisab ja piiri külg 200 sülda = 600 küünart pikk on, tahab tema just nõnda pikalt, kui see piir on, pikkruudu wiisil seda 10 wakamaad wälja mõeta, — kui pikk tuleb siis teine pikkruudu külg?

600 | 100000 = $166\frac{2}{3}$ küünart ehk $55\frac{5}{9}$ sülda.
600
4000
3600
4000
3600
$\frac{2}{3}$

9) Jõesaare Tõnis annab oma sulasele linakülimise tarwis odra kõrre peale $\frac{1}{3}$ wakamaad, ja tahab seda pikkruudu näu järele ära mõeta. Mitu küünart peab teine külg pikk saama, kui üks wäline külg 80 küünart ehk $26\frac{2}{3}$ sülda mõedab.

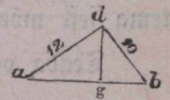
$\frac{1}{3}$ wakamaa on = $3333\frac{1}{3}$ □ küünart

80 | $3333\frac{1}{3}$ = $41\frac{2}{3}$ küünart
320
133
80
$\frac{53}{80}$

10) Ranna Kaarel tahab omast põllust, mis tema aija taga seisab, ühe wakamaa õunapuu aijaks nõnda wõtta, et üks külg 124 küünart ehk $41\frac{1}{3}$ sülda mõedab. Kui pikk peab siis teine külg olema, kui aed täispikkruudu näulisek peab tehtud saama?

$$124 \mid 10000 = 80\,{}^{20}/_{31} \text{ küünart.}$$
$$\frac{992}{{}^{80}/_{124}}$$

11) Täiswinkli kolmnurga ristloodi küljed saiwad mõedetud: ad = 12 ja db = 10 sülda, kolmat külge ab ei wõinud mõeta, siiski tahetakse teada, 1. kui pikk tema on, 2. kui pikk ag on, 3. kui kõrge on ristloodi joon gd?



Wäljarehkendamine: § 75$^{\text{ma}}$ ja 84$^{\text{ma}}$ läbi on meil teada, et:

$$ad^2 + db^2 = ab^2, \quad \text{ehk} \quad 12^2 + 10^2 = ab^2.$$

1. $ab = \sqrt{2{,}44} = 15{,}6 \ldots$ sülda

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 14 \\ 10 \\ \hline 44 \\ 2500 \\ \hline 190 \\ 180 \\ \hline 10 \end{array}$$

2. $ab : ad = ad : ag$

$$15{,}6 : 12 = 12 : ag$$
$$15{,}6 \,.\, ag = 144$$
$$ag = 15{,}6 \mid 144{,}0 = 9{,}2 \ldots \text{ sülda}$$
$$\begin{array}{r} 1404 \\ \hline 360 \\ 312 \\ \hline \end{array}$$

3. $9{,}2 \ldots : gd = gd : 6{,}4$

$$gd^2 = 58{,}88$$

$$gd = \sqrt{58,88} = 7,67\ldots \text{ külda}$$

$$\begin{array}{r}
49 \\
\hline
98 \\
84 \\
\hline
148 \\
3600 \\
\hline
1210
\end{array}$$

12) Maamõetja mõetis ühte ruutpõldu paljalt ühest nurgast teiise, a juurest b juure, ja leidis 282,8 küünart; mida wiisi leiab tema sest mõedust põllu ruutsuurust?

Teada on: $ad^2 + db^2 = ab^2$

$$ad = bd = 2ad^2 = ab^2$$

$$ab = ad\sqrt{2}.$$

Wäljarehkendus: $\sqrt{2} \,|\, 282,8$ ehk

$$\sqrt{2} = 1,414 \,|\, 282,800 = (200)^2 = 4 \text{ wakamaad.}$$

$$\begin{array}{r}
2828 \\
\hline
00
\end{array}$$

13) Mõisaherra Ehrenfells ehitab omale uue härbergi ja tahab, et rohiline plats, mis tal ukse ees seisab, üsna ümmargune (kreis) ja suuruse järele täiswakamaa peab olema; kui pikk peab see poolmõetja olema, kellega seda wakamaa suurust kreisi teha wõib.

Wäljarehkendus: (§ 96, 3) $r^2 . \pi$ on kreisiwälja suuruse juhatus

$$r^2\pi = 10000 \,\square$$

$$r^2 . 3,14; \quad r^2 = 3,14 \,|\, 10000,00 = 3184,71\ldots$$

$$\begin{array}{r}
942 \\
\hline
580 \\
314 \\
\hline
2660 \\
2512 \\
\hline
1480 \\
1256 \\
\hline
2240 \\
2198 \\
\hline
420 \\
314
\end{array}$$

$$r = \sqrt{3184{,}71} = 56{,}4 \text{ küünart}$$

```
 25
 ──
 68
 60
 ───
  84
  36
 ────
  487
  448
 ────
   391
    16
   ───
     5
```

I. Katsu nüüd ise tsirkli ja liniali abiga walmistada.

1) Tee täiswinkli kolmnurk, kui tema mõlemad ristloodi küljed teada on.

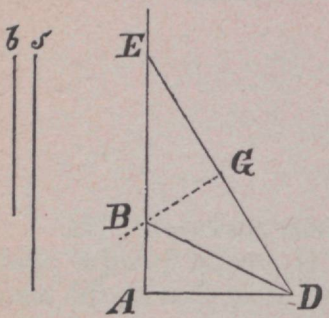
2) Tee täiswinkli kolmnurk, kui antud on lautusekülg (Hypotenuse) ja ristloodi külg. — Juhatus: Poolita lautusekülg, kirjuta tema üle poolkreis ja pane lautusekülje otsa peale antud ristloodi külg j. n. e. (Waata ülesanded A Nr. 4 § 65, 3).

3) Tee täiswinkli kolmnurk kui teada on lautusekülg ja üks selle lautusekülje peal seisja winkel. — Juhatus: Täiswinkli suurusest (90^0) arwa antud winkli suurus maha (oleks see antud suurus 50^0) $90^0 - 50^0 = 40^0$. Pane lautusekülje ühe otsa peale $\angle 50^0$ ja teise peale $\angle 40^0$, tõmba siis nende winklite laiuse üle kaks joont, mis täiswinkli lautusega kokku jooksewad.

4) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on ristloodi külg ja selle wastuseisja winkel.

5) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on ristloodi külg ja see selle ristloodi küljes seisja wahewinkel.

6) Tee täiswinkli kolmnurk, kui ristloodi küljed ühepikkused, ja lautusekülg teada on. (Waata § 65, lisa õpetus 3.)



7) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on üks ristloodi külg ja teise ristloodi ja lautusekülje summa. Juhatus: Siin kõrwas näitab b antud ristloodi külge ja s ristloodi ja lautusekülje summa. Tee üks täiswinkel, kelle ristloodi külg AD = b ja teine AE = s, tõmba lautusekülg ED ja poolita teda G juures; tee G punkti peale ristlood GB. Tõmba weel BD siis on see kolmnurk ABD leitud.

Tee küline kolmnurk, kui teada on:

8) põhjuskülg ja üks selle külje peal seisaw winkel;

9) üks ühesugune külg ja selle külje kõrgus (waata § 44, 3);

10) põhjuskülg ja kõrgus;

11) kõrgus ja põhjuskülje wastu seisaw winkel;

12) põhjuskülg ja põhjuskülje wastu seisaw winkel;

13) kolme külje pikkuse-summa ja üks winkel põhjuskülje peal;

14) üks ühesugune külg ja nende kahe winkli summa, mis selle külje peal seisawad.

15) Walmista ühtlane kolmnurk, kui teada on kolme külje pikkuse-summa.

Walmista kolmnurk, kui antud on:

16) kaks külge ja nende külgede wahel seisaw winkel;

17) üks külg ja mõlemad selle külje peal seiswad winklid;

18) kaks külge ja üks winkel, mis ühe antud külje wastu seisab;

19) kaks külge ja ühe külje kõrgus;

20) üks külg, üks selle külje peal seisaw winkel ja kahe teise külje pikkuse summa;

21) üks külg, selle külje wastu seisaw winkel ja nende kahe teise winkli wahe (ülejäädaw ehk Differenz).

II. Ülesanded mis rehkendamise toel leitakse.

22) Täiswinkli kolmnurgas on üks wahewinkel 52^0; kui suur on teine wahewinkel? Wastus $90^0 - 52 = 38^0$.

23) Täiswinkli ristloodi küljed on $a = 12$ jalga ja $b = 16$ jalga pikk, — kui pikk on lautusekülg? Wastus $12^2 + 16^2 = 144 + 256$, $\sqrt{4,00} = 20$ jalga.

24) Täiswinkli kolmnurgas on lautusekülg 40 küünart ja üks ristloodi külg 24 küünart pikk, kui pikk on teine ristloodi külg? Wastus: $40^2 - 24^0 = 1600 - 576$, $\sqrt{10,24} = 32$ küünart.

