



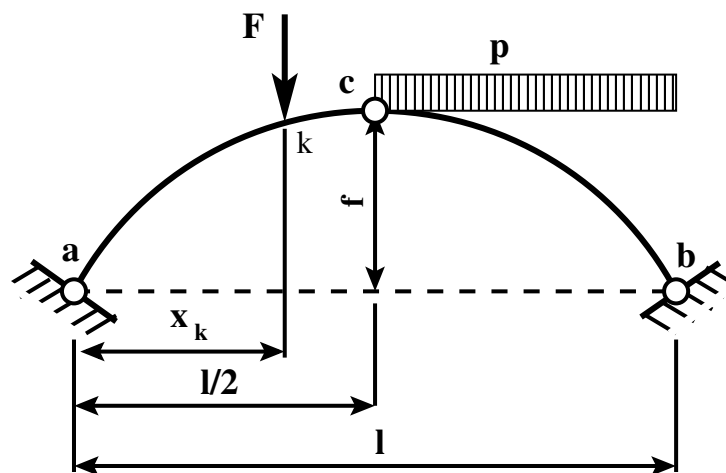
1918

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
MEHAANIKAINSTITUUT

Andres Lahe

Ehitusmehaanika

Varrassüsteemi mehaanika



Tallinn
2003

Dokumendi koostas: Andres Lahe, 2003-04-29
e-mail: alahe@staff.ttu.ee
<http://staff.ttu.ee/~alahe/>
Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut
<http://www.ttu.ee/>

Käesolev dokument on vaba. Te võite seda edasi levitada ja/või muuta vastavalt GNU Üldise Avaliku Litsentsi tingimustele, nagu need on Vaba Tarkvara Fondi poolt; kas Litsentsi versioon number 2 või (vastavalt Teie valikule) ükskõik milline hilisem versioon.

Seda dokumenti levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.

Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.

Te peaks olema saanud GNU Üldise Avaliku Litsentsi koopia koos selle dokumendiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga, 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA

GNU Üldise Avaliku Litsentsi koopia: Lisa D lk 305
ehk <http://linux.ee/materjalid/gpl/>

Õppevahend on vormindatud tekstitöötlusprogrammiga \LaTeX (loe: lateh). Tekstitöötlusprogramm \LaTeX on programmi \TeX (loe: teh) makropakett. \TeX erineb kirjastuste süsteemidest *VENTURA* ja *PageMaker* selle poolest, et ta on *public domain*'i produkt. \LaTeX -is kirjutatud teksti on võimalik töödelda msdos, UNIX (Linux) ja teistel arvutitel. \LaTeX disainib aruandeid, artikleid, raamatuid. Vastavad stiilifailid (*.sty failid) valivad pealkirjade suuruse, numeratsiooni, jooniste ja valemite paigutuse, aitavad koostada sisukorda, panevad indekseid, kirjandusviiteid jne.

\LaTeX 'i kohta loe kodulehelt: <http://staff.ttu.ee/~alahe/>

Mente et manu

(*TTÜ moto*)

Elektronraamat ehitusmehaanika kursuse EME3010 5.0 AP 6 3-0-3 E S ; EME3020 3.5 AP 4 2-0-2 E S ja Ehitusmehaanika I [EME0011](#)¹ 3,0 AP 3,5 1,5-0-2 E S ;

Ehitusmehaanika II [EME0012](#)² 3,0 AP 3,5 1,5-0-2 E K

kuulajatele Tallinna Tehnikaülikoolis. Ülesannete lahendamiseks on vaja installeerida numbriliste arvutuste programm *GNU Octave* (vt [C.1](#) lk 205).

Õppeaine tööprogrammi saab [aadressilt](#)³. Internetis oleva [tööprogrammi](#)⁴ kirjanduse viidetega saab vormistada raamatukogu nõudesedelid. Klõpsates esitamisele tuleva iseseisva ülesande numbrilise järel olevale kastikesele, satute selle ülesande tekstile ja joonisele. Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks on saadaval ka [elektronraamatuna](#)⁵.

Õppevahendis on kasutatud [õpiku \[Rää75\]](#)⁶ määranguid, liigitusi ja näiteid.

Käesolevat e-raamatut saab lugeda aadressil:

<http://staff.ttu.ee/~alahe/>

- Õppevahendid, konspektid

Täna oma abikaasat Lilja Lahe't mõistva suhtumise eest e-raamatu kirjutamisse. Kulutasin selleks palju oma vaba aega.

Suur aitäh keeleteoimetaja Juhan Nurme'le teksti silumise eest.

