Lehrbuch

der

ebenen Trigonometrie

nebst zahlreichen Uebungsaufgaben,

für den Schulgebrauch und den Selbstunterricht bearbeitet

von

Dr. ***Carl Hechel.***

DORPAT,
Druck von Heinrich Laakmann.
1861.

Mündlich: Mathematik

1. Das geometrische Mittel u. seine Verwendung in der Geometrie.
2. Pyramide.
3. Sinussatz u. Tangentensatz.
4. Specifisches u. absolutes Gewicht. Die Gravitation.

Lehrbuch

der

ebenen Trigonometrie

nebst zahlreichen Uebungsaufgaben,

für den Schulgebrauch und den Selbstunterricht bearbeitet

von

Dr. *Carl Hechel.*

DORPAT,
Druck von Heinrich Laakmann.
1861.

Der Druck wird unter der Bedingung gestattet, dass nach Beendigung desselben der Abgetheilten Censur in Dorpat die vorschriftmässige Anzahl Exemplare zugestellt werde.
Dorpat, den 31. Mai 1861..
(Nr. 91.) Abgetheilter Censor de la Croix.

Vorrede.

In scientiis addiscendis magis exempla prosunt quam praecepta.
Newton.

Die von dem Verfasser dieses Lehrbuches oft gemachten Wahrnehmungen, dass im Allgemeinen der Unterricht in der Trigonometrie auf Schulen ein weniger erfolgreicher zu sein pflegt, als in den übrigen Theilen der Elementarmathematik, und dass der Grund hiervon nicht blos in der eigenthümlichen Doppelstellung dieser Wissenschaft auf dem arithmetischen und dem geometrischen Gebiete, sondern zugleich in der Methode anzutreffen sei, welche die meisten Lehrbücher befolgen; haben denselben zu dem Versuche veranlasst, eine in manchen Beziehungen von der sonst üblichen Art und Weise abweichende Darstellung zu geben, wie diese ihm durch Rücksichten auf Wissenschaftlichkeit und didactische Zwecke bedingt zu sein schien. Zur Vereinfachung des Gegenstandes und insbesondere zur Beschränkung des Formelwesens wurden die beiden Functionen *Secante* und *Cosecante* aus den Betrachtungen ausgeschlossen, und die überstumpfen und negativen Winkel, als in den elementaren Theilen der Mathematik entbehrlich, blos in einem Anhange zur

Goniometrie behandelt, indem allenthalben das Nothwendige in den Vordergrund zu stehen kam. Andererseits wurde Vieles aufgenommen, wornach sich der Anfänger in andern Lehrbüchern vergebens umsieht, manche Formel und Regel in einer einfacheren und evidenteren Weise gegeben, wie es dem sachkundigen Leser vornehmlich in dem Abschnitte über den Gebrauch der trigonometrischen Tafeln und an vielen anderen Stellen nicht entgehen wird. Neu hinzugekommen ist auch die unmittelbare Berechnung der Functionen für den Winkel von 12^0 aus dem Radius des dem regelm. 15-eck umgeschriebenen Kreises, welche schon zur Widerlegung des durch viele Lehrbücher verbreiteten Irrthums, dass die Functionen der Winkel von 45^0, 30^0, 18^0 die einzigen seien, welche sich aus geometrischen Sätzen unmittelbar ableiten liessen, hier eines Platzes werth zu sein schien [1]). Dem überwiegend arithmetischen Charakter der Trigonometrie entsprechend wurde, im Gegensatze zur schematisirenden Methode der Geometrie, eine vorzugsweise analytische und ausführlich erklärende Darstellung gewählt, der Stoff aber, welcher an Reichaltigkeit nicht wenige der grösseren Handbücher übertrifft, so geordnet, dass bei einem Lehrcursus, der sich engere Gränzen stellen sollte, ganze Abschnitte unbeschadet des inneren Zusammenhanges aus dem Vortrage ausfallen können.

Bekanntlich besitzt unsere mathematische Literatur noch immer keine goniometrische und trigonometrische Aufgabensammlung, die an Umfang und innerem Werthe sich auch nur im Entferntesten mit dem vergleichen liesse, was in der Algebra und Geometrie in dieser Hinsicht geleistet worden ist; die bisherigen Sammlungen können

---

1) Eine andere sehr einfache Ableitung enthält des Verfassers Aufsatz: Die Berechnung der Functionen für den Winkel von 12° im Correspondenzblatte des Naturforschenden Vereins zu Riga 1860 No. 3.

im Allgemeinen nur da genügen, wo die Anforderung sich auf eine mechanische Anwendung der Zahlengesetze beschränkt. Diesem gewiss von allen Lehrern, welche die geistige Selbstthätigkeit des Schülers im Unterrichte zu würdigen wissen, tiefgefühltem Uebelstande sollte durch eine umfangreichere Zusammenstellung von Beispielen abgeholfen werden, deren Lösung immer eine vollständige, selbstbewusste Auffassung des theoretischen Theils erfordert und daher jede Substitution ohne tieferes geistiges Eindringen in den Sinn der Frage zur Unmöglichkeit macht. Für eine grössere Reihe zusammengesetzer Aufgaben ist die Auflösung vollständig entwickelt worden, um die Anfänger mit den oft schwer aufzufindenden Wegen bekannt zu machen, welche zum verlangten Resultate führen können. Die übrigen Aufgaben, welchen überall die nöthigen Erklärungen vorgesetzt sind, wurden aus der Geometrie, Geodäsie, Physik, Astronomie und andern Wissenschaften entlehnt, um sowol die grosse Bedeutung der Trigonometrie für andere Zweige des menschlichen Wissens, als auch die Zweckmässigkeit eines Vortrages der Mathematik in's rechte Licht zu stellen, welcher nicht blos die formelle Geistesbildung, sondern zugleich die praktische Nutzanwendung der Wissenschaft in's Auge fasst. Diese Aufgaben erheben sich stufenmässig zu immer schwereren Problemen, so dass die Lösung mancher derselben selbst Denen, welche bereits eine grössere Gewandtheit in der Behandlung mathematischer Fragen besitzen, zur weitern Uebung wird dienen können. Ihre Resultate sind mit ausschliesslicher Benutzung der vorzüglichen Bremiker'schen Tafeln möglichst genau und scharf berechnet und in einem besondern Hefte herausgegeben.

Indem endlich der Verfasser Uebersichtlichkeit des Stoffes und allenthalben jene Evidenz und Einfachheit zu erstreben gesucht hat, durch welche die Trigonometrie sich als ein Gebiet darstellt, welches der Anfänger blos durch eine geschickte Verbindung seiner ihm bereits zu Gebote stehenden arithmetischen und geometrischen Kenntnisse sich aneignen kann, glaubt er hoffen zu dürfen, dass seine Arbeit bei Allen Billigung finden werde, welche, gegenüber den gesteigerten Anforderungen der Gegenwart auf Gründlichkeit und Umfang des Wissens schon innerhalb der Schule, die dringende Nothwendigkeit einer leichtern Befriedung dieser Forderung erkennen.

Dorpat, Juni 1861.

Inhalt.

welches der Anfänger blos durch eine geschickte Verbindung seiner ihm bereits zu Gebote stehenden arithmetischen und geometrischen Kenntnisse sich aneignen kann, glaubt er hoffen zu dürfen, dass seine Arbeit bei Allen Billigung finden werde, welche, gegenüber den gesteigerten Anforderungen der Gegenwart auf Gründlichkeit und Umfang des Wissens schon innerhalb der Schule, die dringende Nothwendigkeit einer leichtern Befriedigung dieser Forderung erkennen.

Einleitung.

§ 1. Die Geometrie lehrt bekanntlich, dass ein ebenes Dreieck vollkommen bestimmt ist, wenn von seinen sechs Stücken, nämlich den drei Seiten und den drei Winkeln, entweder zwei Seiten und der zwischenliegende Winkel, oder eine Seite und zwei Winkel, oder alle drei Seiten, oder endlich zwei Seiten und der der grössern Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind. Die Angabe der Bestimmungsstücke eines Dreiecks geschieht in der Geometrie immer dadurch, dass die Seiten und die Winkel selbst in einer Zeichnung, also unmittelbar als Raumgrössen vorgelegt werden, worauf das verlangte Dreieck construirt, und somit jedes der gesuchten Stücke wiederum als eine Raumgrösse in einer Zeichnung erhalten wird.

Ausser diesem construirenden oder graphischen Verfahren zur Bestimmung der gesuchten Stücke eines Dreiecks aus gegebenen Stücken giebt es noch eine andere Methode, welche auf dem Wege der Rechnung dieselben und andere damit in Verbindung stehenden Aufgaben löset. Man giebt nämlich die Grössen der als bekannt vorausgesetzten geraden Linien nicht durch eine Zeichnung, sondern durch ihre Masszahlen an, indem man jene Linien auf eine bestimmte Längeneinheit bezieht, und drückt die Grösse der Winkel in Graden, Minuten und Sekunden aus, worauf man aus den Masszahlen der gegebenen Stücke die gesuchten Stücke berechnet, d. h. die Grösse dieser letzteren ebenfalls durch ihre Masszahlen zu bestimmen sucht. Die Wissenschaft, welche aus den in ihren Masszahlen gegebenen Bestimmungsstücken eines ebenen Dreiecks die übrigen Stücke desselben durch Rechnung finden lehrt, heisst die ebene Trigonometrie (Dreiecksmessung).

Obschon aber zunächst nur die Berechnung der Dreiecke die Aufgabe der Trigonometrie bildet, so finden diese doch eine ausgedehntere Anwendung, wie auf viele anderweitige Gegenstände der Mathematik überhaupt, so insbesondere auf die Berechnung von Polygonen, welche immer durch Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegt und alsdann denselben Untersuchungen wie die Dreiecke unterzogen werden können. In dieser letztern Anwendung führt die Trigonometrie auch den Namen Polygonometrie.

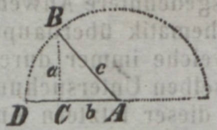
Vergleicht man die Trigonometrie mit der Geometrie hinsichtlich der in einer jeden von ihnen auf eine besondere Weise erhaltenen Resultate, so sieht man alsbald, dass jede geometrische Construction wegen der Unvollkommenheit unserer Sinne sowol als der angewendeten Instrumente Fehlern unterworfen und daher immer nur einer beschränkten Genauigkeit fähig ist; dass sich dagegen mittels der Rechnung das Gesuchte in allen Fällen mit jedem beliebigen Grade der Schärfe finden lässt, so dass die Anwendung der rechnenden Methode, wenn diese auch im Allgemeinen die

Eleganz und Einfachheit der construirenden nicht zu erreichen vermag, den Vorzug vor der Construction überall verdient, wo es sich hauptsächlich um sehr zuverlässige und scharfe Resultate handelt.

§ 2. Da unter den gegebenen und gesuchten Stücken eines Dreiecks sowol Seiten als Winkel vorkommen, diese aber als verschiedenartige Grössen keine unmittelbare Berechnung der einen aus den andern gestatten, so führt man in die Trigonometrie gewisse Verhältnisse von Linien ein, welche von den Winkeln, zu denen die Linien gehören, abhängen und sich aus ihnen berechnen lassen, also auch umgekehrt die Grösse der Winkel bestimmen. Diese Verhältnisse, welche die Ausmessung der Winkel durch gerade Linien möglich machen und überall in der Rechnung an die Stelle der ersteren treten, führen den Namen der trigonometrischen oder goniometrischen Functionen, und bilden das eigentliche Wesen der gesammten Trigonometrie. Ein eigener Abschnitt, welcher sich mit der Auffindung der trigon. Functionen, mit der Entwickelung ihres gegenseitigen Zusammenhanges und mit der Berechnung ihrer Zahlenwerthe beschäftigt, geht unter dem Namen der Goniometrie als vorbereitender Theil der eigentlichen Trigonometrie voran, unter welcher im engern Sinne blos die Berechnung der Dreiecke verstanden wird.

Erklärung der trigonometrischen Functionen.

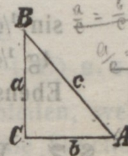
§ 3. Beschreibt man mit einem beliebigen Radius AD einen Halbkreis, und denkt sich, dass der Radius von seiner ursprünglichen, in der Figur angegebenen Lage ausgehend den ganzen Halbkreis durchläuft, so werden an dem Mittelpunkte nach und nach alle Winkel gebildet, welche überhaupt in einem Dreiecke vorkommen können. Wir wollen zuerst die trigon. Functionen eines beliebigen spitzen Winkels BAD = A kennen lernen.



Fället man von B auf AD die Senkrechte BC und bezeichnet die Masszahlen der Seiten des dadurch erzeugten Dreiecks durch a, b, c, so wird das Verhältniss $\frac{a}{c}$ der Sinus des Winkels A genannt, und geschrieben $\sin A = \frac{a}{c}$, das Verhältniss $\frac{b}{c}$ der Cosinus des Winkels A und durch $\cos A = \frac{b}{c}$ bezeichnet; ferner wird das Verhältniss $\frac{\sin A}{\cos A}$ die Tangente, dagegen $\frac{\cos A}{\sin A}$ die Cotangente des Winkels A genannt und geschrieben $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$ und $\operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$. Es ist also $\operatorname{tg} A = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ und $\operatorname{cotg} A = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a}$.

Die Verhältnisse $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ bilden zugleich die trigon. Functionen des Bogens BD. Diese Functionen sind als Quotienten aus den Masszahlen zweier Linien unbenannte Zahlen. In dem besondern Falle, wo der Radius $c = 1$ ist, fällt der Zahlenwerth a der Senkrechten BC mit dem Werthe von sin A zusammen, nämlich $a = \sin A$ und auf gleiche Weise $b = \sin A$.

§ 4. Aus der Erklärung der trigon. Functionen ergiebt sich für das rechtwinklige Dreieck unmittelbar Folgendes:



1) Der Sinus eines spitzen Winkels ist die gegenüberliegende Kathete, dividirt durch die Hypotenuse, nämlich $\sin A = \frac{a}{c}$ und $\sin B = \frac{b}{c}$.

2) Der Cosinus eines spitzen Winkels ist die anliegende Kathete, dividirt durch die Hypotenuse, also $\cos A = \frac{b}{c}$ und $\cos B = \frac{a}{c}$.

3) Die Tangente eines spitzen Winkels ist die gegenüberliegende Kathete, dividirt durch die anliegende, nämlich $\mathrm{tg}\, A = \frac{a}{b}$ und $\mathrm{tg}\, B = \frac{b}{a}$.

4) Die Cotangente eines spitzen Winkels ist die anliegende Kathete, dividirt durch die gegenüberliegende, also $\mathrm{cotg}\, A = \frac{b}{a}$ und $\mathrm{cotg}\, B = \frac{a}{b}$.

§ 5. Da im rechtw. Dreieck jeder der beiden spitzen Winkel A und B das Complement des andern ist, d. h. jeder von ihnen den andern zu 90° ergänzt, so kann man $B = 90^0 - A$ setzen. Nun ist (§ 4)

$\sin A = \frac{a}{c}$ und auch $\cos B = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$ und auch $\sin B = \frac{b}{c}$,

$\mathrm{tg}\, A = \frac{a}{b}$ und auch $\mathrm{cotg}\, B = \frac{a}{b}$, $\mathrm{cotg}\, A = \frac{b}{a}$ und auch $\mathrm{tg}\, B = \frac{b}{a}$,

folglich

$$\sin A = \cos (90^0 - A)$$
$$\cos A = \sin (90^0 - A)$$
$$\mathrm{tg}\, A = \mathrm{cotg}\, (90^0 - A)$$
$$\mathrm{cotg}\, A = \mathrm{tg}\, (90^0 - A).$$

Es ist also der Sinus, der Cosinus, die Tangente, die Cotangente eines spitzen Winkels entsprechend der Cosinus, der Sinus, die Cotangente, die Tangente von dessen Complement.

Hieraus erklären sich die Benennungen Cosinus und Cotangente, d. h. *complementi sinus* und *complementi tangens*. Uebrigens werden Sinus und Tangente die Hauptfunctionen, dagegen Cosinus und Cotangente die Nebenfunctionen oder Cofunctionen genannt. Andererseits bezeichnet man Sinus und Cosinus, und ebenso Tangente und Cotangente als einander sinnverwandte Functionen.

§ 6. Bezeichnen A, B, C die drei Winkel eines beliebigen Dreiecks, so ist bekanntlich immer

$A + B = 180^0 - C$, $A + C = 180^0 - B$, $B + C = 180^0 - A$, folglich auch

$\frac{1}{2}(A + B) = 90^0 - \frac{1}{2}C$, $\frac{1}{2}(A + C) = 90^0 - \frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}(B + C) = 90^0 - \frac{1}{2}A$.

Es ist daher zufolge § 5

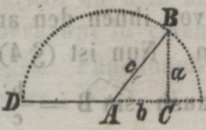
$$\sin \tfrac{1}{2}(A + B) = \cos \tfrac{1}{2}C, \quad \cos \tfrac{1}{2}(A + B) = \sin \tfrac{1}{2}C$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C, \quad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A + B) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C.$$

Ebenso $\sin \frac{1}{2}(A + C) = \cos \frac{1}{2}B$ u. s. w.

§ 7. Wenn der Winkel $A < 45^0$, so sind die Winkel $45^0 + A$ und $45^0 - A$ Complemente, mithin ist (§ 5)

$$\sin(45^0 + A) = \cos(45^0 - A), \quad \cos(45^0 + A) = \sin(45^0 - A)$$
$$\operatorname{tg}(45^0 + A) = \operatorname{cotg}(45^0 - A), \quad \operatorname{cotg}(45^0 + A) = \operatorname{tg}(45^0 - A),$$

d. h. jede Function eines Winkels zwischen 45^0 und 90^0 ist gleich der sinnverwandten Function eines Winkels, welcher um eben so viel unter 45^0 liegt, als der erstere Winkel über 45^0.



§ 8. Wenn der Winkel BAD = A stumpf ist, so trifft die vom Punkte B auf den Schenkel AD gefällte Senkrechte die rückwärts gehende Verlängerung desselben, so dass jetzt der Abschnitt AC die entgegengesetzte Lage von jener hat, wo A spitz war. Giebt man, um diesen Umstand zu bezeichnen, dem Zahlenwerthe b des Abschnittes AC das negative Vorzeichen, so ist ebenso wie in § 3

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{-b}{c} = -\frac{b}{c}.$$

Da ferner $\sin BAC = \frac{a}{c}$, $\cos BAC = \frac{b}{c}$,

so folgt, wenn man $BAC = 180^0 - A$ setzt, dass

$$\mathbf{\sin A = \sin(180^0 - A)}$$
$$\mathbf{\cos A = -\cos(180^0 - A)}, \text{ also}$$
$$\mathbf{\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(180^0 - A)}$$
$$\mathbf{\operatorname{cotg} A = -\operatorname{cotg}(180^0 - A)}.$$

Die Functionen eines stumpfen Winkels sind also der absoluten Grösse nach gleich den gleichnamigen Functionen seines (spitzen) Nebenwinkels, aber mit Ausnahme des Sinus sämmtlich negativ.

Ein Winkel, welcher einen andern zu 180^0 ergänzt, heisst dessen Supplement; zwei Nebenwinkel bilden daher immer supplementäre Winkel.

§ 9. In jedem Dreieck ist die Summe der drei Winkel $A + B + C = 180^0$, folglich

$$\sin A = \sin (B + C), \quad \cos A = - \cos (B + C)$$
$$\operatorname{tg} A = - \operatorname{tg} (B + C), \quad \operatorname{cotg} A = - \operatorname{cotg} (B + C$$
$$\text{Ebenso } \sin B = \sin (A + C), \quad \cos B = - \cos (A + C) \text{ u. s. w.}$$

§ 10. Aus den Formeln in § 8 lassen sich andere ableiten, welche ebenfalls die Functionen eines stumpfen Winkels A durch die Functionen eines spitzen Winkels ausdrücken. Es ist nämlich daselbst der Winkel $180^0 - A$ ein spitzer und daher zufolge § 5

$$\sin (180^0 - A) = \cos [90^0 - (180^0 - A)] = \cos (A - 90^0)$$
$$\cos (180^0 - A) = \sin [90^0 - (180^0 - A)] = \sin (A - 90^0).$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die Formeln des § 8 giebt:

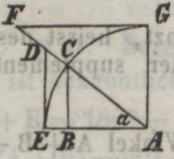
$$\mathbf{\sin A = \cos (A - 90^0)}$$
$$\mathbf{\cos A = - \sin (A - 90^0)}, \text{ also}$$
$$\mathbf{\operatorname{tg} A = - \operatorname{cotg} (A - 90^0)}$$
$$\mathbf{\operatorname{cotg} A = - \operatorname{tg} (A - 90^0)}.$$

Die Functionen eines stumpfen Winkels sind also der absoluten Grösse nach gleich den sinnverwandten Functionen eines um 90^0 kleineren (spitzen) Winkels, aber mit Ausnahme des Sinus sämmtlich negativ.

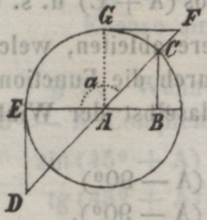
§ 11. Ganz allgemein lässt sich der Sinus und der Cosinus folgendermassen erklären. Der Sinus eines Winkels oder Bogens ist die Senkrechte von dem Endpunkte des Bogens auf den Durchmesser durch den Anfangspunkt des Bogens, dividirt durch den Halbmesser; der Cosinus dagegen dasjenige Stück des durch den Anfangspunkt des Bogens gehenden Durchmessers, welches zwischen dem Mittelpunkte des Bogens und dem Fusspunkte jener Senkrechten liegt, dividirt durch den Halbmesser.

Häufig werden auch die Secante und die Cosecante, d. h. $\sec a = \frac{1}{\cos a}$ und $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$ unter den trigon. Functionen aufgeführt. Wir werden dieselben aber als ganz entbehrlich aus unseren Betrachtungen ausschliessen.

§ 12. Die trigon. Functionen lassen sich auch geometrisch darstellen. Beschreibt man nämlich aus dem Scheitel eines spitzen Winkels a mit einem als Einheit angenommenen Radius AE einen Viertelkreis, zieht an dessen Endpunkten E und G Tangenten bis zum Durchschnitte mit dem verlängerten Schenkel AC des Winkels, und fället aus C die Senkrechte CB, so wird sin a durch CB, cos a durch AB dargestellt, und weil tg a $= \frac{CB}{AB} = \frac{DE}{AE}$, cotg a $= \frac{AB}{CB} = \frac{FG}{AG}$, AE $=$ AG $= 1$, so ist tg a $=$ DE und cotg a $=$ FG.



Wenn der Winkel CAE $=$ a stumpf ist, so beschreibe man ebenfalls aus A mit der Einheit als Radius einen Kreis, errichte AG senkrecht auf AE, ziehe aus G und E Tangenten bis zu den Durchschnitten F und D mit der Verlängerung des Radius AC, und fälle die Senkrechte CB. Alsdann ist wie vorhin sin a $=$ CB, cos a $=$ AB, tg a $=$ DE, cotg a $=$ FG. Dass cos a, tg a, cotg a negativ sind, zeigen die Linien selbst durch ihre der frühern Richtung beim spitzen Winkel entgegengesetzte Lage an.



Ableitung trigonometrischer Formeln.

§ 13. Da jede der vier trigon. Functionen den zugehörigen Winkel vollkommen bestimmt, und umgekehrt, durch die Grösse des Winkels bestimmt wird, so ist es offenbar möglich, aus einer einzigen gegebenen Function jedesmal die drei übrigen abzuleiten, wenn man drei von einander unabhängige Gleichungen hat, welche den Zusammenhang zwischen den vier Functionen ausdrücken. Zwei solcher Gleichungen besitzen wir bereits in den Ausdrücken (§ 3)

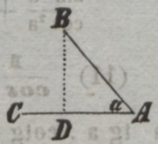
(1) $$tg\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a}$$

(2) $$cotg\ a = \frac{cos\ a}{sin\ a}$$

Hierzu kommt jetzt die Gleichung

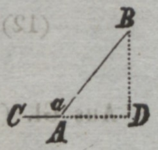
(3) $$sin^2 a + cos^2 a = 1.$$

Zieht man nämlich aus einem Punkte B des einen Schenkels eines beliebigen spitzen oder stumpfen Winkels BAC = a auf den andern Schenkel oder dessen Verlängerung eine Senkrechte BD, so ist $BD^2 + AD^2 = AB^2$. Die Division dieser Gleichung durch AB^2 giebt



$$\frac{BD^2}{AB^2} + \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} \text{ d. h. } \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Obschon der Cosinus des stumpfen Winkels gleich $-\frac{AD}{AB}$ ist, so wird doch das Quadrat desselben ebenso wie bei dem spitzen Winkel positiv.



§ 14. Die drei Grundgleichungen setzen uns in den Stand, die Aufgabe zu lösen: W e n n e i n e F u n c t i o n e i n e s W i n k e l s g e g e b e n i s t , d u r c h d i e s e l b e a l l e ü b r i g e n F u n c t i o n e n d i e s e s W i n k e l s a u s z u d r ü c k e n .

I. G e g e b e n *sin* a.

Aus Gleichung (3) folgt

(4) $$\cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}$$

Setzt man diesen Ausdruck für cos a in Gl. (1) und (2), so ist

(5) $$tg\ a = \pm\frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$$

(6) $$cotg\ a = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$$

II. G e g e b e n *cos* a.

Aus Gleichung (3) folgt

(7) $$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

Dieser Ausdruck für sin a in Gl. (1) und (2) gesetzt, giebt

(8) $$tg\ a = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$$

(9) $$cotg\ a = \frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$$

III. G e g e b e n *tg* a.

Aus (1) folgt $\cos^2 a = \frac{\sin^2 a}{tg^2 a}$. Setzt man diesen Ausdruck für $\cos^2 a$ in Gl. (3), so erhält man

$$\sin^2 a + \frac{\sin^2 a}{tg^2 a} = 1, \text{ oder } \sin^2 a\,(1 + tg^2 a) = tg^2 a, \text{ also}$$

(10) $$\sin a = \frac{tg\ a}{\pm\sqrt{1 + tg^2 a}}$$

Dividirt man Gl. (3) durch $\cos^2 a$, so ist

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}, \text{ d. h. } tg^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}, \text{ also}$$

$$(11) \qquad \frac{1}{\cos a} = \pm\sqrt{1 + tg^2 a} \text{ oder } \cos a = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 a}}$$

Da $tg\, a \,.\, cotg\, a = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = 1$ ist, so folgt daraus

$$(12) \qquad cotg\, a = \frac{1}{tg\, a}$$

IV. Gegeben *cotg a.*

Aus Gl. (12) folgt

$$(13) \qquad tg\, a = \frac{1}{cotg\, a}$$

Dividirt man Gl. (3) durch $\sin^2 a$, so ist

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a}, \text{ d. h. } 1 + cotg^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}, \text{ also}$$

$$(14) \qquad \sin a = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2 a}}$$

Der Ausdruck $\frac{1}{cotg\, a}$ statt $tg\, a$ in die Gl. (11) gesetzt, giebt

$$\cos a = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{cotg^2 a}}} = \frac{1}{\frac{1}{cotg\, a}\sqrt{cotg^2 a + 1}}, \text{ also}$$

$$(15) \qquad \cos a = \frac{cotg\, a}{\sqrt{1 + cotg^2 a}}$$

§ 15. In Bezug auf das Vorzeichen der gefundenen Ausdrücke ist Folgendes zu bemerken:

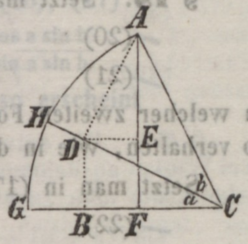
In den Gl. (4), (5), (6), (11) ist entweder das positive oder das negative Zeichen zu nehmen, je nachdem der Winkel a spitz oder stumpf ist.

In den Gl. (7) und (14) für den Sinus, welcher für alle Winkel bis 180° positiv ist, sind die Wurzelgrössen nur positiv zu nehmen.

Da in der Gl. (10) tg a sowol positiv als negativ sein kann, je nachder Winkel a spitz oder stumpf ist, der ganze Ausdruck aber für den Sinus in beiden Fällen positiv sein muss, so ist das Vorzeichen des Nenners so zu wählen, dass jederzeit sin a positiv wird.

In den Gl. (8), (9), (15) gilt nur das positive Vorzeichen der Wurzelgrössen, da tg a, cotg a, cos a immer gleichzeitig entweder positiv oder negativ sind.

§ 16. Im Vorhergehenden haben wir die Beziehungen kennen gelernt, welche zwischen den Functionen eines und desselben Winkels stattfinden; jetzt wollen wir den Zusammenhang zwischen den Functionen verschiedener Winkel aufsuchen, und uns zunächst damit beschäftigen, den Sinus und Cosinus von der Summe oder Differenz zweier Winkel durch den Sinus und Cosinus der einzelnen Winkel auszudrücken.



Es seien die beiden neben einander abgetragenen Winkel a und b zusammen kleiner als 90°. Beschreibt man mit einem beliebigen als Einheit angenommenen Radius aus dem gemeinsamen Scheitel C einen Bogen, zieht aus A die AD $\perp$ CH und AF $\perp$ CG, ferner aus D die DB $\perp$ CG und DE $\perp$ AF, so ist $\triangle$ AED ∞ CBD, also Winkel DAE = BCD = a. Nun ist

$$AF = DB + AE \text{ oder}$$

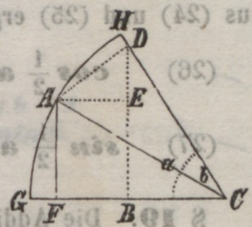
$$\sin(a+b) = CD \,.\, \sin a + AD \,.\, \cos a, \text{ d. h.}$$

(16) $$\sin(a+b) = \sin a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \sin b.$$

Ferner ist CF = CB — DE oder

$$\cos(a+b) = CD \,.\, \cos a - AD \,.\, \sin a, \text{ d. h.}$$

(17) $$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b.$$



§ 17. Es sei der Winkel GCH = a kleiner als 90°, und ein Theil von ihm ACH = b, also ACG = a — b. Beschreibt man mit einem beliebigen, als Einheit angenommenen Radius aus C einen Bogen, zieht aus A die AF $\perp$ CG und AD $\perp$ CH, ferner DB $\perp$ CG und AE $\perp$ DB, so ist $\triangle$ ADE ∞ DCB, also Winkel ADE = DCB = a. Nun ist

$$AF = DB - DE \text{ oder}$$

$$\sin(a-b) = CD \,.\, \sin a - AD \cos a, \text{ d. h.}$$

(18) $$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Ferner ist CF = CB + AE oder

$$\cos(a-b) = CD \,.\, \cos a + AD \,.\, \sin a, \text{ d. h.}$$

(19) $$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Die Formeln (16) bis (19) sind zwar unter der Voraussetzung gefunden, dass $a + b < 90°$ und ebenso $a < 90°$ ist, gelten aber auch für den Fall, wo $a + b$ und a stumpfe Winkel sind. Denn bildet man nach Formel (3) die Gleichungen

$$\sin^2(a+b) + \cos^2(a+b) = 1 \text{ und } \sin^2(a-b) + \cos^2(a-b) = 1,$$

und substituirt in diese die gefundenen Ausdrücke für $\sin(a \pm b)$ und $\cos(a \pm b)$, so überzeugt man sich, dass dieselben wirklich die Einheit zum Resultate geben, wie es die Formel (3) sowol für spitze als für stumpfe Winkel fordert.

§ 18. Setzt man in (16) $a = b$, so erhält man

(20) $$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$ oder

(21) $$\sin a = 2 \sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} a,$$

in welcher zweiten Form der Gleichung die Winkel a und $\frac{1}{2}$ a sich eben so verhalten, wie in der Gl. (20) die Winkel 2a und a.

Setzt man in (17) $a = b$, so ist

(22) $$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$ oder

(23) $$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}.$$

Wird die Gl. (23) zu der Gl. (3) $1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}$ erst addirt und darauf von ihr abgezogen, so erhält man die beiden Gleichungen:

(24) $$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

(25) $$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

Aus (24) und (25) ergeben sich die beiden Formeln:

(26) $$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \quad \text{oder} \quad \cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

(27) $$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \quad \text{oder} \quad \sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

§ 19. Die Additon und Subtraction der Gleichungen (16) und (18) führt zu den beiden Formeln

(28) $$\sin (a + b) + \sin (a - b) = 2 \sin a \cos b$$

(29) $$\sin (a + b) - \sin (a - b) = 2 \cos a \sin b$$

Durch Addition und Subtraction der Gleichungen (17) und (19) erhält man die beiden Formeln

(30) $$\cos (a - b) + \cos (a + b) = 2 \cos a \cos b$$

(31) $$\cos (a - b) - \cos (a + b) = 2 \sin a \sin b$$

Setzt man in den vier Gleichungen (28) bis (31) $a + b = A$ und $a - b = B$, also $a = \frac{1}{2}(A + B)$ und $b = \frac{1}{2}(A - B)$, so ist

(32) $$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

(33) $$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

(34) $$\cos B + \cos A = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

(35) $$\cos B - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B).$$

§ 20. Setzt man zufolge der Formeln (1), (16), (17)

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

und dividirt Zähler und Nenner durch $\cos a\cos b$, so erscheint

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{1-\frac{\sin a}{\cos a}\cdot\frac{\sin b}{\cos b}} \text{ d. h.}$$

$$(36)\qquad \operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$$

Setzt man hierin $a=b$, so ist

$$(37)\qquad \operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a} \quad\text{oder}\quad \operatorname{tg}a=\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a}$$

Setzt man $\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}=\frac{\sin a\cos b-\cos a\sin b}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}$

und dividirt Zähler und Nenner durch $\cos a\cos b$, so ist

$$(38)\qquad \operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$$

Auf demselben Wege findet man

$$(39)\qquad \operatorname{cotg}(a+b)=\frac{\operatorname{cotg}a\operatorname{cotg}b-1}{\operatorname{cotg}a+\operatorname{cotg}b}$$

$$(40)\qquad \operatorname{cotg}2a=\frac{\operatorname{cotg}^2 a-1}{2\operatorname{cotg}a}$$

$$(41)\qquad \operatorname{cotg}(a-b)=\frac{\operatorname{cotg}a\operatorname{cotg}b+1}{\operatorname{cotg}b-\operatorname{cotg}a}$$

Es wird in § 29 gezeigt werden, dass $\operatorname{tg}45^0=\operatorname{cotg}45^0=1$ ist. Setzt man in den Gleichungen (36), (38), (39), (41) $a=45^0$, so verwandeln sie sich in folgende:

$$(42)\qquad \operatorname{tg}(45^0+b)=\frac{1+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}b}$$

$$(43)\qquad \operatorname{tg}(45^0-b)=\frac{1-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}b}$$

$$(44)\qquad \operatorname{cotg}(45^0+b)=\frac{\operatorname{cotg}b-1}{\operatorname{cotg}b+1}$$

$$(45)\qquad \operatorname{cotg}(45^0-b)=\frac{\operatorname{cotg}b+1}{\operatorname{cotg}b-1}$$

Dividirt man die Gleichungen (16) und (18) durch $\cos a\cos b$ und $\sin a\sin b$, so erscheinen die vier Formeln:

$$(46)\qquad \operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

$$(47)\qquad \operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$$

(48) $$\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

(49) $$\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}$$

§ 21. Die entwickelten Gleichungen lassen sich auch auf mehr als zwei Winkel ausdehnen. Verlangt man z. B. eine Formel für $\sin(a+b+c)$, so betrachte man zuvörderst $a+b$ als eine einfache Grösse und hat dann

$$\sin[(a+b)+c] = \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c.$$

Entwickelt man hierauf $\sin(a+b)$ und $\cos(a+b)$, so erscheint

$$\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + \cos a \sin b \cos c + \cos a \cos b \sin c - \sin a \sin b \sin c.$$

Für $a = b = c$ wird hieraus

(50) $$\sin 3a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a$$

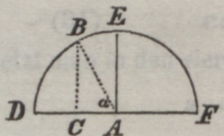
oder wenn man $1 - \sin^2 a$ für $\cos^2 a$ substituirt

(51) $$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$$

Berechnung der trigonometrischen Functionen.

§ 22. Wir beginnen die Berechnung der Functionen für gegebene Winkel mit der Untersuchung, wie die Functionen mit der Aenderung des Winkels wachsen oder abnehmen, und zwischen welchen Zahlen ihre Werthe immer liegen müssen.

In dem mit der Einheit als Radius beschriebenen Halbkreise liege der eine Schenkel AD des Winkels a unverrückt fest; der andere Schenkel AB durchlaufe den ganzen Halbkreis. Ist $a = 0$, so liegt B in D und dann ist die Senkrechte BC gleich 0, d. h. $\sin 0^0 = 0$. Mit der Zunahme des Winkels a wird BC immer grösser, bis B bei 90^0 in E zu liegen kommt, so dass mithin $\sin 90^0 = 1$ ist. Bei fortgesetzter Vergrösserung des Winkels a nimmt der Sinus im zweiten Quadranten ab, bis endlich $\sin 180^0 = 0$ wird. Alle möglichen Werthe des Sinus liegen also zwischen den beiden Gränzen 0 und 1, und der grössere von zwei spitzen Winkeln hat den grössern Sinus, während dem grössern von zwei stumpfen Winkeln der kleinere Sinus entspricht.