25) Külise kolmnurga põhjuskülje wastu seisaw winkel on 46^0; kui suur on üks põhjuskülje winkel? Wastus: $\frac{180^0 - 46^0}{2} = 67^0$.

26) Külise kolmnurga põhjuskülje üks winkel on 72^0; kui suur on põhjuskülje wastuseisaw winkel? $180^0 - 2 \times 72^0 = 36^0$.

27) Külise kolmnurga pikendud põhjuskülje peal seisaw wäline winkel on 124^0; kui suur on igaüks selle kolmnurga winkel? $180^0 - 124^0 = (56^0 + 56^0 + 68^0)$.

28) Kahe winkli summa ühes külises kolmnurgas on 135^0 24'; kui suured on tema üksikud winklid? $180^0 - 135^0\ 24' = 44^0\ 36' + 44^0\ 36' + 90^0\ 48'$.

29) Külise kolmnurga kõrgus on 8 tolli, tema põhjusjoon 12 tolli; kui pikad on tema küljed? (Waata § 44, 2) $6^2 + 8^2 = \sqrt{100} = 10$ tolli.

30) Külise kolmnurga põhjuskülg on 8 tolli pikk ja tema kõrgus 5,4 tolli; kui pikk on üks ühesugune külg?

$(5,4)^2 + 4^2 = 29,16 + 16$, $\sqrt{45,16} = 6,7$ tolli.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 91 \\ 84 \\ \hline 76 \\ 49 \end{array}$$

31) Kui täiswinkli kolmnurgas ADC (waata ülesanded D juhatus 5), täiswinkli wahendusest loodjoon DB lautusekülje peale lastakse, ja tema kõrgus 4 tolli on, see lood siis jautab selle lautusekülje kahte jakku AB = m ja BC = n; olgu üks jagu n = 3 tolli ja teine m = 6 tolli; kui pikad on need mõlemad ristloodi küljed AD ja DC?

$$DC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ tolli}$$

25

$$AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 7{,}2 \text{ tolli}$$

49
30
28
20
4

32) Kaks kolmnurka BAO ja bao on ühekujulised. Weiksema küljed bao on üks 7, teine 6 ja kolmas 4 tolli, suurema kolmnurgast on paljalt üks ainus külg BA = 14 tolli pikk, teada. Mida wiisi leiame meie rehkendamise abiga need kaks teist külge AO ja BO? Seda õpetab § 82. Sellepärast

$$ba : ao = BA : x' \qquad 7 : 6 = 14 : x'$$

$$x = \frac{ao \times BA}{ba} \qquad x' = \frac{6 \times 14}{7} = 12 \text{ tolli}$$

$$ao : bo = AO : x'' \qquad 6 : 4 = 12 : x''$$

$$x'' = \frac{bo \times AO}{ao} \qquad x'' = \frac{4 \times 12}{6}\ 8 \text{ tolli.}$$

Suurema kolmnurga BAO küljed on siis = 14, 12, 8 tolli.

33) Kui kahe ühekujulise suurema kolmnurga BAD küljed teada on: 16, 18, 24 tolli; aga weiksema kolmnurgast bad paljalt üks külg = 3 tolli; siis leiame tema kaks teist külge nõndasama, kui ülesande Nr. 32 juures:

$$16 : 18 = 3 : x' \qquad 18 : 24 = 3^3/_8 : x''$$

$$x' = \frac{18 \times 3}{16} = 3^3/_8 \qquad x'' = \frac{24 \,.\, 3^3/_8}{18} = {}^{81}/_{18} = 4^1/_2.$$

Selle järele on siis weiksema kolmnurga küljed 3, $3^3/_8$, $4^1/_2$ tolli.

34) Kui jälle weiksema kolmnurga abd kolm külge teada on = 4, 7, 9 tolli. Suurema kolmnurga üks külg on 12 tolli; kui pikad on siis tema kaks teist külge? = 21 ja 27 tolli.

35) Üks isa läks oma 9 aastase pojaga esimest korda linna; 6 wersta linnast eemal nägi poeg linna kirriku torni ja küsis isa käest, kui kõrge see torn peaks ollema, isa wastas, seda wõime siin sellepärast, et linn ühe tasase lagendiku peal seisab, kergeste wälja arwata. (Tee äüres seisis werstapost, mis just 8 jalga kõrge oli, ja maast seni kui isa silmini oli 5 jalga.) Isa läks werstapostist 200 sammu tagasi, leidis siis, et see sihk, mis tema silmist üle werstaposti otse torni risti peale jooksis, ja hakkas nüüd, selle sihi peale toedes, torni kõrgust wälja rehkendama. Werstal on 1200 sammu (ja üks samm on $^{35}/_{12} = 2^{11}/_{12}$ jalga), 6 wersta on 7200 sammu. Isa kõrgus maast seni kui silmini oli 5 jalga ja werstaposti kõrgus 8 jalga, $8 - 5 = 3$; sellepärast

$$200 : 3 = 7200 : x$$

$x = \frac{3 \times 7200}{200} = 108$; isa kõrgus silmini oli 5 jalga, seda
5 arwame juure,
113 jalga oli torni kõrgus.

Niisugune rehkendamine on siis wõimalik, kui see lagendik, kelle peal ühte kõrgust, seda wiisi wälja rehkendada tahetakse, nõnda kui weepind kaalus seisab; muidu oleks mõetmise abiriistu waja.

36) Hommiku kella 8$^{\text{sama}}$ ajal oli ühe puu wari 190 jalga pikk ja ühe 6 jala kõrguse posti wari 14 jalga; kui kõrge on see puu?

$$14 : 6 = 180 : x$$

$$x = \frac{6 \times 180}{14} = {}^{1080}/_{14} = 77\,^{1}/_{7} \text{ jalga.}$$

III. Walmista tsirkli ja liniali abiga:

37) üks ruut, kui teada on tema ühendusejoon (Diagonale);

38) ruut, kui teada on ühendusejoone ja külje pikkuse summa;

39) ruut, kui teada on ühendusejoone ja külje ülejäädaw (Differenz);

Tee pikkruut, kui teada on:

40) pikkruudu mõlemad küljed;

41) üks külg ja ühendusejoon;

42) ühendusejoon, ja kahe selle ühendusejoone üle seiswa külgede summa;

43) üks külg, ühendusejoone ja teise külje ülejäädaw (Differenz);

44) üks külg ja see winkel, mis mõlemad ühenduse jooned oma läbijooksmise punkti juures sünnitawad.

Tee wilturuut (Raute), kui teada on:

45) külg ja üks winkel;

46) külg ja üks ühendusejoon (Diagonale);

47) üks ühendusejoon, ja see winkel, mis selle ühendusejoone wastu seisab;

48) mõlemad ühendusejooned;

49) üks külg ja selle külje kõrgus;

50) ühendusejoon ja kõrgus;

51) üks külg ja ühendusejoonte pikkuse summa;

52) külje ja ühe ühendusejoone ülejäädaw (Differenz).

Tee wiltu pikkruut, kui antud on:

53) kaks külge, ja see nende wahel seisaw winkel;

54) mõlemad ühenduse jooned ja üks külg;

55) üks külg, üks winkel ja üks ühendusejoon;

56) üks külg, selle külje kõrgus ja üks ühendusejoon;

57) kaks külge ja kõrgus;

58) mõlemad ühendusejooned ja see winkel, mis nende wahel seisab;

59) mõlemad ühendusejooned ja kõrgus.

Tee Trapets, kui teada on:

60) neli külge;

61) kolm külge ja üks ühendusejoon;

62) kaks ühtlast (parallel) külge ja kaks winkelt, mis selle pikema külje peal seisawad.

Tee nelinurk, kui teada on:

63) kolm külge ja kaks neljanda külje peal seiswat winkelt;

64) kolm winkelt ja kaks nurkkülge;

65) kolm külge ja mõlemad ühendusejooned;

66) Tee üks kreis, mis kolmest antud punktist läbi jookseb;

67) Poolita üks kreisi kaar;

68) Kreisi sees on üks punkt antud, tõmba sellest punktist kõige lühem köitjajoon. — Juhatus: Kõige lühem köitjajoon, mis kreisi sees ühest punktist läbi tõmmata wõib, on see, kelle peal kreisi läbimõõtja ristloodis seisab. (Wata lisa õpetus § 58).

69) Tõmba kreisi sisse kaks niisugust köitjajoont, et need kaks kaart, mis nende köitjajoone winkli külgede wahel seisawad, kokku just pool kreisi piirijoont on. — Juhatus: See sünnib iga kord siis, kui kaks köitjajoont teine teisest ristloodis läbi jooksewad.