Andres Lahe

¹http://ar.va.ttu.ee/v/v/p/ois.ineti_aine.andmed?AINEKESE_ID=29394&TAG=1

²http://ar.va.ttu.ee/v/v/p/ois.ineti_aine.andmed?AINEKESE_ID=29414&TAG=1

³<http://staff.ttu.ee/~alahe/tudeng/EME3010t03.pdf>

⁴<http://staff.ttu.ee/~alahe/tooprogramm.html>

⁵<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/ylesanded/itoopdf.pdf>

⁶<http://www.lib.ttu.ee/dbs/item.asp?bkirjenr=b13036889>

Sisukord

Sisukord	5
Joonised	9
Tabelid	13
I	15
I Staatiliselt määratud süsteemid	15
1 Sissejuhatus	17
1.1 Varrassüsteemide koht mehaanikas	17
1.2 Lõikemeetod	18
1.3 Sisejõud ja rajajõud	21
1.4 Sise- ja rajasiirded	21
1.5 Koormused ja koondatud jõud	22
1.6 Aproksimatsioonitasemed. Mudelid	25
1.7 Lihtsustused varda paindeteoorias	27
1.8 Epüürid ja diferentsiaalseosed	30
1.9 Põikjõud vardas	31
2 Tala mõjujooned.	33
2.1 Mõjujoone mõiste	33
2.2 Toereaktsioonide mõjujooned	34
2.3 Põikjõu mõjujooned	36
2.4 Paindemomendi mõjujooned	38
2.5 Konsoli mõjujooned	40
2.5.1 Põikjõu mõjujoon	40
2.5.2 Paindemomendi mõjujoon	40
2.6 Mõjujoonte kasutamine	41
3 Varrassüsteemide liigitus	45
3.1 Varrassüsteemide liigituse alused	45
3.2 Toed ja toereaktsioonid	46
3.3 Kontaktjõud ja liigendid	47

3.4	Rajajõud ja sõlmpunktid	47
3.5	Arvutuskeem	48
4	Staatikaga määratav mitmesildeline tala	51
4.1	Staatikaga määratav mitmesildeline tala	51
4.2	Põhiosad ja lisaosad	51
4.3	Sisejõudude arvutus	53
4.4	Gerberi tala mõjujooned	53
5	Kolme liigendiga kaar ja raam	57
5.1	Üldised mõisted	57
5.2	Toereaktsioonide ja sisejõudude arvutus	58
5.2.1	Vertikaalne koormus	58
5.3	Kaare telgjoone võrrandid	58
5.4	Kaare sisejõud	59
5.5	Kolme liigendiga raam	65
5.5.1	Kolme liigendiga raami arvutusnäide	65
6	Sõrestikskeemid	67
6.1	Sõrestikskeemide liigitus	67
6.2	Staatiliselt määratud sõrestike arvutus	68
6.2.1	Sõlmede eraldamise võte	68
6.2.2	Momendipunkti võte	74
6.2.3	Projektsioonide võte	75
6.2.4	J. C. Maxwelli – L. Cremona diagramm	75
6.3	Talasõrestike mõjujooned	77
6.3.1	Mõjujoonte leidmine arvutiga	77
6.4	Sõrestiku arvutamise näited	78
7	Siirete arvutus	93
7.1	Märgikokkulepped	93
7.2	Sise- ja rajajõudude töö	94
7.3	Töö ja energia	95
7.4	Tööde vastastikkuse teoreem	97
7.5	Siirete vastastikkuse teoreem	97
7.6	Reaktsioonide vastastikkuse teoreem	98
7.7	Siirete arvutamine	98
7.8	Siirded temperatuuri muutusest	99
7.9	Numbriline integreerimine	101
7.9.1	Simpsoni valem	101
7.9.2	Simpsoni 3/8 valem	102
7.9.3	Vereštšagini võte	103
7.9.4	Siirete arvutamise näited	104