§ 23. Fällt der bewegliche Radius AB mit AD zusammen, so liegt C in D, und es ist AC gleich AD, d. h. $\cos 0^0 = 1$. Mit der Zunahme des Winkels a bis 90^0 wird der Cosinus AC immer kleiner, so dass endlich $\cos 90^0 = 0$ ist. Für Winkel über 90^0 ist der Cosinus negativ und nimmt mit der Vergrösserung des Winkels seinem absoluten Werthe nach wieder zu, so dass zuletzt $\cos 180^0 = -1$ wird. Der Cosinus liegt also immer zwischen den beiden Gränzen 1 und -1, und dem grössern von zwei spitzen Winkeln gehört der kleinere Cosinus an. Je grösser dagegen ein stumpfer Winkel ist, desto grösser ist auch der Zahlenwerth seines (negativen) Cosinus.

§ 24. Da bei der Zunahme eines Winkels von 0^0 bis 90^0 der Sinus von 0 bis 1 wächst, während der Cosinus von 1 bis 0 abnimmt, und ein Bruch desto grösser wird, je mehr sein Zähler wächst, sein Nenner hingegen abnimmt, dabei aber immer positiv bleibt, wenn seine beiden Glieder positiv sind, so folgt aus dem Ausdrucke $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$, dass mit der Zunahme des Winkels bis 90^0 die Zahlenwerthe der Tangente wachsen und positiv sind. Es ist

$$\operatorname{tg} 0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = \frac{0}{1} = 0,\ \operatorname{tg} 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \infty,$$

wo das Zeichen ∞ anzeigt, dass die Tangente eine über alle Gränzen hinausgehende Grösse erreicht. Da man aber 90^0 nicht blos als das Ende einer von 0^0 bis 90^0 gehenden Drehung des Radius, sondern zugleich als den Anfang einer neuen mit 90^0 beginnenden Drehung betrachten kann, bei dieser letztern aber die Tangente negativ ist, so kommen auch der Gränze 90^0 zwei verschiedene Tangenten zu, so dass nämlich in der ersten Bedeutung $\operatorname{tg} 90^0 = \infty$ und in der andern $\operatorname{tg} 90^0 = -\infty$ ist. Weil ferner der Bruch $\frac{\sin a}{\cos a}$ desto kleiner wird, je mehr der Zähler abnimmt, sein Nenner hingegen sich vergrössert, so werden mit der Zunahme des stumpfen Winkels die absoluten Zahlenwerthe der Tangente immer kleiner, so dass man endlich hat

$$\operatorname{tg} 180^0 = \frac{\sin 180^0}{\cos 180^0} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Die Tangente kann also alle möglichen positiven und negativen Zahlenwerthe von 0 bis ∞ annehmen, und dem grössern von zwei spitzen Winkeln gehört die grössere Tangente an. Je grösser dagegen Winkel ein stumpfer ist, desto kleiner ist der Zahlenwerth seiner (negativen) Tangente.

§ 25. Durch dieselben Schlüsse wie vorhin findet man, dass es in Bezug auf die Zunahme und Abnahme der Cotangente bei der Aenderung des Winkels sich gerade umgekehrt verhält, wie bei der Tangente. Es ist

$$\operatorname{cotg} 0^0 = \frac{\cos 0^0}{\sin 0^0} = \frac{1}{0} = \infty,\ \operatorname{cotg} 90^0 = \frac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{cotg} 180^0 = \frac{\cos 180^0}{\sin 180^0} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Die Cotangente nimmt also alle möglichen positiven und negativen Zahlenwerthe von 0 bis ∞ an, und dem grössern von zwei Winkeln entspricht die kleinere Cotangente. Je grösser ein stumpfer Winkel wird, desto grösser wird auch der Zahlenwerth seiner (negativen) Cotangente.

§ **26.** Die gefundenen Resultate für die Tangente und Cotangente bestätigen sich auch durch die geometrische Construction dieser Functionen. Die Betrachtung der ersten Figur in § 12 zeigt, dass für $a = 90^0$ die durch E gehende Tangente ED mit der Linie AF parallel ist, und daher beide Linien einander gar nicht treffen. Da aber bei der Zunahme des spitzen Winkels a der Durchschnittspunkt D sich immer weiter von E entfernt, so kann man für den Fall, wo $a = 90^0$ ist, sich den Punkt D unendlich weit vorstellen, d. h. die Tangente als unendlich gross bezeichnen. Ebenso lässt sich die völlige Uebereinstimmung der geom. Construction mit den übrigen auf analytischem Wege gefundenen Resultaten für die Tangente, so wie für die Cotangente leicht darthun.

§ **27.** Obschon es der Winkel, deren Functionen man in bestimmten Zahlen anzugeben hat, unzählig viele giebt, so lässt sich doch die Berechnung aller dieser Functionen auf einen sehr mässigen Umfang zurückführen. Um nämlich die Zahlenwerthe der Functionen aller Winkel von 0^0 bis 180^0 zu kennen, genügt es, die Werthe der Functionen für alle Winkel bis 45^0 zu berechnen.

Denn erstlich ist (§ 8) der Sinus eines stumpfen Winkels zugleich der Sinus seines spitzen Nebenwinkels, und cos, tg und cotg eines stumpfen Winkels erhält man, wenn man diese Functionen von dessen spitzem Nebenwinkel negativ nimmt, z. B.

$$\sin 99^0 = \sin (180^0 - 99^0) = \sin 81^0,$$

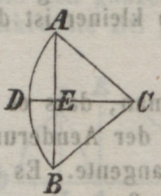
$$\cos 95^0 = - \cos (180^0 - 95^0) = - \cos 85^0.$$

Zweitens ist (§ 7) jede Function eines Winkels zwischen 45^0 und 90^0 zugleich die sinnverwandte Function eines Winkels zwischen 0^0 und 45^0, z. B.

$$\sin 55^0 = \cos (90^0 - 55^0) = \cos 35^0,$$

$$\mathrm{tg}\, 47^0 = \mathrm{cotg}\, (90^0 - 47^0) = \mathrm{cotg}\, 43^0.$$

Kennt man also die Werthe der Functionen aller Winkel unter 45^0, so sind auch die Werthe der Functionen aller Winkel von 45^0 bis 180^0 ohne Weiteres bekannt.



§ **28.** Wenn man mit einem als Einheit angenommenen Radius einen Bogen beschreibt, und einen Mittelpunktswinkel ACB desselben, und damit zugleich dessen Sehne AB durch CD halbirt, so sieht man, dass der Sinus des Winkels ACD gleich ist der halben Sehne des doppelten Winkels ACB.

Auf diesen Satz gestützt, wollen wir die Functionen für die halben Mittelpunktswinkel der regelmässigen Vielecke von 4, 6, 10, 15 Seiten berechnen, welche die Geometrie in den Kreis einschreiben lehrt, indem sie zugleich Mittel an die Hand giebt, aus dem Radius die Zahlenwerthe der Seiten dieser Vielecke zu finden. Wird der Radius gleich 1 gesetzt, so ist die Hälfte jeder Vielecksseite der Sinus von der Hälfte des entsprechenden Mittelpunktswinkels. Aus dem Sinus kann man den Cosinus und alsdann auch die Tangente und Cotangente finden.

§ 29. In der Figur § 28 stelle AB die Seite des regelmässigen Vierecks vor, alsdann ist $ACB = 90^{\circ}$, also $ACD = 45^{\circ}$, folglich auch $CAE = 45^{\circ}$ und daher $AE = CE$, ferner $AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, also $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, d. h.

$$\sin 45^{\circ} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071067 = \cos 45^{\circ}$$

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{AE}{CE} = 1 = \operatorname{cotg} 45^{\circ}.$$

§ 30. Bedeutet AB jetzt die Seite des regelm. Sechsecks, so ist $AB = AC = 1$, $ACB = 60^{\circ}$, $ACD = 30^{\circ}$, und weil $AE = \frac{1}{2}$, mithin $CE = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so ist

$$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = \cos 60^{\circ}$$

$$\cos 30^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254 = \sin 60^{\circ}$$

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773502 = \operatorname{cotg} 60^{\circ}$$

$$\operatorname{cotg} 30^{\circ} = \frac{CE}{AE} = \sqrt{3} = 1{,}7320508 = \operatorname{tg} 60^{\circ}.$$

§ 31. Es stelle AB die Seite des regelm. Zehnecks vor, so ist $ACB = 36^{\circ}$, also $ACD = 18^{\circ}$. Da die Seite des Zehnecks das grössere Stück des nach stetiger Proportion getheilten Radius bildet, so ist

$$1 : AB = AB : 1 - AB \text{ oder } AB^2 + AB = 1, \text{ also } AB = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Nun ist $AE = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ und $CE = \sqrt{1 - \frac{1}{16}(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$ d.h.

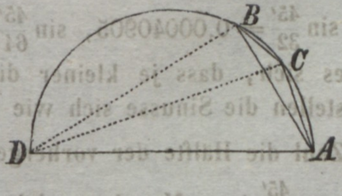
$$\sin 18^{\circ} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}3090169 = \cos 72^{\circ}$$

$$\cos 18^{\circ} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = 0{,}9510565 = \sin 72^{\circ}$$

$$\operatorname{tg} 18^{\circ} = \frac{AE}{CE} = 0{,}3249196 = \operatorname{cotg} 72^{\circ}$$

$$\operatorname{cotg} 18^{\circ} = \frac{CE}{AE} = 3{,}0776835 = \operatorname{tg} 72^{\circ}.$$

§ 32. Wenn in dem mit der Einheit als Radius beschriebenen Halbkreise AB die Seite des Sechsecks, welche gleich 1 ist, und AC die Seite des Zehnecks vorstellt, deren Werth $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ beträgt (§ 31), so ist bekanntlich BC die Seite des Fünfzehnecks, und dieser entspricht der Mittelpunktswinkel von 12°, so dass also $\frac{1}{2} BC = \sin 12^{\circ}$ ist.



Da nun $ACD = ABD = 90^{\circ}$ und nach dem Ptolemäischen Satze (Legendre § 118)

$$AD \,.\, BC + AC \,.\, BD = AB \,.\, DC, \text{ so ist}$$

$$2 \,.\, BC + \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \,.\, \sqrt{3} = \sqrt{4 - \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2}, \text{ also}$$

$$BC = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}, \text{ folglich}$$

$$\sin 12^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}}{8} = 0{,}2079117 = \cos 78^0$$

$$\cos 12^0 = \sqrt{1 - \sin^2 12^0} = 0{,}9781477 = \sin 78^0$$

$$\operatorname{tg} 12^0 = \sin 12^0 : \cos 12^0 = 0{,}2125566 = \operatorname{cotg} 78^0$$

$$\operatorname{cotg} 12^0 = \cos 12^0 : \sin 12^0 = 4{,}7046300 = \operatorname{tg} 78^0.$$

§ 33. Aus den bereits berechneten Functionen lassen sich die Functionen von unendlich vielen andern Winkeln finden. Mittels der Formeln (16) bis (19) kann man aus den Functionen zweier Winkel die Functionen der Summe oder Differenz jener Winkel ableiten, z. B.

$$\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$$
$$= 0{,}9659258 = \cos 15^0$$

$$\cos 6^0 = \cos(18^0 - 12^0) = \cos 18^0 \cos 12^0 + \sin 18^0 \sin 12^0$$
$$= 0{,}9945218 = \sin 84^0.$$

Ferner bieten die Formeln (20) und (22) ein Mittel dar, aus den Functionen eines Winkels die des 2, 4, 8 . . . . fachen Winkels zu berechnen, während die Formeln (26) und (27) die Möglichkeit gewähren, aus den Functionen eines Winkels die des halben Winkels abzuleiten, z. B. aus $\cos 6^0 = 0{,}9945218$ findet man nach einander

$$\sin 3^0 = \sqrt{\frac{1-\cos 6^0}{2}} = 0{,}0523359 = \cos 87^0$$

$$\cos 3^0 = \sqrt{\frac{1+\cos 6^0}{2}} = 0{,}9986295 = \sin 87^0$$

$$\sin 1^0\,30' = \sqrt{\frac{1-\cos 3^0}{2}} = 0{,}0261769 = \cos 88^0\,30'$$

$$\cos 1^0\,30' = \sqrt{\frac{1+\cos 3^0}{2}} = 0{,}9996573 = \sin 88^0\,30'.$$

Ebenso erhält man nach einander $\sin 45'$, $\sin\frac{45'}{2}$, $\sin\frac{45'}{4}$, $\sin\frac{45'}{8}$, $\sin\frac{45'}{16}$, $\sin\frac{45'}{32} = 0{,}00040905$, $\sin\frac{45'}{64} = 0{,}00020452$. Bei dieser Berechnung zeigt es sich, dass je kleiner die Winkel werden, auf desto mehr Decimalstellen die Sinusse sich wie ihre Winkel verhalten. So ist z. B. die letzte Zahl die Hälfte der vorhergehenden, ebenso wie der Winkel $\frac{45'}{64}$ die Hälfte von $\frac{45'}{32}$ ist. Man kann daher $\sin 1'$ durch folgende Proportion finden:

$$\sin\frac{45'}{64} : \sin 1' = \frac{45'}{64} : 1', \text{ also } \sin 1' = 0{,}00029087.$$

Aus $\sin 1'$ lässt sich $\cos 1'$ (§ 14, 4), dann $\sin 2'$ (§ 18, 20), hierauf (§ 16, 16) $\sin 3'$, $\sin 4'$ u. s. w. berechnen, so dass die Winkel von Minute zu Minute fortschreiten. Man ersieht hieraus die Möglichkeit einer ganz elementaren Berechnung der Functionen. Kürzere Methoden lehrt die höhere Mathematik.

Vom Gebrauche der trigonometrischen Tafeln.

§ 34. Die Logarithmen der berechneten trigon. Functionen hat man neben den in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückten Winkeln, welchen die Functionen angehören, auf eine übersichtliche Weise in Tafeln zusammengestellt, so dass man mit Leichtigkeit für jeden gegebenen Winkel die Logarithmen seiner Functionen, und umgekehrt, zu jedem gegebenen Logarithmus einer Function den zugehörigen Winkel finden kann.

Da die Functionen theils ächte, theils unächte Brüche sind (nur die Tangenten von 45^{0} bis 90^{0} oder die Cotangenten von 0^{0} bis 45^{0} haben einen grösseren Zahlenwerth als 1), so müssen die Logarithmen der Functionen theils positiv, theils negativ sein, indem ächte Brüche negative Logarithmen haben. Zur Vermeidung dieser Ungleichförmigkeit sind in den Tafeln alle Logarithmen der trigon. Functionen um 10 grösser als ihr wirklicher Zahlenwerth angesetzt worden, so dass also dieselben immer unter einer positiven Form erscheinen. So ist z. B.

$$\sin 30^{0} = 0{,}5, \quad \text{also} \quad \log \sin 30^{0} = \log 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1,$$

während die Tafeln angeben $\log \sin 30^{0} = 9{,}6989700$. Man muss daher von jedem aus den Tafeln entnommenen Logarithmus 10 subtrahiren, um seinen wahren Werth zu erhalten. Diese Subtraction wird immer blos dadurch angedeutet, dass man dem Logarithmus hinten -10 anhängt. So steht z. B. in den Tafeln $\log \sin 12^{0} = 9{,}3178789$, wofür zu setzen ist

$$\log \sin 12^{0} = 9{,}3178789 - 10 = 0{,}3178789 - 1.$$

Bestimmt man mittels der gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln den Numerus dieses Logarithmus, so findet man $\sin 12^{0} = 0{,}2079117$.

Wenn umgekehrt eine Function, z. B. $\operatorname{tg} x = 0{,}3249196$ gegeben ist, und man will den Winkel x durch die Tafeln bestimmen, so sucht man erst in den Logarithmen-Tafeln den Logarithmus jener Zahl, nämlich $0{,}5117760 - 1$, addirt 10 hinzu, was $9{,}5117760$ giebt, und findet jetzt in den trigon. Tafeln für diesen log tg den Winkel von 18^{0} angegeben.

Diese Vergrösserung des Logarithmus einer Function um 10 Einheiten, damit man denselben in den Tafeln antreffe, pflegt man das Zurückführen der Function auf den Tafelradius zu nennen, weil bei der Anfertigung der ersten Tafeln der Radius des zur Construction der trigon. Linien dienenden Kreises nicht gleich 1, sondern gleich 10000 Millionen angenommen wurde, von welcher Zahl der Logarithmus 10 ist.

§ 35. In den von Bremiker bearbeiteten Vega'schen Tafeln, welche allen Rechnungen in diesem Lehrbuche zu Grunde gelegt sind, schreiten die Winkel von 10 zu 10 Secunden fort, und ausserdem ist in den mit d und d c (*differentia communis*) überschriebenen Spalten berechnet worden, um wie viel sich die Logarithmen der Functionen ändern, wenn sich die Winkel um 10 Secunden ändern. Jene Spalten sind bestimmt, mittels einer leichten Rechnung (Interpoliren) auch die Functionen der Winkel von Secunde zu Secunde zu finden. Diese Rechnung gründet sich im Allgemeinen auf folgenden Satz: Die Differenzen wenig verschiedener Winkel verhalten sich wie die Differenzen ihrer gleichnamigen Functionen, folglich auch wie die Differenzen der Logarithmen dieser Functionen, und zwar desto genauer, je weniger die Winkel von einander verschieden sind. Bei der Anwendung dieses Satzes sieht man also ungleichmässig wachsende Grössen, wie die Winkel und ihre Functionen sind, als gleichmässig wachsend an, was innerhalb eines sehr kleinen Intervalles der Zunahme ohne merklichen Fehler geschehen kann. Man hat dabei stets darauf zu achten, dass bei der Zunahme eines spitzen Winkels der Sinus und die Tangente ebenfalls zunehmen, der Cosinus und die Cotangente dagegen abnehmen (§ 22 — § 25).

Der Gebrauch der Tafel kommt immer auf die Auflösung einer der beiden Fundamentalaufgaben zurück: 1) Den Logarithmus einer Function eines gegebenen Winkels zu finden, 2) Zu einem gegebenen Logarithmus einer Function den zugehörigen Winkel zu finden.

§ 36. Es sei gesucht $\log \sin 25^\circ\, 48'\, 54'',59$.

Unmittelbar in der Tafel findet man

$$\log \sin 25^\circ\, 48'\, 50'' = 9,6389376.$$

Zwischen diesem Logarithmus und dem nächst folgenden in der Tafel angegebenen $\log \sin 25^\circ\, 49' = 9,6389812$ findet man in der mit d überschriebenen Spalte die Zahl 436, welche eigentlich 0,0000436 bedeutet und anzeigt, um wie viel der Logarithmus 9,6389376 zunimmt, wenn der Winkel $25^\circ\, 48'\, 50''$ um 10 Secunden wächst, also gleich $25^\circ\, 49'$ wird. Jener Winkel wächst aber im vorliegenden Fall blos um $4'',59$ und daher findet man die Zunahme seines log sin aus der Proportion

$$10'' : 4'',59 = 0,0000436 : x$$
$$x = 0,0000200124$$

Addirt man diese Zahl, deren drei letzte Stellen unberücksichtigt bleiben, weil man den Logarithmus überhaupt nur auf sieben Stellen zu erhalten wünscht, zu dem vorhin gefundenen $\log \sin 25^\circ\, 48'\, 50''$ hinzu, so findet man

$$\begin{array}{r} 9,6389376 \\ 0,0000200124 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin 25^\circ\, 48'\, 54'',59 = 9,6389576 \qquad \text{also (§ 34)}$$
$$\log \sin 25^\circ\, 48'\, 54'',59 = 0,6389576 - 1$$

Diese ganze Rechnung pflegt man kurz so zusammenzustellen:

$$\begin{array}{lcr}\log\sin 25^\circ\,48'\,50'' & = & 9{,}6389376 \\ 43{,}6\times 4{,}59 & = & +200{,}124 \\ \hline \log\sin 25^\circ\,48'\,54'',59 & = & 0{,}6389576-1\end{array}$$

indem man hier schliesst: Auf 10″ kommt zu den letzten Stellen des log sin 25° 48′ 50″ die Zahl 436 hinzu, also auf 1″ ihr zehnter Theil, d. i. 43,6; folglich kommt auf 4″,59 als Zuwachs $43{,}6\times 4{,}59 = 200$ hinzu.

Verlangt man den sin 25° 48′ 54″,59 selbst, nicht aber seinen Logarithmus, so schlägt man in den Logarithmen-Tafeln den Numerus von 0,6389576 — 1 auf, und findet sin 25° 48′ 54″,59 = 0,4354694.

§ 37. Gesucht log cos 35° 18′ 15″.

$$\begin{array}{lcr}\text{Es ist }\log\cos 35^\circ\,18'\,10'' & = & 9{,}9117485 \\ 14{,}9\times 5 & = & -\,74{,}5 \\ \hline \log\cos 35^\circ\,18'\,15'' & = & 0{,}9117410-1.\end{array}$$

Die Differenz 74,5, welche hier abgezogen wird, weil der Cosinus abnimmt, wenn der Winkel wächst, wird durch folgenden Schluss erhalten: Auf 10″, um welche der Winkel wächst, vermindern sich die untersten Stellen seines log cos um 149, also auf 1″ um 14,9 und daher auf 5″ um 74,5. Man zieht aber, um die aus der Verkürzung des Decimalbruches hervorgehende Ungenauigkeit möglichst gering zu machen, nicht 74, sondern 75 ab, da nach 74,5 eigentlich noch andere Ziffern folgen und deshalb der ganze vernachlässigte Theil der Differenz grösser als 0,5 ist.

§ 38. Gesucht log tg 15° 51′ 27″,51.

$$\begin{array}{lcr}\log\operatorname{tg} 15^\circ\,51'\,20'' & = & 9{,}4533474 \\ 80{,}2\times 7{,}51 & = & +\,602{,}302 \\ \hline \log\operatorname{tg} 15^\circ\,51'\,27'',51 & = & 0{,}4534076-1.\end{array}$$

Gesucht log cotg 74° 5′ 42″.

$$\begin{array}{lcr}\log\operatorname{cotg} 74^\circ\,5'\,40'' & = & 9{,}4547874 \\ 79{,}8\times 2 & = & -\,159{,}6 \\ \hline \log\operatorname{cotg} 74^\circ\,5'\,42'' & = & 0{,}4547714-1.\end{array}$$

§ 39. In den Tafeln von Bremiker befindet sich (S. 188—287) eine besondere Tabelle, welche alle Winkel innerhalb der ersten fünf Grade von Secunde zu Secunde enthält, und mit Vortheil benutzt wird, wenn man log sin und log tg der Winkel bis 5°, oder log cos und log cotg der Winkel von 85° bis 90° zu bestimmen hat, oder umgekehrt aus den Functionen die Winkel sucht.

Gesucht log sin 2° 19′ 49″,71.

$$\begin{array}{llcr}(\text{S. }234) & \log\sin 2^\circ\,19'\,49'' & = & 8{,}6091653 \\ & 518\times 0{,}71 & = & +\,367{,}78 \\ \hline & \log\sin 2^\circ\,19'\,49'',71 & = & 0{,}6092021-2.\end{array}$$

Die Differenz 8,6092171 — 8,6091653 = 518 muss durch eigene Berechnung gefunden werden, und entspricht der Winkeldifferenz von 1 Secunde.

Nach der gewöhnlichen Tabelle ist (S. 303)

$$\begin{array}{lcl} \log\sin 2^0\,19'\,40'' & = & 8{,}6086994 \\ 517{,}7 \times 9{,}71 & = & +\,5026{,}867 \\ \hline \log\sin 2^0\,19'\,49'',71 & = & 0{,}6092021 - 2. \end{array}$$

§ 40. Die Functionen **stumpfer** Winkel lassen sich auf zwei verschiedene Arten bestimmen:

1) **Man zieht den stumpfen Winkel von 180° ab, und sucht für den nachbleibenden spitzen Winkel die verlangte Function** zufolge der Formeln (§ 8)

$$\sin A = \sin(180^0 - A),\quad \cos A = -\cos(180^0 - A) \text{ u. s. w.}$$

2) **Man zieht 90° von dem stumpfen Winkel ab, und sucht für den nachbleibenden spitzen Winkel die sinnverwandte Function** zufolge der Formeln (§ 10)

$$\sin A = \cos(A - 90^0),\quad \cos A = -\sin(A - 90^0) \text{ u. s. w.}$$

Es sei gesucht log sin 98° 3′ 2″.

Wir bezeichnen der Kürze wegen den gegebenen Winkel mit a, und suchen seinen log sin auf beide Arten.

1) $\sin a = \sin(180^0 - a) = \sin 81^0\,56'\,58''$

$$\begin{array}{lcl} \log\sin 81^0\,56'\,50'' & = & 9{,}9956964 \\ 2{,}9 \times 8 & = & +\,23{,}2 \\ \hline \log\sin 98^0\;\;3'\;\;2'' & = & 0{,}9956987 - 1 \end{array}$$

2) $\sin a = \cos(a - 90^0) = \cos 8^0\,3'\,2''$

$$\begin{array}{lcl} \log\cos\;\;8^0\;\;3' & = & 9{,}9956993 \\ 2{,}9 \times 2 & = & -\,5{,}8 \\ \hline \log\sin 98^0\,3'\,2'' & = & 0{,}9956987 - 1. \end{array}$$

§ 41. Obschon es für Cosinus, Tangente und Cotangente eines **stumpfen** Winkels, weil es negative Zahlen sind, keine Logarithmen giebt, so haben doch ihre absoluten Zahlenwerthe Logarithmen; diesen letzteren hängt man aber immer ein (n) an, um anzuzeigen, dass jene absoluten Zahlenwerthe ursprünglich mit dem negativen Zeichen behaftet waren.

Gesucht log cos 123° 15′ 2″.

Setzt man der Kürze wegen 123° 15′ 2″ = a, so ist

1) $\cos a = -\cos(180^0 - a) = -\cos 56^0\,44'\,58''$

$$\begin{array}{lcl} \log\cos\;\;56^0\,44'\,50'' & = & 9{,}7390450 \\ 32{,}1 \times 8 & = & -\,256{,}8 \\ \hline \log\cos 123^0\,15'\;\;2'' & = & 0{,}7390193 - 1\ (n). \end{array}$$

Oder 2) $\cos a = -\sin(a - 90^0) = -\sin 33^0\, 15'\, 2''$

$$\begin{array}{lcr} \log\sin 33^0\, 15' & = & 9{,}7390129 \\ 32{,}1 \times 2 & = & +64{,}2 \\ \hline \log\cos 123^0\, 15'\, 2'' & = & 0{,}7390193 - 1\ (n). \end{array}$$

Sucht man den Cosinus selbst, so schlägt man in den Logarithmen-Tafeln den Numerus von $0{,}7390193 - 1$ auf und nimmt ihn negativ; man findet

$$\cos 123^0\, 15'\, 2'' = -0{,}5483013.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\begin{array}{lrcl} & \log\operatorname{tg} 125^0\, 24'\, 31'' & = & 0{,}1481980\ (n) \\ & \operatorname{tg} 125^0\, 24'\, 31'' & = & -1{,}4066886 \\ \text{ferner} & \log\operatorname{cotg} 109^0\, 2'\, 28'' & = & 0{,}5379832 - 1\ (n) \\ & \operatorname{cotg} 109^0\, 2'\, 28'' & = & -0{,}3451304. \end{array}$$

§ 42. Wir gehen zur umgekehrten Aufgabe über: Zu einer gegebenen Function den Winkel zu finden.

Gegeben $\log\sin x = 0{,}6389576 - 1$.

Zuvörderst hat man mit Rücksicht auf den Tafelradius zu setzen

$$\log\sin x = 9{,}6389576.$$

In der Sinus-Spalte der Tafel sucht man diejenige Zahl, welche am nächsten an 9,6389576 herankommt, aber kleiner als dieser Logarithmus ist; man findet

$$\log\sin 25^0\, 48'\, 50'' = 9{,}6389376$$

und weil nach der Tafel $\log\sin 25^0\, 49' = 9{,}6389812$, also grösser als unser gegebene Logarithmus ist, so muss auch x zwischen $25^0\, 48'\, 50''$ und $25^0\, 49'$ liegen. Zwischen diesen beiden Winkeln findet man in der Differenz-Spalte die Zahl 436; diese zeigt an, dass der Winkel $25^0\, 48'\, 50''$ um $10''$ wächst, also gleich $25^0\, 49'$ wird, wenn sein log sin um 0,0000436 zunimmt. Da nun aber log sin x nur um

$$9{,}6389576 - 9{,}6369376 = 0{,}0000200$$

zunimmt, so findet man den verhältnissmässigen Zuwachs des Winkels $25^0\, 48'\, 50''$ durch die Proportion

$$0{,}0000436 : 0{,}0000200 = 10'' : y$$

$$y = \frac{200\,.\,10}{436} = 4{,}58, \quad \text{also ist}$$

$$x = 25^0\, 48'\, 54'',58.$$

Die ganze Rechnung wird folgendermassen zusammengestellt:

$$\begin{array}{lcr} \log\sin x & = & 9{,}6389576 \\ \log\sin 25^0\, 48'\, 50'' & = & 9{,}6389376 \\ \hline +\,4{,}58 & = & \dfrac{200}{43{,}6} \\ x = 25^0\, 48'\, 54'',\ 58. & & \end{array}$$

Man schliesst hier kurz so: Bei der Differenz 436 wächst der Winkel $25^0\, 48'\, 50''$ um $10''$, und daher bei dem zehnten Theil 43,6 um $1''$; wie oft also 43,6 in der Differenz 200 enthalten ist, um so viel Secunden nimmt auch jener Winkel zu.

Da endlich der Sinus eines spitzen Winkels zugleich der Sinus von dessen stumpfem Nebenwinkel ist (§ 8), so muss man für den gesuchten Winkel auch $180^0 - 25^0\, 48'\, 54'',58$ setzen, so dass also unserer Aufgabe gleichermassen die beiden Werthe genügen

$$x = 25^0\, 48'\, 54'',58 \text{ und } x = 154^0\, 11'\, 5'',42.$$

§ 43. Während die Bestimmung eines Winkels durch seinen Sinus zweideutig ist, wenn sich aus der Aufgabe selbst kein weiteres Kennzeichen dafür entnehmen lässt, ob der spitze Winkel, den die Tafel unmittelbar giebt, oder dessen stumpfer Nebenwinkel zu wählen sei, wird ein Winkel durch eine der übrigen Functionen: Cosinus, Tangente, Cotangente, immer ganz unzweideutig bestimmt. Denn obschon z. B. einem und demselben Zahlenwerthe eines Cosinus immer zwei Nebenwinkel angehören, ein spitzer und ein stumpfer, so ist doch der Zahlenwerth des Cosinus für den spitzen Winkel positiv, für den stumpfen Winkel negativ, und man kann daher am Vorzeichen dieser Function sogleich erkennen, welcher von beiden Winkeln gemeint ist. Ebenso verhält es sich mit der Tangente und Cotangente. Demgemäss können unter x in den Ausdrücken $\cos x = 0,5$, $\operatorname{tg} x = 7$, $\operatorname{cotg} x = 4$ nur spitze Winkel, dagegen in den Ausdrücken $\cos x = -0,3$, $\operatorname{tg} x = -2$, $\operatorname{cotg} x = -3$ nur stumpfe Winkel verstanden werden.

Wenn cos, tg und cotg durch ihre Logarithmen angegeben werden, so ist bei diesen ebenfalls ein solches Unterscheidungszeichen nöthig, damit man sogleich wisse, ob die Functionen positiv oder negativ zu nehmen seien, also ob sie einem spitzen oder stumpfen Winkel angehören. Man schreibt daher im ersten Falle z. B.

$$\log\cos x = 0,9084026-1,\quad \log\operatorname{tg} x = 0,3010300,\quad \log\operatorname{cotg} x = 0,5346294$$

dagegen im zweiten Falle

$$\begin{aligned} &\log\cos x = 0,9084026 - 1\,(n) && \text{oder } \log(-\cos x) = 0,9084026 - 1\\ &\log\operatorname{tg} x\ = 0,3010300\,(n) && \text{oder } \log(-\operatorname{tg} x)\ = 0,3010300\\ &\log\operatorname{cotg} x = 0,5346294\,(n) && \text{oder } \log(-\operatorname{cotg} x) = 0,5346294\end{aligned}$$

§ 44. Sei gegeben $\log\cos x = 9,7107395$, so ist

$$\begin{aligned} \log\cos 59^0\, 5'\, 20'' &= 9,7107160\\ \hline -6'',67 &= \frac{235}{35,2}\\ x &= 59^0\, 5'\, 13'',33.\end{aligned}$$

Es lässt sich x auch so bestimmen, dass man in der Tafel von dem nächst grössern Logarithmus ausgeht, nämlich

$$\begin{aligned} \log\cos 59^0\, 5'\, 10'' &= 9,7107512\\ \log\cos x\quad &= 9,7107395\\ \hline +3'',32 &= \frac{117}{35,2}\end{aligned}$$

Hier muss die Differenz addirt werden, also ist $x = 59^0\, 5'\, 13'',32$.

Sei gegeben $\log \operatorname{tg} x = 10{,}0328564$

$$\log \operatorname{tg} 47^0\, 9'\, 50'' = 10{,}0328352$$

$$+5{,}01 = \frac{212}{42{,}3}$$

$$x = 47^0\, 9'\, 55''\, 01.$$

Sei gegeben $\log \operatorname{cotg} x = 10{,}4771213$

so ist $\log \operatorname{cotg} 18^0\, 26'\, 10'' = 10{,}4770919$

$$-4{,}18 = \frac{2|94}{70{,}2}$$

$$x = 18^0\, 26'\, 5'',82.$$

§ 45. Die **stumpfen Winkel** lassen sich aus ihren gegebenen Functionen auf zwei Arten bestimmen:

1) Man sucht für den Logarithmus der Function den spitzen Winkel, welchen die Tafel giebt, und zieht denselben von 180^0 ab, zufolge der Formeln (§ 8)

$$\cos A = -\cos(180^0 - A),\quad \operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(180^0 - A) \text{ u. s. w.}$$

2) Man betrachtet den Logarithmus der Function als den Logarithmus der sinnverwandten Function, bestimmt den zugehörigen spitzen Winkel und addirt zu demselben 90^0, zufolge der Formeln (§ 10)

$$\cos A = -\sin(A - 90^0),\quad \operatorname{tg} A = -\operatorname{cotg}(A - 90^0) \text{ u. s. w.}$$

§ 46. **Sei gegeben** $\log\cos x = 9{,}9084026\ (n)$

dann ist 1) $\log\cos(180^0 - x) = 9{,}9084026$

$$\log\cos 35^0\, 55'\, 10'' = 9{,}9084006$$

$$-1'',3 = \frac{20}{15{,}3}$$

$$180^0 - x = 35^0\, 55'\, 8'',7,\quad \text{also } x = 180^0 - 35^0\, 55'\, 8'',7 = 144^0\, 4'\, 51'',3$$

oder 2) $\log\sin(x - 90^0) = 9{,}9084026$

$$\log\sin 54^0\, 4'\, 50'' = 9{,}9084006$$

$$+1'',3 = \frac{20}{15{,}3}$$

$$x - 90^0 = 54^0\, 4'\, 51'',3,\quad \text{also } x = 54^0\, 4'\, 51'',3 + 90^0 = 144^0\, 4'\, 51'',3$$

Das zweite Verfahren ist dem ersten im Allgemeinen vorzuziehen, da die Addition von 90^0 zu einem Winkel bequemer ist, als die Subtraction eines in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückten Winkels von 180^0.

Wenn gegeben ist $\operatorname{tg} x = -2$, so hat man zuvor $\log 2$ zu nehmen und denselben mit Rücksicht auf den Tafelradius um 10 zu erhöhen; man findet $\log \operatorname{tg} x = 10{,}3010300\ (n)$ und hieraus $x = 116^0\, 33'\, 54'\, 54'',19$.

Ist gegeben $\log(-\operatorname{cotg} x) = 10{,}5346294$, so findet man

$$x = 163^0\, 43'\, 21'',46.$$

§ 47. Ein aus mehren positiven und negativen Factoren bestehendes Product, oder ein gebrochener Ausdruck, dessen Zähler und Nenner Producte aus derartigen Factoren sind, ist positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der *negativen* Factoren eine gerade oder ungerade ist. Wird nun der numerische Werth eines solchen Ausdrucks logarithmisch berechnet, wobei die negativen Factoren vorläufig positiv betrachtet und ihre Logarithmen mit (n) bezeichnet werden, so hat man *nur* in dem Falle, wenn die Anzahl der Zeichen (n) ungerade ist, ein solches Zeichen ebenfalls dem Logarithmus des verlangten Endresultates beizufügen, und letzteres selbst alsdann negativ zu nehmen.