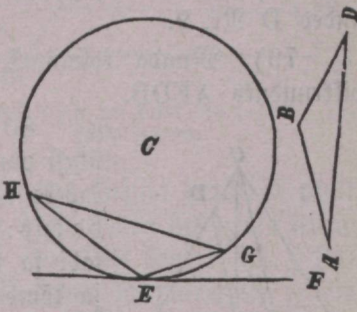
70) Kirjuta kreis ühekorralise 5, 6, 7, 8, 10 .... hulknurga sisse. — Juhatus: Poolita kaks hulknurga külge, ja tõmba nende poolituste punktide peale ristloodid. See punkt, kus need kaks ristloodi teine teisest läbi jooksewad, on selle kreisi keskpunkt (Centrum);

71) Tee kreisi sisse korraline 8nurk, 16nurk, 32nurk;

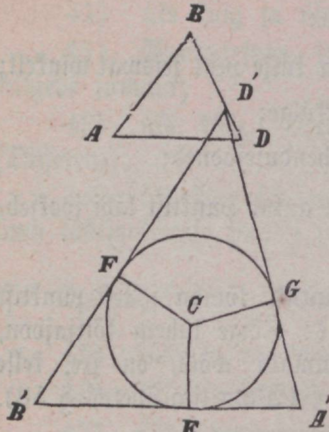
72) Tee kreisi ümber korraline 4nurk, 8nurk, 16nurk;

73) Tee kreisi ümber korraline 3nurk, 6, 12 ja 24nurk;

74) Tee kreisi sisse kolmnurk, kelle kolm winkelt ühe antud kolmnurga winklitega ühesuurused on. — Juhatus: Tõmba kreisi joone peale puutuja EF, ja tee winkel FEG = ∠ A ja ∠ B = ∠ HEG, siis on kolmnurk HEG kolmnurga ABD'ga ühekujuline.

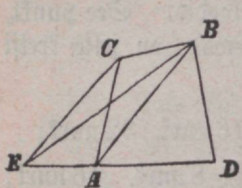


75) Tee kreisi ümber kolmnurk A'B'D', mis antud kolmnurgaga ABD ühekujuline on.



Juhatus: Need kolm winkelt antud kolmnurgas on $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle D$. Tõmba nüüd kreisi keskpunktist C poolmõetja CE ja tee E punkti peale puutuja joon B'A'; arwa $180^0 - \angle B = \angle ECF$ ja $180^0 - \angle A = \angle ECG$. Mikspärast? Kolmnurga winklite summa on 2 täiswinkelt (§ 33) ja kreisi joone keskpunkti winklite summa on (§ 64 järele) 4 täiswinkelt; sellepärast peawad kreisi keskpunkti winklid kaks korda suuremad olema $180 - \angle B = \angle ECF$ j. n. e.

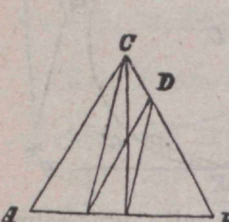
76) Tee kreis antud poolmõetjaga kahe joone AB ja DE wahele, — mis mitte üks teisega ühtlasi (parallel) ei jookse, — nõnda, et tema nende mõlemate joontega ühes punktis kokku puutub. — Juhatus: Tõmba joone AB ja DE wahele, antud kreisi poolmõetja laiusega, kaks ühtlast (parallel) joont, siis on nende läbijooksmise punkt selle kreisi keskpunkt.



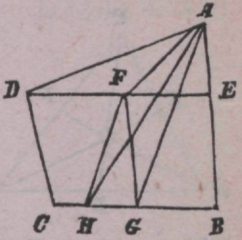
77) Tee nelinurk ADBC oma wälja suurusega kolmnurgaks. — Juhatus: Tõmba ühendusejoon AB ja C pealt (paralleljoon) CE, pikenda külg AD seni kui E juure ja tõmba BE, siis on kolmnurk EBD nõnda suur kui nelinurk ADBC.

78) Muuda 5, 7, 8, 9 nurk kolmnurgaks. Waata ülesanded D Nr. 9.

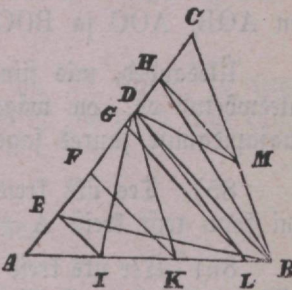
79) Muuda kolmnurk ABD oma wäljasuurusega wiltupikkruuduks AEDB.



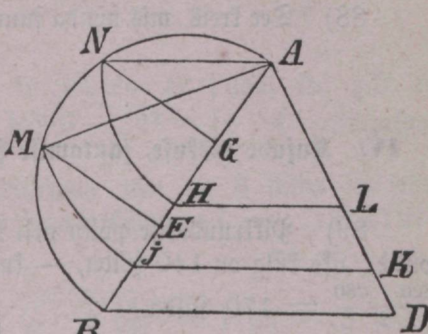
80) Kolmnurga ABC wäljasuurust ühest punktist D, mis tema külje peal seisab, kaheks ühesuuruseks jauks jagada. — Juhatus: Poolita põhjuskülg AB punkti E läbi ja ühenda joone DE[ga] need kaks punkti ja tõmba C pealt CF || DE; tõmba weel DF, siis on kolmnurk ABC selle läbi kahe ühesuurusesse jausse FDB ja AFDC jautud.



81) Jauta nelinurga wäljasuurus ABCD üheſt nurgaſt õige joone läbi kahe üheſuuruſesſe jausſe. — Juhatus: Poolita DE punkti F juures ja BC punkti G juures, tõmba AG ja AF, nõndaſama F punkti pealt FH || AG ja ühenda AH, ſiis on nelinurk ABCD kaheks üheſuuruſeks jauks jagatud DAHC ja △ HAB.

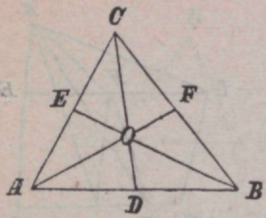


82) Jauta kolmnurga ABC wäljasuurus punkti D pealt, mis tema ühe külje peal ſeiſab, wiie üheſuuruſesſe jausſe. Juhatus: Jauta kolmnurga külg AC wiide üheſuuruſesſe jausſe ja ühenda punkt D ja B õige joone läbi, tõmba BD'ga ühtlaſi (parallel) HM || GL || FK || EJ. Ühenda wiimati DM, DL, DK, DJ, ſiis on △ ADJ = JDK = KDL = LDM = MDC = $^1/_5$ ABC.



Nõndawiiſi wõib iga kolmnurk 4, 5, 6 j. n. e. jakku jagada.

83) Jauta kolmnurga ABD wäljasuurus nõnda kolme üheſuuruſeks jauks, et need jautegijad jooned ühe kolmnurga küljega ühtlaſi (parallel) jookſewad. — Juhatus: Jauta külg AB kome üheſuuruſesſe jausſe, AG = GE = EB; kirjuta AB üle poolkreiſi kaar BMNA; tee kahe jau punkti G ja E üle riſtloodid GN ja EM. Pane üks tſirkli haru A juures kolmnurga nuki punkti peale ja teiſe haruga kirjuta punkti N pealt kaar NH, nõndaſama M pealt kaar MJ, tõmba ſiis nende leitud punktide H ja J pealt BD'ga ühtlaſi (parallel) jooned HL || BD ja JK || BD, ſiis on kolmnurk ABD kolme üheſuuruſesſe jausſe jagatud. Mikspäraſt? Sellepäraſt et △ AHL : △ AJK : ABD = $AH^2 : AJ^2 : AB^2$. Waata § 86.



84) Kolmnurga ACB wälja peal üht niisugust punkti leida, kui selle pealt iga kolmnurga wahenduse ehk nuki peale õige joon tõmmatud saab, siis on tema wäli kollme ühesuurusesse jakku jagatud. — Juhatus: Poolita kolmnurga külg AB punkti D, AC punkti E ja BC punkti F läbi; tõmba AF, BE ja CD, siis on nende kolme joone lõigupunkt see otsitaw punkt O, ja need kolm ühesuurused wälja jaud on AOB, AOC ja BOC.

Ülesanded, mis siin kujude jautamiseks ja ümbermuutmiseks üleswõetud on, on wäga kasulikud iga põllumehele, kellel oma majapidamise juures sagedaste niisugused jagamised ette tulewad.

85) Tee üks kreis A, mis oma wäljaga nõnda suur on, kui kolm teist kreisi A + B + C kokku.

86) Tee üks kreis A, mis oma piiriga (kreisjoouega) nõnda pikk on, kui kolm kreisi joont B + D + E kokku.

87) Tee üks kolmnurk, mis nõnda suur on kui kreis;

88) Tee kreis, mis nõnda suur on, kui kaks kolmnurka kokku.

IV. Kujude pikkuse, jautamise ja wäljasuuruse arwamine.

89) Pikkruudulise põllu neli külge on ümberringi 620 sülda pikad; üks külg on 140 sülda, — kui pikk on teine külg? Wastus: $\frac{620 - 280}{2} = 170$ sülda.

90) Pikkruudulise heinamaa üks külg on 90 sülda, teine 70 sülda; kui pikk on tema piir ümberringi? Wastus: 320 sülda.

91) Ühtlase kolmnurga kolme külje pikkus on 270 sülda, kui pikk on tema üks külg? Wastus: 90 sülda.

92) Ühtlase kolmnurga kahe külje pikkus on 240 sülda, kui suur on tema kolme külje pikkuse summa? Wastus: 360 sülda.

93) Ühtlase kolmnurga kolme külje pikkuse summa on 120 sülda, kui kõrge on see kolmnurk?

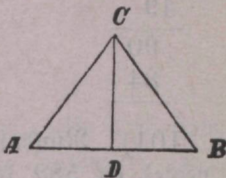
Wastus: $^{120}/_3 = 40$; $\sqrt{40^2 - {}^1/_4 40^2} = \sqrt{1600 - 400}$

$\sqrt{1200} = 34{,}6 \ldots$ sülda

9
30
24
60
16
440
408

94) Külise kolmnurga üks külg on 24 sülda, ja tema kolme külje pikkus kokku 80 sülda; kui pikk on siis tema teine külg?
Wastus: $\frac{80-24}{2} = 28$ sülda.

95) Külise kolmnurga ACB kõrgus DC on 8 jalga ja tema põhjusküla AC 12 jalga; kui pikk on tema külg AC = BC?
Wastus: $8^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$; $\sqrt{64 + 36} = \sqrt{1{,}00} = 10$ jalga.



96) Külise kolmnurga kõrgus on 12 jalga; kui pikk on tema põhjusküla? Wastus: $\sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \,.\, 2 = 32$ jalga;

97) Wilturuudu ühendusejoon mn on 8 sülda ja teine rs = 6 sülda, kui pikk on tema külg rn? — Juhatus: Waata lisa § 52.

$\left(\frac{mn}{2}\right)^2 + \left(\frac{rs}{2}\right)^2 = (rn)^2$; $\sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{25} = 5$ sülda.

98) Wilturuudu külg mr on 10 küünart, tema ühendusejoon rs = 8 küünart; kui pikk on tema teine ühendusejoon mn?
Wastus: $10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2$, $\sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ küünart pool pikkust; täis pikkus $9 \times 2 = 16$ küünart.

99) Pikkruudu ühendusejoon ab on 15 ja üks külg ad = 6 sülda pikk; kui pikk on külg db?

Waata kuju § 52ˢᵗ lisa õpetuses.

$15^2 - 6^2;\quad \sqrt{225 - 36} = \sqrt{1{,}89} = 13{,}7$ sülda.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 8 \\ 6 \\ \hline 29 \\ 9 \\ \hline 200 \\ 182 \\ \hline \end{array}$$

100) Pikkruudukujulise õunapuu aija üks külg on 30, teine 70 sülda pikk, kui palju sülda on ühest aija nurgast teiise (pikkuti üle aija)? — Wastus: $30^2 + 70^2$, $\sqrt{39^2 + 70^2} = \sqrt{5800} = 76{,}15$ . . sülda.

$$\begin{array}{r} 49 \\ \hline 90 \\ 84 \\ \hline \end{array}$$

101) Ruudulise põllu ABDG ühest nurgast teiise (A pealt D peale) on 582 küünart, — kui pikk on selle põllu külg AB? Waata kuju § 49, 1; $\frac{582}{\sqrt{2}} = 1{,}414 \mid 582000 = 411{,}5$ küünart;

Neljakandilise (ehk ruudulise) ABDE laua külg AB on 30 tolli; kui palju tolli on ühe laua nurgast teiise, A juurest D juure? Wastus: $2\,AB^2 = AD^2 = 2 \times 30^2$;

$$AD = \sqrt{1800} = 42{,}4 \text{ tolli.}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 40 \\ 4 \\ \dots \\ \dots \end{array}$$

102) Kreisi läbimõetja on 9 tolli; mitu tolli on kreisi joon pikk? Wastus: $9 \times 3{,}14 = 28{,}26$ tolli.

103) Kreisi joon on 40 tolli; kui pikk on selle kreisi läbimõetja? Wastus: $3{,}14 \mid 40{,}00 = 12{,}7$ . . . tolli.

104) Rattawits on 9,15 jalga, ehk 109,9 tolli; mitu tolli on selle ratta läbimõetja? Wastus: $\frac{109,9}{3,14} = 35$ tolli.

105) Kreisi poolmõetja on 4 jalga; mitu jalga on selle kreisi joon pikk? Wastus: $4 \times 6,28 = 25,12$ jalga.

106) Kreisi poolmõetja on 10 tolli; selle kreisi sisse tahetakse ruutu teha; kui pikk tuleb ruudu külg? Wastus: $2 \,.\, 10^2$, $\sqrt{200} = 14,1\ldots$ tolli.

$$\frac{1}{10}$$

$$\frac{8}{20}$$

16

107) Kreisi poolmõetja on jälle 10 tolli pikk; selle kreisi ümber tahetakse ruutu teha; kui pikk tuleb ruudu külg? Waata § 96 ülesanne.

Wastus: $\frac{10 \times 14,1}{\sqrt{(10)^2 - \frac{(14,1)^2}{4}}} = 20$ tolli.

108) Kreisi poolmõetja on 12 tolli pikk, selle kreisi sisse- ja wäljapoole tahetakse ühtlasi (gleichseitig) kolmnurki teha; kui pikk tuleb sisemise ja kui pikk wälimise kolmnurga külg? Wastus:

$12^2 - 6^2$, $\sqrt{108} = 10,39 \,.\, 2 = 20,78$ tolli sisemine külg,

$2 \,.\, 12 \,.\, \sqrt{3} = 24 \times 1,732 = 41,568$ tolli wälimine külg.

109) Kreisi sisse kirjutud korralise wiienurga külg on 11,7 ja kreisi poolmõetja 10 tolli pikk; selle kreisi ümber tahetakse korralist wiisnurka kirjutada; kui pikk peab see külg olema? Wastus: $2r \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = 1,4530 \times 10 = 14,53$ tolli.

110) Kui kreisi sisse korraline kuusnurk kirjutud saab, siis on selle kuuenurga külg just nõnda pikk, kui kreisi poolmõetja. Tahame meie nüüd ühe kreisi ümber korralist kuusnurka teha ja kreisi poolmõetja on 8 tolli pikk; kui pikk tuleb siis see külg teha? Wastus: $\frac{2r}{3} \,.\, \sqrt{3} = 1,1547 \times 8 = 9,2376$ tolli.

111) Kreisi läbimõetja on 20 tolli; kui pikk on selle kreisi kaar, mis 40^0 mõedab? Wastus: $20 \,.\, 3,14 : x = 360^0 : 40^0$, $x = {}^{2512}/_{360} = 6,98$ tolli.

112) Kreisi läbimõetja on 20 tolli, selle kreisi kaar 10 tolli pikk, mitu kraadi on sel kaarel? Wastus: $20 \times 3{,}14 : 10 = 360^0 : x^0$; $x = 57^0\ 19'\ 29'',4$.

113) Ümmarguse tõrre põhi tehakse 32 tolli lai; mitu külje lauda on tema walmistamiseks waja, kui iga laud 4 tolli lai on? Wastus: $\frac{3{,}14 \times 32}{4} = 25{,}2\ldots$ lauda.

114) Ruudulise laua külg on 4 jalga ja 3 tolli; kui palju □jalga ja tolli on sel laual? Wastus: 18 □jalga ja 9 □tolli.

115) Tua põrand on 5 sülda 2 jalga pikk ja 3 sülda 1 jalg lai, kui palju □sülda ja □jalga on sel põrandal? Wastus: 16 □sülda ja 30 □jalga.

116) Pikkruudukujuline õunapuu aid on 80 küünart pikk ja 75 küünart lai; kui suur on see aid? Wastus: 6000 □küünart ehk $^2/_3$ wakamaad.

117) Ruudulise põllu külg on 320 küünart; mitu wakka ja kappa maad on see põld suur? Wastus: 10 wakka ja 6 kappa.

118) Pikkruudukujuline heinamaa üks külg on 245, teine 410 küünart; mitu wakamaad on see heinamaa suur? Wastus: 10 wakka ja $1^1/_8$ kappa.

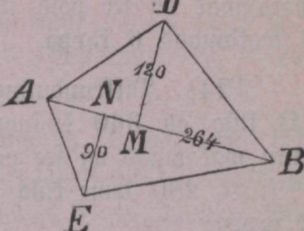
119) Mõisa wäli on $2^1/_2$ wersta pikk ja $1^1/_4$ wersta lai pikkruudukujuline; mitu wakamaad on see wäli suur? Wastus: 957 wakamaad.