1) *Sei gegeben* $\operatorname{tg} x = 5{,}34 \operatorname{cotg} 143^0\, 35' \cos 95^0\, 23'$, so ist

$$\begin{array}{ll} \log 5{,}34 & = 0{,}7275413 \\ \log \operatorname{cotg} 143^0\, 35' & = 10{,}1321127\ (n) \\ \log \cos 95^0\, 23' & = 8{,}9722895\ (n) \\ \hline \log \operatorname{tg} x & = 9{,}8319435, \text{ also } x = 34^0\, 10'\, 51'',69. \end{array}$$

2) *Sei gegeben* $\cos x = \frac{\sin 109^0 \cos 93^0\, 55'}{-35 \operatorname{tg} 143^0\, 10'}$, dann ist

$$\begin{array}{ll} \log \sin 109^0 & = 9{,}9756701 \\ \log \cos 93^0\, 55' & = 8{,}8344557\ (n) \\ \hline & 18{,}8101258 \\ \log 35 & = 1{,}5440680\ (n) \\ \log \operatorname{tg} 143^0\, 10' & = 9{,}8744838\ (n) \\ \hline & 11{,}4185518 \end{array}$$

$\log \cos x = 7{,}3915740\ (n)$, also $x = 90^0\, 8'\, 28'',15$.

§ 48. *Bei der Bestimmung von Winkeln nahe bei* 0^0 *oder bei* 90^0 *aus ihren Functionen*, oder umgekehrt dieser letztern aus den Winkeln hat man einen Umstand zu berücksichtigen, der oft eine bedeutende Ungenauigkeit in dem Resultate einer Rechnung herbeiführen kann.

Wenn der Sinus oder Cosinus nahe gleich 1 ist, so ändern sich diese Functionen mit dem Wachsen oder Abnehmen des Winkels sehr wenig, d. h. die Aenderung des Sinus wird sehr gering nahe bei 90^0, und die des Cosinus nahe bei 0^0. Wo sich aber Sinus und Cosinus ihrem kleinsten Werthe 0 nähern, ändern sie sich am stärksten, wenn sich der Winkel ändert, also der Sinus nahe bei 0^0 und der Cosinus nahe bei 90^0. Da nämlich

$$\sin 0^0 = 0, \quad \sin 45^0 = 0{,}707\ldots, \quad \sin 90^0 = 1$$
$$\cos 0^0 = 1, \quad \cos 45^0 = 0{,}707\ldots, \quad \cos 90^0 = 0,$$

so sieht man, dass der Sinus bis 45^0 um mehr zunimmt, als von 45^0 bis 90^0, und dass der Cosinus bis 45^0 um weniger abnimmt, als von 45^0 bis 90^0. So differiren z. B die Logarithmen

$$\log \sin 3' = 6{,}9408473 = \log \cos 89^0\, 57'$$
$$\log \sin 4' = 7{,}0657860 = \log \cos 89^0\, 56'$$

schon in der Kennziffer, während die Logarithmen

$$\log \cos 3' = 9{,}9999998 = \log \sin 89^0\, 57'$$
$$\log \cos 4' = 9{,}9999997 = \log \sin 89^0\, 56'$$

erst in der siebenten Decimalstelle von einander abweichen.

Mit der Aenderung eines sehr kleinen Winkels um eine oder mehre Secunden ändert sich der Cosinus so ausserordentlich wenig, dass diese Aenderung gewöhnlich die sieben ersten Decimalstellen nicht trifft, und folglich die Cosinusse von Winkeln, welche blos um einige Secunden verschieden sind, in den Tafeln durch die nämliche Zahl ausgedrückt erscheinen. Je schneller sich aber eine Function ändert, wie der Sinus bei sehr kleinen Winkeln, desto weniger kann man sich in der genauen Auffindung des Winkels irren. Wenn man also die Wahl hat, einen Winkel durch eine beliebige Function zu bestimmen, so wähle man immer diejenige, welche die grössten Differenzen hat, d. h. man bediene sich des Sinus, um sehr kleine Winkel, dagegen des Cosinus, um Winkel nahe bei 90° genau zu bestimmen, oder in beiden Fällen der Tangente und Cotangente, indem diese Functionen überhaupt zuverlässigere Resultate geben als die ersteren. Einige Beispiele werden zeigen, wie man hierbei zu verfahren hat.

§ 49. Gegeben $\sin x = 0{,}9999907$. Es ist $\log \sin x = 9{,}9999960$, und die Tafel giebt $x = 89^0 45' 10''$ und auch $x = 89^0 45' 20''$, so dass sich also hieraus der wahre Werth von x nicht erkennen lässt. Um x genau zu erhalten, setze man

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

$$\log(1 + \sin x) = 0{,}3010280, \quad \log(1 - \sin x) = 0{,}9684829 - 6$$

$$\log \cos x = 0{,}6347555 - 3, \quad \text{also } x = 89^0 45' 10'',43.$$

§ 50. Gegeben $x = a \cos m$, wenn $a = 8347{,}5$ und $m = 4' 15'',78$ ist.

Die directe Berechnung giebt $x = 8347{,}494$. Da nach der Tafel $\log \cos m = 9{,}9999997$ allen Winkeln von $3' 50''$ bis $4' 20''$ zukommt, so leuchtet die Ungenauigkeit dieses Werthes für x ohne Weiteres ein. Um x schärfer zu bestimmen, setze man (§ 18, 25).

$$\cos m = 1 - 2 \sin^2 \frac{m}{2} \quad \text{also } x = a - 2a \sin^2 \frac{m}{2}$$

$$\log\left(2a \sin^2 \frac{m}{2}\right) = 0{,}8074066 - 3, \quad 2a \sin^2 \frac{m}{2} = 0{,}0064181$$

$$x = a - 2a \sin^2 \frac{m}{2} = 8347{,}4935819$$

Eine andere Art der Berechnung werden wir in § 55 kennen lernen.

§ 51. Gegeben $\cos x = \frac{a}{b}$ für $a = 760$ und $b = 761$.

Direct findet man $x = 2^0 56' 15'',5$. Genauer wird x auf folgende drei Arten erhalten:

1) Es ist $1 - \cos x = 1 - \frac{a}{b} = \frac{b - a}{b}$, d. h. (§ 18, 25)

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{b - a}{b}, \quad \text{also } \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{b - a}{2b}}$$

$$\log \sin \frac{x}{2} = 8{,}4087926, \quad x = 2^0 56' 15'',36$$

2) Es ist $1 + \cos x = 1 + \frac{a}{b} = \frac{b+a}{b}$, d. h. (§ 18, 24)

$$2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{b+a}{b}, \text{ also } \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{b+a}{2b}}$$

und weil vorhin $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{b-a}{2b}}$, so ist

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}, \text{ d. h. } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 8{,}4089354, \quad x = 2^0\, 56'\, 15'',36$$

3) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{(b+a)(b-a)}$

$$\log \sin x = 8{,}7096799, \quad x = 2^0\, 56'\, 15'',36$$

§ 52. Der Rest, welchen man erhält, wenn man eine gegebene Zahl von ihrer nächst höheren dekadischen Einheit abzieht, heisst die dekadische Ergänzung oder das *complementum decadicum* von jener Zahl und wird durch CD bezeichnet, z. B. CD. $6 = 10 - 6 = 4$, CD. $25 = 100 - 25 = 75$.

Die dekadische Ergänzung eines Decimalbruches wird gefunden, wenn man seine letzte bedeutende Ziffer von 10, und alle übrigen Ziffern von 9 abzieht, z. B.

$$\text{CD. } \log 2 = 10 - 0{,}3010300 = 9{,}6989700$$

$$\text{CD. } 11{,}8069 = 100 - 11{,}8069 = 88{,}1931$$

Für einen Logarithmus mit einer negativen Kennziffer wird die Ergänzung dadurch erhalten, dass man seine Mantisse von 10 subtrahirt und zu dem Reste die positiv genommene Kennziffer addirt, z. B. für

$$\log 0{,}05 = 0{,}69897 - 2 \text{ ist}$$

$$\text{CD. } \log 0{,}05 = 10 - (0{,}69897 - 2) = 10 - 0{,}69897 + 2 = 11{,}30103$$

Hat man von einer Zahl a abzuziehen die Zahl b, so kann man statt $a - b$ auch setzen

$$a + (10 - b) - 10 \quad \text{oder} \quad a + (100 - b) - 100$$

Es ist also die Subtraction zweier Zahlen von einander gleichbedeutend mit der Addition der dekadischen Ergänzung des Subtrahendus zum Minuendus, wenn man von der erhaltenen Summe zuletzt wieder 10 oder 100 abzieht, je nachdem der Subtrahendus von 10 oder 100 abgezogen wurde.

Dieses Verfahren, durch welches jede Subtraction auf die Form eines gewöhnlichen Additionsexempels gebracht werden kann, lässt sich mit Vortheil anwenden, wenn man entweder von einer Zahl mehre andere Zahlen, oder von der Summe mehrer Zahlen eine oder mehre andere Zahlen zu subtrahiren hat. Es versteht sich dabei von selbst, dass man von der schliesslich erhaltenen

Summe immer so viel Mal die Zahl 10 oder 100 abziehen müsse, als dekadische Ergänzungen entsprechend zu 10 oder 100 in Anwendung gebracht worden sind. Es sei gegeben

$$\cos x = \frac{0,5 \cdot \cos 34^0\,10'}{\text{tg}\,73^0 \sin 150^0}$$

so ist

$$\begin{aligned} \log 0,5 &= 0,6989700 - 1 \\ \log \cos 34^0\,10' &= 0,9177194 - 1 \\ \text{CD.} \log \text{tg}\,73 &= 9,4853390 - 10 \\ \text{CD.} \log \sin 150^0 &= 10,3010300 - 10 \\ \hline \log \cos x &= 9,4030584 - 10 \\ x &= 75^0\,20'\,49'',33 \end{aligned}$$

Sei gegeben $x = \frac{\text{tg}\,117^0\,14' \sin 140^0\,45'}{\text{cotg}\,93^0\,30'\ \text{tg}\,95^0}$

so ist

$$\begin{aligned} \log \text{tg}\,117^0\,14' &= 0,2884746\ (n) \\ \log \sin 140^0\,45' &= 0,8012015 - 1 \\ \text{CD.} \log \text{cotg}\,93^0\,30' &= 11,2135139 - 10\ (n) \\ \text{CD.} \log \text{tg}\,95^0 &= 8,9419518 - 10\ (n) \\ \hline \log x &= 0,2451418\ (n) \\ x &= -1,7584975 \end{aligned}$$

§ **53**. Die Grösse eines Winkels lässt sich nicht blos durch seine Gradenzahl angeben, sondern auch durch die Länge eines aus dem Scheitel zwischen den Schenkeln beschriebenen Bogens, wenn dem Radius ein bestimmter Zahlenwerth beigelegt ist.

Es bedeute r den Radius eines Kreises, a die Gradanzahl eines beliebigen Centriwinkels, und b die Länge seines Bogens. Da sich der ganze Kreisumfang zu einem Bogen verhält, wie 360^0 zur Gradanzahl des Bogens oder seines Centriwinkels, so ist

$$2\,r\,\pi : b = 360^0 : a^0$$

wobei vorausgesetzt wird, dass wenn der Winkel auch Minuten und Secunden enthält, diese zuvor in Theilen des Grades ausgedrückt sind, und dass die Zahlen r und b sich auf die nämliche Längeneinheit beziehen. Aus dieser Proportion folgen die Formeln:

1) Bogenlänge $b = \frac{a\,\pi\,r}{180}$

2) Gradanzahl $a = \frac{180\,b}{\pi\,r}$

mittels welcher sich aus dem Radius und der Gradanzahl eines Winkels die Bogenlänge, und umgekehrt aus dem Radius und der Bogenlänge die Gradanzahl des Winkels bestimmen lässt.

Gewöhnlich wird bei der Bestimmung einer Bogenlänge der Radius selbst als die Masseinheit angenommen, also der Bogen in Theilen des Radius ausgedrückt. Wenn daher von der Länge eines Bogens ohne Angabe des Radius die Rede ist, so wird dabei **immer** vorausgesetzt, dass letzterer gleich 1 sei. Für $r = 1$ hat man die Formeln:

3) Bogenlänge $b = \frac{a\pi}{180}$

4) Gradanzahl $a = \frac{180\,b}{\pi}$

Es ist Bogen b gleich $\frac{\pi a}{180}$ oder $\frac{\pi a}{180 \,.\, 60}$ oder $\frac{\pi a}{180 \,.\, 60 \,.\, 60}$, je nachdem a die Anzahl der Grade, oder der Minuten, oder der Secunden angiebt. Umgekehrt ist ein Bogen, dessen Länge b ist, gleich $\frac{180\,b}{\pi}$ Graden $= \frac{180 \,.\, 60 \,.\, b}{\pi}$ Minuten $= \frac{180 \,.\, 60 \,.\, 60 \,.\, b}{\pi}$ Secunden.

Die Länge des Bogens von 20^0 ist gleich $\frac{20\,\pi}{180} = 0{,}3490658$ und der Bogenlänge 3 entspricht ein Winkel von $\frac{180 \,.\, 3}{\pi} = 171{,}88733$ Graden $= 171^0\, 53'\, 14'',38$.

§ 54. Wegen der häufigen Anwendung der obigen Formeln folgen hier einige berechnete Zahlenwerthe.

1) $\pi = 3{,}14159265 \ldots$ und $\log \pi = 0{,}4971499$

Setzt man in der Formel § 53, 3 den Winkel $a = 1^0$, so ist der Bogen (*arcus*) b ebenfalls gleich 1^0, folglich

2) $\text{arc}\, 1^0 = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745329$

$$\log \frac{\pi}{180} = 0{,}2418773 - 2$$

3) $\text{arc}\, 1' = \frac{\pi}{180 \,.\, 60} = 0{,}0002908882$

$$\log \frac{\pi}{180 \,.\, 60} = 0{,}4637261 - 4$$

4) $\text{arc}\, 1'' = \frac{\pi}{180 \,.\, 60 \,.\, 60} = 0{,}000004848136$

$$\log \frac{\pi}{180 \,.\, 60 \,.\, 60} = 0{,}6855748 - 6$$

Wenn man in der Formel (§ 53, 4) setzt $b = 1$, so folgt, dass **auf einen Bogen, der dem Radius gleich ist, kommen**:

5) $\frac{180}{\pi} = 57{,}29578$ Grade $= 57^0\, 17'\, 44'',8$

$$\log \frac{180}{\pi} = 1{,}7581226$$

oder 6) $\frac{180 . 60}{\pi} = 3437,7468$ Minuten

oder 7) $\frac{180 . 60 . 60}{\pi} = 206264,8$ Secunden.

§ 55. Mit welchem Vortheil die Bogenlänge statt einer Winkelfunction in manche Rechnungen eingeführt werden kann, wollen wir an der Gleichung (§ 50) $x = a \cos m$ für $a = 8347,5$ und $m = 4' 15'',78$ zeigen, deren directe Berechnung den nur wenig genauen Werth $x = 8347,494$ gab.

Bei sehr kleinen Winkeln lässt sich der in Theilen des Radius ausgedrückte Bogen ohne merklichen Fehler mit dem Sinus vertauschen. So stimmen z. B. die Werthe von $\sin 15' = 0,0043633$ und $\text{arc}\, 15' = \text{arc}\, 1' \times 15 = 0,0043633$ (§ 54, 3) schon in der siebenten Decimalstelle überein, und für Winkel unter 15′ würde eine solche Uebereinstimmung auf eine noch grössere Anzahl von Decimalstellen sich erstrecken. Da m sehr klein ist, so kann man $\sin \frac{m}{2} = \text{arc}\, \frac{m}{2} = \frac{\text{arc}\, m}{2}$ setzen, folglich ist (§ 18, 25)

$$\cos m = 1 - 2 \sin^2 \frac{m}{2} = 1 - \frac{2\, \text{arc}^2 m}{4} = 1 - \frac{\text{arc}^2 m}{2}, \text{ mithin}$$

$$x = a \cos m = a - \frac{a}{2} \text{arc}^2 m$$

Nun ist $m = 255'',78$ also (§ 54, 4) $\text{arc}\, m = 255,78 \times 0,000004848136$

$\frac{a}{2} \text{arc}^2 m = 0,0064181$, folglich $x = a - \frac{a}{2} \text{arc}^2 m = 8347,4935819$.

§ 56. Ist ein Winkel durch eine seiner Functionen, z. B. tg a gegeben, so drückt man die Länge seines Bogens durch arc tg a aus. Ebenso bedeutet arc cos 0,3 einen mit dem Radius = 1 beschriebenen Bogen, dessen Cosinus gleich 0,3 ist.

Um den Zahlenwerth z. B. des Ausdrucks $\text{arc} \sin \frac{5}{6}$ anzugeben, muss man zuvor den Winkel, dessen Sinus $= \frac{5}{6}$ ist, durch die Tafel bestimmen. Man findet die beiden Werthe

$$56^0\, 26'\, 33'',64 = 56,44267 \text{ Grade}$$

$$123^0\, 33'\, 26'',36 = 123,55732 \text{ Grade.}$$

Hierauf erhält man mittels der Formel (§ 53, 3)

$$\text{arc} \sin \frac{5}{6} = \frac{\pi}{180} . 56,44267 = 0,9851057$$

$$\text{oder} \quad \text{arc} \sin \frac{5}{6} = \frac{\pi}{180} . 123,55732 = 2,1564812$$

§ 57. Es ist zuweilen die Rede von den Functionen eines im Längenmasse gegebenen Bogens. Da z. B. die Länge eines Bogens von 30^0 gleich ist $\frac{30\pi}{180} = 0,5235987$, so kann man statt $\sin 30^0 = 0,5$

auch schreiben $\sin 0{,}5235987 = 0{,}5$. Soll nun die Function einer Bogenlänge, z. B. $\sin 0{,}5235987$ angegeben werden, so hat man zuvor den Bogen nach Formel (§ 53, 4) in Graden auszudrücken, und sucht alsdann in der Tafel die Function des Bogens, also

$$\sin 0{,}52\ldots = \sin \frac{180 \cdot 0{,}5235987}{\pi} = \sin 30^0 = 0{,}5.$$

§ 58 Wir bemerken hier noch, dass für einen solchen Ausdruck wie $\sin a = 0{,}5$ sehr häufig die Schreibart $a = \text{ang.} \sin 0{,}5$ angewendet wird, indem man dadurch aussagt, dass a gleich sei dem Winkel (*angulus*), dessen Sinus 0,5 ist. Da $\mathrm{tg}\, 45^0 = \mathrm{cotg}\, 45^0 = 1$ ist, so ist auch $45^0 = \text{ang. tg}\, 1 = \text{ang. cotg}\, 1$, sowie der Ausdruck $x = \text{ang.} \cos(-0{,}54)$ einen Winkel anzeigt, der die negative Zahl 0,54 zum Cosinus hat, und auch durch $\cos x = -0{,}54$ dargestellt werden kann.

Von den Hilfswinkeln.

§ 59. Da die Sinusse alle Werthe von 0 bis 1, die Cosinusse alle Werthe von 1 bis -1 annehmen können, endlich die Tangenten und Cotangenten das ganze Gebiet der positiven und negativen Zahlen durchlaufen, so lassen sich alle positiven Zahlen, welche nicht grösser als 1 sind, als Sinusse, ferner alle zwischen 1 und -1 liegenden Zahlen als Cosinusse, endlich alle positiven und negativen Zahlen als Tangenten oder Cotangenten eines Winkels betrachten.

Hierauf beruht die Einführung eines sogenannten Hilfswinkels in eine Rechnung zu dem Zwecke, einen algebraischen Ausdruck, welcher wegen der darin vorkommenden Additionen oder Subtractionen den Gebrauch der Logarithmen nicht gestattet, so umzuformen, dass die Summen- oder Differenzform verschwindet und eine ununterbrochene logarithmische Rechnung möglich wird. Die Hilfswinkel werden nicht blos in der Trigonometrie gebraucht, sondern auch auf solche Rechnungen angewendet, in welchen Winkel und trigon. Functionen ursprünglich gar nicht vorhanden sind, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

§ 60. Um $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ logarithmisch zu berechnen, setze man

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

und nehme einen Winkel φ so an, dass

$$\mathrm{tg}^2 \varphi = \frac{b}{a}, \text{ also } \mathrm{tg}\, \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Substituirt man $\mathrm{tg}^2\varphi$ in die obge Gleichung, so ist (§ 14, 11)

$$a + b = a(1 + \mathrm{tg}^2 \varphi) = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$$

Setzte man $\frac{b}{a} = \mathrm{cotg}^2 \varphi$, so wäre $a + b = \dfrac{a}{\sin^2 \varphi}$

Jetzt lässt sich $a + b$ durch eine blos logarithmische Rechnung finden. Besonders vortheilhaft ist der Gebrauch der Hilfswinkel, wenn die bekannten Grössen durch ihre Logarithmen gegeben sind.

Sei $\log a = 0{,}1904438$, $\log b = 1{,}1613980$, so ist

$$\begin{array}{llll}
\log b & = 1{,}1613980 & \log\cos\varphi & = 9{,}4924654 - 10 \\
\log a & = 0{,}1904438 & \log a & = 0{,}1904438 \\
\hline
\log tg^2\varphi & = 0{,}9709542 & \log\cos^2\varphi & = 0{,}9849308 - 2 \\
\log tg\,\varphi & = 0{,}4854771 & \log(a+b) & = 1{,}2055130 \\
\varphi & = 71^0\,53'\,35'',61 & a+b & = 16{,}0514
\end{array}$$

§ 61. Statt der Differenz $\mathbf{a - b}$ setze man

$a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$, und indem man $a > b$ voraussetzt,

$\cos^2\varphi = \frac{b}{a}$, also $\cos\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Dann ist

$$a - b = a\,(1 - \cos^2\varphi) = a \sin^2\varphi.$$

Aus $\cos^2\varphi = \frac{b}{a}$ folgt $a = \frac{b}{\cos^2\varphi}$; daher ist auch

$$a - b = \frac{b \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = b\,tg^2\varphi.$$

Die Gaussischen Logarithmen sind bekanntlich zu dem Zwecke construirt, aus $\log a$ und $\log b$ den $\log(a + b)$ und $\log(a - b)$ zu erhalten.

§ 62. Wenn $\mathbf{x = \frac{a-b}{a+b}}$ gegeben ist, so setze man

$$x = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} \text{ und } tg\,\varphi = \frac{b}{a}\text{; alsdann hat man (§ 20, 43)}$$

$$x = \frac{1 - tg\,\varphi}{1 + tg\,\varphi} = tg\,(45^0 - \varphi)$$

Aus $\log a = 2{,}6063814$ und $\log b = 0{,}6020600$ findet man

$$\begin{array}{ll}
\log tg\,\varphi = 7{,}9956786 & 45^0 - \varphi = 44^0\,25'\,57'',85 \\
\varphi = 34'\,2'',15 & \log tg\,(45^0 - \varphi) = 0{,}9913998 - 1 \\
 & x = 0{,}9803921
\end{array}$$

§ 63. Statt $\mathbf{x = \sqrt{a^2 + b^2}}$ kann man setzen

$$x = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \text{ und } tg\,\varphi = \frac{b}{a}\text{; alsdann ist (§ 14, 11)}$$

$$x = a\sqrt{1 + tg^2\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi}$$

Für $a = 50{,}6835$ und $b = 27{,}9041$ findet man $\varphi = 28^0\,50'\,6'',88$ und $x = 57{,}8572$.

§ 64. Um die Gleichung $\mathbf{x = a \cos m \pm b \sin m}$ logarithmisch umzuformen, setze man

$$x = b\left(\frac{a}{b}\cos m \pm \sin m\right) \text{ und } \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}, \text{ also}$$

$$x = b(\operatorname{tg}\varphi \cos m \pm \sin m) = b\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos m \pm \sin m\right).$$

$$x = \frac{b}{\cos\varphi}(\sin\varphi\cos m \pm \cos\varphi \sin m) = \frac{b\sin(\varphi \pm m)}{\cos\varphi}$$

Es sei gegeben $x = 7\cos 23^0 - 5\sin 23^0$, so ist $a = 7$, $b = 5$, $m = 23^0$, folglich

$$\begin{array}{llll}
\operatorname{tg}\varphi & = 7/5 = 1{,}4 & \log b & = 0{,}6989700 \\
\log\operatorname{tg}\varphi & = 0{,}1461280 & \log\sin(\varphi - m) & = 9{,}7176187 - 10 \\
\varphi & = 54^0\, 27'\, 44'',35 & \mathrm{CD.}\log\cos\varphi & = 0{,}2356458 \\
\varphi - m & = 31^0\, 27'\, 44'',35 & \log x & = 0{,}6522345
\end{array}$$

$$x = 4{,}4898781$$

§ 65. Um aus der Gleichung $\mathbf{a \sin x + b \cos x = c}$ den Winkel x zu bestimmen, setze man

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a} \text{ und } \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \text{ so ist}$$

$$\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c\cos\varphi}{a}, \text{ d. h.}$$

$$\sin(\varphi + x) = \frac{c\cos\varphi}{a}$$

Hat man $\varphi + x$ gefunden und zieht davon φ ab, so erhält man x. Für $\frac{c\cos\varphi}{a} > 1$ ist die Aufgabe unmöglich.

§ 66. Die trigon. Formeln können auch zur A u f l ö s u n g d e r u n r e i n e n q u a d r a t i s c h e n G l e i c h u n g e n benutzt werden, welches Verfahren besonders dann vor der gewöhnlichen algebraischen Auflösung Vorzüge hat, wenn die Glieder einer Gleichung vielzifferige Zahlen enthalten.

Jede unreine quadratische Gleichung lässt sich unter einer der folgenden Formen darstellen:

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{I})\ x^2 + Px = Q & (\mathrm{II})\ x^2 - Px = Q \\
(\mathrm{III})\ x^2 + Px = -Q & (\mathrm{IV})\ x^2 - Px = -Q
\end{array}$$

Diese vier Fälle wollen wir nach einander betrachten.

§ 67. Die Gl. (I) $\mathbf{x^2 + Px = Q}$ hat die Wurzeln

$$x = \frac{1}{2}P\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4Q}{P^2}}\right)$$

Setzt man $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{Q}}{P}$, also $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4Q}{P^2}$ und

$$\tfrac{1}{2} P = \frac{\sqrt{Q}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\cos\varphi\sqrt{Q}}{\sin\varphi},$$

so erhält man durch Substitution und zufolge (§ 14, 11)

$$x = \frac{\cos\varphi\sqrt{Q}}{\sin\varphi}\left(-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right) = \frac{\cos\varphi\sqrt{Q}}{\sin\varphi}\left(-1 \pm \frac{1}{\cos\varphi}\right)$$

Wir werden immer mit x' die Wurzel bezeichnen, welche dem positiven Vorzeichen, und mit x'' die Wurzel, welche dem negativen Vorzeichen entspricht. Dann ist

$$x' = \frac{\cos\varphi\sqrt{Q}}{\sin\varphi}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{Q}$$

$$x'' = \frac{\cos\varphi\sqrt{Q}}{\sin\varphi}\cdot\frac{-1-\cos\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{Q}$$

Oder wenn man die Formeln (25), (21), (24) anwendet

$$x' = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{Q} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q}$$

$$x'' = -\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = -\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{Q} = -\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q}$$

Die Formeln zur Berechnung der Wurzeln sind also:

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{Q}}{P},\quad x' = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q},\quad x'' = -\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q}}$$

Beispiel. $x^2 + 21{,}8\,x = 1113{,}2$

Aus $P = 21{,}8$ und $Q = 1113{,}2$ findet man

$$\begin{array}{ll}
\log\sqrt{Q} = 1{,}5232866 & \log\sqrt{Q} = 1{,}5232866 \\
\log 2 = 0{,}3010300 & \log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 9{,}8605287 - 10 \\
\text{CD.}\log P = 8{,}6615435 - 10 & \log x' = 1{,}3838153 \\
\log\operatorname{tg}\varphi = 10{,}4858601 - 10 & x' = 24{,}2 \\
\varphi = 71^0\,54'\,29'',32 & \log(-x'') = 1{,}6627579 \\
\frac{\varphi}{2} = 35^0\,57'\,14'',66 & x'' = -46
\end{array}$$

Eine Probe der Rechnung giebt der aus der Theorie der Gleichungen bekannte Satz, dass die Summe der beiden Wurzeln absolut dem Coefficienten des zweiten Gliedes, ihr Product aber dem dritten Gliede gleich ist. So ist auch hier

$$x' + x'' = -21{,}8 \text{ und } x' \cdot x'' = -1113{,}2.$$

§ 68. Die Gl. (II) $\boldsymbol{x^2 - Px = Q}$ hat die Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2} P \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4Q}{P^2}}\right)$$

Man sieht, dass die erste Wurzel x′ das Entgegengesetze von der zweiten Wurzel x″ der Gl. (I) ist, und ebenso die zweite Wurzel x″ dieses Falles das Entgegengesetzte von der ersten Wurzel x′ dort bildet. Man kann also die Formeln der Gl. (I) hier benutzen, wenn man sowol ihre Vorzeichen mit einander, als auch x′ mit x″ verwechselt. Indem nun der Hilfswinkel wie vorhin bestimmt wird, erhält man die Formeln:

$$\boldsymbol{tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{Q}}{P},\ x' = cotg\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q},\ x'' = -tg\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q}}.$$

Beispiel. $x^2 - \frac{29222}{11163}x = \frac{788063}{33489}$

$\log P = 0{,}4179290$	$\frac{\varphi}{2} = 37^0\,27'\,0'',34$
$\log \sqrt{Q} = 0{,}6858294$	$\log \mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2} = 0{,}1158029$
$\log \mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}5689304$	$x' = 6{,}3333333$
$\varphi = 74^0\,54'\,0'',68$	$x'' = -3{,}7155778$

Zur Prüfung der Rechnung hat man wie in (§ 67)

$$\log(x' + x'') = 0{,}4179290 = \log P$$
$$\log x' + \log x'' = 1{,}3716588 = \log Q$$

indem man statt der Zahlen selbst ihre Logarithmen mit einander vergleicht.

§ 69. Die Gl. (III) $\boldsymbol{x^2 + Px = -Q}$ hat die Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2} P \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Q}{P^2}}\right)$$

Da immer $\frac{4Q}{P^2} < 1$ sein muss, wenn x reell bleiben soll, so kann man setzen $\sin^2\varphi = \frac{4Q}{P^2}$, also $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{Q}}{P}$ und $\tfrac{1}{2}P = \frac{\sqrt{Q}}{\sin\varphi}$. Folglich ist

$$x = \frac{\sqrt{Q}}{\sin\varphi}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\right) = -\frac{\sqrt{Q}}{\sin\varphi}(1 \mp \cos\varphi)$$

Hieraus erhält man ebenso wie in § 67 die Lösungen

$$\boldsymbol{sin\,\varphi = \frac{2\sqrt{Q}}{P},\ x' = -tg\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q},\ x'' = -cotg\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q}},$$

Beispiel. $x^2 + 11x = -10.$

Aus $P = 11$ und $Q = 10$ findet man:

$\log \sin\varphi = 9{,}7596371$	also $\varphi = 35^0\,5'\,48'',46$
$\log(-x') = 0{,}9999999 - 1$	$x' = -1$
$\log(-x'') = 1{,}0000001$	$x'' = -10$

Probe: $x' + x'' = -11$ und $x'x'' = 10.$

§ 70. Wenn die Wurzeln einer quadratischen Gl. imaginär werden, also $\frac{4Q}{P^2} > 1$ ist, so giebt sich die Unmöglichkeit ihrer Auflösung bei der trigon. Rechnung dadurch zu erkennen, das man für $\sin\varphi$ aus $\frac{2\sqrt{Q}}{P}$ einen Werth grösser als 1 erhält. Solcher Art ist z. B. die Gl. $x^2 + 5x = -9$. Wenn dagegen $\frac{4Q}{P^2} = 1$ ist, so ist auch $\sin\varphi = 1$, also $\varphi = 90^0$ und $\frac{\varphi}{2} = 45^0$. Da nun $\operatorname{tg} 45^0 = 1 = \operatorname{cotg} 45^0$, so hat die Gl. in diesem Falle zwei gleiche Wurzeln, z. B. für

$$x^2 + 26x = -169 \text{ ist } x' = x'' = -13.$$

§ 71. Die Gl. (IV) $\mathbf{x^2 - Px = -Q}$ hat die Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2} P \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Q}{P^2}}\right)$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem entsprechenden der Gl. (III) in § 69 zeigt, dass die erste und die zweite Wurzel hier bezüglich der zweiten und der ersten Wurzel dort absolut gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt ist. Da somit dieselben Formeln, unter Verwechselung sowol von x' mit x'' als der Vorzeichen mit einander, hier ebenfalls gelten, während der Hilfswinkel ebenso wie dort bestimmt wird, so hat man

$$\boldsymbol{\sin\varphi = \frac{2\sqrt{Q}}{P}}, \quad \boldsymbol{x' = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q}}, \quad \boldsymbol{x'' = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{Q}}.$$

Beispiel. Für $x^2 - 10{,}83945\,x = -26{,}991104$ ist

$\varphi = 73^0\,27'\,13'',71 \qquad x' = 6{,}9632 \qquad x'' = 3{,}87625.$

Functionen überstumpfer und negativer Winkel.

§ 72. Die häufige Anwendung, welche die Goniometrie in der höhern Mathematik findet, hat es nothwendig gemacht, die Begriffe der trigon. Functionen auch auf Winkel über 180°, ja selbst auf mehre ganze Umfänge eines Kreises, sowie auf negative Winkel auszudehnen.

Es sei der mit der Einheit als Radius beschriebene Kreis durch die beiden Durchmesser AE und CG in seine vier Quadranten AC, CE, EG, GA getheilt. Bezeichnen B, D, F, H beliebige Lagen des den ganzen Kreisumfang durchlaufenden Radius in den verschiedenen Quadranten, so ist (§ 11) sin AB = BP, cos AB = OP, sin ACD = DQ, cos ACD = OQ, ferner sin ACF = FQ, cos ACF = OQ, endlich sin ACEH = HP und cos ACEH = OP. Da der Sinus im ersten und zweiten Quadranten positiv ist, und die Linien PH und FQ in Bezug auf den festliegenden Durchmesser AE eine entgegengesetzte Lage zu den Linien BP und DQ haben, so ist der Sinus eines Winkels, welcher sich bis in den dritten oder vierten Quadranten hinein erstreckt, negativ. Weil ferner die Linien OP und OQ in Bezug

auf den Mittelpunkt O einander entgegengesetzt liegen, und der Cosinus im ersten Quadranten positiv ist, so ist der Cosinus auch im vierten Quadranten positiv, dagegen im zweiten und dritten negativ. Aus den Vorzeichen des Sinus und Cosinus in den verschiedenen Quadranten folgt endlich, dass die Tangenten und Cotangenten im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ sind. Auch ergeben sich hier durch dieselben Betrachtungen wie in § 22 bis 25 die Gränzwerthe der Functionen für alle Winkel bis 360^0, nämlich

	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Sinus	0	1	0	-1	0
Cosinus	1	0	-1	0	1
Tangente	0	$+\infty-$	0	$+\infty-$	0
Cotangente	$+\infty$	0	$-\infty+$	0	$-\infty$

§ 73. Die Functionen überstumpfer Winkel lassen sich sehr leicht auf die Functionen spitzer Winkel zurückführen, und daher ebenfalls durch die Tafeln bestimmen.

Es sei (Fig. § 72) $AOB = DOE = EOF = AOH$, folglich auch $BP = DQ = FQ = HP$ und $OP = OQ$. Bezeichnen wir den überstumpfen, bis in den dritten Quadranten sich erstreckenden Winkel AOF mit A^{III}, so ist $A^{III} - 180^0$ offenbar gleich dem spitzen Winkel AOB und man findet daher unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Functionen die Formeln:

1) $\sin A^{III} = -\sin(A^{III} - 180^0)$ 2) $\cos A^{III} = -\cos(A^{III} - 180^0)$
also 3) $\operatorname{tg} A^{III} = \operatorname{tg}(A^{III} - 180^0)$ 4) $\operatorname{cotg} A^{III} = \operatorname{cotg}(A^{III} - 180^0)$

Z. B. $\sin 196^0 = -\sin(196^0 - 180^0) = -\sin 16^0$. Ebenso ist
$\cos 228^0 = -\cos 48^0$, $\operatorname{tg} 234^0 = \operatorname{tg} 54^0$, $\operatorname{cotg} 216^0 = \operatorname{cotg} 36^0$.

Um $\sin 196^0$ zu erhalten, sucht man in den Tafeln $\sin 16^0$ und nimmt diesen negativ; man findet $\sin 196^0 = -0{,}2756374$.