120) Üks ümmargune kreisinäuline soo, on 10 wersta lai; mitu ruutwersta ja wakamaad on see soo suur? Wastus: $78^1/_2$ □wersta ehk $24180^3/_4$ wakamaad.

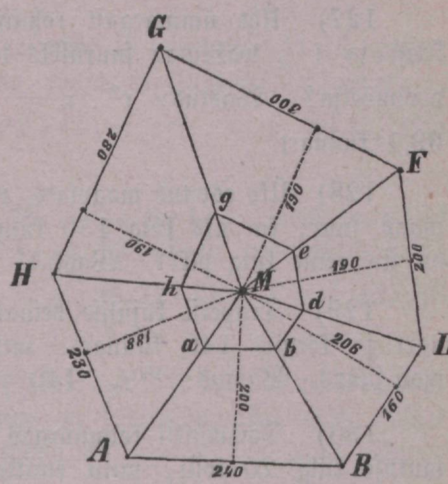
Tähendus.

Ruutjalal on $12 \times 12 = 144$ □tolli,
ruutsüllal on $7 \times 7 = 49$ □jalga, ehk $6 \times 6 = 36$ □jalga,
ruutküünral on $2 \times 2 = 4$ □jalga ehk 576 □tolli.
Wakamaal on 10000 □küünart ehk 25 kappa,
kapal on 400 □küünart.
Tündremaal on 35 kappa ehk 14000 □küünart.
Ruutwerstal on $306^1/_4$ wakamaad,
ruutpenikoormal on 49 □wersta.

121) Tähendus: On meil üks nelinurgaline põld ehk heinamaa, kelle küljed mitte ühepikkused ei ole, siis tõmbame meie sihi A pealt B peale (siin 264 küünart), jautame selleläbi nelinurga ADBE kaheks kolmnurgaks ADB ja AEB, ja mõedame mõlemi kolmnurga kõrgused MD = 120 ja EN = 90 küünart. Arwame nüüd kahe kolmnurga suurus kokku, siis on meil kolmnurga suurus teada: $\frac{(120+90)\,264}{2} = \frac{210 \times 264}{2} = 210 \times 132 =$ 27720 □ küünart ehk 2 wakamaad ja $19^3/_{10}$ kappa.



122) Sagedaste tuleb ette, et põld, mets- ehk heinamaa hulknurgaline on. Maamõetja mõedab niisugust maasuurust nõnda: Tema wõtab omale kesk põldu, ehk kuida see sündlik on, ühe kindla punkti, kus ta kõik nurgad wõib selgeste ära näha; mõedab siis sest kindlast punktist iga nurga peale, teeb lühendud mõedu järele oma laua peale sest maa suurusest ABDEGH wäiksema kuju ehk kaarti abdegh. See kaart on siis Geometria õpetuse järele ühekujuline selle põlluga. (Waata § 85, 86 ja 87 on maamõetmise õpetused.) Selle sisemise kuju küljed on siin kolmkorda lühemad ja oma wäljasuurusega on kuju abdegh 3 × 3 = 9 korda weiksem, kui ABDEGH. Tahame meie selle kuju wäljasuurust teada saada, siis peame iga kolmnurga suurust üksikult rehkendama ja wiimaks need üksikud suurused kokku arwama:



$$\frac{200 \times 240 + 206 \times 160 + 190 \times 200 + 190 \times 300 + 190 \times 280 + 188 \times 220}{2}$$

$= 200 \times 120 + 206 \times 80 + 190 \times 100 + 190 \times 150 + 190 \times 140 + 188 \times 110 = 13{,}5260$, see on 13 wakka ja $13^1/_7$ kappa.

123) Ruuduline põld on ümberringi 720 küünart; mitu wakamaad on see põld suur? Wastus: $^{720}/_4 = (180)^2 =$ 3 wakamaad 6 kappa.

124) Pikkruuduline põld on ümberringi 1280 küünart, üks külg on 360 küünart; mitu on tema teine külg pikk, ja mitu wakamaad on see põld suur? Wastus: $1280 - 720 = {}^{560}/_2 = 280$ teine külg ja $280 \times 360 = 10$ wakamaad ja 2 kappa.

125) Üks jõuakas mees ostis majaehitamise ja lustaija tarwis 6 wakamaad põldu ja soowis, et see maaplats temale täielt nelinurgaliseks ruuduks mõedetud saaks; kui pikk tuleb siis selle ruudu külg? Wastus: $\sqrt{60000} = 244{,}9$ küünart.

126) Kui pikk tuleb 8 wakamaa ruutkülg? Wastus: $\sqrt{8{,}00{,}00} = 282{,}8$ küünart.

127) Üht ümmargust rohilist maaplatsi tahetakse täitsa kreisi ja $1^1/_2$ wakamaa suuruseks teha; kui pikk on selle kreisi poolmõetja? Wastus: $r^2 . \pi = 15000$, $r = \sqrt{\frac{150\,00}{3{,}14}} =$ 69,1 küünart.

128) Üks ostetud maaplats, pikkruudu kujuline ja 4 wakamaad suur; kui üks külg 150 küünart pikk on, mitu küünart on siis teine külg pikk? Wastus: $266^2/_3$ küünart.

129) Trapetsi kujulise heinamaa kaks külge on 460 küünart ja kõrgus 140 küünart; mitu wakamaad on see heinamaa suur? Wastus: $^{460}/_2 . 140 = 3$ wakamaad ja $5^1/_2$ kappa.

130) Täiswinkli kolmnurgas on üks ristloodi külg 12 tolli, lautuse külg 20 tolli; mitu ruuttolli on sell kolmnurgal? — Wastus: $\frac{12 \times \sqrt{20^2 - 12^2}}{2} = \frac{12 \times \sqrt{400 - 144}}{2} = \frac{12 \times 16}{2} =$ 96 □ tolli.

131) Täiswinkli kolmnurgas on lautusekülg 22 tolli ja ristloodi küljed mõlemad ühepikkused; mitu ruuttolli on selle kolmnurga wäli suur? Wastus: $2x^2 = 22^2$

$x^2 = \frac{22^2}{2}$, $x = \sqrt{2{,}42} = 15{,}55..;$ $\frac{15{,}55 . 15{,}55}{2} = 120{,}9$ □ tolli.

132) Ühesuguse kolmnurga kolm külge on 48 tolli; mitu ruuttolli on selle kolmnurga wäli suur? Wastus: $^{48}/_{3} = 16$; $^{1}/_{4} \times 16^2 \sqrt{3} = 110{,}8$ □tolli.

133) Külise kolmnurga põhjuskülg on 10 tolli, teine külg 8 tolli; mitu ruuttolli on selle kolmnurga wäli suur? Wastus: $\sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39} = 6{,}24$ ja $6{,}24 \times 5 = 31{,}2$ □tolli.

134) Külise kolmnurga põhjusjoon on 12 tolli ja tema kolme külje summa 44 tolli; kui suur on selle kolmnurga wäli? Wastus: $\frac{44 - 12}{2} = 16$; $\sqrt{16^2 - 6^2} = 14{,}836$; $14{,}836 \,.\, 6 = 89, \ldots$ □tolli.

135) Kolmnurga kõrgus on 8 tolli ja tema wäli 42 □tolli; kui pikk on selle kolmnurga põhjusküla? Wastus: $^{42}/_{8} = 5^{1}/_{4}$; $5^{1}/_{4} \times 2 = 10^{1}/_{2}$ tolli.

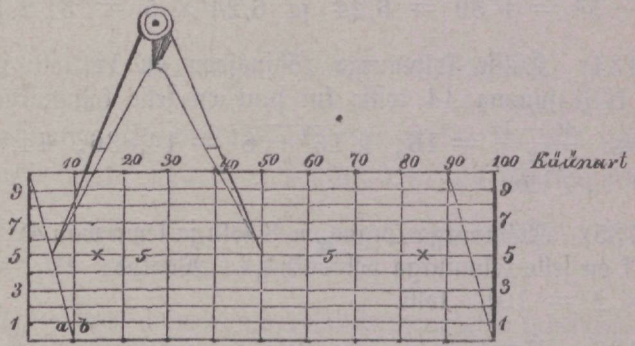
136) Ümmarguse tõrre põhi on ümberringi 16 jalga; mitu jalga ja tolli om tema põhja ruutsuurus? Wastus: $2 r \pi = 16$; $r = \frac{16{,}00}{6{,}28} = 2{,}54\ldots$; $r^2 \,.\, \pi = 20$ □jalga ja 37 □tolli.

137) Kreisi wäli on 2 □jalga ja 112 □tolli suur (ehk kokku 400 □tolli); mitu tolli on selle kreisi poolmõetja pikk? Wastus: $r^2\pi = 400$; $r^2 = \frac{400}{3{,}14} = 127{,}38$; $r = \sqrt{127{,}38} = 11{,}28$ tolli.

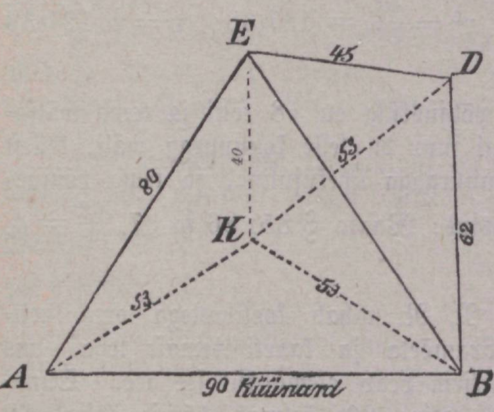
138) Kolmnurga põhjusküla on 18 tolli ja tema wäljasuurus on 90 □tolli; kui suur on selle kolmnurga wäli, kellest teada, et ta esimise kolmnurgaga ühekujuline, ja tema põhjusküla 9 tolli pikk on? Wastus: Waata § 85, 86 ja 87, $\frac{18^2}{9^2} = 4$, $^{90}/_{4} = 22^{1}/_{2}$ □tolli.

139) Koolmeister N. N. tahab koolilastega oma nelinurgalist õunapuuaeda äramõeta ja kaarti temast teha, mis just üks million kord wäiksem peab olema kui see aed. Õunapuu aija üks küla on 90, teine 80, kolmas 45 ja neljas 62 küünart pikk. Enne kui koolmeister mõetma hakkab, seletab tema lastele ära, kuidawiisi igakord, kui ühe maa suurust äramõeta ja kaarti selle üle teha tahetakse, see lühendud mõet, kelle järele

kaart tehtud saab, enne mõetmist jo walmis peab olema. Niisugune lühendud mõet, on siis sest mõedust, kellega põldu ehk aeda mõedetakse $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$, ehk $^1/_{10000}$ jagu. Tahame meie siin sellest aijast million korda weiksema kaardi teha, siis peab see küünra mõet, kellega meie mõedame, 1000$^{\text{deks}}$ jauks jagatud saama, sellepärast et 1000 korda 1000 million on.



Koolmeister jautas siis küünrapuu kümnesse ühesuurusesse jausse; wõttis siis ühe kümnendiku jau, mis nii pikk oli, kui siin kõrwas lühendud mõet seda näitab; jagas selle laiuse ja pikkuse jälle kümnesse jausse, tõmbas nüüd ühe joone ülewelt mõedu nurga pealt kümnendiku jau joone peale, siis oli see wahe, mis siin ab wahel seisab, $^1/_{1000}$ jagu küünra pikkusest, ehk kaardi peal lühendud mõedu järele üks küünar aija pikkusest. Nüüd läks koolmeister aeda, panni oma seihkendamise laua punkti K peale, keda tema nõnda otsinud oli, et need kolm aijanurka A, B ja D punktist K ühe kaugusel 53 küünart eemal seisiwad; pistis ühe peenikese nõela kesk laua peale otse paberi sisse ja sihkis selle nõela pealt otse aija nurga A peale ja jõmbas joone KA; nõnasama sihkis tema ka aija nurga B peale ta tõmbas joone KB. Wõttis siis tsirkliga mõedu pealt 53 küünart



wälja ja mõetis nõela pealt tsirkliga A juure 53 ja B juure 53 küünart, tõmbas siis AB. Nüüd sihkis tema nõela pealt aija nurga D ja E peale, tõmbas KD ja KE, tegi tsirkliga nõela pealt 53 küünra pikkusega punkti D, ühendas B ja D; wiimati laskis tema küünrapuuga K juurest E juure mõeta, leidis 40 küünart, wõttis tsirkliga jälle mõedu pealt 40 küünart wälja ja tegi punkti E, ühendas siis DE ja AE. Nüüd oli kaart ABDE walmis, mis just million korda weiksem on, kui see aed, kelle kaart tema oli. Peale seda tõmbas koolmeister E pealt joone B peale ja arwas mõlema kolmnurga BDE ja BAE wälja suuruse kokku, leidis siis, et õunapuu aed 4399 □ küünart oli; see on natukene weiksem kui pool wakamaad.

140) Ühe mõisa omanikul on mõisamaa piirid wiienurgalised; üks külg on 5000, teine 2000, kolmas 3100, neljas 1400 ja wiies 2500 küünart; tema tahab nüüd mõisa õue rohilist platsi ka wiienurgaliseks teha, ja see plats peab ümberringi 700 küünart pikk olema. Kui pikk peab siis õue iga üksik külg tehtud saama, et tema mõisa wälise piiridega just ühe kujuline oleks? Wastus: Seda õpetab § 87.

$$5000 + 2000 + 3100 + 1400 + 2500 = 14000$$

$14000 : 700 = 5000 : x'$	1. õue külg	x'	$= 250$	küünart
$5000 : 250 = 2000 : x''$	2. „	x''	$= 100$	„
$2000 : 100 = 3100 : x'''$	3. „	x'''	$= 155$	„
$3100 : 155 = 1400 : x''''$	4. „	x''''	$= 70$	„
$1400 : 70 = 2500 : x'''''$	5. „	x'''''	$= 125$	„
			700	küünart.

141) Kreisi wäljalõigu kaar on 100⁰ (kraadi), ja kreisi poolmõetja pikkus 8 tolli; mitu ruuttolli on selle kreisi wäljalõigul?

Wastas: $\left.\begin{array}{l} r^2\pi : x = 360^0 : 100^0 \\ 8^2 \,.\, 3{,}14 : x = 360^0 : 100^0 \end{array}\right\}$ 55,8 □ tolli.

142) Ühe kolmnurga küljed on (waata ülesandes E nr. 75 kuju), AD′ = 17, B′D′ = 18 ja B′A = 14½ tolli. Kui pikk tuleb selle kreisi poolmõetja teha, mis kolmnurga A′B′D′ sisse nõnda kirjutud saab, et tema iga kolmnurga külge ühes

punktis puutub? — Juhatus: Tähendab = r selle otsitawa kreisi poolmõetjat, siis on:

$$\frac{17 \cdot r}{2} + \frac{18 \cdot r}{2} + \frac{14^1/_4 \cdot r}{2} = \text{kolmnurga ABD wäljasuurus}$$

$$r = \frac{225}{17 + 18 + 14^1/_2} = 4{,}54 \text{ tolli.}$$

143) Kolmnurga kolm üksikut küljepikkused on teada: 6, 7 ja 8 tolli; selle kolmnurga ümber tahetakse kreis nõnda kirjutada, et tema iga kolmnurga nuki punktist läbi jookseb; kui pikk tuleb selle kreisi poolmõetja teha? Wastus: (Waata ülesanded A. nr. 14) $R = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{81{,}6} = 4{,}1$ tolli.

144) Raudtee-tõlla tagumine ratas on 4 jalga kõrge, ja eespoolne ratas 3 jalga 6 tolli. See tõld jookseb 30 wersta tunnis edasi; mitu korda on esimine, ja mitu korda tagumine ratas selle tunni sees ümberjooksnud? (Werst on 3500 jalga pikk). Wastus: eespoolne ratas 9554, tagumine 8359.

145) Weskikiwi läbimõetja on kolm jalga ja 3 tolli, tema jookseb 4 sekundi sees 3 korda ümber, ja jahwatab tunnis 5 wakka rukkid; kui pikk oleks see tee, mis see kiwi oma ümberjooksmise läbi (kui meie teda sirgeks arwame) ühe waka rukki jahwatamise tarwis on edasi käinud? Wastus: 5510,7 jalga.

146) Üks tua sein on 42 jalga pikk ja 12 jalga kõrge, seda seina tahetakse paberiga ülekatta; mitu lehte paberit on waja, kui üks leht 16 tolli pikk ja 14 tolli lai on? Wastus: 324 lehte.

147) Katus mõlema küljega kokku on 96 jalga pikk ja 22 jalga kõrge; kui teda laudadega katta tahetakse, ja iga laud 7 tolli lai on; mittu lauda on siis waja? Wastus: 167 lauda.

148) Katust tahetakse kardplekiga katta, selle katuse pikkus on 50 jalga ja laius 36 jalga; mitu ruutu plekki on waja, kui pleki ruudu külg $2^1/_2$ jalga pikk on? Wastus: 288 ruutu.

140) Kolmnurka ADB, — kelle üks külg DA = 10 tolli pikk, ja tema wälja suurus 44 □tolli on, — tahetakse nõnda poolitada, et see poolitaja joon põhjusküljega (AB[89]) ühtlasi (parallel) jookseb. Mida wiisi leiame meie seda punkti kolmnurga külje DA peal?