Setzt man den überstumpfen, bis in den vierten Quadranten sich erstreckenden Winkel $AOH = A^{IV}$, so ist der Winkel $360^0 - A^{IV} = AOB$, und es ergeben sich aus der Figur unmittelbar die Beziehungen
$\sin A^{IV} = -\sin(360^0 - A^{IV})$ und $\cos A^{IV} = \cos(360^0 - A^{IV})$.

Da der Winkel $360^0 - A^{IV}$ spitz ist, so ist zufolge § 5
$\sin(360^0 - A^{IV}) = \cos[90^0 - (360^0 - A^{IV})] = \cos(A^{IV} - 270)$
und ebenso $\cos(360^0 - A^{IV}) = \sin(A^{IV} - 270^0)$, folglich ist

5) $\sin A^{IV} = -\cos(A^{IV} - 270^0)$ 6) $\cos A^{IV} = \sin(A^{IV} - 270^0)$ also
7 ($\operatorname{tg} A^{IV} = -\operatorname{cotg}(A^{IV} - 270^0)$ 8) $\operatorname{cotg} A^{IV} = -\operatorname{tg}(A^{IV} - 270^0)$

Z. B. $\sin 346^0 = -\cos(346^0 - 270^0) = -\cos 76^0$. Ebenso ist
$\cos 293^0 = \sin 23^0$, $\operatorname{tg} 308^0$, $\operatorname{tg} 308^0 = -\operatorname{cotg} 38^0 = -\operatorname{tg} 31^0$.

§ 74. Soll umgekehrt aus der gegebenen Function eines überstumpfen Winkels durch die Tafel der Winkel bestimmt werden, so dienen hierzu die nachstehenden, unmittelbar aus der Figur (§ 72) sich ergebenden Formeln, wenn der spitze Winkel $AOB = AOH = a$ gesetzt wird.

1) $\mathbf{\sin (a + 180^0) = -\sin a}$ 2) $\mathbf{\cos (a + 180^0) = -\cos a}$

also 3) $\mathbf{tg (a + 180^0) = tg\, a}$ 4) $\mathbf{cotg (a + 180^0) = cotg\, a}$

5) $\mathbf{\sin (360^0 - a) = -\sin a}$ 6) $\mathbf{\cos (360^0 - a) = \cos a}$

also 7) $\mathbf{tg (360^0 - a) = -tg\, a}$ 8) $\mathbf{cotg (360^0 - a) = -cotg\, a}$

Hier stellt $a + 180^0$ einen Winkel zwischen 180^0 und 270^0, dagegen $360^0 - a$ einen Winkel zwischen 270^0 und 360^0 vor.

Da der absolute Zahlenwerth einer und derselben Function sehr vielen Winkeln angehört (§ 8, § 73, § 78), so pflegt man zur unzweideutigen Bestimmung des gesuchten Winkels nicht blos von der gegebenen Function, sondern zugleich noch von einer zweiten Function desselben Winkels anzugeben, ob sie positiv oder negativ sei.

Sei gegeben $\log \sin x = 9{,}7893420\,(n)$ und $\cos x$ negativ. Hiernach stellt x einen Winkel vor, dessen Sinus sowol als Cosinus negativ ist, und dieses kann (§ 8 und § 72) nur der Fall sein bei einem Winkel im dritten Quadranten. Da man nun in der Tafel für den gegebenen log sin den Winkel von 38^0 antrifft, und $\sin a = -\sin (a + 180^0)$ ist, so ist $x = 38^0 + 180^0 = 218^0$.

Sei gegeben $\log \cos x = 9{,}4190795$ und $\sin x$ negativ. Ein Winkel, dessen Cosinus positiv und dessen Sinus negativ ist, kann nur im vierten Quadranten liegen. Die Tafel giebt für den vorgelegten log cos den Winkel $74^0\,47'$, und weil $\cos a = \cos (360^0 - a)$, so ist $x = 360^0 - 74^0\,47' = 285^0\,13'$.

Auf dieselbe Weise findet man:

$\log \sin x = 9{,}9240827\,(n)$ und $\cos x$ positiv, $x = 302^0\,54'$
$\log \cos x = 9{,}4190795\,(n)$ und $\sin x$ negativ, $x = 254^0\,47'$
$\log tg\, x = 9{,}6990006$ und $\sin x$ negativ, $x = 206^0\,34'$
$\log cotg\, x = 10{,}1368805\,(n)$ und $\cos x$ positiv, $x = 323^0\,53'$

§ 75. Ein negativer Winkel entsteht dadurch, dass der bewegliche Radius von der ursprünglichen Lage aus nach der entgegengesetzten Richtung von jener Seite sich dreht, nach welcher hin die als positiv betrachteten Winkel liegen. Beschreibt man also (Fig. § 72) durch entgegengesetzte Drehungen des Radius AO vom Anfangspunkte A aus die beiden gleichen Winkel $AOB = +a$ und $AOH = -a$, so ergiebt sich sogleich, dass

$\mathbf{\sin (-a) = -\sin a}$, $\mathbf{\cos (-a) = \cos a}$, also
$\mathbf{tg (-a) = -tg\, a}$, $\mathbf{cotg (-a) = -cotg\, a}$.

§ 76. Wird bei der Beschreibung der positiven Winkel die Drehung des beweglichen Radius über 360^0 hinaus fortgesetzt, so nimmt derselbe alle Lagen wieder an, welche er beim ersten Durchlaufen des Kreises eingenommen hat, und daher kommen für die Winkel $a + 360^0$, $a + 2.360^0$ u. s. w. dieselben Functionen zum Vorschein, wie für den Winkel a, welcher kleiner als 360^0 ist. Ebenso bleiben die Functionen des Winkels a unverändert, wenn man diesen um eine beliebige Anzahl von 360^0 vermindert. Man hat daher, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$\mathbf{\sin(a \pm n \,.\, 360^0) = \sin a, \qquad \cos(a \pm n \,.\, 360^0) = \cos a}$$
$$\mathbf{tg(a \pm n \,.\, 360^0) = tg\, a, \qquad cotg(a \pm n \,.\, 360^0) = cotg\, a}$$

Z. B. $\sin 400^0 = \sin(360^0 + 40^0) = \sin 40^0$

$\cos 785^0 = \cos(2 \,.\, 360^0 + 65^0) = \cos 65^0$

$\sin 1029^0 = \sin(1029^0 - 2 \,.\, 360^0) = \sin 309^0 = -\cos 39^0$

$\sin(-1029^0) = -\sin 1029^0 = \cos 39^0 = \sin 51^0$

$\cos(60^0 - 360^0) = \cos(-300^0) = \cos 300^0 = \sin 30^0 = \cos 60^0$

§ 77. Nach den vorstehenden, auf alle möglichen Winkel erweiterten Begriffsbestimmungen der Functionen drücken der Sinus und Cosinus eines beliebigen Winkels ebenfalls immer die Katheten eines rechtw. Dreiecks aus, so dass die Gl. (§ 13, 3) $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ und folglich auch die hieraus in Verbindung mit den Ausdrücken

$$tg\, a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad \text{und} \quad cotg\, a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

abgeleiteten Formeln in § 14 für alle denkbaren Winkeln Giltigkeit haben. Dass ferner die Formeln (§ 16, § 17) für $\sin(a \pm b)$ und $\cos(a \pm b)$ und somit auch alle folgenden aus ihnen abgeleiteten Formeln (§ 18 bis § 21) ebenfalls für überstumpfe und negative Winkel wahr bleiben, lässt sich auf dieselbe Weise zeigen, wie die Giltigkeit jener Formeln in Bezug auf stumpfe Winkel in § 17 nachgewiesen worden ist.

§ 78. Wir wollen hier noch untersuchen, welche Winkel dieselbe trigon. Function haben.

1) Sei gegeben $\sin x = m$, so ist zunächst x ein spitzer Winkel. Derselben Gleichung genügt aber auch der Winkel $180^0 - x$, und ebenso gehören zu dem gegebenen Sinus alle Winkel, welche entstehen, wenn man 360^0 beliebige Male zu jedem der beiden Winkel x und $180^0 - x$ zuzählt oder davon abzählt. Man hat also, wenn $n = 1, 2, 3 \ldots$ ist, folgenden Winkel:

$$x, \quad 180^0 - x, \quad x \pm n.\, 360^0, \quad 180^0 - x \pm n.\, 360^0$$

Für $\log \sin x = 9{,}9185742$ ergeben sich die Werthe 56^0, 124^0, ferner wenn $n = 1$ ist, 416^0, -304^0, 484^0, -236^0, worauf man weiter $n = 2$, $= 3 \ldots$ setzen kann.

2) Für $\sin x = -m$ ist zunächst x ein Winkel zwischen 180^0 und 270^0. Der nächstfolgende Winkel liegt, wie Fig. § 72 zeigt, um ebenso viel unter 360^0, als x über 180^0 liegt, d. h. um $x - 180^0$ unter 360^0; folglich ist derselbe $360^0 - (x - 180^0) = 540^0 - x$. Die Winkel sind also diese:

$$x, \quad 540^0 - x, \quad x \pm n \,.\, 360^0, \quad 540^0 - x \pm n \,.\, 360^0$$

3) Für $\sin x = 0$ hat x die Werthe

$$0^0, \quad 180^0, \quad \pm n \,.\, 360^0, \quad 180^0 \pm n \,.\, 360^0$$

4) Für $\cos x = \pm m$ ist zunächst x entsprechend ein spitzer oder ein stumpfer Winkel, und man hat daher (§ 74, 6)

$$x,\ 360^\circ - x,\ x \pm n.360^\circ,\ 360^\circ - x \pm n.360^\circ$$

5) Für $\cos x = 0$ hat x die Werthe

$$90^\circ,\ 270^\circ,\ 90^\circ \pm n.360^\circ,\ 270^\circ \pm n.360^\circ$$

6) Wenn $\mathrm{tg}\, x = \pm m$ oder $\mathrm{cotg}\, x = \pm m$, so ist x spitz oder stumpf, und man hat (§ 74, 3)

$$x,\ x + 180^\circ,\ x \pm n.360^\circ,\ x + 180^\circ \pm n.360^\circ$$

7) Für $\mathrm{tg}\, x = 0$ ist x gleich 0° und $\pm n.180^\circ$

8) Für $\mathrm{cotg}\, x = 0$ ist x gleich 90° und $90^\circ \pm n.180^\circ$

Aufgaben zur Goniometrie.

§ 79. *Aufgaben, welche die Erklärungen der Functionen und die goniometrischen Formeln, sowie die Bestimmung der Functionen und der Winkel ohne Hilfe der Tafel betreffen* (§ 3 bis § 33).

1) ***Wenn zwei Winkel zusammen einen Rechten ausmachen, wie gross ist die Summe ihrer Supplemente?***

2) ***Die Sinusse zweier Winkel sind einander gleich und der eine Winkel heisst a; wie heisst der andere?***

3) ***Der Sinus eines Winkels, welcher den halben Quadranten um ebenso viel übertrifft, als ihm an 90° fehlt, ist gleich dem*** $\cos x$; ***wie gross ist*** x?

4) ***Nachstehende Functionen durch Functionen von Winkeln unter 45° auszudrücken:*** 1) $\sin 74^\circ 41' 50''$ 2) $\sin 124^\circ 40'$ 3) $\sin 156^\circ 30'$ 4) $\cos 75^\circ 5''$ 5) $\cos 125^\circ$ 6) $\cos 170^\circ 3' 35''$ 7) $\mathrm{tg}\, 57^\circ 46'$ 8) $\mathrm{tg}\, 95^\circ 55' 6''$ 9) $\mathrm{tg}\, 178^\circ 33''$ 10) $\mathrm{cotg}\, 52^\circ 48'$ 11) $\mathrm{cotg}\, 134^\circ$ 12) $\mathrm{cotg}\, 136^\circ 5'$

5) ***Man bestimme den Zahlenwerth der Ausdrücke***

$$x = \frac{3 \cos a\, \mathrm{cotg}\, (90^\circ - a)}{\mathrm{tg}\, a \sin (90^\circ - a)},\quad y = \frac{\mathrm{tg}\, a \sin (a - 90^\circ)\, \mathrm{cotg}\, a}{\cos a\, \mathrm{tg}\, (a - 90^\circ)\, \mathrm{tg}\, (180^\circ - a)}$$

6) $$x = \frac{\sin (a - 90^\circ)\, \mathrm{tg}\, (180^\circ - b)}{\mathrm{cotg}\, (b - 90^\circ) \cos (180^\circ - a)} + \frac{\mathrm{tg}\, m \sin (m - 90^\circ)}{\cos (180^\circ - m)\, \mathrm{cotg}\, (m - 90^\circ)}$$

7) $$x = \frac{\sin 13^\circ\, \mathrm{cotg}\, 97^\circ}{\mathrm{cotg}\, 83^\circ \cos 103^\circ} - \frac{\sin 54^\circ \cos 105^\circ\, \mathrm{tg}\, 127^\circ}{\sin 15^\circ\, \mathrm{cotg}\, 37^\circ \cos 144^\circ}$$

8) ***Gegeben*** $2a + b + c = 180^\circ$ ***und*** $\log \cos \frac{1}{2}(b + c) = m$; ***gesucht*** $\sin a$.

9) ***Einem Winkel*** A ***fehlt an 45° ebenso viel, als ein anderer Winkel*** B ***darüber mehr hat. Wenn nun*** $\log \sin A = m$, ***und*** $\mathrm{tg}\, A = n$ ***ist, welches ist dann*** $\cos B$ ***und*** $\log \mathrm{cotg}\, B$?

10) ***Das Product sowol aus den Tangenten als aus den Cotangenten zweier spitzen Winkel ist gleich*** 1; ***der eine Winkel ist*** a, ***welches ist der andere?***

11) *Gegeben* $2a + b + 2c = 180^0$ *und* $\operatorname{cotg}(a + c) = m$, *gesucht* $\operatorname{tg} b$.

12) *Gegeben* $\operatorname{cotg}(a + 45^0) = m$, *gesucht* $\operatorname{cotg}(45^0 - a)$.

13) *Gegeben* $\operatorname{cotg} a = \frac{m}{n} - p$, *gesucht* $\log \operatorname{tg} a$.

14) *Gegeben* $\sin a = \frac{1-x}{1+x}$, *gesucht* $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

15) *Wenn* $\sin a = \frac{3}{5}$ *ist; wie findet man aus den Resultaten der vorigen Aufgabe die Werthe von* $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$?

16) *Es ist ein spitzer Winkel* a *gegeben; man soll einen zweiten spitzen Winkel* x *so bestimmen, dass die Summe der Quadrate der Sinusse oder der Cosinusse beider Winkel gleich* 1 *sei.*

17) $\operatorname{tg} 52^0 . \operatorname{tg}(45^0 - x) = 1$, *gesucht* x.

18) *Gegeben* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, *gesucht* $\cos x$.

19) *Gegeben* $\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \sqrt{2}$, *gesucht* $\sin x$.

20) $x = \frac{\operatorname{tg}(180^0 - a)\operatorname{tg}(a - 90^0)}{\operatorname{cotg}(b - 90^0)\operatorname{cotg}(180^0 - b)}$, $y = \frac{\operatorname{cotg} 55^0 \operatorname{cotg} 35^0}{\operatorname{tg} 47^0 \operatorname{tg} 43^0}$

21) $x = \log \sin(a - 90^0) - \log \cos(180^0 - a)$,
$y = \log \operatorname{tg}(180^0 - a) - \log \operatorname{cotg}(a - 90^0)$,
$z = \log \operatorname{tg}(180^0 - a) + \log \operatorname{tg}(a - 90^0) + \log \operatorname{cotg}(a - 90^0) + \log \operatorname{cotg}(180^0 - a)$

22) *Wie heisst der Winkel, dessen Sinus und Cosinus gleiche, aber entgegengesetzte Werthe haben?*

23) *Die Tangente der Summe zweier Winkel* a *und* b *sei gleich* s, *und* $\operatorname{tg} a = m$; *gesucht wird* $\operatorname{tg} b$.

24) *Die beiden Quotienten in Producte zu verwandeln:*
$x = \frac{\operatorname{cotg}(a - 90^0)\operatorname{tg}(180^0 - b)}{\operatorname{cotg}(180^0 - a)\operatorname{tg}(b - 90^0)}$, $y = \frac{\operatorname{cotg} 55^0 \operatorname{tg} 47^0}{\operatorname{cotg} 35^0 \operatorname{tg} 43^0}$

25) $x = \log \operatorname{cotg} 35^0\, 4' + \log \operatorname{cotg} 54^0\, 56'$
$y = \log \sin 53^0\, 13'\, 12'' - \log \cos 143^0\, 13'\, 12''$
$z = \log \operatorname{tg} 127^0\, 3'\, 15'' + \log \operatorname{cotg} 52^0\, 56'\, 45''$

26) *Aus* $\sin a = 0{,}913$ *die übrigen Functionen von* a *in drei Decimalstellen zu berechnen.*

27) *Aus* $\cos a = -0{,}7071$ *zu berechnen* $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$

28) $\operatorname{tg} a = 0{,}0174551$; *gesucht* $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{cotg} a$

29) $\operatorname{cotg} a = -0{,}602$; *gesucht* $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$

30) *Aus* $\cos 45^0$ *zu berechnen* $\sin 11^0\, 15'$

31) *Gegeben* $\operatorname{tg} 36^0 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}$, gesucht $\operatorname{tg} 54^0$

32) $\operatorname{tg} a = 1/7$ *und* $\operatorname{tg} b = 1/3$; *gesucht der Winkel* $a + 2b$

33) $\sin(a - b) = \cos(a + b) = 1/2$, *gesucht* a *und* b.

34) *Gegeben* $\cos a = 4/5$, *gesucht* $\operatorname{cotg} a$

35) *Die Tangenten zweier Winkel sind gleich* 0,5 *und gleich* 10; *wie gross ist die Tangente der Summe beider Winkel?*

36) *Gegeben* $\operatorname{tg} a = 3{,}1246$, *gesucht* $\operatorname{tg}(a + 45^0)$.

37) *Aus* $\operatorname{tg} x = 7$ *zu finden* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

38) *Gegeben* $\sin a = 0{,}2$, *gesucht* $\sin\frac{a}{2}$ und $\cos\frac{a}{2}$.

39) *Gegeben* $\cos a = \frac{25}{144}$, *gesucht* $\cos\frac{a}{2}$.

40) $\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a = 4$, *wie gross ist* $\operatorname{tg} a$?

41) *Aus* $\sin(a + b)\operatorname{tg} c = \cos(a + b)$ *den Winkel* $a + b + c = x$ *zu bestimmen.*

42) *Wenn man die Anzahl Grade eines Winkels* x *das eine Mal mit seinem Sinus, das andere Mal mit seinem Cosinus multiplicirt, so erhält man gleiche, aber entgegengesetzte Producte. Welchen Werth hat* x?

43) *Aus den Functionen der Winkel* 45^0 *und* 30^0 *den* $\cos 75^0$ *zu berechnen.*

44) $\sin 60^0$ *nach Formel* § 18, 21 *zu berechnen.*

45) *Aus* $\sin 45^0$ *und* $\cos 45^0$ *zu finden* $\sin 90^0$ *und* $\cos 90^0$.

46) *Die beiden Ausdrücke* $\frac{\sqrt{3} \pm 1}{2\sqrt{2}}$ *geben die Werthe für* $\sin 75^0$ *und* $\cos 75^0$; *hieraus* $\sin 165^0$ *zu finden* (§ 16, 16).

47) $\cos 15^0$ *mittels der Formeln* § 17, 19 *und* § 18, 26 *zu bestimmen.*

48) *Aus* $\operatorname{tg} 45^0$ *und* $\operatorname{tg} 30^0$ *zu finden* $\operatorname{tg} 75^0$ *und* $\operatorname{tg} 15^0$.

49) $\sin a = m \sin b$ *und* $\operatorname{tg} a = n \operatorname{tg} b$; *man soll* $\sin a$ *und* $\sin b$ *durch* m *und* n *ausdrücken.*

50) *Die* $\operatorname{tg} 90^0$ *und* $\operatorname{cotg} 90^0$ *aus der Tangente und Cotangente von* 60^0 *und* 30^0 *zu berechnen.*

51) *Aus den Functionen der Winkel von* 60^0 *und* 72^0 *soll man* $\sin 78^0$ *und* $\cos 78^0$ *ableiten.*

52) $a + b = 45^0$ *und* $\operatorname{tg} a = 1/2$, *gesucht* $\operatorname{tg} b$.

53) *Gegeben* $\operatorname{tg} a = 1/2$, *gesucht* $\operatorname{tg}(a + 45^0)$.

54) $\cos a = 1/2$, *gesucht* $\cos 2a$ *und* $\operatorname{tg} 2a$.

55) $\cos a = 1/3$, $\cos b = 1/5$; *gesucht* $\sin(a + b)$ *und* $\cos(a - b)$.

56) $\operatorname{cotg} a = 3/4$, $\operatorname{cotg} b = 1/7$; *gesucht Winkel* $a + b$.

57) $\sin a \cos a = m$, *gesucht* $\sin a$ *und* $\cos a$.

58) $m \sin a = n \cos^2 a$, *gesucht* $\operatorname{tg} a$.

59) *Man soll* $\sin 90^0$ *zuerst aus* $\sin 30^0$ *und* $\cos 30^0$, *hierauf blos aus* $\sin 30^0$ *berechnen.*

60) *Aus* $\sin 30^0$ *und* $\cos 30^0$ *zu finden* $\cos 90^0$.

61) *Aus* $\operatorname{tg} a = 1/3$, $\operatorname{tg} b = 1/5$, $\operatorname{tg} c = 1/7$, $\operatorname{tg} d = 1/8$ *den Winkel* $a + b + c + d = x$ *zu bestimmen.*

62) *Aus der Gleichung* $\sin(a + b) + \sin(a - b) = \cos(a + b) + \cos(a - b)$ *den Winkel* a *zu bestimmen.*

63) *Aus* $\sin(a+b) - \sin(a-b) = \operatorname{tg} 60^0 \sin b$ *soll* a *gefunden werden.*

64) $\sin a + \sin b = m$ *und* $\sin a \sin b = n$, *gesucht* $\sin a$ *und* $\sin b$.

65) $\operatorname{tg} {}^1/_2 (a+b)$ *durch* sin *und* cos *von* a *und* b *auszudrücken* (§ 19).

66) *Für den Ausdruck* $\operatorname{cotg} {}^1/_2 (a+b)$ *einen andern zu finden, welcher nur den Sinus und Cosinus von* a *und* b *enthält* (§ 20).

67) $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$ *durch* $\operatorname{tg} a$ *und* $\operatorname{tg} b$ *auszudrücken.*

§ 80. *Aufgaben, welche mit Hilfe der Tafeln gelöst werden* (§ 34 bis § 58).

68) *Man bestimme* log sin, log cos, log tg, log cotg *von* $102^0\,22'\,56'',8$ *auf zwei Arten.*

69) $\sin x = 0{,}8731464$.

70) *Man bestimme* x, y, z *auf zwei Arten aus den Gleichungen* $\log(-\cos x) = 0{,}9201496 - 1$, $\log(-\operatorname{tg} y) = 0{,}3176782$, $\log(-\operatorname{cotg} z) = 0{,}8750611 - 1$.

71) *Gegeben* $\sin a = 0{,}433397$; *gesucht* $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

72) $\cos a = -0{,}9781475$; *gesucht* $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

73) $\operatorname{tg} m = \pm 0{,}371571$; *gesucht* $\sin m$, $\cos m$, $\operatorname{cotg} m$.

74) *Von zwei Winkeln ist der eine um so viel grösser als* 90^0, *um wie viel der andere kleiner als* 90^0 *ist, und der* cos. *des letztern Winkels beträgt* 0,23; *wie gross ist* log cos *des erstern?*

75) *Gegeben* $a = 180^0 - (b+c)$ *und* $\operatorname{tg} {}^1/_2 (a+b) = 0{,}5483013$; *gesucht* $\log \operatorname{cotg} {}^1/_2 c$.

76) $\operatorname{cotg}(45^0 - a) = \sqrt{3}$, *gesucht* $\log \operatorname{tg}(45^0 + a)$.

77) *Wenn* a, b, c *die Winkel eines Dreiecks sind, und* $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b+c) = 1{,}3168521$ *ist; wie gross ist* a?

78) *Man bestimme aus* $\log \operatorname{cotg} x = 1{,}0031187\,(n)$ *den Winkel* x *und hierauf* log sin x, log cos x, log tg x.

79) *Wenn* $a + 2b = 180^0$ *und* $\log \cos \frac{a}{2} = 0{,}6389576 - 1$; *welchen Werth hat* sin b?

80) *Welcher Winkel entspricht der Tangente, deren Zahlenwerth* x *durch die Gleichung* $x^2 + 3x = -2$ *gegeben ist?*

81) *Wenn* log tg *des einen von zwei Winkeln, die um* 90^0 *differiren, gleich* 0,5 *ist; wie heisst* log cotg *des andern Winkels?*

82) *Wenn* $\log \operatorname{cotg} a = \log \sin b = \log(-\operatorname{tg} c) = \log(-\cos d) = 0$ *ist; wie gross sind die Winkel* a, b, c, d?

83) $\cos x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, *wo* $a = \pm 10$, $b = -7$, $c = 13$.

84) $\log \sin(a + 90^0) = 0{,}9904044 - 1$, *gesucht* cos a.

85) *Aus* $\sin^2 x = 0{,}5$ *soll* x *bestimmt werden.*

86) $\operatorname{tg}^2 x = 0{,}2955551$.

87) *Von welchem Winkel ist* $\log \operatorname{tg}$ *gleich* -3?

88) $\operatorname{tg} 2a = 3 \operatorname{tg} a$, *gesucht der Winkel* a

89) *Welcher Winkel* x *genügt den beiden Gleichungen* $x \operatorname{tg} x = 17{,}320506$ *Grade und* $x \operatorname{cotg} x = 51{,}961524$ *Grade?*

90) $\cos x = \frac{\cos 143^\circ 28' 59''}{\sin 109^\circ 2' 28''}$

91) $\log \operatorname{tg} 2a = 0{,}4771213$, *gesucht* $\operatorname{tg} a$

92) *Man berechne* $x = \frac{0{,}1}{\operatorname{tg} 15' 33'',5}$

93) $\log(\sin 47^\circ + \sin 24^\circ)$ *zu finden* (§ 19, 32).

94) $\log(\cos 74^\circ + \cos 56^\circ)$ *zu finden.*

95) $x = \log(\cos 74^\circ - \cos 56^\circ)$

96) $x = \log(\operatorname{tg} 85^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ)$ (§ 20, 47).

97) *Aus* $\operatorname{tg} x = 3$ *soll gefunden werden* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ *zuerst mittels der Tafel, dann durch eine Formel, endlich geometrisch* (Legendre § 97).

98) *Man bestimme* x *und* y *aus den Gleichungen*

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} 51^\circ 31' 47'',9 \operatorname{cotg} 48^\circ 50' 13'' \cos 7^\circ 36' 15''$$

$$\cos y = \frac{\sin 51^\circ 31' 47'',9 \sin 48^\circ 50' 13'' \sin(45^\circ + x)}{\cos 45^\circ \cos x}$$

99) $x = 857 \sin 102^\circ 22' 56'',8 + 1098 \cos 149^\circ 58' 33'',2$

100) $\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{0{,}004}}{\cos 30''}$ *und* $x = \frac{120'',2}{\sqrt{0{,}004}} \sin 30'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} a$; *gesucht der Winkel* x.

101) *Von welchem Winkel ist die Cotangente so gross als das Doppelte seines Sinus?*

102) *Die Gleichung* $\operatorname{tg} x = \cos x$ *aufzulösen?*

103) $x = \log(\operatorname{tg} 85^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ)$ (§ 20, 46).

104) $x = \log(\operatorname{cotg} 50^\circ - \operatorname{cotg} 9^\circ)$

105) *Es ist* (§ 16, § 17, § 29) $\sin(45^\circ \pm a) = (\cos a \pm \sin a)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, *also* $\cos a \pm \sin a = \sin(45^\circ \pm a)\sqrt{2}$. *Hiernach berechne man*

$$x = \log(\cos 65^\circ + \sin 65^\circ) \text{ und } y = \log(\cos 25^\circ - \sin 25^\circ).$$

106) *Die gegenüberliegenden Winkel eines dem Kreise eingeschriebenen Vierecks seien* m *und* x, p *und* y. *Wenn nun* $\cos\frac{m}{2} = 0{,}3090169$ *und* $\operatorname{tg} p = -0{,}2125566$ *ist, welche Werthe haben die Winkel* x *und* y?

107) *Die Höhe des freien Falles aller Körper im leeren Raume in einer Secunde ist unter der geogr. Breite* b *in englischen Zollen gleich* $193{,}033088 - 0{,}5006307 \cos 2b$. *Wie gross ist sie unter der Breite von* $56^\circ 39' 4'',5$?

108) *Die Schwere eines Körpers ist am Aequator am kleinsten und nimmt nach den Polen hin zu. Wenn man nun das Verhältniss der Schwere unter der geogr. Breite* b *zur Schwere unter dem Aequator gleich* $1 : \sqrt{1 - 0{,}0065467149 \sin^2 b}$ *setzt, wie viel Mal ist alsdann die Schwere unter der Breite* $83^\circ 50' 30''$ *grösser als unter der Breite* $45^\circ 42''$?

109) *Man findet die Entfernung* E *zweier Orte auf der Erde in geogr. Meilen, wenn man zuerst mittels der Gleichung*

$$\cos\varphi = \sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos(a' - a)$$

wo a, b *die Länge und Breite des einen,* a' *und* b' *die des andern Ortes sind, den Winkel* φ *in Graden und Decimaltheilen des Grades und hierauf* $E = 15\,\varphi$ *berechnet. Wie weit ist demnach Leipzig unter* $30^0\,2'$ *L. und* $51^0\,20'$ *B. von Wien unter* $34^0\,3'$ *L. und* $48^0\,13'$ *B. entfernt?*

110) *Aus* $\sin x = \frac{857{,}123}{857{,}131}$ *den Winkel* x *nach Einführung des Cosinus möglichst genau zu finden.*

111) *Aus* $\sin\frac{x}{2} = 0{,}9952620$ *den Winkel* x *genau zu bestimmen.*

112) *Aus* $\cos a = 0{,}9999904$ *soll* a *möglichst genau bestimmt werden.*

113) $x = \frac{\sin 35^0\,13' \cos 145^0\,50'}{3\,\mathrm{tg}\,140^0 \,\mathrm{cotg}\, 92^0\,22' \cos 125^0}$

114) $x = \frac{\sin 39^0\,15'\,\mathrm{tg}\,117^0\,14' \cos 44^0\,16'}{-\mathrm{cotg}\,86^0\,30' \sin 22^0\,13'\,\mathrm{tg}\,95^0}$

115) $\mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin 5^0\,23'\,24'' \sin 66^0\,51'\,2''}{\sin 115^0\,41'\,44'' \sin 43^0\,27'\,18''}$

116) $x = \frac{345\,\mathrm{tg}\,13^0\,15'\,50''}{\sin^2 15^0}$

117) *Wie lang ist ein Bogen von* $87^0\,12'\,24''$ *bei einem Durchmesser von* 174 *Fuss?*

118) $\mathrm{tg}\,a = \frac{1}{2}$ *und* $\mathrm{tg}\,b = \frac{1}{3}$; *wie gross ist der Bogen* $a + b$ *in Theilen der Radius?*

119) *Wie gross ist die Tangente eines Bogens, dessen Länge* $2\frac{1}{7}$ *beträgt?*

120) *Wieviel Mal übertrifft der Radius die Länge eines Bogens, welcher einem Centriwinkel von* 20,62648 *Secunden entspricht?*

121) *Das Verhältniss desjenigen Kreisbogens zu seiner Sehne zu finden, welcher dem Radius gleich ist.*

122) *Die Function* $\sin 0{,}7941247$ *einer Bogenlänge durch die Tafel zu bestimmen.*

123) $\sin a = 0{,}6$ *und* $\sin b = 0{,}8$; *man bestimme die Länge des Bogens* $a + b$ *erst mittels der Formel* (16), *dann durch die Tafel.*

§ 81. *Anwendung der Hilfswinkel* (§ 59 bis § 71).

124) *Man soll die Gl.* $x = \frac{a+b}{a-b}$, *für welche* $\log a = 3{,}2382971$ *und* $\log b = 3{,}5393271$ *ist, logarithmisch umformen und daraus* x *berechnen.*

125) *Man soll den Ausdruck* $\sqrt[m]{a^n - b^n}$ *für den Gebrauch der Logarithmen bequem machen und alsdann* $x = \sqrt[4]{a^3 - b^3}$ *aus* $\log a = 3{,}7812475$ *und* $\log b = 2{,}9876547$ *berechnen.*

126) $x = \frac{5068{,}35}{\cos m}$ *und* $\mathrm{tg}\,m = \frac{2790{,}41}{5068{,}35}$

127) $x = (a + b) \cos m$, $\sin m = \frac{2 \cos 54^0\, 36'\, 54'' \sqrt{ab}}{a + b}$, $a = 30500{,}67$ $b = 21111{,}39$.

128) *Aus* $\cos x = \frac{\operatorname{tg}(a + 5^0\, 30')}{22{,}901479}$ und $\operatorname{cotg} a = 0{,}0524077$ *soll man* $\cos x$ *und den Winkel* x *bestimmen.*

129) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \sin 16^0\, 3'\, 2'' \sqrt{bc}}{b - c}$, $x = \frac{b - c}{\cos \varphi}$, $b = 1965$, $c = 1248$.

130) $x = 15 \sin 22^0\, 30' + 33 \cos 22^0\, 30'$ (§ 64).

131) $205 \sin x + 3 \cos x = \frac{16659}{5553}$ (§ 65).

132) $x^2 + 0{,}1590909\, x = 0{,}1332966$.

133) $14{,}7054\, x^2 - 297{,}74214 = 67{,}63014\, x$.

134) $x^2 + 0{,}763557\, x = -0{,}1454548$.

135) $x^2 - 14{,}89387\, x + \frac{5256}{1225} = 0$.

136) $6\, x = \frac{153}{25} - 7\, x^2$.

137) $x^2 - 44444\, x = 701060205$.

138) $x^2 + \frac{313}{59}\, x = -\frac{719}{843}$

139) $28746{,}49\, x^2 - 720619{,}6\, x = -2913796$.

140) $6797482\, x^2 + 8227816\, x = 768967$.

141) $17\, x^2 + 425\, x = 2550$.

142) $100\, x^2 + 4041{,}7108 = 1299{,}61\, x$.

143) $1718{,}75 + 11\, x^2 = 275\, x$.

§ 82. *Vermischte Aufgaben.*

144) $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{\sin a} - \sin a$, *gesucht der Winkel* a.

145) $\sin a = \frac{1}{1 + x}$ *und* $\operatorname{cotg} a = 1 - y$; *gesucht* $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$

146) $x = \frac{\sin(a + b) \sin(a - b)}{\sin^2 a \sin^2 b}$ *durch* $\operatorname{cotg} a$ *und* $\operatorname{cotg} b$ *auszudrücken.*

147) *Aus* $\operatorname{cotg} a = 3$ *soll* $\operatorname{tg} 2a$ *auf drei Arten, durch die Tafel, durch eine Formel, endlich geometrisch bestimmt werden.*

148) *Gegeben* $\sin a + \cos b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$ *und* $\sin b + \cos a = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, *gesucht* $\sin(a + b)$.

149) *Die Gl.* $x = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos c$ *durch Einführung eines Hilfswinkels logarithmisch umzuformen.*

150) *Ebenso* $x = m \sin a \sin b + n \cos a \cos b \cos c$.

151) *Die Summe* $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c$, *in welcher* $a + b + c = 180^0$ *ist, in ein Product aus diesen drei Tangenten zu verwandeln.*

152) $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = m$, $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} c = n$, $a + b + c = 180^0$; *gesucht* $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$.

153) $\sin x \sin (30^0 - x) = 0{,}06424825$.

154) *Aus den Gleichungen* $\frac{x}{1 + \cos a} = \mathrm{tg}^2 m$, $\mathrm{tg}\frac{a + 15^0}{2} = \frac{\mathrm{tg}(45^0 \pm m)}{\mathrm{tg}\, 7^0\, 30'}$, $\mathrm{tg}\, m = \sqrt{\frac{2}{3}}$ *soll man* x *und den Winkel* a *bestimmen.*

155) $\mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, b + \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, c + \mathrm{tg}\, b\, \mathrm{tg}\, c = 1$, *gesucht Winkel* $a + b + c$.

156) $\mathrm{tg}(a + b) = m$, $\mathrm{tg}(a - b) = n$; *gesucht* $\mathrm{tg}\, a$ *und* $\mathrm{tg}\, b$.

157) *Die Gl.* $x = \frac{a \sin m - b \sin n}{a \sin m + b \sin n}$ *mittels eines Hilfswinkels logarithmisch umzuformen.*

158) *Mit Anwendung eines Hilfswinkels soll* x *aus* $a \sin x + b \cos x = c$, $a = 747{,}18396$, $b = -74{,}599207$, $c = 176{,}74216$ *logarithmisch berechnet werden.*

159) *Gegeben* $\sin a = x - 1$ *und* $\cos a = y$. *Welches ist die Cotangente des um* $\frac{1}{2} a - 45^0$ *kleineren Winkels?*

160) $\mathrm{tg}\, 69^0$ *durch* $\cos 48^0$ *und* $\mathrm{tg}\, 48^0$ *auszudrücken.*

161) *Den Ausdruck* $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c$, *in welchem* $a + b + c = 180^0$ *ist, in ein Product umzuformen.*

162) *Ebenso* $\sin a + \sin b + \sin c$, *wo* $a + b + c = 180^0$ *ist.*

163) x *aus* $\mathrm{tg}(x + a)\, \mathrm{tg}(x - a) = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ *zu bestimmen.*

164) *Aus* $\sin 30^0 = 0{,}5$ *und* $\sin 10^0 = 0{,}1736481$ *ohne Tafel den Ausdruck* $\sin 20^0 \cos 10^0$ *zu berechnen.*

165) *Aus* $\cos 71^0 = 0{,}3255681$ *und* $\cos 19^0 = 0{,}9455187$ *ohne Tafel den Ausdruck* $\sin 45^0 \sin 26^0$ *zu berechnen.*

166) *Aus der Gl.* $\cos nx + \cos (n - 2) x = \cos x$, *wo* n *eine ganze positive Zahl bedeutet, die Werthe von* x *zu ermitteln.*

167) *Aus* $5 \sin x = \mathrm{tg}\, x$ *die Werthe von* x *zu finden.*

168) *Aus* $x \sin (a - y) = m$ *und* $x \sin (b - y) = n$ *finde man* x *und* y, *wenn* $a = 70^0$, $b = 55^0$, $m = 3$, $n = 2{,}44949$ *ist.*

169) *Man löse die vorige Aufgabe für* $a = 180^0$, $b = 90^0$, $m = 1{,}4885383$, $n = 2{,}2548383$.

170) *Aus* $x \cos (a - z) = m$ *und* $x \cos (b - z) = n$ *finde man* x *und* z, *wenn* $a = 30^0$, $b = 45^0$, $m = 1{,}902113$, $n = 1{,}6773413$ *gegeben ist.*

171) *Aus* $\sin x = a \sin y$ *und* $2\, \mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, \frac{1}{2} y$ *die Winkel* x, y *zu finden, wenn* $a = 0{,}7233153$ *ist.*

172) *Die Summe* s *einer unendlichen, fallenden geom. Progression, deren erstes Glied* a *und deren Exponent* e *ist, beträgt bekanntlich* $s = \frac{a}{1 - e}$. *Wenn man nun von einem Punkte des Schenkels eines Winkels* w *eine Senkrechte* m *auf den andern Schenkel zieht, hierauf aus dem Fusspunkte derselben eine Senkrechte auf den ersten Schenkel, und so fort in's Unendliche; wie gross ist die Summe der unendlichen Anzahl senkrechter Linien?*

173) *Ein Stück* p *des einen Schenkels eines Winkels* a *wird auf den zweiten Schenkel projicirt; hierauf wird die Projection auf den ersten Schenkel und alsdann die zweite Projection wieder auf den*

zweiten Schenkel projicirt u. s. w. bis in's Unendliche. Wie gross ist die Summe der Linie p *sammt allen Projectionen?*

174) *Von drei geraden Linien durchschneiden sich die erste und zweite unter dem spitzen Winkel* a, *die zweite und dritte unter dem spitzen Winkel* b, *die dritte und erste unter dem spitzen Winkel* c. *Ein Stück* m *der ersten Geraden wird auf die zweite projicirt, die Projection auf die dritte Gerade, die zweite Projection auf die erste Gerade, die dritte Projection auf die zweite Gerade projicirt u. s. w. bis in's Unendliche. Welches ist die Summe der Linie* m *sammt allen Projectionen?*

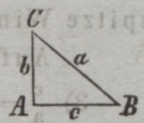
Berechnung der rechtwinkligen Dreiecke.

§ 83. Den rechten Winkel werden wir immer durch A, und die Hypotenuse durch a, die spitzen Winkel durch B und C, die Katheten entsprechend durch b und c, den Flächeninhalt durch F bezeichnen. Die Grundgleichungen zur Auflösung rechtw. Dreiecke sind (§ 4)

$$\frac{b}{a} = \sin B = \cos C, \quad \frac{c}{a} = \sin C = \cos B$$

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C, \quad \frac{c}{b} = \operatorname{tg} C = \operatorname{cotg} B$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad B + C = 90^\circ, \quad F = \tfrac{1}{2} b c.$$



Wenn von einem rechtw. Dreieck, in welchem der rechte Winkel immer schon an sich bekannt ist, zwei Stücke gegeben sind, und sich unter diesen wenigstens eine Seite befindet, so können die übrigen Stücke entweder unmittelbar aus den vorstehenden Gleichungen oder durch deren Umformung gefunden werden. Es kommen hier vier Auflösungsfälle vor, indem gegeben sein kann: 1) die Hypotenuse und ein spitzer Winkel, oder 2) eine Kathete und ein spitzer Winkel, oder 3) die Hypotenuse und eine Kathete, oder 4) die beiden Katheten.

Erster Auflösungsfall.

§ 84. Gegeben die Hypotenuse a und ein spitzer Winkel B; gesucht C, b, c, F.

Aufl. 1) $\mathbf{C = 90^\circ - B}$ 2) $\mathbf{b = a \sin B}$ 3) $\mathbf{c = a \cos B}$

4) $F = \tfrac{1}{2} b c = \tfrac{1}{2} a^2 \sin B \cos B$, oder weil (§ 18, 20) $\sin B \cos B = \tfrac{1}{2} \sin 2B$, so ist $\mathbf{F = \tfrac{1}{4} a^2 \sin 2B}$.

Wenn $a = 987{,}31$ Fuss, $B = 46^0\,28'\,35'',2$ ist, so findet man

$$1)\quad C = 43^0\,31'\,24'',8$$

$$2)\quad \begin{aligned} \log a &= 2{,}9944535 \\ \log \sin B &= 9{,}8603927 - 10 \\ \hline \log b &= 2{,}8548462 \\ b &= 715{,}8898 \text{ Fuss} \end{aligned} \qquad 3)\quad \begin{aligned} \log a &= 2{,}9944535 \\ \log \cos B &= 9{,}8380003 - 10 \\ \hline \log c &= 2{,}8324538 \\ c &= 679{,}9137 \text{ Fuss} \end{aligned}$$

$$4)\quad \begin{aligned} \log b &= 2{,}8548462 \\ \log c &= 2{,}8324538 \\ \hline \log 2F &= 5{,}6873000 \\ 2F &= 486743{,}33 \\ F &= 243371{,}665 \;\square \text{ Fuss.} \end{aligned}$$

§ 85. Wenn B nahe 90^0 ist und daher $b = a \sin B$ nicht genau gefunden werden kann (§ 48), so berechne man zuerst $c = a \cos B$ und hierauf b durch die Formel $b = \sqrt{(a+c)(a-c)}$. Ist dagegen B nahe 0^0, so berechne man erst $b = a \sin B$ und alsdann c mittels der Formel $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$. In den gewöhnlichen Fällen können diese Formeln zur Prüfung der ganzen Rechnung dienen.

Zweiter Auflösungsfall.

§ 86. Gegeben eine Kathete c und der anliegende spitze Winkel B; gesucht C, b, a, F.

Aufl. 1) $\boldsymbol{C = 90^0 - B}$ 2) $\boldsymbol{b = c\,tg\,B}$

3) $\frac{c}{a} = \cos B$, also $\boldsymbol{a = \frac{c}{\cos B}}$ 4) $\boldsymbol{F = \tfrac{1}{2}\,b\,c = \tfrac{1}{2}\,c^2\,tg\,B}$

Aus $c = 1378{,}14$ Fuss, $B = 3^0\,37'\,49''$ findet man $C = 86^0\,22'\,11''$
$b = 87{,}4364$ Fuss, $a = 1380{,}911$ Fuss, $F = 60249{,}805 \;\square$ Fuss.

§ 87. Gegeben eine Kathete c und der gegenüberliegende spitze Winkel C; gesucht B, b, a, F.

Aufl. 1) $\boldsymbol{B = 90^0 - C}$ 2) $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} C$, also $\boldsymbol{b = \frac{c}{tg\,C}}$

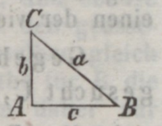
3) $\frac{c}{a} = \sin C$, also $\boldsymbol{a = \frac{c}{\sin C}}$ 4) $\boldsymbol{F = \tfrac{1}{2}\,b\,c = \frac{c^2}{2\,tg\,C}}$

Diese zweite Aufgabe ist im Grunde die nämliche wie die erste, da man auch den Winkel B als gegeben betrachten kann.

§ 88. Wenn B nahe 0^0, folglich C nahe 90^0 ist, so wird a weder durch $\frac{c}{\cos B}$ noch durch $\frac{c}{\sin C}$ genau bestimmt. Alsdann berechne man a durch die aus $\frac{b}{a} = \sin B$ hervorgehende Gl. $a = \frac{b}{\sin B}$, welche in den gewöhnlichen Fällen zur Prüfung der Rechnung neben den übrigen Formeln für a gebraucht werden kann.

Dritter Auflösungsfall.

§ 89. Gegeben die Hypotenuse a und eine Kathete b; gesucht B, C, c, F.



Aufl. 1) $\sin B = \frac{b}{a}$ 2) $\cos C = \frac{b}{a}$ oder $C = 90^0 - B$

3) $c = a \cos B$ oder $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$

4) $F = \frac{1}{2} bc = \frac{b}{2}\sqrt{(a+b)(a-b)}$

Aus a = 246,7 Fuss, b = 135,9 Fuss findet man B = 33° 25′ 36″,6, C = 56° 34′ 23″,4, c = 205,893 Fuss, F = 13990, 45 □ Fuss.

§ 90. Der Winkel B kann in einem rechtw. Dreieck nur spitz genommen werden, obschon die Gl. $\sin B = \frac{b}{a}$ zugleich einen stumpfen Winkel für B giebt. — Wenn der Quotient $\frac{b}{a}$ nahe 1 ist, so berechne man zuvor $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$, und alsdann B und C mittels der Gl. $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \operatorname{cotg} C$, worauf als Prüfungsgleichung $B + C = 90^0$ dienen kann. Kommt $\frac{b}{a}$ nahe 0, so bestimme man c entweder aus $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ oder aus $c = b \operatorname{cotg} B = b \operatorname{tg} C$.

Vierter Auflösungsfall.

§ 91. Gegeben die beiden Katheten b, c; gesucht B, C, a, F.

Aufl. 1) $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ 2) $\operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}$ oder $C = 90^0 - B$

3) $\frac{b}{a} = \sin B$, also $a = \frac{b}{\sin B}$, oder $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

4) $F = \frac{1}{2} bc$.

Aus b = 563,3 Fuss, c = 378,2 Fuss findet man B = 56° 7′ 55″,11 C = 33° 52′ 4″,91, a = 678,651 Fuss, F = 106557,84 □ Fuss.

Hat man B nahe 90°, also C nahe 0° gefunden, so berechne man a aus $a = \frac{c}{\sin C}$, während, wenn B nahe bei 0° liegt, die Formel $a = \frac{b}{\sin B}$ anzuwenden ist.

§ 92. Ein Dreieck kann nicht blos durch einfache Seiten und Winkel bestimmt werden, sondern auch durch gewisse Verbindungen der einzelnen Stücke mit einander, oder dadurch, dass etwa der Inhalt, die Höhe u. d. m. bekannt sind. Die Lösung solcher Aufgaben, welche im Allgemeinen zusammengesetzte genannt werden, kommt immer auf einen der vier behandelten Hauptfälle zurück.

Gegeben der Flächeninhalt F und ein spitzer Winkel B; gesucht C, a, b, c.

Aufl. $C = 90^0 - B$, 2) Aus $F = \frac{1}{4} a^2 \sin 2B$ (§ 84) folgt $a = \sqrt{\frac{4F}{\sin 2B}}$

3) $b = a \sin B$, oder da $c = \frac{b}{\operatorname{tg} B}$ und $F = \frac{1}{2} bc = \frac{b^2}{2 \operatorname{tg} B}$, so ist $b = \sqrt{2F \operatorname{tg} B}$

4) $c = a \cos B$ oder (§ 86, 4) $c = \sqrt{\frac{2F}{\operatorname{tg} B}}$

Aus $F = 1014$ □ Fuss, $B = 53^0\, 7'\, 48'',39$ findet man $C = 36^0\, 52'\, 11'',61$, $a = 65$ Fuss, $b = 52$ Fuss, $c = 39$ Fuss.

§ 93. Gegeben der Flächeninhalt F und eine Kathete c; gesucht B, C, a, b.

Aufl. 1) $bc = 2F$, also $b = \frac{2F}{c}$ 2) $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \frac{2F}{c^2}$

3) $\operatorname{cotg} C = \frac{2F}{c^2}$ 4) $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ oder $a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

§ 94. Gegeben der Flächeninhalt F und die Hypotenuse a; gesucht B, C, b, c.

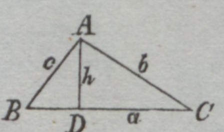
Aufl. 1) Aus § 92, 2 folgt $\sin 2B = \frac{4F}{a^2}$ 2) $C = 90^0 - B$

3) $b = a \sin B$ 4) $c = a \cos B$.

Für 2 B findet man zwei Werthe, welche zusammen 180^0 ausmachen, also hat auch B zwei Werthe, die sich zu 90^0 ergänzen, mithin die beiden Winkel B und C des Dreiecks ausdrücken. Man kann daher entweder als die spitzen Winkel des Dreiecks die beiden Werthe von B nehmen, und dieselben nach einander in die Formel $b = a \sin B$ setzen, um die Seiten b und c zu erhalten, oder nur den einen Werth von B nehmen, und daraus nach einander C, b, c ableiten.

Aus $F = 275$ □ Fuss, $a = 62$ Fuss findet man $B = 8^0\, 18'\, 50'',78$, $C = 81^0\, 41'\, 9'',22$, $b = 8,9651877$ Fuss, $c = 61,348394$ Fuss.

§ 95. Gegeben die Hypotenuse a und das auf dieselbe gefällte Höhenperpendikel h; gesucht B, C, b, c, F.



Aufl. Da der Inhalt $F = \frac{1}{2} ah$ ebenfalls bekannt ist, so lässt sich die Aufgabe nach § 94 auflösen. Man kann aber auch folgenden Weg einschlagen. Der eine Abschnitt der Hypotenuse sei x, also der andere $a - x$, so ist (Legendre § 105, 3) $h^2 = x(a - x)$,

$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4h^2}}{2}$, also 1) $\operatorname{tg} B = \frac{h}{x} = \frac{2h}{a \pm \sqrt{a^2 - 4h^2}}$ 2) $C = 90^0 - B$

3) $b = \frac{h}{\sin C} = \frac{h}{\cos B}$ 4) $c = \frac{h}{\sin B}$ 5) $F = \frac{1}{2} a h$

Die Multiplication der beiden Ausdrücke für $\operatorname{tg} B$ giebt 1, und ebenso ist $\operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{cotg} B = \operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C = 1$. Nimmt man also für $\operatorname{tg} B$ den grösseren von beiden Ausdrücken, so muss $\operatorname{tg} C$ dem kleineren derselben gleich sein, und umgekehrt. Hieraus folgt, dass schon beide Werthe für B die beiden spitzen Winkel des Dreiecks ausdrücken. Man kann daher zur Bestimmung der gesuchten Stücke entweder beide Werthe von $\operatorname{tg} B$ berechnen, wodurch man B und C findet, und darauf beide Werthe von B in die Formel $b = \frac{h}{\cos B}$ setzen, um b und c zu erhalten, oder nur einen Werth von B bestimmen, und aus demselben der Reihe nach C, b, c ableiten.

Wenn $a = 5$ Fuss, $h = 2{,}4$ Fuss, so ist $B = 36^0\, 52'\, 11'',64$, $C = 53^0\, 7'\, 48'',35$, $b = 3$ Fuss, $c = 4$ Fuss, $F = 6$ □Fuss, oder es vertauschen sich die Werthe von B und C, und dann auch von b und c mit einander.

§ 96. Aus der Summe der Hypotenuse und einer Kathete $a + c = s$ und aus der andern Kathete b das Dreieck zu berechnen.

Aufl. 1) Es ist $b^2 = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c)$, also $a - c = \frac{b^2}{s}$
Addirt man die Gl. $a + c = s$ zu dieser Gl. und zieht sie von derselben ab, so ist $a = \frac{s^2 + b^2}{2s}$ und $c = \frac{s^2 - b^2}{2s} = \frac{(s+b)(s-b)}{2s}$

2) $\operatorname{tg} C = \operatorname{cotg} B = \frac{c}{b} = \frac{(s+b)(s-b)}{2bs}$ 3) $F = \frac{1}{2} b c$.

§ 97. Aus der Summe der beiden Katheten $b + c = s$ und einem spitzen Winkel B das Dreieck zu berechnen.

Aufl. 1) Aus den beiden Gl. $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ und $b + c = s$ findet man

$$b = \frac{s \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} B + 1} \text{ und } c = \frac{s}{\operatorname{tg} B + 1}$$

2) Wegen $\frac{b}{a} = \sin B$ und $\frac{c}{a} = \cos B$ ist $\frac{b+c}{a} = \sin B + \cos B$, also

$a = \frac{s}{\sin B + \cos B}$ 3) $C = 90^0 - B$. 4) $F = \frac{1}{2} b c$.

Aufgaben über rechtwinklige Dreiecke.

§ 98. Erklärung. Wir werden in diesem Abschnitte unter Dreieck schlechthin immer das rechtwinklige verstehen, und die Buchstaben A, B, C, a, b, c, F nur in der in § 83 erklärten Bedeutung nehmen.

1) *Die Diagonale eines Rechtecks ist* 325 Fuss *lang und bildet mit einer Seite desselben einen Winkel von* $25^0\ 42'$; *wie gross sind die Seiten des Rechtecks?*

2) *Wie lang ist die Seitenlinie eines geraden* 21,6 Fuss *hohen Kegels, wenn dieselbe mit der Grundfläche einen Winkel von* $35^0\ 28'$ *bildet?*

3) *Wie weit steht in einem Kreise, dessen Radius* = 3 Fuss, *die Sehne des Bogens von* $17^0\ 20'$ *vom Mittelpunkte ab?*

4) *Gegeben* $a : b : c = 5 : 4 : 3$; *gesucht* B *und* C.

5) *Welchen Werth hat der kleinste Winkel des Dreiecks, dessen Katheten sich wie* 5 *zu* 12 *verhalten?*

6) *Die Seiten eines Rechtecks betragen* 4937 Fuss *und* 3874 *Fuss; welche Winkel bildet die Diagonale mit den Seiten?*

7) *Das Dreieck aufzulösen, wenn* $a = 170$ Fuss *und* $b : c = 36 : 77$ *ist?*

8) *Wenn die Hypotenuse durch das Höhenperpendikel in die Abschnitte* 32 Fuss *und* 45 Fuss *getheilt wird, welches ist der kleinste Winkel des Dreiecks?*

9) *In einem Dreieck ist die Differenz zwischen der Hypotenuse und der grössern Kathete gleich der Differenz zwischen beiden Katheten; wie gross sind die Winkel?*

10) *Die beiden Seiten eines* 30 Fuss *hohen Dammes, dessen obere Breite* 25 Fuss *beträgt, sind gegen die Horizontalebene um* $38^0\ 20'\ 10''$ *geneigt; welches ist die untere Breite des Dammes?*

11) *Aus dem Erddurchmesser* 1719 Meilen *und der geogr. Breite* $53^0\ 33'$ *eines Ortes den Umfang seines Parallelkreises zu finden.*

12) $F = 139{,}9045$ □ Fuss, $c = 20{,}5893$ Fuss; *gesucht* a, b, B, C.

13) $b = 4$ Fuss, $a + c = 8$ Fuss; *gesucht* a, c, B, C.

14) $b + c = 14$ Fuss, $B = 36^0\ 52'\ 11'',62$; *gesucht* a, b, c, C.

15) *Denkt man sich von einem Gestirne auf die unbegränzte Ebene des Horizontes eines bestimmten Punktes* P *der Erdoberfläche eine Senkrechte herabgelassen und von* P *nach dem Fusspunkte derselben und nach dem Gestirne gerade Linien gezogen, so heisst der von ihnen gebildete Winkel* die Höhe des Gestirnes *für den Ort* P. *Wenn nun die Sonne eine Höhe von* 30^0 *hat, wie lang ist der Schatten eines* 300 Fuss *hohen Thurmes?*

16) *Die Schattenlänge einer Säule von* 21,2 Fuss *Höhe beträgt* 34,8 Fuss; *wie gross ist die Sonnenhöhe?*

17) *Wie hoch steht die Sonne, wenn der Schatten eines Menschen* a) *der halben Länge,* b) *der doppelten Länge desselben gleich ist?*

18) *Der Schatten einer verticalen Stange ist um* $^1/_9$ *kürzer als die Stange; welche Höhe hat die Sonne?*

19) *Die entgegengesetzten Seitenlinien eines geraden,* 4 Fuss *hohen Kegels schliessen einen Winkel von* $73^0\ 44'\ 23'',24$ *ein; wie gross ist der Durchmesser der Grundfläche?*

20) *Wie gross ist der Umfang eines Parallelkreises der Erde in der Breite von* $50^0\ 57'$, *wenn der Aequator* 5400 Meilen *enthält?*

21) *Unter welcher geogr. Breite beträgt der Umfang des Parallelkreises* 3208,49 Meilen, *wenn der Erdradius gleich* 859,5 Meilen *ist?*

22) *Wie viel Fuss in jeder Secunde legt bei der Axendrehung der Erde Petersburg unter* 60^0 *Breite zurück?*

23) *Durch den höchsten Punkt eines verticalen, in jeder Secunde um* 1^0 *sich drehenden Kreises, dessen Radius* 2 Fuss *beträgt, ist eine unbewegliche Tangente gelegt. Um wie viel ist der Punkt auf der Tangente von seinem anfänglichen Orte fortgerückt, wenn man von dem Orte, wo er sich nach* 4 Secunden *befindet, eine Senkrechte auf die Tangente zieht?*

24) *Von einem geraden abgestumpften Kegel sind gegeben die Radien der beiden Grundflächen* 4 Fuss *und* 11,5 Fuss, *und der Winkel an der Spitze* $73^0\ 44'\ 23'',28$; *es wird gesucht die krumme Oberfläche.*

25) *Die von dem obersten und untersten Punkte eines leuchtenden Gegenstandes über die Spitze einer verticalen Stange, deren Länge* $= a$, *einfallenden Strahlen bilden mit der Horizontalebene durch den Fusspunkt der Stange die Neigungswinkel* m *und* n *wo* $m > n$ *ist; wie lang ist der Halbschatten der Stange?*

26) *Eine Kanone ist auf einen bestimmten Punkt eines sich bewegenden Schiffes so gerichtet, dass die Richtung des Rohres mit der des Schiffes einen rechten Winkel bildet. Wenn nun die Geschwindigkeit der abgeschossenen Kugel in einer Secunde* 1200 Fuss, *die des Schiffes* 16 Fuss *beträgt, unter welchem Winkel muss das Rohr gegen den Zielpunkt vorwärts gerichtet werden?*

27) *Ein Kahn, welchem man eine Schnelligkeit von* 1 Fuss *in der Secunde zu geben im Stande ist, nimmt seine Richtung quer über einen Fluss, dessen Stromschnelligkeit* 3 Fuss *in der Secunde beträgt. Um welchen Winkel wird der Kahn von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt?*

28) *Aus der Diagonale* $= 17$ Fuss *des Axenschnittes eines geraden Cylinders und ihrer Neigung* $= 61^0\ 55'\ 39'',04$ *zur Grundfläche den Cubikinhalt des Cylinders zu finden.*

29) *Um die Breite eines Flusses zu messen, nimmt man dem Ufer entlang eine Standlinie* $AB = 159$ Fuss. *Wenn nun die in* A *auf* AB *senkrecht stehende Visirlinie das jenseitige Ufer in* C *trifft, und der Winkel* $ABC = 53^0\ 7'\ 48'',4$ *ist; wie breit ist der Fluss?*

30) *Auf einer Geraden* $AB = a$ *stehen in ihren Endpunkten zwei Perpendikel* $AC = b$ *und* $BD = c$. *In welcher Entfernung von* A *liegt auf* AB *derjenige Punkt* E, *dass, wenn man ihn mit* C *und* D *verbindet, der Winkel* $BED = 2\,AEC$ *ist?*

31) *Die vier Weltgegenden Nord, Ost, Süd, West theilen den Horizont in vier gleiche Theile, deren jeder* 90^0 *enthält. Durch Halbirung der vier Quadranten entstehen die Punkte* Nord-Ost, Süd-Ost, Süd-West, Nord-West. *Die fortgesetzte Halbirung jedes Bogens giebt die Punkte:* Nord-Nord-Ost *zwischen* N *und* NO, Ost-Nord-Ost *zwischen*

O *und* NO *u. s. w. Hiernach bilden z. B. die Richtungen* N *und* NNO *einen Winkel von* $22^0\ 30'$, *die Richtungen* N *und* ONO *einen Winkel von* $67^0\ 30'$ *u. s. w. — Wenn nun ein Schiff aus einem Hafen der nördlichen Halbkugel auslaufend sich immer weiter vom Aequator entfernt, und der Compass beständig einen Winkel von* $22^0\ 30'$ *anzeigt; wie weit* (x) *ist das Schiff nach Norden, und wie weit* (y) *nach Osten oder nach Westen vorgedrungen, nachdem es* 32 Meilen *zurückgelegt hat?*

32) *Ein Schiff befindet sich bei seiner Ausfahrt aus einem Hafen unter* $35^0\ 3'$ *nördlicher Breite, und fährt erst* 92 Meilen *in der Richtung* ONO, *hierauf* 35 Meilen *nach* NNO; *welches ist seine jetzige Breite, wenn* 15 Meilen *auf einen Grad gerechnet werden?*

33) *Von einem gewissen Standpunkte aus erstreckt sich eine* 12 Fuss *hohe Mauer nach Norden, während die Sonne in einem bestimmten Momente in südöstlicher Richtung unter einem Höhenwinkel von* $35^0\ 30'$ *erscheint. Wie breit ist in diesem Augenblicke der Schatten der Mauer?*

34) *Welchen Winkel müssten die von einem bestimmten Sandpunkte ausgehenden Richtungen der* $35^0\ 30'$ *hohen Sonne und einer* 12 Fuss *hohen Mauer mit einander bilden, damit der Schatten der letzteren* 3 Fuss *beträgt?*

35) *Das Dreieck aufzulösen, wenn gegeben ist die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete gleich* 18 Fuss, *und die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete gleich* 16 Fuss.

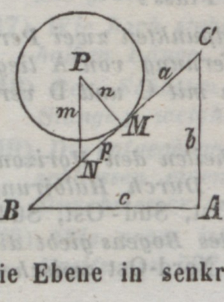
36) *Aus der Summe beider Katheten* 32 Fuss *und dem Flächeninhalte* 60 □ Fuss *das Dreieck zu berechnen.*

37) *Aus dem Umfange* 20 Fuss *und dem Inhalte* 4 □ Fuss *das Dreieck aufzulösen.*

38) *Aus der Summe beider Katheten* 64 Fuss *und der Hypotenuse* 56 Fuss *das Dreieck aufzulösen.*

39) *Aus dem Umfange* 90 Fuss *und dem auf die Hypotenuse gefällten Höhenperpendikel* 8,7804878 Fuss *das Dreieck aufzulösen.*

40) *Gegeben* $c = 77$ Fuss, $B = 25^0\ 3'\ 27'',42$; *gesucht der Radius* r *des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises.*



§ 99. Erklärungen. Stellt die Hypotenuse des rechtw. Dreiecks ABC eine schiefe Ebene vor, BC deren Länge a sei, so wird der Winkel B der Neigungswinkel der Ebene und die Kathete b ihre Höhe genannt. Wird auf BC ein Körper gelegt, so kann die vertical wirkende, durch m vorgestellte Kraft, mit welcher der Körper frei fallen würde, zerlegt werden in die Kraft n, welche den Körper an die Ebene in senkrechter Richtung zu derselben andrückt, und in die

Kraft MN $=$ p, welche den Körper auf der schiefen Ebene herabtreibt, also mit letzterer parallel wirkt. Da $\triangle$ ABC ∞ MPN, so ist

$$\frac{b}{a}=\frac{p}{m},\quad \frac{c}{a}=\frac{n}{m},\quad \frac{b}{c}=\frac{p}{n},\ \text{d. h.}$$

$$1)\ \sin B=\frac{p}{m}\quad 2)\ \cos B=\frac{n}{m}.\quad 3)\ \operatorname{tg} B=\frac{p}{n}$$

41) *Auf einer um 25° geneigten Ebene ruht eine Kugel von 150 ℔; wie gross ist der Druck (x) auf die Ebene und mit welcher Kraft (y) rollt die Kugel herab?*

42) *Ein Körper gleite mit einer Kraft gleich 80 ℔ von einer schiefen Ebene herab, und übe auf diese einen Druck von 138,4 ℔; wie gross ist der Neigungswinkel der Ebene und wie schwer ist der Körper?*

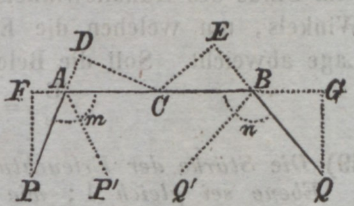
43) *In Frankreich sollen die Chausseen auf längeren Strecken eine Neigung von 4° 46′ 48″,69 nicht übersteigen, und in Oestreich soll in gleichem Falle die Steigung höchstens $\frac{1}{18}$ betragen, d. h. auf je 18 Fuss Länge kommt 1 Fuss Steigung. Wie viel beträgt im ersten Falle die Steigung (x), und im zweiten Falle die Neigung (y)?*

44) *Welche Kraft ist nöthig, um einen 1430 ℔ schweren Wagen auf einer Eisenbahn von $\frac{1}{300}$ Steigung am Herablaufen zu hindern?*

45) *Die Kraft, mit welcher ein Körper auf einer schiefen Ebene herabfällt, verhält sich zu der des freien Falles, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge. Wenn nun ein Körper in der ersten Secunde seines freien Falles 14,907 Fuss, beim Herabfallen von einer schiefen Ebene aber 3,79757 Fuss zurücklegt; wie gross ist die Neigung der Ebene?*

46) *Wenn ein während t Secunden frei fallender Körper, dessen Fallraum in der ersten Secunde g Fuss beträgt, einen Weg von h Fuss zurückgelegt hat, so ist, wie die Physik lehrt, $h=gt^2$. Wie weit rollt demnach eine Kugel auf einer Ebene von 5° Neigung in 5,5 Secunden, wenn g $=$ 16,1025 Fuss gesetzt wird?*

§ 100. Erklärungen. Wenn an den Hebelarmen AC und BC die Kräfte P und Q unter den Winkeln m und n wirken, so stehen nach einem Satze der Mechanik die Kräfte im Gleichgewichte, wenn die Producte aus den Kräften und den Entfernungen ihrer Richtungslinien vom Unterstützungspunkte C einander gleich sind, wenn also die Gleichung stattfindet P. CD $=$ Q. CE (wo der Winkel D $=$ E $=$ 90°), d. h.



$$P.\ CA \sin m = Q.\ CB \sin n.$$

Die Richtung AP der Kraft P kann in die beiden Richtungen AF und FP, und ebenso BQ in BG und GQ zerlegt werden (wo der Winkel F $=$ G $=$ 90°). Der senkrechte Druck D auf den Punkt C ist gleich

$$FP + GQ = AP \sin m + BQ \sin n,\ \text{also}\ D = P \sin m + Q \sin n,$$

indem AP die Kraft P und BQ die Kraft Q vorstellt. Wird der Winkel $CAP' = FAP$, der Winkel $CBQ' = GBQ$ gemacht, und befinden sich die Kräfte jetzt in P′ und Q′, oder auch nur die eine von ihnen in dieser neuen Lage, so bleiben beide gefundenen Gleichungen ebenfalls richtig; denn durch diese Aenderung sind statt der Winkel m und n ihre Nebenwinkel genommen, und es ist $\sin m = \sin (180^0 - m)$, $\sin n = \sin (180^0 - n)$.

47) *An dem einen Hebelarme* = 9 Fuss *wirkt eine Kraft von* 99 ℔ *unter einem Winkel von* 30^0, *und am andern Arme* = 5 Fuss *ist eine Kraft von* 100 ℔ *mit der ersten in's Gleichgewicht gebracht; welchen Winkel bildet ihre Richtung mit dem Hebelarme?*

48) *Es wirke eine Kraft* = 3 ℔ *an dem einen Hebelarme* = 6 Fuss *unter dem Winkel* = 160^0; *wie gross ist im Zustande des Gleichgewichtes der Winkel* x, *unter welchem am andern Arme* = 4 Fuss *eine Kraft* = 5 ℔ *wirkt, und welches Gewicht* (y) *trägt der Unterstützungspunkt?*

§ 101. Erklärungen. Eine Ebene wird von einem leuchtenden Körper am stärksten beleuchtet, wenn die Lichtstrahlen senkrecht auffallen, und ist der Auffallswinkel schief, so ist die Erleuchtung um so schwächer, je kleiner dieser Winkel wird. Stellt AB eine auf der Richtung der Strahlen senkrechte Ebene, dagegen AC eine geneigte Ebene vor, so wird AC, obschon grösser als AB, nur von eben so vielen Lichtstrahlen getroffen, als AB, und daher verhalten sich die Erleuchtungen E und e der senkrecht getroffenen und schief getroffenen Ebene ihrer Stärke nach zu einander, wie umgekehrt die Grössen der Ebenen, also

$$E : e = AC : AB = AC : AC \sin C, \text{ folglich } e = E \sin C = E \cos A, \text{ d. h.}$$

die Beleuchtung einer gegen die Strahlen geneigten Ebene nimmt ab mit dem Sinus des Auffallswinkels der Strahlen, oder mit dem Cosinus des Winkels, um welchen die Ebene von der zu den Strahlen senkrechten Lage abweicht. Soll die Beleuchtung m Mal schwächer sein, so hat man

$$\frac{E}{e} = m = \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\cos A}.$$

49) *Die Stärke der Erleuchtung einer zu den Sonnenstrahlen senkrechten Ebene sei gleich* 1; *wie stark ist die Erleuchtung der Ebene, wenn die Strahlen unter* $23^0\, 34'\, 41'',44$ *auffallen?*

50) *Wenn die Erleuchtung einer Ebene* $\frac{1}{6}$ *so stark sein soll, als bei senkrecht auffallenden Strahlen; unter welchem Winkel müssen dann die Strahlen auf sie fallen?*

51) *Eine Ebene stehe auf der Richtung der Strahlen senkrecht; um welchen Winkel* (x) *muss sie sich aus ihrer Lage drehen, damit die Beleuchtung* 10 *Mal schwächer werde, und wie viel Mal* (y) *schwächer ist die Beleuchtung, wenn der Drehwinkel* 60^0 *beträgt?*

52) *Die Optik lehrt, dass die Stärke der Erleuchtung so abnimmt, wie die Quadrate der Entfernungen zunehmen. Wenn nun ein Licht von einer Ebene* 3 Fuss, *von einer andern* 10 Fuss *entfernt ist, und die auf beide Ebenen parallel auffallenden Strahlen mit der zweiten Ebene einen Winkel von* 45^0 *bilden; unter welchem Winkel muss die erste Ebene gegen die Strahlen geneigt sein, damit die Beleuchtung beider Ebenen dieselbe ist?*

§ **102.** Erklärungen. Der Neigungswinkel, den eine gerade aus einem Punkte A zu einem andern Punkte B gezogene Linie mit der durch A gehenden Horizontalebene bildet, heisst der Elevationswinkel (Höhenwinkel) oder der Depressionswinkel des Punktes B in Bezug auf den Punkt A, je nachdem B oberhalb oder unterhalb jener Horizontalebene sich befindet. Ferner heisst der Winkel, welchen zwei gerade vom Auge des Beobachters an die Endpunkte eines Gegenstandes gezogenen Linien mit einander bilden, der Sehwinkel oder die scheinbare Grösse des Gegenstandes, im Gegensatze zu seiner wirklichen oder absoluten Grösse. Die Grösse des Sehwinkels hängt ab von der Grösse des Gegenstandes, von dessen Entfernung vom Auge, endlich davon, in welchem Punkte die Senkrechte, welche von dem Auge auf den als gerade Linie gedachten Gegenstand gezogen wird, denselben oder seine Verlängerung trifft. Wenn diese Senkrechte die Mitte des Gegenstandes trifft, also das Auge die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks vorstellt, welches von beiden Visirlinien und dem betrachteten Gegenstande gebildet wird, so ist der Sehwinkel ein Maximum für dieselbe Entfernung des Auges. Am häufigsten kommt in der Praxis der Fall vor, dass die eine Visirlinie auf dem Objecte senkrecht steht. Geht aus einer Aufgabe selbst nicht unzweideutig hervor, welcher Fall gemeint ist, so ist immer das gleichschenklige Dreieck der Rechnung zu Grunde zu legen.