Juhatus: Olgu selle kolmnurga küljed, mis pool weiksemad peawad olema Dmn, siis on:

$$\triangle DAB : \triangle Dmn = 10^2 : x^2$$
$$44 : 22 = 100 : x^2$$
$$x^2 = {}^{2200}/_{44} = 50$$
$$x = \sqrt{50} = 7{,}07 = 7^7/_{100}$$ tolli D juurest A poole.

150) Kolmnurga ABD üks külg AB on 12 tolli (waata kuju ülesanded E. nr. 83), seda kolmnurka tahetakse külje AB pealt kahe joonega HL ja JK, mis põhjusküljega BD ühtlasi (parallel) peawad jooksma, kolmeks ühesuuruseks jauks jagada. Mida wiisi leiame meie rehkendamise abiga need punktid H ja J külje AB peal? — Juhatus: Tähendame kolmnurga ABD ruutsuurust siin = 1 läbi, siis on kolmnurga AHL ruutsuurus $^1/_3$, ja kolmnurga AJK ruutsuurus $^2/_3$, sellepärast:

$1 : {}^1/_3 = 12^2 : x_{,}^2$	$1 : {}^2/_3 = 12^2 : x_{,,}^2$
$1 : {}^1/_3 = 144 : x_{,}^2$	$1 : {}^2/_3 = 144 : x_{,,}^2$
$x_{,}^2 = 48;\ x_{,} = \sqrt{48} = 6{,}9$ tolli	$x_{,,}^2 = 96;\ x_{,,} = \sqrt{96} = 9{,}8$ tolli
AH on siis 6,9 tolli pikk.	AJ on siis 9,8 tolli pikk.

Nõndawiisi kuida eesseisaw üleanne kolmnurka kollme ühesugusesse jausse jautama õpetab, wõime meie ka iga kolmnurka nii mitmeks jauks jagada, kui meil seda üks, ehk teine kord waja on. Aga weel! See ülesanne, ja weel palju teisi, mis siin rehkendamise läbi leitud on, on needsamad, mis meie tsirkli ja liniali abiga eespool jo leidnud oleme. Niisugune kahekordne ühe ja sellesama otsitawa suuruse ülesleidmine, annab selget tunnistust, et kõik Geometria õpetused, tõdelikud ja täielikud juhatused on.

151) Kolmnurga DAB sisse on kreis nõnda kirjutud, et tema iga kolmnurga külge ühes punktis puutub (waata ülesanded A. kuju nr. 13); puutumise punktid on F, E ja G. Selle kolmnurga küljed on mõedetud: BD = 30, BA = 24 ja DA = 20 tolli. Midawiisi leiame meie rehkendamise abiga; kui kaugel iga puutuja punkt kolmnurga nukkidest BDA eemal on? Juhatus: Nimetame seda kaugust BF = x, siis on FD = 30 — x ja BG on ka = x; AG on 24 — x = m ja DE = 20 — m. Nüüd on:

$$20 - m = 30 - x \qquad x = BF = 17 \text{ tolli}$$
$$x + m = 24 \qquad DE = 13 \text{ "}$$
$$20 + x = 30 + 24 - x \qquad AG = 7 \text{ "}$$

$$2x = 34 \quad x = {}^{34}/_{2} = 17$$
$$DE = 30 - 17 = 13$$
$$AG = 24 - 17 = 7$$

152) Kolmenurgalisest metsamaa tükist ABD tahab mõisaherra talumaa juure ühe tüki nõnda jagada lasta, et see uus piir kupitsa pealt, mis selle kolmnurga AB külje peal seisab, $^1/_6$ jau sest metsmaast maha lõikab. Kui nüüd kolmnurga küljed mõedetud AB = 200, BD = 300 ja kupitsa juurest kolmnurga nuki B juure 80 küünart on: midawiisi leiame meie seda punkti x, kus see sihk (ehk uus piir) kolmnurga BD külje peale wälja jookseb? — Juhatus: $1 : {}^1/_6 = 200 \,.\, 300 : 80 \,.\, x$

$x = {}^{10000}/_{80} = 125$ küünart peab B juurest D peale mõetma, kus uus piir ehk sihk wälja jookseb.

153) Tõmba Liiwi-Eestimaa kaardi peal õige joon Pernu linna pealt Paide peale, Paide pealt Willandi peale ja Willandi pealt jälle Pernu peale tagasi. Mõeda tsirkliga siis selle kolmnurga kõrgus ja tema põhjusjoon kaardi peal tehtud lühendud mõedu järele, ja rehkenda wälja, mitu ruutpenikoormat on selle kolmnurga suurus. Wastus: 34 □ penikoormat.

154) Tõmba Tartu pealt Wõru peale, Wõru palt Walga peale ja Walga pealt Tartu peale tagasi õiged jooned; mõeda siis tsirkliga selle kolmnurga kõrgus ja põhjusjoon ära ja rehkenda siis wälja, kui palju □ penikoormat on sel kolmnurgal? — Wastus: 31,2 □ penikoormat.

155) Tõmba Tori kiriku pealt Wändra kiriku peale, Wändra kiriku pealt Jaakubi kiriku peale ja sealt jälle Tori kiriku peale tagasi õiged jooned; mõeda siis see kolmnurk ära ja rehkenda wälja mitu ruutpenikoormat on sell kolmnurgal? Wastus: 3 □ penikoormat.

156) Tõmba jälle kaardi peal Karksi kiriku pealt Paistu kiriku peale, Paistu pealt Tarwaste kiriku peale, ja sealt jälle

tagasi Karksi peale; rehkenda siis wälja mitu ruutpenikoormat ja ruutwersta on see kolmnurk suur. Wastus: 2,8 . . . □penikoormad ehk 2 □penikoormat ja 40 □wersta.

Nõndawiisi wõib iga kaardi pealt (selle kaardi lühendud mõedu järele) maa □suurust wälja rehkendada.

V. Kehade ruumisuuruse arwamine.

157) Üks hõbe pakk (Kubus) on 9 tolli kõrge; mitu kubiktolli on tema suur? Wastus: 729 kubiktolli.

158) Waka mõet on 16 tolli pikk, 16 tolli lai ja 16 tolli kõrge (Kubus); mitu kubik jalga ja tolli on sel waka mõedul? Wastus: 2 kubikjalga ja 640 kubiktolli.

159) Üks jahukast on 5 jalga pikk, 4 jalga 2 tolli lai ja 3 jalga 4 tolli kõrge; mitu wakka jahu lähäb sinna sisse? Wastus: $29\frac{1}{2}$ wakka.

160) Wilja salw on 10 jalga pikk, 6 jalga lai ja 5 jalga kõrge; mitu wakka wilja lähäb sinna sisse? Wastus: 126,5 . . w.

161) Üht kartohwli kellert tahetakse kaewada 20 jalga pikk, 14 jalga lai, 6 jalga ja 8 tolli kõrge; mitu kubikjalga maad saab siis wälja kaewetud, ja mitu wakka kartohwlid mahuwad selle keldri sisse? Wastus: $1866\frac{2}{3}$ kubikjalga ja $787\frac{1}{2}$ wakka.

162) Üks wabriku saal (suur töötuba) on 52 jalga pikk 20 jalga lai ja 10 jalga kõrge; mitu inimest wõiwad selles tuas tööd teha, kui terwise pärast 50 kubikjalga õhku iga töötegija pääle arwatakse? Wastus: 208 inimest.

163) Üks weskitamm, mis 120 jalga pikk, 8 jalga lai ja tema keskmine kõrgus arwatakse 9 jalga, — peab raudkiwidest tehtud saama; mitu kubikjalga on selle tammi tarwis siis kiwa waja? Wastus: 8640 kubikjalga.

164) Üht lubjaahju tahetakse 15 jalga pikk ja 10 jalga lai teha; kui sügaw peab tema kaewetud saama, et sinna sisse 1500 kubikjalga lubjakiwa mahub? Wastus: 10 jalga.

165) Ümmarguse tõrre põhi on 5 jalga lai ja tõrre kõrgus $6\frac{1}{2}$ jalga; mitu toopi lähäb selle tõrre sisse, kui meie ühe toobi 78 kubiktolli arwame? Wastus: 900 toopi.

166) Ühe ümmarguse haugu sisse, mis 10 jalga lai on, tahetakse 100 wakka lubja panna; kui sügaw peab see hauk olema, et see lubi sisse mahub? Wastus: $36\,{}^{1}/_{5}$ tolli.

167) Suhkrupea on oma kuju järele teraw-ümmargune sammas; kui tema põhjuswäli 80 □tolli ja kõrgus 27 tolli on; mitu kubiktolli on see suhkrupea suur? Wastus: 720 kubiktolli.

168) Suhkrupea ehk -kübara põhi mõedab ümberringi 30 tolli, tema kõrgus on 24 tolli, mitu kubiktolli on see suhkru-kübar suur? Wastus? 555,2 kubiktolli.