53) *Wenn die Höhe eines Leuchtthurmes über der Meeresfläche* 87,43 Fuss, *und an seiner Spitze der Depressionswinkel zu einem Schiffe* $3^0\,37'\,49''$ *beträgt; welches ist die Entfernung* (x) *des Schiffes com Fusspunkte, und welches seine Entfernung* (y) *von der Spitze des Thurmes?*

54) *Wie gross erscheint ein* $5\frac{1}{2}$ Fuss *hoher Mensch einem andern in der Entfernung von* 138 Fuss?

55) *Wie gross ist das Gesichtsfeld eines Fernrohrs von* 10 Zoll *Weite und* 240 Zoll *Länge?*

56) *Ein Thurm ist* 185 Fuss, *das Fenster eines Hauses* 125 Fuss *hoch, und der aus dem Fenster zur Spitze des Thurmes gemessene Elevationswinkel beträgt* $2^0\,17'\,26'',19$; *wie weit* (x) *ist der Thurm vom Hause, und wie weit* (y) *seine Spitze vom Fenster entfernt?*

57) *Welches ist der Sehwinkel einer Signalstange, deren Entfernung ihre Länge* 5000 Mal *übertrifft?*

58) *Wenn der scheinbare Durchmesser eines Körpers unter einem Winkel von* 30″ *erscheint, wie viel Mal übertrifft seine Entfernung seine wahre Grösse?*

59) *Wie weit muss man eine* 0,4 Zoll *breite Flamme einer Wachskerze vom Auge entfernen, damit sie die Mondscheibe, deren scheinbarer Durchmesser* 31′ 7″ *ist, bedeckt, also mit ihr von gleicher Grösse erscheint?*

60) *Von der Spitze eines* 200 Fuss *hohen Thurmes wird der Depressionswinkel zu der Spitze einer auf derselben Horizontalebene mit dem Thurme stehenden Säule gleich* 30°, *und zu dem Fusse derselben gleich* 60° *gefunden. Wie hoch ist die Säule?*

61) *Ein Berg liegt* 55 Fuss *höher als der Fusspunkt eines Thurmes, welcher auf dem Berge in einer Entfernung von* 1300 Fuss *unter* 7° 3′ *erscheint; wie hoch ist der Thurm?*

62) *Damit ein Gegenstand wahrnehmbar sei, muss seine Entfernung vom Auge nicht weniger als* 8 Zoll *und seine scheinbare Grösse wenigstens* 40″ *betragen; wie gross mindestens muss also der Durchmesser eines sichtbaren Gegenstandes sein?*

63) *Unter welchem Sehwinkel erscheint ein* 372 Fuss *hoher Thurm in der Entfernung von* 1712 Fuss, *wenn das Auge des Beobachters sich in einer Höhe von* 11 Fuss *über dem Boden befindet?*

64) *In welcher Entfernung würde eine* 30 Fuss *breite Allee einem Beobachter, der sich am Eingange auf der Mitte des Weges befindet, wegen der Kleinheit des Sehwinkels in einen Punkt zusammen zu laufen scheinen?*

65) *Ein Luftballon, dessen Durchmesser* 40 Fuss *beträgt, erhebt sich von dem Orte* A *in senkrechter Richtung und erscheint nach einiger Zeit einem Beobachter, welcher sich* 4000 Fuss *von* A *befindet, unter einem Sehwinkel von* 30′, *also etwa in der Grösse des Mondes; wie hoch ist der Ballon gestiegen?*

66) *Der Abstand zweier über einander befindlichen Fenster eines Hauses ist gleich* 10 Fuss, *und die aus ihnen zu einem Punkte des Erdbodens gemessenen Depressionswinkel betragen* 30° *und* 28° 18′ 6″,44. *Wie weit ist jener Punkt vom Hause entfernt?*

67) *Die scheinbare Grösse einer geraden Linie* p *sei in der Entfernung von* m Fuss *gleich* a, *und an einem* n Fuss *näher gelegenen Punkte gleich* b. *In welchem Verhältnisse stehen zu einander beide Sehwinkel, wenn ihre Schenkel mit dem Objecte ein rechtw. Dreieck bilden?*

68) *Zwei Punkte befinden sich mit dem Fusse eines Thurmes von* 100 Fuss *Höhe auf der nämlichen Horizontalebene und in gerader Linie, und werden von der Spitze des Thurmes unter den Depressionswinkeln von* a = 35° 15′ *und* b = 56° 35′ *gesehen. Wie weit stehen diese Punkte von einander ab?*

69) *Ueber die Spitze einer* 20,4 Fuss *hohen verticalen Stange fallen die obern Randstrahlen der Sonne, deren Sehwinkel* 32′ 1″,8 *beträgt, unter* 42° 25′ *ein. Wie breit ist der Halbschatten der Stange?*

70) *Die centrische Entfernung der Sonne von der Erde sei gleich* 24063,33 *Erdhalbmessern; wie gross ist der scheinbare Sonnenhalbmesser an der Erdoberfläche, wenn derselbe am Mittelpunkte der Erde* 16′ 0″,44 *beträgt?*

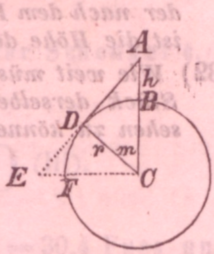
71) *Es sei die centrische Entfernung der Sonne von der Erde* = 20682440 Meilen, *und der scheinbare Sonnenhalbmesser am Mittelpunkte der Erde* = 16′ 0″,44, *dagegen der scheinbare Erdhalbmesser am Mittelpunkte der Sonne* = 8″,58608. *Wie viel Mal ist der Sonnendurchmesser grösser als der Erddurchmesser?*

72) *Denkt man sich aus dem Mittelpunkte des Mondes eine Tangente an die Erde und eine Gerade nach ihrem Mittelpunkte gezogen, so heisst der dadurch gebildete Winkel die Horizontalparallaxe des Mondes. Nun sei die Horizontalparallaxe gleich* 57′ 2″,06 *und der Erddurchmesser gleich* 1719 Meilen. *Wie gross ist die centrische Entfernung* (x) *des Mondes von der Erde, und wie viel Meilen* (y) *beträgt sein Halbmesser, wenn dessen scheinbare Grösse am Erdmittelpunkte sich zu jener Parallaxe wie* 0,2725 : 1 *verhält?*

73) *Die centrische Entfernung des Mondes von der Erde beträgt* 60,27781 *Erdhalbmesser, und verhält sich zur centrischen Entfernung der Sonne von der Erde wie* 1 : 399,20715. *Wie viel Mal ist die Horizontalparallaxe des Mondes grösser als die der Sonne?*

74) *Im Jahre* 1100 *vor Chr. Geburt wurde an einem* 8 Fuss *hohen Gnomon die Schattenlänge desselben im Sommersolstitium gleich* 1,54 Fuss *und im Wintersolstitium gleich* 13,12 Fuss *beobachtet. Man soll die damalige Schiefe der Ecliptik bestimmen, was geschieht, wenn man die Hälfte des Winkels an der Spitze des Gnomon berechnet, um welchen die zu jenen beiden Zeitpunkten einfallenden Sonnenstrahlen in ihren Richtungen von einander abweichen.*

§ 103. Erklärungen. Stellt der Kreis BDF einen grössten Kreis der Erde vor, und zieht man an denselben vom Punkte A, dessen Höhe über der Erde gleich h sei, die Tangente AD, so giebt der Berührungspunkt D den Ort an, bis zu welchem man von A aus die Erdoberfläche sehen kann, abgesehen von anderweitigen Hindernissen als der Erdkrümmung. Die Weite des irdischen Horizontes für A wird durch die Länge des zum Winkel m gehörenden Bogens BD gemessen. Es ist



$$1)\ \cos m = \frac{r}{h+r} \quad \text{also} \quad 2)\ h = \frac{r}{\cos m} - r$$

Wenn h im Vergleich zu r sehr klein ist, so setze man, um h schärfer zu bestimmen $\frac{r}{\cos m} = \frac{r \sin m}{\cos m \sin m} = \frac{r \operatorname{tg} m}{\sin m}$, also 3) $h = \frac{r \operatorname{tg} m}{\sin m} - r$

Da ferner (§ 18, 27) $\sin\frac{m}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos m}{2}}$ und $\cos m = \frac{r}{h+r}$, so ist

$$4)\ \sin\frac{m}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{r}{2(h+r)}} = \sqrt{\frac{h}{2(h+r)}}$$

Wird nach einem Punkte E der Verlängerung von AD aus C eine Gerade gezogen, so wird E von A aus in einer Entfernung gesehen, welche gleich ist der Länge des Bogens BDF, d. h. zwei erhöhete Gegenstände sind einander sichtbar in einer Entfernung, welche der Summe ihrer irdischen Horizonte gleichkommt. In allen Aufgaben wird der Erdradius r = 859,5 Meilen, eine Meile = 20000 Fuss, und ein Grad der Erde = 15 Meilen angenommen werden.

75) *Wie hoch muss wenigstens ein Berg sein, um ihn in einer Entfernung von* 20 Meilen *noch sehen zu können?*

76) *Wie weit erstreckt sich in einer ebenen Gegend die Fernsicht für einen* 5 Fuss *grossen Menschen?*

77) *Wie weit steht von der Spitze eines* 340 Fuss *hohen Thurmes der entfernteste Punkt der Erde ab, welcher einem Beobachter auf jener Spitze noch nicht durch die Krümmung der Erde verdeckt wird?*

78) *Auf dem Meere sieht man von einem Schiffe aus, wenn das Auge* 30 Fuss *über der Meeresfläche erhaben ist, in einer Entfernung von* 33,3 Meilen *den Gipfel des Pico von Teneriffa; man soll die Höhe des Berges finden.*

79) *Wie weit höchstens können sich zwei Männer, deren jeder* 6 Fuss *gross ist, von einander entfernen, so dass sie bei der Krümmung der Erde einander noch sichtbar bleiben?*

80) *Wie hoch muss der Punkt über der Meeresfläche liegen, von welchem man den Gipfel des Dhawalagiri, dessen Höhe* 27343 Fuss *beträgt, in einer Entfernung von* 50,35 Meilen *sehen kann?*

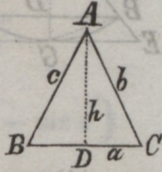
81) *Auf dem Chimborazo misst der Winkel, den die Horizontallinie mit der nach dem Horizonte gehenden Linie macht,* $2^0\ 49'\ 50'',39$. *Welches ist die Höhe des Berges?*

82) *Wie weit müsste man sich von der Erde entfernen, um ein solches Stück derselben, wie etwa die kalte Zone* = 384977 □ Meilen *übersehen zu können?*

Berechnung der gleichschenkligen Dreiecke, der regelm. Vielecke und der Kreisabschnitte.

§ 104. Wir werden im gleichschenkligen Dreieck die ungleiche Seite, d. h. die Grundlinie immer durch a, und den gegenüberliegenden Winkel, d. h. den Winkel an der Spitze mit A bezeichnen. Wegen der Gleichheit zweier Seiten b = c und zweier Winkel B = C reichen hier zwei Bestimmungsstücke aus, und diese können sein endweder irgend eine Seite und irgend ein Winkel, oder ein Schenkel und die Grundlinie.

Zieht man das Höhenperpendikel $AD = h$, so ist der Winkel $BAD = \frac{1}{2} A$ und $BD = \frac{1}{2} a$, und es ergeben sich folgende Grundgleichungen für das gleichschenklige Dreieck:



I. $A + 2B = 180^0$. II. $\frac{1}{2} a = c \cos B$.

III. $F = \frac{1}{2} a h$, $h = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} B = c \sin B = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4} a^2}$

IV. $\sin B = \cos \frac{1}{2} A$, $\cos B = \sin \frac{1}{2} A$, $\operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A$.

§ 105. Gegeben die Grundlinie a und entweder B oder A.

Aufl. 1) $A = 180^0 - 2B$ oder $B = 90 - \frac{1}{2} A$.

2) $c = \frac{a}{2 \cos B} = \frac{a}{2 \sin \frac{1}{2} A}$ (II, IV).

3) $F = \frac{1}{2} a h = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tg} B = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A$ (III, IV).

Aus $a = 218$ Fuss, $A = 48^0$ findet man $B = 66^0$, $b = c = 267{,}98666$ Fuss, $F = 26685{,}165$ □ Fuss.

§ 106. Gegeben der Schenkel c und entweder B oder A.

Aufl. 1) $A = 180^0 - 2B$ oder $B = 90^0 - \frac{1}{2} A$.

2) $a = 2c \cos B = 2c \sin \frac{1}{2} A$ (II, IV).

3) $F = \frac{1}{2} a h$, oder weil $a = 2c \cos B$, $h = c \sin B$, so ist $F = c^2 \cos B \sin B = c^2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} c^2 \sin A$ (§19, 21).

§ 107. Gegeben die Grundlinie a und der Schenkel c.

Aufl. 1) $\cos B = \frac{a}{2c}$ (II). 2) $A = 180^0 - 2B$.

3) $F = \frac{1}{2} a h = \frac{1}{2} a \sqrt{\left(c + \frac{a}{2}\right)\left(c - \frac{a}{2}\right)}$ (III).

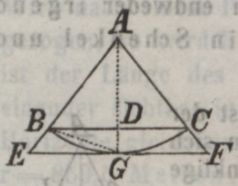
§ 108. Es sei gegeben der Schenkel $c = 30{,}4$ Fuss und der Inhalt $F = 79{,}45$ □ Fuss; gesucht A und a.

Aufl. 1) Aus § 106, 3 folgt $\sin A = \frac{2F}{c^2}$.

2) Aus § 105, 2 folgt $a = 2c \sin \frac{1}{2} A$.

Man findet $A = 9^0 54' 2'',26$ und $a = 5{,}2465433$ Fuss, oder $A = 170^0 5' 57'',74$ und alsdann $a = 60{,}573208$ Fuss.

§ 109. Aus der Seite s eines regelm. n-ecks die Radien r und R der ein- und umgeschriebenen Kreise und den Inhalt F des Vielecks zu finden.



Aufl. Sei BAC eines von den n congruenten gleichschenkligen Dreiecken, in welche das n-eck durch die aus seinem Mittelpunkte A nach allen Ecken gezogenen Linien zerlegt wird, so ist die Senkrechte $AD = r$, $AB = R$, Centriwinkel $A = \frac{360^\circ}{n}$, also $BAD = \frac{180^\circ}{n}$. Da nun $BD = \frac{1}{2} s$, $r = BD \cdot \operatorname{cotg} BAD$, $R = \frac{BD}{\sin BAD}$, so hat man

1) $r = \frac{1}{2} s \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}$. 2) $R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$.

3) $F = \frac{sr}{2} n = \frac{1}{4} s^2 n \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}$.

Aus $s = 64$ Fuss, $n = 9$ findet man $r = 87{,}91928$ Fuss, $R = 93{,}56174$ Fuss, $F = 25320{,}75$ □ Fuss.

§ **110.** Aus dem Radius r eines Kreises die Seite, den Umfang und den Inhalt des ein- und umgeschriebenen regelm. n-ecks zu finden.

Aufl. (Fig. § 109.) Sind BC und EF die Seiten der beiden n-ecke, so ist $AB = AG = r$, der Winkel $BAC = \frac{360^\circ}{n}$, $BAG = \frac{180^\circ}{n}$, $BC = 2 BD$, $BD = r \sin \frac{180^\circ}{n}$, $AD = r \cos \frac{180^\circ}{n}$, also für das eingeschriebene n-eck:

1) Seite $BC = 2 r \sin \frac{180^\circ}{n}$ 2) Umfang $= 2 n r \sin \frac{180^\circ}{n}$

3) Inhalt $= \frac{1}{2}$ Umfang $. AD = n r^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$ (§18, 21).

Ferner ist $EF = 2 EG$ und $EG = AG \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, also für das umgeschriebene n-eck:

4) Seite $EF = 2 r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ 5) Umfang $= 2 n r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$

6) Inhalt $= \frac{r}{2}$. Umfang $= n r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$

Beispiel. Aus $r = \frac{1}{2}$, $n = 21600$, also $\frac{180^\circ}{n} = 30''$ findet man für jedes der beiden Vielecke: Umfang $= 3{,}1415926$. Hieraus folgt, dass auch die zwischen beiden Umfängen enthaltene Peripherie des Kreises durch diese Zahl ausgedrückt werden muss, welche die bekannte Verhältnisszahl π ist.

§ **111.** (Fig. § 109.) Aus dem Radius $AB = r$ eines Kreises und dem im Gradmasse gegebenen Bogen $BGC = a$ die Sehne $BC = s$ und den Kreisabschnitt BGC zu finden.

Aufl. Es ist $BD = r \sin BAD$, d. h. $\frac{1}{2} s = r \sin \frac{1}{2} a$, also

1) $s = 2 r \sin \frac{1}{2} a$.

Der Kreissector ABGCA verhält sich zur ganzen Kreisfläche, wie sein Centriwinkel a zu 360°, also

$$ABGCA : r^2\pi = a : 360, \text{ folglich } ABGCA = \frac{a r^2 \pi}{360},$$

und weil (§ 106, 3) das Dreieck $ABC = \frac{1}{2} r^2 \sin a$, so ist

2) $\text{Abschnitt } BGC = \frac{a r^2 \pi}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin a = \frac{r^2}{2}\left(\frac{a\pi}{180} - \sin a\right)$

In dem Ausdrucke $\frac{a\pi}{180}$ drückt a die Grösse des Winkels in Graden und Decimaltheilen des Grades aus. Aus 1) folgt noch

3) $r = \frac{s}{2 \sin \frac{1}{2} a}$ 4) $\sin \frac{1}{2} a = \frac{s}{2r}$

Aus 2 und 3 folgt 5) $\text{Abschnitt } BGC = \frac{s^2}{8 \sin^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{a\pi}{180} - \sin a\right)$

Beisp. Zusammengehörende Werthe sind $r = 23{,}4$ Fuss, $a = 17^0\ 13'\ 24''$, $s = 7{,}0076774$ Fuss, $BGC = 1{,}2338443$ □ Fuss.

§ 112. (Fig. § 109.) Aus der Sehne $BC = s$ und der Höhe $DG = h$ eines Kreisabschnittes seinen Inhalt F und den Radius r des Kreises zu finden.

Aufl. Es ist Peripheriewinkel $CBG = \frac{1}{2} CAG = \frac{1}{4} BAC$ und $\operatorname{tg} CBG = \frac{DG}{BD} = \frac{h}{\frac{1}{2} s}$. Setzt man $BAC = a$, so ist also

1) $\operatorname{tg} \frac{1}{4} a = \frac{2h}{s}$

Nachdem a gefunden worden, ergiebt sich (§ 111, 3 und 2.)

2) $r = \frac{s}{2 \sin \frac{1}{2} a}$ 3) $F = \frac{r^2}{2}\left(\frac{a\pi}{180} - \sin a\right)$

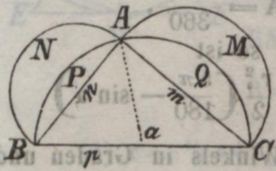
Aus $s = 40$ Fuss, $h = 4$ Fuss findet man $r = 52$ Fuss, $F = 107{,}51512$ □ Fuss.

§ 113. In einem Kreise, dessen Radius $r = 824{,}7$ Fuss ist, beträgt die Länge eines Bogens $b = 1359{,}2959$ Fuss; man soll den vom Bogen begränzten Kreisabschnitt F berechnen.

Aufl. In § 111, 2 ist $F = \frac{r^2}{2}\left(\frac{a\pi}{180} - \sin a\right)$. Der Bogen b enthält $\frac{180\, b}{r\pi}$ Grade nebst Decimaltheilen des Grades (§ 53, 2), aus welchen letzteren sich die Minuten und Secunden ergeben. Setzt man also für a in $\frac{a\pi}{180}$ den Ausdruck $\frac{180\, b}{r\pi}$, und begreift unter a in $\sin a$ die gefundenen Grade, Minuten und Secunden des Bogens b, so ist

$$F = \frac{r^2}{2}\left(\frac{b}{r} - \sin a\right) = 221459{,}55 \text{ □Fuss}.$$

§ **114.** Es sind über den Seiten $p=10$ Fuss, $m=8$ Fuss, $n=6$ Fuss des bei A rechtw. Dreiecks ABC als Durchmessern Halbkreise beschrieben; man soll die mondförmigen Abschnitte M und N berechnen (*Lunulae Hippocratis*).



Aufl. Man erhält M, wenn man von dem Halbkreise über m, welcher gleich $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)^2\pi = \frac{1}{8}m^2\pi$ ist, den Kreisabschnitt Q abzieht. Um Q zu berechnen, setze man in die Formel § 111, 4 m statt s, p statt 2 r, so ist $\sin\frac{1}{2}a = \frac{m}{p}$. Nachdem a bestimmt worden, erhält man aus der Formel § 111, 2, indem ½ p statt r gesetzt wird,

$$Q = \frac{p^2}{8}\left(\frac{a\pi}{180} - \sin a\right), \text{ folglich}$$

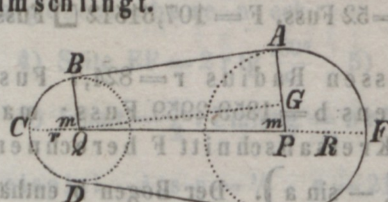
$$1)\ M = \frac{m^2\pi}{8} - \frac{p^2}{8}\left(\frac{a\pi}{180} - \sin a\right) = 13{,}950364 \ \square \text{ Fuss.}$$

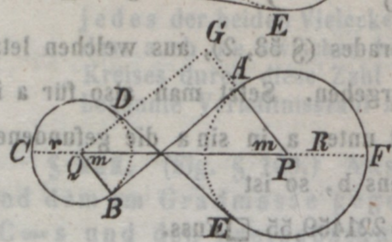
Der Nebenwinkel von a ist gleich $180^0 - a$ und $\sin(180^0 - a) = \sin a$, folglich erhält man auf gleiche Weise

$$2)\ N = \frac{n^2\pi}{8} - \frac{p^2}{8}\left(\frac{180 - a}{180}\pi - \sin a\right) = 10{,}04964 \ \square \text{ Fuss.}$$

Da sich die drei Halbkreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser p, m, n verhalten, und $p^2 = m^2 + n^2$ ist, so ist der Halbkreis über der Hypotenuse der Summe der Halbkreise über den Katheten gleich. Nimmt man beiderseits $P + Q$ weg, so ist $\triangle ABC = M + N$. Hierdurch kann man die Rechnung prüfen, und findet $\triangle ABC = \frac{1}{2}mn = 24 \ \square$ Fuss $= M + N$.

§ **115.** Die Radien R und r zweier Kreise und der Abstand $PQ = a$ ihrer Mittelpunkte ist gegeben; man sucht die Länge L der kürzesten Linie ABCDEFA, welche beide Kreise umschlingt.





Aufl. In beiden Fällen, mag die Linie L die Centrallinie PQ ganz einschliessen oder dieselbe durchkreuzen, ziehe man nach A und B, wo L aus den Kreisumfängen heraustritt, Radien, welche auf der Tangente AB senkrecht stehen werden, und verlängere PQ nach C und F, so ist $\frac{1}{2}L = AB + \text{Bog.}\,BC + \text{Bog.}\,AF$. Ferner ziehe man aus dem Mittelpunkte des kleinern Kreises QG ∥ BA bis zum Radius PA oder dessen Verlängerung, und bezeichne den Winkel APQ mit m, so ist in der ersten Figur auch $BQC = m$, in der zweiten $BQP = m$.

Im ersten Falle ist $\cos m = \frac{PG}{PQ} = \frac{R-r}{a}$, ferner ist
$AB = GQ = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$, und $BC = \frac{mr\pi}{180}$, $AF = \frac{(180^0 - m) R\pi}{180}$,
wo m blos in Graden ausgedrückt ist. Hieraus folgt

$$L = 2\sqrt{a^2 - (R-r)^2} + \frac{mr\pi}{90} + \frac{(180^0 - m) R\pi}{90}$$

Im zweiten Falle ist $\cos m = \frac{PG}{PQ} = \frac{R+r}{a}$, ferner
$AB = GQ = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$, $BC = \frac{(180^0 - m) r\pi}{180}$, $AF = \frac{(180^0 - m) R\pi}{180}$,

$$L = 2\sqrt{a^2 - (R+r)^2} + \frac{(180^0 - m) r\pi}{90} + \frac{(180^0 - m) R\pi}{90}$$

$$L = 2\sqrt{a^2 - (R+r)^2} + \frac{(180 - m)\pi(R+r)}{90}$$

§ 116. *Aufgaben über gleichschenklige Dreiecke, regelm. Vielecke und Kreisabschnitte.*

1) *In einem geraden* 25,8 Fuss *hohen Kegel beträgt der Durchmesser der Grundfläche* 10,3 Fuss; *wie gross ist der Winkel an der Spitze und die Seitenlinie?*

2) *Das Quadrat der Länge eines Rechtecks ist gleich dem doppelten Quadrate der Breite; unter welchem Winkel durchschneiden sich die Diagonalen?*

3) *Der Querschnitt eines Daches bildet ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die Höhe* 29 Fuss *und der Winkel an der Grundlinie* $40^0\ 25'$ *beträgt; wie gross ist die Grundlinie?*

4) *In einer regelm. vierseitigen Pyramide ist der Kantenwinkel an der Spitze gleich* $45^0\ 35'$ *und die Grundkante gleich* 120 Fuss; *wie gross ist die gesammte Oberfläche der Pyramide?*

5) *Die Seitenlinie eines geraden Kegels beträgt* 35 Fuss *und hat gegen die Grundfläche eine Neigung von* $27^0\ 19'$; *wie gross ist die Höhe* h *des Kegels und der Durchmesser* d *seiner Grundfläche?*

6) *In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich das Quadrat des Schenkels zum Quadrat der Grundlinie, wie* 3 : 4. *Wie gross ist der Winkel an der Spitze?*

7) *Wie gross ist der Radius desjenigen Kreises, in welchem der Peripheriewinkel* $14^0\ 16'\ 10''$ *auf einer Sehne* = 367,375 Fuss *steht?*

8) *In einem gleichschenkligen Dreieck sei der Winkel an der Basis gleich* $54^0\,44'\,8'',19$. *Wie gross ist das Verhältniss* x *des Schenkels zur Grundlinie?*

9) *Zwei Feldmesser sind* 850 Fuss *und zwar in verschiedener Richtung von einem Signal entfernt. Der eine hat den Winkel der Gesichtslinien zum Signal und zum Standpunkt des andern Feldmessers gleich* $36^0\,52'\,11'',62$ *gefunden. Wie weit sind die Feldmesser von einander entfernt?*

10) *An einem gewissen Orte* A *sieht man eine Wolke in südwestlicher Richtung unter einem Höhenwinkel von* 25^0. *Wenn nun an einem andern Orte* B, *welcher* 25000 Fuss *südlich vom ersten liegt, die Wolke in nordwestlicher Richtung erscheint; welchen Höhenwinkel* (x) *hat die Wolke am Orte* B, *und wie gross ist ihre senkrechte Entfernung* (y) *von der Erde?*

11) *Das gleichschenklige Dreieck aus seiner Höhe* 72 Fuss *und der Summe der Grundlinie und des Schenkels* 210 Fuss *zu berechnen.*

12) *Das gleichschenklige Dreieck aus dem Umfange* 4 Fuss *und der Höhe* 1 Fuss *zu berechnen.*

13) *Wie gross ist in einem Kreise derjenige Centriwinkel, dessen Sehne* $1\frac{1}{3}$ Mal *so gross ist als der Radius?*

14) *Aus den Umfängen der einem beliebigen Kreise ein- und umgeschriebenen regelm.* 24000-ecke *die Zahl* π *zu berechnen.*

15) *Wie gross ist der Inhalt* F *und die Sehne* s *des Kreisabschnittes, welcher durch einen Bogen* $a = 259^0\,15'\,32'',5$ *begränzt wird, wenn der Radius* $r = 19,7$ Fuss *beträgt?*

16) *Den Abschnitt* F *zu berechnen, welcher auf der Seite des regelm. Sechsecks im Kreise ruht, dessen Radius* 1 Fuss *ist.*

17) *Das Verhältniss des regelm.* 15-ecks, *dessen Seite gleich* 17 Fuss *ist, zum regelm.* 17-eck, *dessen Seite* 15 Fuss *beträgt, anzugeben.*

18) *Man pflegt einen kleinen Kreisabschnitt näherungsweise durch die Multiplication seiner Sehne* s *mit* $\frac{2}{3}$ *seiner Höhe* h *zu berechnen. Wenn nun* $s = 37,6$ Fuss *und* $h = 12,7$ Fuss *ist, um wie viel ist der so gefundene Inhalt* f *des Kreisabschnittes kleiner als sein wahrer Inhalt* F?

19) *Die Durchmesser zweier Maschinenräder betragen* 6 Fuss *und* 2 Fuss, *und ihre Axen stehen* 6 Fuss *von einander ab. Welche Länge* (x) *hat ein die beiden Räder kreuzweise umschlingender Riemen, und wie lang* (y) *ist derselbe dann, wenn keine Kreuzung stattfindet?*

20) *In einem regelm.* 15-eck *sei der Radius des umgeschr. Kreises* $R = 9,201$ Fuss. *Wie gross ist der Radius* r *des eingeschr. Kreises, die Seite* s *und der Inhalt* F *des Polygons?*

21) *Ein regelm.* 37-eck *enthält* 24127,94 □ Fuss; *man sucht seine Seite* s *und den Radius* r *des eingeschriebenen Kreises.*

22) *Wie lang ist der Bogen, dessen Sehne* 36 Fuss *und dessen Radius* 18,7 Fuss *beträgt?*

23) *Die Höhe eines Kreisabschnittes sei* $h = 25,4$ Fuss *und sein Bogen* $a = 136^0\, 9'\, 40'',14$; *man soll hieraus die Sehne* s, *den Inhalt* F *und den Radius* r *des Abschnittes finden.*

24) *Aus dem Radius* $r = 20,264957$ Fuss *und der Höhe* $h = 12,7$ Fuss *eines Kreisabschnittes die Sehne* s *und den Inhalt* F *zu berechnen.*

25) *Von einem Kreise ist gegeben der Radius* $r = 412,35$ Fuss *und ein Kreisabschnitt* $F = 55364,9$ □ Fuss; *man verlangt den Unterschied* x *zwischen dem in Theilen des Radius ausgedrückten Bogen des Abschnittes und dem Sinus des Bogens.*

26) *Um einen Kreis vom Radius* $r = 9$ Fuss *ist ein regelm.* 15-eck *beschrieben; wie gross ist die Seite* s, *und der Inhalt* F *des Polygons und der Radius* R *des umgeschr. Kreises?*

27) *Für ein regelmässiges* n-eck *bezeichne* s *die Seite*, r *und* R *die Radien der ein- und umgeschriebenen Kreise. Es soll gefunden werden* 1) n *und* R *aus* $s = 2$ *und* $r = \sqrt{3}$ 2) n *und* r *aus* $s = \sqrt{32}$ *und* $R = 4$.

28) *Ein Kreisabschnitt hat den Centriwinkel* $a = 87^0\, 12'\, 20'',304$. *Man soll* 1) *das Verhältniss* x *des Abschnittes zum Kreise* 2) *das Verhältniss* y *des Abschnittes zum Dreieck angeben, welches auf der Sehne des Abschnittes steht und mit diesem gleiche Höhe hat.*

29) *Wenn man aus einem Punkte der Peripherie eines gegebenen Kreises mit dessen Radius einen zweiten Kreis beschreibt, so ist die Hälfte der den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Sehne annäherend die Seite des eingeschriebenen regelm.* 7-ecks. *Um wie viel differirt der Mittelpunktswinkel, welcher der so gefundenen Seite entspricht, vom wahren Mittelpunktswinkel des regelm.* 7-ecks.

30) *In einem rechtw. Dreieck, dessen Seiten* $m = 24$ Fuss, $n = 18$ Fuss, $p = 30$ Fuss, *hat man über den Katheden Halbkreise nach aussen, und über der Hypotenuse einen Halbkreis nach innen des Dreiecks beschrieben; man sucht die Inhalte* M *und* N *der von zwei nach einerlei Seite hohlen Bogen gebildeten Abschnitte.*

31) *In einem Kreise, dessen Radius* 41,235 Fuss *beträgt, ist ein Bogen* 67,964795 Fuss *lang; wie gross ist der von diesem Bogen begränzte Kreisabschnitt?*

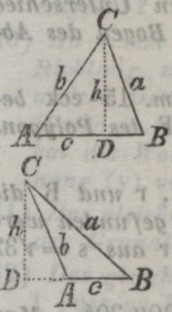
32) *Die Sehne eines jeden Bogens an der Donaubrücke in Ulm beträgt* 60 Fuss, *und seine Höhe* 10 Fuss; *wie lang ist ein solcher Bogen?*

33) *Der Cubikinhalt eines Prismas beträgt* 50 Cub. Fuss, *und die Höhe ist das Doppelte von dem Durchmesser des um die Basis beschriebenen Kreises, welche ein regelm. Achteck bildet; wie gross ist die Seite der Basis?*

34) *Die Inhalte eines regelm.* 36-ecks *und* 60-ecks *verhalten sich wie* 5 : 4 *und sind zusammen so gross als ein Kreis, dessen Radius* 17,188735 Fuss *beträgt. Wie gross sind die Seiten* x *und* y *der beiden Polygone?*

Berechnung der schiefwinkligen Dreiecke.

§ 117. Wir beginnen unsere Betrachtungen mit einer Reihe von Lehrsätzen, auf welchen die Auflösung der schiefw. Dreiecke beruht.



Zieht man im spitzwinkligen oder stumpfwinkligen Dreieck ABC aus C die Senkrechte h auf die Seite AB oder deren Verlängerung, so ist in beiden Fällen $h = b \sin A$ und $h = a \sin B$, folglich $b \sin A = a \sin B$, oder

$$\boldsymbol{a : b = \sin A : \sin B}.$$ Ebenso ist

$$\boldsymbol{a : c = \sin A : \sin C}$$

$$\boldsymbol{b : c = \sin B : \sin C}$$

d. h. die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel. (Vergl. § 136.)

§ 118. Es ist (Fig. § 117) $AB = BD \pm AD$, also in beiden Fällen

1) $c = a \cos B + b \cos A$. Ebenso

2) $b = c \cos A + a \cos C$

3) $a = c \cos B + b \cos C$

Multiplicirt man die erste Gl. mit c, die zweite mit b, die dritte mit a, so ist

$$c^2 = bc \cos A + ac \cos B$$
$$b^2 = bc \cos A + ab \cos C$$
$$a^2 = ac \cos B + ab \cos C$$

Zieht man von der Summe je zweier dieser Gleichungen die dritte ab, so ist

4) $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$ also $\boldsymbol{\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$

5) $\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$ „ $\boldsymbol{\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$

6) $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$ „ $\boldsymbol{\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$

§ 119. Es ist $a : b = \sin A : \sin B$, also auch

$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B$ oder (§ 19)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{a + b : a - b = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B)}$$

Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks verhält sich also zum Unterschiede derselben, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente des halben Unterschiedes derselben Winkel.

Da tg $\frac{1}{2}(A+B) = \text{cotg } \frac{1}{2} C$ ist (§ 6), so kann man auch setzen

$$a+b : a-b = \text{cotg } \tfrac{1}{2} C : \text{tg } \tfrac{1}{2}(A-B)$$

§ 120. Aus der Summe und Differenz zweier Grössen findet man die grössern derselben, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt, dagegen die kleinere, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz abzieht.

Denn es sei x die grössere, y die kleinere Grösse, die Summe beider gleich s und ihre Differenz gleich d, so ist $x + y = s$ und $x - y = d$, und man erhält durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}(s+d), \quad x = \tfrac{1}{2}(s-d).$$

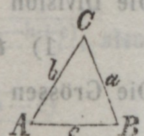
§ 121. Der Flächeninhalt (F) eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des Zwischenwinkels.

Es ist nämlich (Fig. § 117) $h = a \sin B$ und $F = \frac{1}{2} c h = \frac{1}{2} a c \sin B$. Eben so ist $F = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} a b \sin C$.

§. 122. Die (§ 117 — § 121) nachgewiesenen Beziehungen zwischen den Stücken eines beliebigen Dreiecks reichen hin, jede Aufgabe zu lösen, wo aus irgend drei von einander unabhängigen Stücken eines Dreiecks die übrigen berechnet werden sollen. Es kommen hier vier Auflösungsfälle vor, indem nämlich gegeben sein kann 1) eine Seite nebst zwei Winkeln, 2) zwei Seiten und der Zwischenwinkel, 3) alle drei Seiten, 4) zwei Seiten und ein Gegenwinkel.

Erster Auflösungsfall.

§ 123. Gegeben eine Seite a und zwei Winkel; gesucht b, c, F.



Aufl. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks bekannt sind, so ist auch der dritte Winkel bekannt. Nun ist (§ 117, § 121)

$$1)\ b = \frac{a \sin B}{\sin A} \qquad 2)\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} \qquad 3)\ F = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

Aus $a = 487{,}5$ Fuss, $A = 103^0\ 48''$, $B = 42^0\ 25'$ findet man $C = 33^0\ 47'$, $b = 338{,}601$ Fuss, $c = 279{,}13367$ Fuss, $F = 45893{,}35$ □Fuss. Zur Prüfung der Rechnung kann die Gl. (§ 118, 3) $a = c \cos B + b \cos C$ dienen.

Zweiter Auflösungsfall.

§ 124. Gegeben zwei Seiten a, b und der zwischenliegende Winkel C; gesucht A, B, c, F.

Aufl. Es lässt sich die halbe Summe und die halbe Differenz der Winkel A und B berechnen, woraus A und B gefunden werden können (§ 120), nämlich

$\frac{1}{2}(A+B)=90^0-\frac{1}{2}C$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C$ (§119), folglich

6) $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 2) $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$

3) $\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{a}\sin\boldsymbol{C}}{\sin\boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{b}\sin\boldsymbol{C}}{\sin\boldsymbol{B}}$ 4) $\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{ab}\sin\boldsymbol{C}$

Um negative Differenzen zu vermeiden, muss immer unter a die grössere und unter b die kleinere der beiden gegebenen Seiten verstanden werden.

Beispiel. $a=1295{,}4$ Fuss, $b=835{,}7$ Fuss, $C=74^0\,25'\,30'',4$

Berechnung.

$\frac{1}{2}C=37^0\,12'\,45'',2$

$\frac{(A+B)}{2}=52^0\,47'\,14'',8$

$a+b=2131{,}1$

$a-b=459{,}7$

$\log(a-b)=2{,}6624745$

$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C=0{,}1195370$

$CD\log(a+b)=6{,}6713962-10$

$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=9{,}4534077$

$\frac{1}{2}(A-B)=15^0\,51'\,27'',51$

1) $A=68^0\,38'\,42'',31$ 2) $B=36^0\,55'\,47'',29$

3) $\log a=3{,}1124039$

$\log\sin C=9{,}9837527-10$

$CD\log\sin A=0{,}0308905$

$\log c=3{,}1270471$

$c=1339{,}822$ Fuss.

4) $\log a=3{,}1124039$

$\log b=2{,}9220504$

$\log\sin C=9{,}9837527-10$

$\log 2F=6{,}0182070$

$F=521407{,}2$ □ Fuss.

§ 125. Die Winkel A, B lassen sich auch unabhängig von einander, unmittelbar aus a, b, C finden. Es ist nämlich (§ 117, § 118, 2, 3)

$c\sin A=a\sin C$ $c\sin B=b\sin C$

$c\cos A=b-a\cos C$ $c\cos B=a-b\cos C$

Die Division der oberen Gleichungen durch die unteren giebt

1) $\operatorname{tg}\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{a}\sin\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cos\boldsymbol{C}}$ 2) $\operatorname{tg}\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{b}\sin\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cos\boldsymbol{C}}$

Die Grössen c, F werden hierauf wie in § 124 gefunden.

§ 126. Die Seite c kann ohne vorhergegangene Bestimmung der Winkel A und B direct aus a, b, C gefunden werden mittels der Gleichung (§ 118, 6)

$$\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\,\boldsymbol{ab}\cos\boldsymbol{C}$$

Alsdann hat man (§ 117) $\sin A=\frac{a\sin C}{c}$ und $\sin B=\frac{b\sin C}{c}$.

§ 127. Wenn man in § 124 nur die Winkel A, B, nicht zugleich c und F berechnen will, so genügt es, wenn ausser C blos das Verhältniss der Gegenseiten a, b bekannt ist. Denn dividirt man in der Gl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C$ Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a-b}{a+b}$ durch b und setzt $\frac{a}{b}=\operatorname{cotg}\varphi$, so ist (§ 20, 44)

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{cotg} \varphi-1}{\operatorname{cotg} \varphi+1} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C=\operatorname{cotg}(45^0+\varphi) \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C$, folglich $\frac{1}{2}(A-B)$ ganz unabhängig von der absoluten Grösse von a und b bestimmt. Dieselbe Bemerkung gilt für § 125.

Dritter Auflösungsfall.

§ 128. Gegeben die drei Seiten a, b, c; gesucht A, B, C, F.

Aufl. Man hat (§ 118) die Gleichungen

$$1)\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad 2)\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$3)\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

welche aber keine logarithmische Rechnung gestatten und somit nur dann bequem sind, wenn die gegebenen Zahlen aus wenig Ziffern bestehen. Um andere Formen abzuleiten, substituire man $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ für cos A in die beiden Gleichungen (§ 18, 26, 27)

$\cos \frac{1}{2} A=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ und $\sin \frac{1}{2} A=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, dann ist

$$\cos \frac{1}{2} A=\sqrt{\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc}} \qquad \sin \frac{1}{2} A=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} \qquad \sin \frac{1}{2} A=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} \qquad \sin \tfrac{1}{2} A=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}, \text{ also}$$

$$\cos \frac{1}{2} A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \qquad \sin \frac{1}{2} A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

wenn der Kürze wegen $\mathbf{a+b+c=2s}$, alzo $b+c-a=2(s-a)$, $a+b-c=2(s-c)$, $a-b+c=2(s-b)$ gesetzt wird. Die Division der ersten Gl. in die zweite giebt

$$4)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.\ \text{Ebenso ist}$$

$$5)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \qquad 6)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s.(s-c)}}$$

Da ferner (§ 18, 21)

$F=\frac{bc \sin A}{2}=\frac{bc.\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A}{2}=bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, so ist

$$7)\ F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Die Wurzel in den Formeln 4 bis 7 muss immer positiv genommen werden, da jeder halbe Dreieckswinkel spitz ist, und der Flächeninhalt nicht negativ sein kann. Zur Prüfung der Rechnung dient die Gl. $A + B + C = 180^0$.

Beispiel. $a = 97{,}5$ Fuss, $b = 84{,}5$ Fuss, $c = 91$ Fuss.

Berechnung.

$$\begin{array}{rlrl}
\log s &= 2{,}1351327 & \log(s-b) &= 1{,}7160033 \\
\log(s-a) &= 1{,}5910646 & \log(s-c) &= 1{,}6580114 \\
\log \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} &= 9{,}6478174 & {}^1\!/\!_2\, A &= 33^0\ 41'\ 24'',23 \\
\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= 9{,}8239087 & {}^1\!/\!_2\, B &= 26^0\ 33'\ 54'',18 \\
\log \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} &= 9{,}3979400 & {}^1\!/\!_2\, C &= 29^0\ 44'\ 41'',56 \\
\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= 9{,}6989700 & A &= 67^0\ 22'\ 48'',46 \\
\log \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} &= 9{,}5139238 & B &= 53^0\ \ 7'\ 48'',36 \\
\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= 9{,}7569619 & C &= 59^0\ 29'\ 23'',12 \\
\log F &= 3{,}5501060 & F &= 3549 \,\square\, \text{Fuss.}
\end{array}$$

§ 129. Aus $^1/_2\, bc \sin A = F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ folgt

$$1)\quad \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$ Ferner ist (Fig. § 117)

$$2)\quad h = b \sin A = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Mittels dieser Formel, in welcher h die auf die Seite c gefällte Höhe vorstellt, lässt sich aus den drei Seiten eines Dreiecks dessen Höhe finden.

Im gleichseitigen Dreieck ist $a = b = c$, also $s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2} - a\right)^3 = 3\left(\frac{a}{2}\right)^4$, folglich

$$3)\quad F = \sqrt{3\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Vierter Auflösungsfall.

§ 130. Gegeben zwei Seiten a, b und ein Gegenwinkel A; gesucht B, C, c, F.

Aufl. 1) $\boldsymbol{\sin B = \frac{b \sin A}{a}}$ 2) $\boldsymbol{C = 180^0 - (A + B)}$

3) $\boldsymbol{c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B}}$ 4) $\boldsymbol{F = {}^1\!/\!_2\, ab \sin C}$

Die Werthe für C, c, F sind abhängig von dem Werthe des Winkels B, welcher, durch seinen Sinus bestimmt, im Allgemeinen sowol spitz als stumpf sein kann.

Wenn nun $a \geqq b$, also auch $A \geqq B$ ist, so kann B nur spitz genommen werden, z. B. aus $a = 154{,}31$ Fuss, $b = 123{,}84$ Fuss,

$A = 43^0\,17'\,12'',3$ findet man $B = 33^0\,23'\,5'',89$, $C = 103^0\,19'\,41'',81$, $c = 218{,}9947$ Fuss, $F = 9297{,}517$ □ Fuss.

Wenn aber $a < b$, also auch $A < B$ ist, so kann B sowol spitz als stumpf sein, und es nehmen daher auch C, c, F zwei verschiedene Werthe an. In diesem Falle giebt es zwei verschiedene Dreiecke, von denen das eine sowol wie das andere die gegebenen Stücke enthält, z. B. aus $a = 308$ Fuss, $b = 375$ Fuss, $A = 37^0\,45'$ findet man

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}5740313 \\ \log \sin A &= 9{,}7869056 - 10 \\ \text{CD} \log a &= 7{,}5114493 - 10 \\ \hline \log \sin B &= 9{,}8723862 - 10, \text{ folglich} \end{aligned}$$

1) $B = 48^0\,11'\,34'',78$ oder	1) $B = 131^0\,48'\,25'',22$
2) $C = 94^0\;\;3'\,25'',22$	2) $C = 10^0\,26'\,34'',78$
3) $\log \sin C = 9{,}9989103 - 10$	3) $\log \sin C = 9{,}2582952 - 10$
$\log a = 2{,}4885507$	$\log a = 2{,}4885507$
CD $\log \sin A = 0{,}2130944$	CD $\log \sin A = 0{,}2130944$
$\log c = 2{,}7005554$	$\log c = 1{,}9599403$
$c = 501{,}8286$ Fuss	$c = 91{,}18854$ Fuss
4) $F = 57605{,}28$ □ Fuss	4) $F = 10467{,}6$ □ Fuss.

§ 131. In dem besondern Falle, wo $a < b$ und zugleich $a = b \sin A$, ist $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = 1$, also $B = 90^0$, und es giebt dann nur ein Dreieck, welches rechtwinklig ist. Wenn dagegen $a < b$, und zugleich $a < b \sin A$, also $\sin B > 1$ wäre, so kann gar kein Dreieck mit den gegebenen Stücken existiren. — Die geometrische Darstellung dieser verschiedenen Fälle findet sich bei Legendre § 72.

Auflösung zusammengesetzter Aufgaben.

§ 132. Das Dreieck aus dem Inhalte $F = 120$ □ Fuss und den Winkeln $A = 14^0\,15'\,0'',116$, $B = 22^0\,37'\,11'',5$ zu berechnen.

Aufl. 1) $C = 143^0\,7'\,48'',38$ 2) Aus § 123, 3 folgt

$$a = \sqrt{\frac{2F \sin A}{\sin B \sin C}} = 16 \text{ Fuss.}$$

$$3)\; b = \frac{a \sin B}{\sin A} = 25 \text{ Fuss.} \quad 4)\; c = \frac{a \sin C}{\sin A} = 39 \text{ Fuss.}$$

§ 133. Das Dreieck aus dem Inhalte $F = 1{,}7320508$ □ Fuss und zwei Seiten $a = 2$ Fuss, $b = 3{,}4641016$ Fuss zu berechnen.

Aufl. Aus § 121 folgt $\sin C = \frac{2F}{ab}$. Nachdem C bestimmt worden, kann das Dreieck nach § 124 aufgelöst werden. Wegen der Zweideutigkeit des $\sin C$ findet man zwei verschiedene Dreiecke, nämlich

1) $C = 30^0$, $B = 120^0$, $A = 30^0$, $c = 2$ Fuss, oder

2) $C = 150^0$, $B = 19^0\, 6'\, 23'',77$, $A = 10^0\, 53'\, 36'',23$, $c = 5{,}2915$ Fuss..

§ 134. Das Dreieck aus der Grundlinie a, der Höhe h und dem Winkel A an der Spitze zu berechnen.

Aufl. Da $\frac{1}{2}(B + C) = 90^0 - \frac{1}{2} A$ bekannt ist, so suche man $\frac{1}{2}(B - C)$. Aus (§ 123) $F = \frac{1}{2} ah = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ folgt (§ 19, 31)

$$\frac{h \sin A}{a} = \sin B \sin C = \tfrac{1}{2} \cos(B - C) - \tfrac{1}{2} \cos(B + C), \text{ also (§ 9)}$$

$$\cos(B - C) = \frac{2h \sin A}{a} - \cos A.$$

Nun ist (§ 120) $B = \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(B - C)$, $C = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C)$, also

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

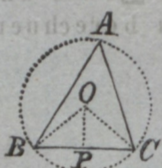
§ 135. Ein Dreieck (Fig. § 95) aus den Abschnitten $CD = m$, $BD = n$, in welche das Höhenperpendikel die Grundlinie theilt, und aus dem Winkel A an der Spitze zu berechnen.

Aufl. Man bestimme $1/2\,(B + C) = 90^0 - 1/2\, A$ und $1/2\,(B - C)$. Da $\operatorname{cotg} B = \frac{n}{h}$ und $\operatorname{cotg} C = \frac{m}{h}$, so ist $m : n = \operatorname{cotg} C : \operatorname{cotg} B$, also auch

$$\frac{m + n}{m - n} = \frac{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} B} = \frac{\sin(B + C)}{\sin(B - C)} \text{ (§ 20, 48, 49), folglich}$$

$\sin(B - C) = \frac{m - n}{m + n} \sin A$. Wie in § 134 bestimme man jetzt B, C, b, c und $F = 1/2\, bc \sin A$.

§ 136. Aus den Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC die Radien R und r des um- und eingeschriebenen Kreises zu finden.



Aufl. 1) Zieht man aus dem Mittelpunkte O die $OP \perp BC$, ferner OB und OC, so ist

$$BC = 2\, BO \sin 1/2\, BOC = 2 R \sin A, \text{ also}$$

$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{a}{\sin A}.$$

Da (§ 129) $\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, wo

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, so ist (§ 128, 7)

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{abc}{4F}$$

2) Zieht man aus dem Mittelpunkte nach den Winkelspitzen gerade Linien und auf die Seiten a, b, c die Senkrechten OD, OE, OF, so ist

$$F = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = \frac{r}{2}(a+b+c), \text{ also}$$

$$r = \frac{2F}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a+b+c}$$

Da $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (§ 117), so sieht man, dass der Quotient jeder Dreiecksseite durch den Sinus des Gegenwinkels den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ausdrückt.

§ 137. Zur Auflösung der folgenden Aufgaben sind nachstehende Formeln erforderlich.

Die Addition und Subtraction der beiden Proportionen

$$a : c = \sin A : \sin C \quad \text{und} \quad b : c = \sin B : \sin C \quad \text{giebt}$$

$$a + b : c = \sin A + \sin B : \sin C \quad \text{und} \quad a - b : c = \sin A - \sin B : \sin C.$$

Zufolge § 19, 32, 33 und § 18, 21 hat man daher auch

$$a + b : c = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B) : 2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$a - b : c = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B) : 2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C$$

Da nun (§ 6) $\sin\frac{1}{2}(A+B) = \cos\frac{1}{2}C$ und $\cos\frac{1}{2}(A+B) = \sin\frac{1}{2}C$, so ist

$$1)\quad \boldsymbol{a + b : c = \cos\tfrac{1}{2}(A-B) : \sin\tfrac{1}{2}C}$$

$$2)\quad \boldsymbol{a - b : c = \sin\tfrac{1}{2}(A-B) : \cos\tfrac{1}{2}C}$$

§ 138. Ein Dreieck zu berechnen aus der Summe zweier Seiten $a+b=s$, der dritten Seite c und entweder 1) aus dem ihr gegenüberliegenden Winkel C oder 2) aus einem ihr anliegenden Winkel A.

Aufl. 1) Man berechne $\frac{1}{2}(A+B)$ und (§ 137, 1) $\frac{1}{2}(A-B)$, woraus sich (§ 120) A und B ergiebt, so dass die Aufgabe dadurch auf den ersten Auflösungsfall (§ 123) zurückgeführt ist.

2) Da $a = s - b$, also $a^2 = s^2 - 2bs + b^2$, und (§ 118, 4) $a^2 = b + c^2 - 2bc\cos A$, so ist $s^2 - 2bs + b^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,

oder $s^2 - c^2 = 2b(s - c\cos A)$, also $b = \frac{s^2 - c^2}{2(s - c\cos A)}$.

Das Dreieck wird jetzt aus b, c, A nach § 124 berechnet.

§ 139. Ein Dreieck aus seinen Winkeln A, B, C und der Summe $a+b$ oder Differenz $a-b$ zweier Seiten zu berechnen.

Aufl. Man berechnet c im ersten Falle aus § 137, 1, im zweiten Falle aus § 137, 2 und löst jetzt das Dreieck nach § 123 auf.

Die Seiten a, b lassen sich auch finden (§ 120), also das Dreieck auflösen, wenn man nach § 119 für den ersten Fall $a-b$, und für den zweiten Fall $a+b$ berechnet.

Endlich kann man aus $a : b = \sin A : \sin B$ ableiten

$$a \pm b : b = \sin A \pm \sin B : \sin B, \text{ also } b = \frac{(a \pm b) \sin B}{\sin A \pm \sin B},$$

wodurch die Auflösung auf § 123 zurückgeführt ist.

§ 140. Ein Dreieck zu berechnen, wenn gegeben ist der Inhalt F, der Umfang $a+b+c$ und entweder eine Seite c oder ein Winkel C.

Aufl. Man setze $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$, so ist für den ersten Fall (§ 128, 6, 7)

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s.(s-c)(s-c)}} = \frac{F}{s(s-c)},$$

und für den zweiten Fall hieraus $c = s - \frac{F \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C}{s}$.

Da jetzt in beiden Fällen C, also auch $\frac{1}{2}(A+B)$, ferner c und daher auch $a+b$ bekannt ist, so lässt sich (§ 137, 1) $\frac{1}{2}(A-B)$ und hierauf (§ 120) A und B finden, wodurch die Aufgabe auf § 123 zurückgeführt ist.

§ 141. Ein Dreieck aus dem Umfange $a+b+c$ und den Winkeln A, B, C zu berechnen.

Aufl. Aus (§ 137, 1) $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2} C}$ erhält man

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B) + \sin \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B) + \cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2} C} \quad (\S\ 6)$$

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} \ (\S\ 19, 34), \text{ also } c = \frac{(a+b+c) \sin \frac{1}{2} C}{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}.$$

Das Dreieck lässt sich jetzt nach § 123 auflösen.

§ 142. Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite a, einem anliegenden Winkel B, und der Differenz $b-c$ der beiden andern Seiten.

Aufl. Aus $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ und $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ folgt

$$b-c = a\left(\frac{\sin B - \sin C}{\sin A}\right) = -a\left(\frac{\sin(A+B) - \sin B}{\sin A}\right), \text{ also } (\S 19, 33, \S 18, 21)$$

$$b - c = -a\left(\frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+2B) \sin \frac{1}{2} A}{2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A}\right) = -\frac{a \cos(B + \frac{1}{2} A)}{\cos \frac{1}{2} A}$$

$$b - c = \frac{-a\cos B\cos\frac{1}{2}A + a\sin B\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A} = -a\cos B + a\sin B\,\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,A,$$

$$\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,A = \frac{b - c + a\cos B}{a\sin B}.$$

Aus A, B, a kann jetzt das Dreieck nach § 123 berechnet werden.

Wenn nicht gesagt ist, ob $b > c$ oder $b < c$, so kann die Differenz $b - c$ positiv oder negativ sein. Da ${}^1\!/_2\,A$ als halber Dreieckswinkel spitz ist, so muss $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,A$, also auch die rechte Seite der Gleichung positiv sein, wenn überhaupt das Dreieck mit den gegebenen Stücken existiren soll. Für $B \geqq 90^0$ ist $b - c$ positiv, dagegen für $B < 90^0$ kann $b - c$ positiv oder negativ sein, und in diesem Falle giebt es zwei Werthe für $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,A$, also auch zwei verschiedene Dreiecke, vorausgesetzt, dass beide Grössen $\pm(b - c) + a\cos B$ positiv ausfallen.

§ 143. Das Dreieck aus einer Seite c, der Differenz der anliegenden Winkel $A - B$ und der Differenz der beiden andern Seiten $a - b$ zu berechnen.

Aufl. Man bestimmt (§ 137, 2 und § 119) nach einander C und $a + b$, dann (§ 120) aus $a + b$ und $a - b$ die Seiten a und b, endlich (§ 117) A und B.

§ 144. Ein Dreieck aus seinen drei Höhen α, β, γ zu berechnen, welche von den Spitzen A, B, C gezogen sind.

Aufl. Da $2F = a\alpha = b\beta = c\gamma$, so ist

$b = \frac{\alpha a}{\beta}$ und $c = \frac{\alpha a}{\gamma}$, folglich (§ 128, 7) der Inhalt

$$\frac{a\alpha}{2} = \sqrt{\left(\frac{a + \frac{\alpha a}{\beta} + \frac{\alpha a}{\gamma}}{2}\right)\left(\frac{-a + \frac{\alpha a}{\beta} + \frac{\alpha a}{\gamma}}{2}\right)\left(\frac{a - \frac{\alpha a}{\beta} + \frac{\alpha a}{\gamma}}{2}\right)\left(\frac{a + \frac{\alpha a}{\beta} - \frac{\alpha a}{\gamma}}{2}\right)}$$

$$\frac{a\alpha}{2} = \frac{a^2}{4\beta^2\gamma^2}\sqrt{(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta)(-\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta)(\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\beta)(\beta\gamma + \alpha\gamma - \alpha\beta)}$$

$$a = \frac{2\alpha\beta^2\gamma^2}{\sqrt{[(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma)(\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta)]}}$$

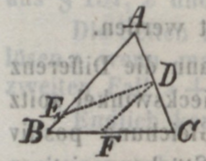
Durch a ist jetzt bekannt $b = \frac{\alpha a}{\beta}$, und $c = \frac{\alpha a}{\gamma}$. Endlich ist

$$\sin A = \frac{\beta}{c},\quad \sin B = \frac{\gamma}{\alpha},\quad \sin C = \frac{\alpha}{b}.$$

§ 145. Von einem gegebenen Dreieck ABC durch eine Linie DE, welche mit der Seite AC den Winkel $ADE = m$ bildet, ein Stück $AED = Q$ abzuschneiden.

Aufl. Es sei AD=x, AE=y, so ist $Q=\frac{1}{2}xy\sin A$ und $y=\frac{x\sin m}{\sin(A+m)}$, also

$$Q=\frac{x^2\sin A\sin m}{2\sin(A+m)},\quad x=\sqrt{\frac{2Q\sin(A+m)}{\sin A\sin m}},\quad y=\sqrt{\frac{2Q\sin m}{\sin A\sin(A+m)}}.$$



Wenn sich $y>AB$ ergiebt, so schneidet DE die BC etwa in F und Q stellt nunmehr das Stück ABFD vor. Es sei jetzt $CF=z$, $CD=u$, so ist $DCF=F-Q=\frac{1}{2}uz\sin C$ und $z=\frac{u\sin m}{\sin(m-C)}$, also

$$F-Q=\frac{u^2\sin C\sin m}{2\sin(m-C)},\quad u=\sqrt{\frac{2(F-Q)\sin(m-C)}{\sin C\sin m}},\quad z=\sqrt{\frac{2(F-Q)\sin m}{\sin C\sin(m-C)}}$$

§ 146. (Fig. § 145.) Ein gegebenes Dreieck ABC durch eine Gerade DE so zu theilen, dass sowol der Inhalt F als der Umfang s halbirt wird.

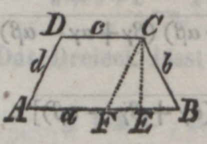
Aufl. Sei AD=x, AE=y, so ist 1) $xy\sin A=F$ oder $4xy=\frac{4F}{\sin A}$ und 2) $x+y=\frac{1}{2}s$ oder $x^2+2xy+y^2=\frac{1}{4}s^2$. Subtrahirt man Gl. (1) von (2), so ist

$$x^2-2xy+y^2=\frac{s^2}{4}-\frac{4F}{\sin A},\quad \text{also } 3)\ x-y=\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{4F}{\sin A}}$$

Die Addition und Subtraction der Gl. (2) und (3) giebt

$$x=\frac{s}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{4F}{\sin A}},\quad y=\frac{s}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{4F}{\sin A}}$$

§ 147. In dem Trapeze ABCD sei die Seite AB=a parallel der CD=c; man soll alle Stücke desselben, nämlich Seiten, Winkel und Inhalt F finden, wenn gegeben sind entweder 1) die Seiten a, c und die Winkel A, B, oder 2) die vier Seiten a, b, c, d.



Aufl. Man ziehe CF ∥ DA und CE ⊥ AB, so ist CF=d, BF=a−c, BFC=A. Nun hat man im ersten Falle

$$1)\ d=CF=\frac{BF\sin B}{\sin BCF}=\frac{(a-c)\sin B}{\sin(A+B)},\ \text{ebenso}$$

$$b=\frac{(a-c)\sin A}{\sin(A+B)}.\quad 2)\ C=180^0-B \text{ und } D=180^0-A$$

$$3)\ F=\tfrac{1}{2}(a+c)CE=\tfrac{1}{2}(a+c)b\sin B=\frac{(a^2-c^2)\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$$

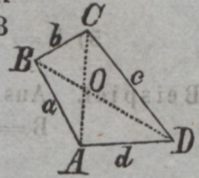
Im zweiten Falle setze man die halbe Summe der drei Seiten b, d, a−c des Dreiecks BCF gleich s, also $b+d+a-c=2s$, so findet man (§ 128)

$$4)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}BFC=\sqrt{\frac{(s-d)(s+c-a)}{s(s-b)}} \text{ und } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-b)(s+c-a)}{s(s-d)}}$$

5) Wie vorhin ist $C = 180^0 - B$, und $D = 180^0 - A$.

6) $F = \frac{1}{2}(a + c)\,CE = \frac{a+c}{a-c}\sqrt{s(s-b)(s-d)(s+c-a)}$ (§ 129, 2).

§ 148. Den Inhalt F eines jeden Vierecks ABCD aus seinen beiden Diagonalen AC, BD und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel AOB zu finden.



Aufl. Denkt man sich von A und C Perpendikel auf BD gezogen, so ist das erste derselben gleich AO sin AOB und das andere gleich CO sin AOB, folglich

$$F = \triangle ABD + \triangle BCD$$
$$= \tfrac{1}{2} BD \,.\, AO \sin AOB + \tfrac{1}{2} BD \,.\, CO \sin AOB$$
$$= \tfrac{1}{2} BD (AO + CO) \sin AOB = \tfrac{1}{2} BD \,.\, AC \,.\, \sin AOB.$$

§ 149. (Fig. § 148.) Von einem Viereck ABCD, dessen gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechte ausmachen, um welches sich folglich ein Kreis beschreiben lässt, sind alle Seiten a, b, c, d gegeben; man sucht die Winkel, den Inhalt F und den Radius R des umgeschriebenen Kreises.

Aufl. Nach § 118 ist $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A$ und $BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$, oder $BD^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ (§ 8), daher $a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$, also $\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$

daher auch $1 + \cos A = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2ad + 2bc} = \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2ad + 2bc}$.

Ebenso ist $1 - \cos A = \frac{-(a-d)^2 + (b+c)^2}{2ad + 2bc} = \frac{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)}{2ad + 2bc}$

Setzt man $a + b + c + d = 2s$ und multiplicirt beide Gl. mit einander, so ist $1 - \cos^2 A = \sin^2 A = \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ad + bc)^2}$, folglich

1) $\sin A = \frac{2}{ad + bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$; ebenso

2) $\sin B = \frac{2}{ab + cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

3) $C = 180^0 - A$ und $D = 180^0 - B$.

Wenn die den Winkel A einschliessenden Seiten zusammen grösser sind als die den Winkel C einschliessenden, so muss A spitz, im entgegengesetzten Falle stumpf sein. Ebenso verhält es sich mit B und D.

4) $F = \tfrac{1}{2}(ad + bc)\sin A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

Es folgt hieraus, dass, wie man auch die vier Seiten im Kreise an einander legen mag, die Fläche des entstehenden Vierecks immer dieselbe ist.

Endlich ist (§ 136) $2R = \frac{BD}{\sin A}$, also $4R^2 = \frac{BD^2}{\sin^2 A}$, und weil

$BD^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad \cos A = a^2 + d^2 - 2\,ad \,.\, \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,ad + 2\,bc}$, oder

$BD^2 = \frac{a^2bc + bcd^2 + ab^2d + ac^2d}{ad + bc} = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$, so ist

$4R^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} : \sin^2 A = \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, also

$$5)\ R = {}^1\!/\!_4 \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

Beispiel. Aus $a = b = c = 2$ Fuss, $d = 4$ Fuss findet man $A = D = 60^0$, $B = C = 120^0$, $F = 5{,}1961524$ □ Fuss, $R = 2$ Fuss.

§ 150. (Fig. § 148.) Man kennt in einem beliebigen Viereck ABCD die beiden Seiten a, b und die drei Winkel A, B, C; man soll hieraus die Entfernungen des Punktes D von den Punkten A, B, C finden.

Aufl. Wir setzen der Kürze wegen den Winkel $ABD = m$, also Winkel $CBD = B - m$, dann ist $BD = \frac{a \sin A}{\sin(A + m)}$ und $BD = \frac{b \sin C}{\sin(C + B - m)}$, also

$\frac{b \sin C}{a \sin A} = \frac{\sin(B + C - m)}{\sin(A + m)} = \frac{\sin(B + C)\cos m - \cos(B + C)\sin m}{\sin A \cos m + \cos A \sin m}$, oder durch

$\cos m$ gehoben, $\frac{b \sin C}{a \sin A} = \frac{\sin(B + C) - \cos(B + C)\,\mathrm{tg}\, m}{\sin A + \cos A\,\mathrm{tg}\, m}$, folglich

$$\mathrm{tg}\, m = \frac{a \sin(B + C) - b \sin C}{a \sin A \cos(B + C) + b \cos A \sin C} \,.\, \sin A.$$

Nachdem m bekannt geworden, findet man (§ 123)

$$1)\ AD = \frac{a \sin m}{\sin(A + m)} \quad 2)\ BD = \frac{a \sin A}{\sin(A + m)} \quad 3)\ CD = \frac{b \sin(B - m)}{\sin(B + C - m)}$$

§ 151. (Fig. § 148.) Die vorhergehende Aufgabe kann benutzt werden, um die Entfernung eines Himmelskörpers (D) von dem Mittelpunkte (B) der Erde zu finden. Es seien nämlich A und C zwei unter einerlei Meridian liegende Orte auf der Erde, deren geographische Breiten bekannt sind. Wenn man in dem Momente, wo der Stern durch den gemeinschaftlichen Meridian geht (culminirt), die Winkel bei A und C misst, unter welchen man das Fernrohr aus der senkrechten Lage ablenken muss, um den Stern zu sehen (Zenithdistanz); so kennt man in dem Vierecke ausser den Winkeln A und C den Winkel B, da dieser der Differenz oder der Summe der geogr. Breiten beider Beobachtungsorte gleich ist, je nachdem die letzteren auf einer Seite oder auf verschiedenen Seiten des Aequators liegen, endlich die Seiten a und b als Halbmesser der Erde, und kann daher die gesuchte Entfernung BD wie vorhin bestimmen.

152. (Fig. § 148.) Die gegenseitige Lage dreier Punkte A, B, C ist durch die Geraden a, b und deren Zwischenwinkel B gegeben; man soll die Entfernungen AD, CD, BD eines vierten Punktes D von jenen drei Punkten aus den bei D gemessenen Winkeln $ADB = \alpha$, $BDC = \beta$ bestimmen. (Pothenotsches Problem.)

Aufl. Da die Winkel des Vierecks ABCD zusammen 360^0 ausmachen, so ist $\frac{1}{2}(A + C) = 180^0 - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta)$. Um nun die Winkel A, C selbst zu finden, suchen wir noch ihren halben Unterschied. Es ist

$$BD = \frac{b \sin C}{\sin \beta} \text{ und } BD = \frac{a \sin A}{\sin \alpha}, \text{ also } \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}.$$

Berechnet man jetzt einen Hilfswinkel φ aus der Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}, \text{ so ist } \frac{\sin C}{\sin A} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ also auch}$$

$$\frac{\sin A + \sin C}{\sin A} = 1 + \operatorname{tg} \varphi \text{ und } \frac{\sin A - \sin C}{\sin A} = 1 - \operatorname{tg} \varphi, \text{ folglich (§ 20, 42)}$$

$$\frac{\sin A + \sin C}{\sin A - \sin C} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg}(\varphi + 45^0), \text{ oder (§ 19, 32, 33)}$$

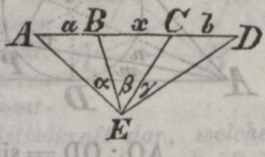
$$\frac{2 \sin \frac{1}{2}(A + C) \cos \frac{1}{2}(A - C)}{2 \cos \frac{1}{2}(A + C) \sin \frac{1}{2}(A - C)} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + C) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A - C) = \operatorname{tg}(\varphi + 45^0),$$

$$\text{also } \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A - C) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi + 45^0)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + C)}.$$

Aus $\frac{1}{2}(A + C)$ und $\frac{1}{2}(A - C)$ bestimmt man jetzt A und C (§ 120), und hat dann

$$1)\ AD = \frac{a \sin (A + \alpha)}{\sin \alpha} \quad 2)\ CD = \frac{b \sin (C + \beta)}{\sin \beta} \quad 3)\ BD = \frac{a \sin A}{\sin \alpha} = \frac{b \sin C}{\sin \beta}.$$

§ 153. Vier Punkte A, B, C, D liegen in gerader Linie, der Punkt E ausserhalb der Linie. Man kennt die Abstände a, b, sowie die Winkel α, β, γ, und soll $BC = x$ finden.



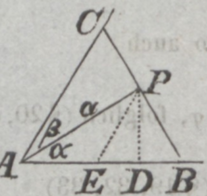
Aufl. Denkt man sich von E auf AD eine Senkrechte h gezogen, so sind die doppelten Inhalte der Dreiecke AEB, CED, AED, BEC nach der Reihe diese: $ah = AE \, . \, BE \, . \sin \alpha$, $bh = CE \, . \, DE \, . \sin \gamma$, $(a+b+x)h = AE.DE.\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, $xh = BE.CE.\sin\beta$. Dividirt man das Produkt der beiden letzten Gleichungen durch das der beiden ersten, so ist

$$\frac{(a+b+x)\,x}{ab} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$x^2 + (a+b)\,x = \frac{ab\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$x = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{ab\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

§ 154. Innerhalb eines gegebenen Winkels $BAC = A$ ist die Lage eines Punktes P durch seine Entfernung $PA = a$ von der Spitze des Winkels und durch den Winkel $BAP = \alpha$ bestimmt; man soll durch P eine Linie so zwischen den Schenkeln ziehen, dass dieselbe durch den Punkt P im gegebenen Verhältnisse $CP : PB = m : n$ getheilt wird. Wie gross ist der Abschnitt AB zu nehmen?



Aufl. Der Winkel $\beta = A - \alpha$ ist bekannt. Man ziehe $PE \parallel AC$, so ist $\angle PEB = A$, $APE = \beta$,

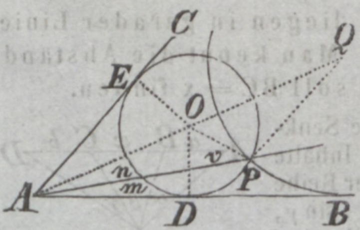
$$AE = \frac{a\sin APE}{\sin AEP} = \frac{a\sin\beta}{\sin A}.$$ Ferner ist

$AE : EB = CP : PB = m : n$, d. h.

$$\frac{a\sin\beta}{\sin A} : EB = m : n, \quad \text{also } EB = \frac{an\sin\beta}{m\sin A}, \text{ mithin}$$

$$AB = AE + EB = \frac{a\sin\beta}{\sin A} + \frac{an\sin\beta}{m\sin A} = \frac{m+n}{m} \cdot \frac{a\sin\beta}{\sin A}.$$

§ 155. Innerhalb eines gegebenen Winkels $BAC = A$ ist ein Punkt P durch die Gerade $AP = a$ und den Winkel $BAP = m$ bestimmt; man sucht die Lage des Mittelpunktes und den Radius desjenigen Kreises, der die beiden Schenkel AB und AC berührt und durch den Punkt P geht.