169) Ühe kandilise kiwisamba põhjuswäli on 300 kubik-tolli, tema kõrgus $8\,{}^{1}/_{2}$ jalga; mitu kubikjalga ja tolli on see kiwist sammas suur? Wastus? 5 kubikjalga ja 1560 kubiktolli.

170) Ühe ümmarguse tömpsambakujulise weenõuu põhi on 12 tolli ja ülewelt 8 tolli lai, tema kõrgus on 12 tolli; mitu toopi wett läheb sinna sisse? — Wastus:

$$\frac{h\pi}{3}\,(R^2 + R\,.\,r + r^2) \times {}^{1}/_{78}.$$

$$\frac{12 \times 3{,}14}{3}(6^2 + 6\,.\,4 + 4^2) \times {}^{1}/_{78} = 12{,}56 \times 76 \times {}^{1}/_{78} =$$

$12,{}^{1}/_{5}$ toopi.

171) Üks tammepalk on tüwe otsast 30 tolli ja ladwa otsast 8 tolli lai, tema pikkus on 36 jalga; mitu kubikjalga on sel tammepalgil? Wastus: 78,7 kubikjalga.

172) Männapuu on pool kergem kui wesi. Üks kubik-jalg wett kaalub 70 naela; kui raske on siis üks männa palk, mis tüwe otsast 16, ladwa otsast 12 tolli lai ja 30 jalga pikk on? Wastus: $56\,{}^{1}/_{2}$ leisikut.

173) Ühe (Egiptuse Pyramide) kiwist terawkandilise samba põhjuswäli on 120 □jalga ja tema kõrgus 60 jalga; mitu kubikjalga on see sammas suur, ja mitu leisikut raske, kui meie kiwi 3,5 korda raskem arwame kui wee? — Wastus: 2400 kubikjalga 29400 leisikut.

174) Kuuli poolmõetja on 12 tolli pikk; kui suur on selle kuuli pind? — Wastus: $4r^2\pi = 4\,.\,12^2\,.\,3{,}14 =$ 1808,64 □tolli.

175) Kuuli poolmõetja on 10 tolli pikk, selle kuuli pinda tahetakse kuldlehtedega ületõmmata (ärakullata). Kuldlehe ruut-

suurus on 12 □tolli; mitu lehte kulda on tarwis? Wastus: $104^2/_3$ lehte.

176) Kuuli poolmõetja on 21 tolli; mitu kubikjalga ja tolli on selle kuuli suurus? — Wastus: 22 kubikjalga ja 756,7 kubiktolli.

177) Kui meie Liiwi ja Eesti kubermangu maa, mis kokku 1259 □penikoormat on, ühe kuuli pinnaks arwaksime, kui pikk peaks siis selle kuuli poolmõetja olema? — Juhatus: $4r^2\pi = 1259$; $r^2 = \frac{1259}{4\pi}$, $r = \sqrt{100,24} = 10,011 =$ 70 wersta ja 160 küünart.

178) Mitu □penikoormat on kuupind suur, kui meil teada: et tema poolmõetja $^3/_{11}$ jagu meie maakuuli poolmõetjast on. Maakuuli poolmõetja arwatakse siin 858,48 penikoormat. Wastus: $^3/_{11}$ $(858,58)^2$ $4\pi = 688500$ □penikoormat.

179) Täiskuu on meie silmanähtawal ühe kreisi suurune, kelle läbimõetja 6 tolli pikk on. Kui nüüd kuu poolmõetja 234,13.. penikoormat mõedab (pikk on); mitu korda on siis see kuu oma kauguse pärast meie silmanägemisel weiksem? Wastus: 52646130573 2484 korda.

180) Tuuleweski tiibade ümberajamise tarwis on üht jõudu waja, mis 10 leisiku raskusega ühesugune on. (Mehaniku rehkenduse juures saab jõud raskuse ja suurumise läbi tähendud). Mitu kubikjalga õhku (tuult) peawad siis oma raskusega tuuleweski tiibade peale suruma, et tema jooksma hakkab? Üks kubikjalg õhku arwatakse 2 loodi raske olewat. Wastus: 3200 kubikjalga õhku.

181) Kui palju kubikjalga ruusa saab tee parandamise tarwis Tartu-Walka maantee peale laiale lautud, kui tee pikkus 82 wersta, laius 20 jalga ja ruusa kõrgus 1 toll on? Wastus: 478333 kubikjalga.

182) Ümmarguse hõbesamba (Silindri) poolmõetja on 3 tolli pikk ja samba raskus on 50 leisikut; kui kõrge on see sammas? Teada on meil, et kubikjalg wet 70 naela kaalub ja hõbe 10,4 korda raskem on kui wesi. Wastus: 84 tolli ehk 7 jalga.

Lühikesed tähendused.

1) Ülesanded on siin enamiste kümnendik=murdude peale põhjendud, sellepärast et kõik õpetud Euroopa rahwas oma rehkendusi, olgu nemad rasked ehk kerged, kus iganes murdusid waja, nendega rehkendawad.

2) Iga mitmesuguse küljega kolmnurgas, peab tema külgede, kõrguse ehk wäljasuuruse ülesleidmise tarwis, kolm eesteadust antud saama: üks winkel ja kaks külge; kaks winkelt ja üks külg, ehk kolmnurga wälja ruutsuurus, tema kõrgus ja üks winkel. Iga täiswinkli kolmnurgas on tema külgede ehk wäljasuuruse ülesleidmise tarwis kaks eesteadust waja, sellepärast et täiswinkel ise see kolmas teadus on.

3) Kõik Geometria õpetuse paragrahwid on nõnda, kudas raamatu nimi ütleb, „kerged ja lühikesed"; kõik ülesanded on nõnda seatud, et nemad Geometria õpetuse paragrahwide seest wälja woolawad, ja on ülesannete juures siin ja seal, kus waja, õpetuse paragrahwide peale juhatud ja ka raskemate ülesannete algamist sellepärast näidatud, et iga õppija oma mõtete waral wõiks ka raskematest ülesannetest jagu saada. Mikspärast Geometria õpetused ja ülesanded sedawiisi siin kokku seatud on, selle peale wastab raamatu kirjutaja: et tema oma kehwa teadust täieste äratundes, sellepärast enese tööd siin kahe tubli mehe juhatuse sõnade järele püüdis teha. „Meie ei pea mitte oma mälestust koormama, kui meie mõistusega tööd tahame teha *)" (Renatus Cartesius). „Ülesanded ja nende juhatus on kasulikumad kui pikad õpetused" (Isak Newton).

Wiimaks palub raamatu kirjutaja igaüht, kes mõnes kohas, olgu see Geometria õpetuste ehk ülesannete juures, peaks midagi leidma, mis temal mitte selge ei oleks, Tartusse Schnakenburgi adresi peale raamatu kirjutajale kirjutama ja need paragrahwid ehk ülesande numrid ülesse tähendada, ja temale saab siis täielikum seletus ehk juhatus antud.

*) Inimese mälestus on see rüpe, kus kohta tema kõik oma teadused kokku korjab; mõistus on üks tallitaja käsi, mis kõik need kokku korjatud teadused püüab korrale seadida.

Trüki eksitused.

33	rida 14 ülewelt	peab seisma:	kaar ED $<$ GHK, mitte $<$ DHK.
43	nr. 20.	„ „	kõrwuswinkel EBA, mitte EBD.
53	rida 18 ülewelt	„ „	lautuse külg AB, mitte AO.
69	„ 12 „	„ „	$P : p = AB : ab$ mitte $P : p < AB : ab$.
70	„ 14 „	„ „	$\angle AMB = \angle DME$, mitte $= \angle DMB$.
72	„ 7 alt	„ „	$K = \frac{2k}{\sqrt{4-k^2}}$, mitte $K = \frac{2}{\sqrt{4-k^2}}$
78	„ 15 ülewelt	„ „	terawsambal, mitte terawsammas.
87	„ 7 „	„ „	sulasele, mitte sugulasele.
94	„ 8 „	„ „	$AD = \sqrt{6^2 + 4^2}$, mitte $AB = \sqrt{6^2 + 4^2}$.
95	ülesanne 36	„ „	puuwari 180 jalga, mitte 190 jalga.
101	„ 95	„ „	tema põhjusküg AB, mitte AC.
101	„ 96	„ „	külise kolmnurga üks külg on 20 jalga, ja tema kõrgus 12 jalga.
101	„ 98	„ „	täis pikkus $8 \times 2 = 16$, mitte $9 \times 2 = 16$.
102	„ 100	„ „	$\sqrt{30^2 + 70^2}$, mitte $\sqrt{39^2 + 70^2}$.
113	„ 161	„ „	6 jalga ja 8 tolli sügaw, mitte kõrge.
114	„ 169	„ „	300 ruuttolli, mitte kubiktolli.
116	rida 6 alt	„ „	kirjutada, mitte kirjutama.