Aufl. Es seien D, E die Berührungspunkte und O der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Man ziehe AO, OD, OE und setze $AO = x$, $OD = OE = OP = y$. Da $\triangle ADO \cong AEO$, so ist der Winkel $DAO = EAO = \frac{1}{2}A$, folglich der Winkel $n = \frac{1}{2}A - m$ bekannt. In den Dreiecken ADO und AOP ist

$AO : OD = \sin ADO : \sin \frac{1}{2}A = 1 : \sin \frac{1}{2}A$

$AO : OP = \sin v : \sin n$, also $1 : \sin \frac{1}{2}A = \sin v : \sin n$, folglich $\sin v = \frac{\sin n}{\sin \frac{1}{2} A}$. Ferner ist im $\triangle AOP$

$AP : AO = \sin AOP : \sin v$, d. h. $a : x = \sin (n + v) : \sin v$, also

$$x = \frac{a \sin v}{\sin (n + v)} = \frac{a \sin v}{\sin n \cos v + \cos n \sin v} = \frac{a}{\sin n \operatorname{cotg} v + \cos n}.$$

Nun ist (§ 14, 6) $\operatorname{cotg} v = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 v}}{\sin v}$ und $\sin v = \frac{\sin n}{\sin \frac{1}{2} A}$, also

$$\operatorname{cotg} v = \pm \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\sin n} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 n}{\sin^2 \frac{1}{2} A}} = \pm \frac{1}{\sin n} \sqrt{\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 n},$$ folglich

$$x = \frac{a}{\cos n \pm \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 n}}, \quad y = x \sin \tfrac{1}{2} A = \frac{a \sin \frac{1}{2} A}{\cos n \pm \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 n}}$$

Die doppelten Werthe von x und y zeigen, dass zwei Kreise der Aufgabe genügen. Der Mittelpunkt Q des zweiten Kreises hat auf der Halbirungslinie des Winkels A eine solche Lage, dass der Winkel $v + APQ = 180^0$ ist.

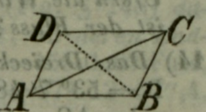
§ 156. Aufgaben über schiefwinklige Dreiecke.

1) *Wie verhalten sich die Seiten* a, b, c *desjenigen Dreiecks in den kleinsten ganzen Zahlen zu einander, in welchem der Winkel* $A = 28^0\, 57'\, 18'',08$ *und der Winkel* $C = 46^0\, 34'\, 2'',86$ *ist?*

2) *Wenn in einem rechtw. Dreieck der eine Winkel* $8^0\, 18'\, 50'',78$ *beträgt, wie gross ist das Verhältniss der kleinern Kathete zur grössern?*

3) *An den Endpunkten einer geraden Linie befinden sich zwei Kugeln, welche sich gleichzeitig in Bewegung setzen, so dass jene Linie mit der Richtung der einen Kugel einen Winkel von* 85^0 *und mit der Richtung der andern einen Winkel von* 73^0 *bildet. Wenn nun die erste Kugel eine Geschwindigkeit von* 46 Fuss *in der Secunde hat und mit der zweiten Kugel in einem Punkte zusammentrifft, wie gross ist die Geschwindigkeit der letztern?*

4) *Aus den Seiten* $a = 97,5$ Fuss, $b = 84,5$ Fuss, $c = 91$ Fuss *und dem Inhalte* $F = 3549$ □ Fuss *eines Dreiecks dessen Winkel zu berechnen* (§ 121).



5) *Wenn zwei Kräfte, deren Richtungen und verhältnissmässige Grösse wir durch die Linien* AB *und* AD *darstellen, unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt* A *wirken, so stellt, wie die Mechanik lehrt, die Diagonale* AC *des über diesen Kräften construirten Parallelogramms die Grösse und Richtung der Gesammtwirkung beider Kräfte, oder die so genannte Mittelkraft dar, welche allein das Nämliche wirkt, als die beiden gegebenen Kräfte (Seitenkräfte)*

zusammen. Gesetzt nun, man kenne eine Seitenkraft $= 684{,}56756$ Fuss *und die von derselben mit der andern Seitenkraft, sowie mit der Mittelkraft gebildeten Winkel* $90^0\,50'\,40''$ *und* $44^0\,44'\,44''$; *wie gross ist die andere Seitenkraft* x *und die Mittelkraft* y?

6) *Zwei Kräfte von* 200 ℔ *und* 500 ℔ *wirken unter einem Winkel von* 70^0 *auf einen Punkt; welches ist die Mittelkraft* x, *und wie gross ist der von derselben mit der kleinern Seitenkraft gebildete Winkel* y?

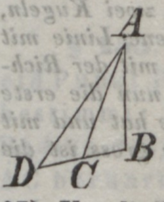
7) *Auf einen Punkt* A (Fig. 5) *soll nach einer bestimmten Richtung* AC *eine Kraft* $= 22{,}22$ ℔ *wirken. Diese Kraft steht nicht zur Verfügung, dagegen lassen sich zwei andere Kräfte von* 30 ℔ *und* 24 ℔ *dazu verwenden. Unter welchen Winkeln* x, y *müssen diese Kräfte gegen* AC *gerichtet sein, damit sie die beabsichtigte Wirkung hervorbringen?*

8) *Wenn von den zwei Kräften*, 0,872 Fuss *und* 2,8437 Fuss, *die letztere mit der Mittelkraft den Winkel* $1^0\,35'\,6'',125$ *bildet; wie gross ist dann die Mittelkraft* x *und der Winkel* y, *den diese mit der kleinern Seitenkraft einschliesst?*

9) *Wie stark wird ein Tisch von einem* 70 ℔ *schweren Körper gedrückt, wenn auf diesen eine andere Kraft von* 50 ℔ *aufwärts unter einem gegen die Ebene des Tisches um* 40^0 *geneigten Winkel wirkt?*

10) *Die Basis eines Dreiecks beträgt* $a = 93$ Fuss, *eine zweite Seite* $b = 141$ Fuss *und der Zwischenwinkel* $C = 42^0\,34'\,10''$. *Wenn nun durch eine aus der Spitze* A *des Dreiecks gezogene Gerade von demselben der dritte Theil abgeschnitten werden soll, in welche beiden Theile muss der Winkel* A *zerlegt werden?*

11) *Von den Endpunkten* (Fig. § 153) *der Standlinie* $AD = 854$ Fuss *ist ein Punkt* E *sichtbar, so dass der Winkel* $A = 58^0\,12''$ *und* $D = 77^0\,25'$ *ist. Man soll auf der Standlinie die Abschnitte* a, x, b *bestimmen, welche entstehen, wenn der Winkel* E *durch* EB *und* EC *in drei gleiche Theile getheilt wird.*



12) *Um die Höhe eines Thurmes* AB, *der auf dem Abhange eines Berges steht, zu messen, ist von dem Fusspunkte des Thurmes den Berg hinab eine Standlinie* $BD = 428$ Fuss *gezogen. Die Visirlinien nach der Spitze des Thurmes bilden mit der Standlinie am Ende* D *und in der Mitte* C *derselben die Winkel* $35^0\,24'\,42'',97$ *und* $53^0\,33'\,52'',07$. *Wie hoch ist der Thurm?*

13) *Um die Breite* CD *eines Flusses zu messen* (Fig. 12), *hat man an die Verlängerung von* CD *unter dem Winkel* $B = 116^0\,10'$ *eine Standlinie* $BA = 200$ Fuss *angelegt, welche mit den Visirlinien nach beiden Ufern die Winkel* $BAC = 37^0\,20'$ *und* $BAD = 45^0\,5'$ *bildet. Wie breit ist der Fluss?*

14) *Das Dreieck* ABD (Fig. 12) *aufzulösen, in welchem der Winkel* $D = 53^0\,7'\,48'',2$ *ist und die Seite* $BD = 56$ Fuss *von der Transversalen* $AC = 48{,}66209$ Fuss *halbirt wird.*

15) *Von einem Dreieck kennt man eine Seite* $c = 82$ Fuss *und den anliegenden durch das Höhenperpendikel erzeugten Abschnitt* $m = 18$ Fuss *der zweiten Seite* $a = 102$ Fuss; *man soll das Dreieck berechnen.*

16) *Es sei in einem Dreieck die Basis* $a = 702$ Fuss, *die Höhe* $h = 537$ Fuss *und die Seite* $b = 638$ Fuss; *wie gross ist die Seite* c *und der Winkel* A *an der Spitze?*

17) *Man kennt in einem Dreiecke die Höhe* $h = 100$ Fuss *und die ihr gegenüberstehenden Winkel* $A = 60^0$ *und* $B = 70^0$; *man soll die übrigen Stücke des Dreiecks, so wie die aus* A *und* B *gezogenen Höhen* α *und* β *berechnen.*

18) *Aus den Seiten* $a = 975$ Fuss, $b = 845$ Fuss *und dem Winkel* $A = 67^0\,22'\,48'',48$ die aus den Spitzen A, B, C gezogenen Höhen α, β, γ *des Dreiecks zu berechnen.*

19) *Aus einem Winkel* $C = 22^0\,37'\,11'',5$ *und dem Verhältnisse der anliegenden Seiten* $a : b = 13 : 12$ *die Winkel* A *und* B *des Dreiecks zu finden* (§ 127).

20) *Die Winkel des Dreiecks aus den Verhältnissen der drei Seiten* $a : b : c = 8 : 15 : 17$ zu *finden.*

21) *Aus den Seiten* $a = 56$ Fuss, $b = 52$ Fuss, $c = 60$ Fuss *eines Dreiecks* ABC *die Gerade zu berechnen, welche von* A *nach der Mitte von* a *gezogen ist.*

22) *Es ist gegeben* (Fig. § 95) $a = 56$ Fuss, $b = 39$ Fuss, $A = 120^0\,30'\,36'',84$ *und Abschnitt* $BD = 21$ Fuss; *man soll die Transversale* AD *berechnen.*

23) *Aus den Seiten* $a = 106,4177$ Fuss, $b = 115,47$ Fuss, $c = 94,1321$ Fuss *eines Dreiecks dessen drei Höhen* α, β, γ *zu finden* (§ 129).

24) *Von einem Punkte aus bewegen sich zwei Körper in geraden Linien, indem in jeder Secunde der eine* 83,4 Fuss, *der andere* 70,5 Fuss *zurücklegt, und die Richtungen beider Körper mit einander einen Winkel von* $98^0\,43'$ *bilden. Wie gross ist der Abstand der Körper von einander nach* 5 Secunden?

25) *Die Spitze eines Thurmes wird an einem gewissen Standpunkte auf der Horizontalebene durch den Fusspunkt des Thurmes unter dem Elevationswinkel von* $35^0\,9'\,28'',97$ *gesehen. Man geht* 76 Fuss *dem Thurme näher und findet jetzt den Elevationswinkel* $56^0\,35'$. *Wie weit* (x) *ist man noch vom Thurme entfernt und wie hoch* (y) *ist derselbe?*

26) *Der Durchmesser eines schiefen Kegels beträgt* 16 Fuss, *seine grösste Seitenlinie* 192 Fuss *und seine kleinste Seitenlinie* 180 Fuss; *wie gross ist sein Cubikinhalt?*

27) *Man soll die Länge der unzugänglichen Linie* BC (Fig. § 148) *dadurch bestimmen, dass man eine Standlinie annimmt, an deren Endpunkten sowol* B *als* C *sichtbar ist, nämlich* $AD = 45501,62$ Fuss, *ferner die Winkel misst* $BAD = 106^0\,22'\,45'',5$, $CAD = 67^0\,13'\,57'',4$, $ADC = 62^0\,42'\,48'',8$, $ADB = 44^0\,12'\,39'',6$.

28) *Man kennt* (Fig. § 148) *die Länge der Standlinie* $AD = 3184$ Fuss, *und die Winkel* $ABD = 69^0\,55'$, $ACB = 24^0\,26'$, $CBD = 36^0\,48'$, $ACD = 70^0\,45'$; *man soll* BC *berechnen.*

29) *Es ist* (Fig. § 148) *die Distanz* BD = 260 Fuss *gegeben; man soll die Entfernung der Punkte* A *und* C *von einander und von* B *und* D *bestimmen, wenn Winkel* CAD = 46° 8, BAC = 32° 29′, ABD = 39° 38′, CBD = 56° 31′ *ist.*

30) *Die Entfernung der beiden Punkte* A *und* B *von einander* (Fig. § 148) *ist nicht unmittelbar zu messen; man kennt aber die Längen* AD = 210 Fuss, CD = 382 Fuss, AC = 486 Fuss, BD = 512 Fuss, BC = 308 Fuss; *wie gross ist* AB?

---

31) *Man kennt in einem Dreieck den Inhalt* F = 341,06 □ Fuss, *ferner* a = 139,3 Fuss, b = 27,2 Fuss, *und sucht* A, B, c.

32) *Die aus dem Winkel* A = 95° 39′ 20″ *eines Dreiecks auf die Seite* a = 98,57041 Fuss *gefällte Höhe beträgt* 43,8 Fuss, *welches ist der kleinste Winkel und die kleinste Seite des Dreiecks?*

33) *Aus den durch das Höhenperpendikel erzeugten Abschnitten* 36 Fuss *und* 8 Fuss *der Grundlinie und dem Winkel* 95° 27′ 9″,437 *an der Spitze soll berechnet werden der kleinere Winkel an der Grundlinie und der Inhalt des Dreiecks.*

34) *Man kennt von einem spitzwinkligen Dreieck zwei Seiten* a = 654,3 Fuss, b = 700,8 Fuss *und die auf die dritte Seite* c *gefällte Höhe* h = 510,2 Fuss; *wie gross ist* c, C *und der Radius* R *des umgeschriebenen Kreises?*

35) *Aus zwei Seiten* b = 445,81 Fuss, c = 443,6 Fuss *und einem Gegenwinkel* B = 33° 21′ 16″ *eines Dreiecks die Radien* R *und* r *des um- und eingeschriebenen Kreises zu berechnen.*

36) *Von einem Dreiecke ist ein Winkel gleich* 74° 25′ 30″,4, *eine Nebenseite gleich* 835,7 Fuss *und die Summe der beiden andern Seiten gleich* 2635,222 Fuss *gegeben; wie gross ist der Inhalt?*

37) *Man kennt die Winkel* 65° 28′ 13″,6 *und* 42° 30′ 3″,6 *eines Dreiecks, in welchem die diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten zusammen* 650 Fuss *betragen; wie gross ist die dritte Seite?*

38) *Von einem Dreiecke ist gegeben* a — b = 50 Fuss, A = 60° *und* C = 61°; *es wird gesucht der Flächeninhalt.*

39) *Man kennt den Inhalt* = 2970 □ Fuss, *den Umfang* = 300 Fuss *und eine Seite* = 51 Fuss *eines Dreiecks, und sucht dessen grössten Winkel und grösste Seite.*

40) *In einem Dreieck beträgt der Umfang* 150 Fuss, *der Inhalt* 1020 □ Fuss *und ein Winkel* 43° 36, 10″,14; *welches sind die beiden andern Winkel?*

41) *Den Inhalt eines Dreiecks aus seinem Umfange* 13000 Fuss *und den Winkeln* 48° 17′ 30″ *und* 63° 39′ 40″ *zu berechnen.*

42) *Das Dreieck aus einem Winkel* B = 8° 54′ 46″,28, *einer Seite* a = 55,323806 Fuss *und dem Unterschiede* d = 47,323806 Fuss *der beiden andern Seiten zu berechnen.*

43) *Das Dreieck zu berechnen, wenn gegeben ist die Differenz zweier Winkel* $A - B = 15^0\ 28'\ 29'',1$, *die zwischen diesen Winkeln liegende Seite* $c = 58$ Fuss *und die Differenz der beiden andern Seiten* $a - b = 10$ Fuss.

44) *Die drei aus den Spitzen* A, B, C *eines Dreiecks gezogenen Höhen sind* $\alpha = 728$ Fuss, $\beta = 840$ Fuss, $\gamma = 780$ Fuss; *man soll das Dreieck auflösen.*

45) *Es ist ein Dreieck durch seinen Inhalt* $= 3549$ □ Fuss, *seinen Umfang* $= 273$ Fuss *und den Winkel* $A = 59^0\ 29'\ 23'',16$ *gegeben. Wenn nun eine gerade Linie das Dreieck so durchschneiden soll, dass sowol der Inhalt als der Umfang desselben halbirt werde, in welcher Entfernung von der Spitze* A *liegen die Durchschnittspunkte der theilenden Linie mit den Seiten des Dreiecks?*

46) *In einem Trapeze* (Fig. § 147) *sind gegeben die Parallelseiten* $AB = 13$ Fuss *und* $CD = 5$ Fuss, *ferner die beiden andern Seiten* $AD = 15$ Fuss *und* $BC = 17$ Fuss; *man soll die Winkel und den Inhalt* F *des Trapezes finden.*

47) *Auf drei Standpunkten* A, B, C (Fig. § 148) *wurden für die Bestimmung eines vierten Punktes* D *die Winkel gemessen:* $BAD = 60^0\ 22'\ 21'',4$, $ABC = 90^0\ 7'\ 11'',8$, $BCD = 66^0\ 10'\ 8'',5$, *ferner die Längen* $a = 1197,5785$ Fuss *und* $b = 1106,7526$ Fuss. *Man soll hieraus die Entfernungen des Punktes* D *von* A, B, C *bestimmen.*

48) *An zwei unter dem nämlichen Meridian liegenden Orten* A *und* B, *von welchen der erste* $48^0\ 8'\ 20''$ *nördliche Breite, der andere* $20^0\ 19'\ 15''$ *südliche Breite hat, wird ein bestimmter Stern zur Culminationszeit beobachtet. Die Zenithdistanz des Sternes ist in* A *gleich* $44^0\ 18'$ *und in* B *gleich* 25^0. *Wenn nun der Erdradius als Masseinheit angenommen wird, wie weit ist der Stern von dem Mittelpunkte der Erde entfernt?*

49) *Die gegenseitige Lage der drei Punkte* A, B, C, (Fig. § 148) *ist durch* $a = 354$ Fuss, $b = 470$ Fuss, *und Winkel* $ABC = 95^0\ 36'$ *gegeben, und von einem vierten Punkte* D *aus hat man die Winkel* $ADB = 26^0\ 42'$ *und* $BDC = 40^0\ 53'$ *gemessen; man sucht die Abstände* c, d, BD.

50) *Bei der Messung einer geraden Linie* AD, *auf welcher der Reihe nach die Punkte* A, B, C, D *liegen* (Fig. § 153), *gerieth man an den Punkten* B *und* C *auf Hindernisse, so dass man nur die Stücke* $a = 94,37$ Fuss *und* $b = 81,15$ Fuss *messen konnte. Dagegen wurden in einem Punkte* E *ausserhalb jener Geraden die Gesichtswinkel der Distanzen* a, x, b *gemessen, nämlich* $\alpha = 33^0\ 17'\ 30''$, $\beta = 41^0\ 7'\ 20''$, $\gamma = 21^0\ 13'\ 10''$. *Man soll hieraus das fehlende Stück* x *berechnen.*

51) *In der Aufgabe des* § 155 *die Werthe von* x *und* y *für* $A = 84^0$, $a = 10$ *und* $m = 6^0$ *zu berechnen.*

52) *Das Dreieck zu berechnen aus dem Inhalte* F = 1020 □Fuss, *einer Seite* a = 51 Fuss, *und einem Winkel* C = 77° 19′ 10″,62.

53) *Das Dreieck zu berechnen, wenn der Ueberschuss zweier Seiten über die dritte Seite, nämlich* a + c — b = 910 Fuss, *und die Winkel* A = 67° 22′ 48″,48, B = 59° 29′ 23″,16 *gegeben sind.*

54) *Den Inhalt* F *eines Vierecks* ABCD (Fig. § 148), *in welchem die gegenüberliegenden Winkel* A *und* C *einander gleich sind, aus seinen vier Seiten* a = 37 Fuss, b = 32,7 Fuss, c = 29 Fuss, d = 16,4 Fuss *zu berechnen.*

55) *Man will in einem Walde eine vierseitige Fläche* ABCD (Fig. § 148) *von* 400 □Faden *abstecken, und lässt zu diesem Zwecke von den beiden Standpunkten* A *und* B *aus zwei schmale Gänge* AC *und* BD *durchhauen, die sich unter einem Winkel von* 75° 30′ *schneiden. Wie lang muss jeder der beiden Gänge genommen werden, wenn dieselben einander gleich sein sollen?*

56) *Im Viereck* ABCD (Fig. § 148) *sind drei Seiten* d = 374,5 Fuss, a = 310,4 Fuss, b = 123 Fuss *und die von ihnen eingeschlossenen Winkel* A = 41° 23′, B = 118° 27′ *gegeben; man soll die Seite* c, *die Winkel* C, D *und den Inhalt* F *des Vierecks berechnen.*

57) *Im Parallelogramm* ABCD (Fig. 5) *ist* AB = 380 Fuss, AD = 244 Fuss, AC = 527 Fuss; *wie gross ist der Winkel* A *und die Diagonale* BD?

58) *Im Viereck* ABCD (Fig. § 148) *sind die Seiten* a = 24 Fuss, b = 20 Fuss, c = 18 Fuss, d = 16 Fuss *und der Winkel* A = 85° 30′ *gegeben; man sucht die Winkel* B, C, D, *die Diagonale* AC *und den Inhalt* F *des Vierecks.*

59) *Ueber einer Linie* a = 1,0842 Fuss *als Hypotenuse ist ein rechtw. Dreieck construirt, in welchem das Quadrat der einen Kathete* 8 Mal *grösser ist als das der andern; man sucht den kleinsten Winkel und die kleinste Seite des Dreiecks.*

60) *In einem Dreieck sind zwei Seiten* a = 585,04878 Fuss, b = 417 Fuss *und der Unterschied der Gegenwinkel* A — B = 53° 55′ 30″,91 *gegeben; wie gross ist* C *und* c?

61) *Aus der Differenz zweier Seiten* c — b = 387 Fuss, *der dritten Seite* a = 454 Fuss *und dem derselben anliegenden Winkel* C = 98° 14′ 12″6 *eines Dreiecks die Seite* b *und den Winkel* A *zu berechnen.*

62) *Wenn in einem Dreieck die durch das Höhenperpendikel erzeugten Abschnitte der Grundlinie* 18 Fuss *und* 84 Fuss *betragen, und die Summe der beiden andern Seiten gleich* 198 Fuss *ist; wie gross sind die Winkel an der Basis?*

63) *Aus der Summe zweier Seiten* a + b = 910 Fuss *und den auf diese Seite gefällten Höhen* α = 364 Fuss, β = 420 Fuss *eines spitzwinkligen Dreiecks die der dritten Seite anliegenden Winkel* A *und* B *zu finden.*

64) *Auf einem Schiffe erscheint ein Leuchtthurm in der Entfernung von* 10 Meilen *um* $53^0\,30'$ *von Süd nach West; wie viel Meilen muss das Schiff in der Richtung* SW *segeln, damit der Leuchtthurm im Norden stehe?*

65) *An einem gewissen Standpunkte erscheint eine Wolke, welche* 16000 Fuss *über der Erde schwebt, in südöstlicher Richtung unter einem Höhenwinkel von* $28^0\,4'\,20'',96$. *Wie hoch erscheint in demselben Augenblicke die Wolke an einem Standpunkte, welcher* 30000 Fuss *südlich vom ersten liegt?*

66) *Man sieht den Blitz in demselben Augenblicke, in welchem er ententsteht, während man den Donner erst später hört, da der Schall in einer Secunde nur* 1080 Fuss *zurücklegt. Wenn man nun an einem Orte den Sehwinkel der geradlinigen Bahn eines Blitzes gleich* 8^0, *die Zeit zwischen Blitz und Donner gleich* 3 Secunden, *und die Dauer des Donners gleich* 5 Secunden *beobachtet hat; wie gross ist der vom Blitze durcheilte Weg?*

67) *Von einem Trapeze* (Fig. § 147) *kennt man die Höhe* $CE = 7,56$ Fuss *und die Basis* $a = 33$ Fuss *nebst den anliegenden Winkeln* $A = 30^0\,14'16''$ *und* $B = 40^0\,40'\,38''$; *man soll die der Basis parallele Seite* c *finden.*

68) *Den Inhalt einer geraden Pyramide, deren Basis ein Quadrat ist, aus ihrer Grundkante* $a = 4,2426407$ Fuss *und einer Seitenkante* $s = 5$ Fuss *zu berechnen.*

69) *Man soll ein Dreieck, von welchem man zwei Seiten* $a = 5$ Fuss, $b = 3$ Fuss *und den Zwischenwinkel* $C = 53^0\,7'\,48'',38$ *kennt, in ein rechtw. Trapez verwandeln, in welchem die Parallelseiten* P *und* p *sich verhalten wie* $m : n = 3 : 2$, *und die Höhe* h *die mittlere Proportionale zwischen* P *und* p *bildet. Man sucht die allgemeinen Werthe und die Zahlenwerthe von* P, p, h.

70) *Das Dreieck aus einer Seite* $c = 2346$ Fuss, *dem Gegenwinkel* $C = 92^0\,18'$ *und dem Verhältnisse der beiden andern Seiten zu einander,* $a : b = 11 : 8$ *zu berechnen.*

71) *Das Dreieck aufzulösen, wenn gegeben ist das Verhältniss zweier Seiten* $a : b = 15 : 13$, *der Zwischenwinkel* $C = 59^0\,29'\,23'',16$ *und die auf die dritte Seite* c *gefällte Höhe* $h = 39$ Fuss.

72) *Man construirt in einem gegebenen Kreise näherungsweise ein regelm. Siebeneck, wenn man als dessen Seite die halbe Seite des eingeschriebenen regelm. Dreiecks nimmt. Um wieviel weicht der Mittelpunktswinkel des so beschriebenen Siebenecks von dem des vollkommen richtigen regelm. Siebenecks ab?*

73) *Es sei die Seite* $AB = 8$ Fuss *eines zu construirenden regelm.* 9-ecks *gegeben. Wenn man nun den Radius eines Kreises finden wollte, in welchem sich blos näherungsweise* AB *als Sehne* 9 Mal *eintragen liesse, so construire man über* AB *ein gleichseitiges Dreieck* ABC, *verlängere das Höhenperpendikel* CE *desselben um* $CD = \frac{1}{2}$ AB *und nehme* AD *als den gesuchten Radius an. Um wieviel ist der Mittelpunktswinkel dieses* 9-ecks *grösser als der des vollkommen richtigen regelm.* 9-ecks,

und um wieviel ist der Radius bei dem ersten 9-eck *kleiner als bei dem zweiten?*

74) *Das Dreieck aus einer Seite* $c = 175{,}5$ Fuss, *deren Gegenwinkel* $C = 73^0\,20'$ *und der Differenz der beiden andern Winkeln* $A - B = 13^0\,4'$ *zu berechnen.*

75) *Das Dreieck aus dem Inhalte* $F = 330$ □Fuss, *einer Seite* $a = 44$ Fuss *und deren Gegenwinkel* $A = 95^0\,27'\,9'',43$ *zu berechnen.*

76) *Man bestimme die grösste Seite und den grössten Winkel desjenigen Dreiecks, in welchem ein Winkel* $= 53^0\,7'\,48'',4$, *der Inhalt* $= 3549$ □Fuss *und der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises* $= 105{,}625$ Fuss *ist.*

77) *Die Schenkel eines Winkels* $= 42^0\,37'\,18''$ *sollen durch eine Gerade* $= 100$ Fuss *so verbunden werden, dass ein Dreieck vom vorgeschriebenen Inhalte* $= 4777$ □Fuss *entsteht; wie gross sind die Abschnitte auf den Schenkeln zu nehmen?*

78) *In einem spitzwinkligen Dreieck beträgt die Summe zweier Seiten* $b + c = 56$ Fuss, *der Unterschied der durch das Höhenperpendikel erzeugten Abschnitte der dritten Seite* 28 Fuss, *und der dem grössern Abschnitte anliegende Winkel* $B = 22^0\,37'\,11'',52$; *man sucht* c *und* C.

---

79) *Um die Höhe eines Thurmes zu messen, zieht man in der Horizontalebene, auf welcher der Thurm steht, eine Standlinie dem Fusspunkte desselben vorbei, und bestimmt den Höhenwinkel der Thurmspitze für drei Punkte der Standlinie. Man findet im Anfangspunkte der letzteren den Winkel* $2^0\,7'$, *ferner* 4700 Fuss *weiter den Winkel* $5^0\,9'\,30''$, *endlich noch* 3300 Fuss *weiter den Winkel* $3^0\,18'\,10''$. *Wie hoch ist der Thurm?*

80) *Man hat an einem gewissen Standpunkte die Höhe der Sonne gleich* 25^0 *und die Höhe einer mit der Sonne in einerlei Richtung befindlichen Wolke gleich* 23^0 *gefunden. Wenn nun der Schatten der Wolke vom Beobachter* 1742 Fuss *entfernt ist, in welcher Höhe über der Erde befindet sich die Wolke?*

81) *Auf der Spitze eines Thurmes, dessen Höhe* 64 Fuss *beträgt, ist eine Signalstange aufgestellt, welche* 36 Fuss *lang ist. In welcher Entfernung vom Thurme auf der Horizontalebene durch den Fusspunkt desselben erscheint die Stange unter dem grössten Winkel?*

82) *Um einen Thurm von einem Bergabhange aus zu messen, welcher höher als der Fusspunkt, dagegen niedriger als die Spitze des Thurmes liegt, nimmt man den Berg hinab eine Standlinie* $a = 150$ Fuss *so an, dass ihre Verlängerung den Fuss des Thurmes treffen würde, bestimmt an beiden Endpunkten derselben die Höhenwinkel* $\alpha = 27^0\,29'\,40''$ *und* $\beta = 52^0\,22'\,15''$ *der Thurmspitze, ferner an einem beliebigen Punkte der Standlinie den Depressionswinkel* $\gamma = 2^0\,15'$ *des Fusspunktes. Wie hoch ist der Thurm?*

83) *Von zwei Beobachtern, welche* 5000 Fuss *von einander entfernt sind und zu gleicher Zeit das Steigen eines Luftballons beobachten, findet der eine* 25° Höhe *und* NNO-Richtung, *der andere* 30° Höhe *und* NO-Richtung; *wie hoch ist der Ballon gestiegen?*

84) *Der Höhenwinkel der Sonne sei* (Fig. § 123) $A = 30^0$ *und* $BC = 10$ Fuss *sei eine in der Ebene jenes Höhenwinkels liegende, auf der Horizontalebene* AB *schief stehende Stange. Wie gross ist der Winkel* B, *wenn die Schattenlänge* AB 1) *ihr Maximum,* 2) *ihr Minimum erreicht,* 3) *gleich* BC *wird?*

85) *Die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks liegen in drei einander parallelen Geraden, deren mittlere von den beiden äusseren um die Längen* $a = 2$ Fuss *und* $b = 3$ Fuss *entfernt ist. Man soll die Seite des Dreiecks finden.*

86) *Ein gerader Cylinder wird durch eine Ebene der Axe parallel durchschnitten. Die Entfernung des Schnittes von der Axe ist* $e = 3$ Fuss, *die Höhe des Cylinders* $h = 20$ Fuss, *und der Radius der Basis* $r = 5$ Fuss. *Man soll die körperlichen Inhalte* k *und* K *der beiden Stücke und deren Oberflächen* f *und* F *berechnen.*

87) *Das Dreieck aufzulösen, wenn gegeben ist der Umfang* $a + b + c = s$, *die Höhe* h *und entweder* 1) *ein Winkel* C *an der Grundlinie, oder* 2) *der Winkel* A *an der Spitze.*

88) *Auf einer Standlinie* BD *sind die Abstände dreier Punkte gegeben,* $BC = 345$ Fuss *und* $CD = 287$ Fuss. *Von einem Punkte* A *werden dahin die Winkel* $BAC = 39^0\,58'$ *und* $CAD = 26^0\,43'$ *gemessen. Hieraus sollen die Entfernungen des Punktes* A *von* B, C, D *bestimmt werden.*

89) *Von zwei Tangenten eines Kreises* (Fig. § 136) *sind die bis zu den Berührungspunkten gehenden Stücke* $BD = BF = 14$ Fuss *und der Winkel* $B = 60^0$ *gegeben. Um eine dritte Tangente so an den Kreis zu ziehen, dass das von den beiden ersteren begränzte Stück* AC *derselben die vorgeschriebene Länge* $= 30$ Fuss *habe, soll das Stück* $CE = CD$ *berechnet werden.*

90) *Innerhalb des Winkels* $BAQ = 40^0$ (Fig. § 155) *liegt ein Punkt* P *so, dass* $AP = 7$ Fuss *und Winkel* $QAP = 20^0\,15'$ *ist. Es soll aus einem Punkte des Schenkels* AQ *ein Kreis beschrieben werden, welcher durch den Punkt* P *geht und den andern Schenkel* AB *berührt. Wie gross ist der Abstand* x *des Mittelpunktes* O *von dem Scheitel* A?

91) *Von einem Dreiecke sind gegeben zwei Seiten* $b = 12$ Fuss, $c = 10$ Fuss *und der Zwischenwinkel* $A = 52^0$. *Das Dreieck soll durch Linien, welche die Seite* b *unter den Winkeln* 60°, 40°, 55° *schneiden, in vier Stücke* Q, Q′, Q″, Q‴ *getheilt werden, die sich wie die Zahlen* 8, 7, 16, 19 *verhalten. Man sucht auf der Seite* b *die Entfernungen* x, x′, x″ *von* A, *sowie auf der Seite* c *die Entfernungen* y, y′, y″ *von* A *der Durchschnittspunkte der drei Theilungslinien.*

92) *Man setze in der Aufgabe des* § 154 *den Winkel* $A = 90^0$ *und drücke* BP *und* CP *durch die gegebenen Grössen* a, α, m, n *aus.*

93) *Innerhalb des Winkels* $BAC = A = 74^0\,17'\,30''$ (Fig. § 154) *ist ein Punkt* P *durch die Gerade* $a = 18$ Fuss *und durch den Winkel* $\alpha = 50^0$ *bestimmt. Man soll durch* P *eine Gerade* BC *so ziehen, dass das dadurch gebildete Dreieck* ABC *den Inhalt* $Q = 384$ □ Fuss *erhält; wie gross ist der Abschnitt* $AB = x$ *zu nehmen?*

94) *Denjenigen Bogen im Gradmasse zu bestimmen, der seinem Cosinus gleich ist.*

95) *Man soll den Mittelpunktswinkel* x *und die Sehne* y *desjenigen Kreissectors finden, welcher durch letztere halbirt wird.*

96) *Es soll ein Quadrant durch eine Senkrechte auf einen der zwei begränzenden Radien halbirt werden. Wie gross ist der Mittelpunktswinkel, welcher dieser Senkrechten als seiner Sinuslinie entspricht?*

97) *Ein Halbkreis soll durch eine dem Durchmesser parallele Sehne halbirt werden; wie gross ist der zur Sehne gehörige Mittelpunktswinkel?*

98) *Man soll in einem Quadranten denjenigen von dem einen Endpunkte aus gerechneten Bogen im Gradmasse bestimmen, dessen Sehne, wenn man sie verlängert, bis sie den verlängerten Radius durch den andern Endpunkt des Quadranten trifft, mit ihrer Verlängerung dem Bogen gleich ist.*

99) *Eine Sehne schneidet den dritten Theil eines Kreises ab; wie gross ist der zur Sehne gehörige Mittelpunktswinkel?*

100) *Im Endpunkte des einen Radius eines Kreissectors ist eine Senkrechte auf den Radius errichtet, welche die Verlängerung des andern Radius schneidet. Wie gross ist der Winkel des Kreissectors, wenn das gebildete rechtw. Dreieck durch den Kreisbogen halbirt wird?*

Die Druckfehler sind angezeigt in dem Hefte der Auflösungen zu den Aufgaben.

Von demselben Verfasser sind folgende Werke erschienen:

Lehrbuch der Elementargeometrie für den Schulgebrauch bearbeitet. Riga, N. Kymmel. Erster Theil (Planimetrie) 1855. Zweiter Theil (Stereometrie) 1856.

Dasselbe in Russischer Sprache. Riga 1857.

Legendre's Geometrie. Ein Compendium für den Unterricht in der Planimetrie und Stereometrie. Zwei Theile. Reyher (Besthorn) in Mitau 1857.

Die ebene analytische Geometrie mit zahlreichen Uebungsaufgaben, für höhere Lehranstalten. Riga 1858.

Auflösungen der Aufgaben in dem Lehrbuche der Trigonometrie von Dr. C. Hechel. Dorpat 1861.