II	Staatiliselt määramatud süsteemid	111
8	Staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutus	113
8.1	Staatikaga määramatu konstruktsioon	113
8.2	Staatikaga määramatute konstruktsioonide omadused	114
9	Jõumeetod	117
9.1	Raamid	118
9.1.1	Staatikalise määramatuse aste	118
9.1.2	Põhiskeem ja lisatundmatud	119
9.1.3	Võrrandid lisatundmatute arvutamiseks	119
9.1.4	Raami arvutamise näited	120
10	Jätkuvtalad	125
10.1	Põhiskeem ja lisatundmatud	125
10.2	Kanoonilised võrrandid	125
10.3	Kolme momendi võrrandiga arvutamise näited	127
10.4	Jätkuvtalade arvutus fookussuhtega	132
10.4.1	Fookussuhted	132
10.4.2	Koormatud silde toemomendid	135
10.5	Fookussuhetega arvutamise näited	136
11	Deformatsioonimeetod	145
11.1	Geomeetrilise määratuse aste	145
11.2	Kinnitusemomendid	146
11.3	Deformatsioonimeetodiga arvutamise näited	149
12	Kaared ja võlvid	169
12.1	Kaarkonstruktsioonid	169
12.2	Kaheliigendiga kaar	170
12.3	Kaheliigendiga kaare arvutamise näited	172
12.4	Liigendita sümmeetriline kaar	176
12.5	Liigendita kaare arvutamise näited	180
III	Lisad	185
A	Mõisteid varda teooriast	187
A.1	Kohalik ja üldteljestik	187
A.2	Koordinaatide teisendus	187
A.3	Varda tööd	189
A.3.1	Varda töö pikkel	190
A.3.2	Varda töö paindel	192

B	Maatriksid	195
B.1	Maatriksi mõiste	195
B.2	Rea- ja veeruvektor	196
B.3	Maatriksite liitmine ja lahutamine	196
B.4	Vektorite ja maatriksite korrutamine	197
B.5	Maatriksite element-element korrutamine	199
B.6	Osamaatriksid	200
B.7	Maatriksite Transponeerimine	200
B.8	Pöördmaatriksid	201
C	Arvutiprogrammid	203
C.1	Programmist Octave	203
C.2	Arvutiprogramme tala arvutamiseks	204
C.2.1	Arvutifunktsioonid tala arvutamiseks	207
C.3	Arvutiprogramme kaare arvutamiseks	211
C.3.1	Arvutifunktsioonid kaare arvutamiseks	220
C.4	Arvutiprogramme sõrestiku arvutamiseks	226
C.5	Arvutiprogramme siirete arvutamiseks	249
C.6	Arvutiprogramme raami arvutamiseks. Jõumeetod	253
C.7	Arvutiprogramme jätkuvtala arvutamiseks	256
C.7.1	Arvutifunktsioonid jätkuvtala arvutamiseks	256
C.8	Arvutiprogramme deformatsioonimeetodiga arvutamiseks	261
C.8.1	Arvutifunktsioonid deformatsioonimeetodiga arvutamiseks	263
C.9	Arvutiprogramme staatiliselt määramatu kaare arvutamiseks	273
C.9.1	Arvutifunktsioonid staatiliselt määramatu kaare arvutamiseks	285
C.10	Arvutiprogramme kriitilise koormuse arvutamiseks	290
D	GNU Üldine Avalik Litsents	303
	Kirjandus	309
	Aineregister	311

Joonised

1.1	Varrassüsteemi koht mehaanikas	17
1.2	Sisejõud ja kontaktjõud	21
1.3	Varda tööseisundid	22
1.4	Lök kõrguselt $h = 0$	23
1.5	Koondjõud	24
1.6	Detafunktsioon	24
1.7	Aproksimatsiooni tasemed	25
1.8	Varda fenomenoloogilise mudeli struktuuriskeem	26
1.9	Joone kõverus	27
1.10	Tala deformatsioon	28
1.11	Ekstsentriline surve	28
1.12	Ekstsentriline surve II järku teorias	29
1.13	Põikjõu märgi määramine	30
1.14	Põikjõud horisontaalses vardas	30
1.15	Põikjõud kaldu vardas	31
2.1	Liikuv koormus	33
2.2	Epüürid ja mõjujooned	34
2.3	Toereaktsioonide A ja B mõjujooned	35
2.4	Konsoolidega tala toereaktsioonide mõjujooned	35
2.5	Põikjõu mõjujoone vasak pool	36
2.6	Põikjõu Q_k mõjujoon	37
2.7	Paindemomendi vasak pool	38
2.8	Paindemomendi M_k mõjujoon	39
2.9	Konsooli mõjujooned.	40
2.10	Momendi ja põikjõu mõjujooned	41
2.11	Mõjujoonte kasutamine	42
2.12	Sisejõu leidmine mõjujoonte abil	43
3.1	Toed ja toereaktsioonid	46
3.2	Kontaktjõud ja liigendid	48
4.1	Gerberi tala 1. Lisaosad ja põhiosad	52
4.2	Gerberi tala 2	52

4.3	Gerberi tala 3	52
4.4	Gerberi tala 3 epüürid	53
4.5	Gerberi tala 2 mõjujooned	54
5.1	Kolme liigendiga kaar	57
5.2	Kaare telgjoon	58
5.3	Kolme liigendiga kaare sisejõud	60
5.4	Kaar A. Koormused	61
5.5	Kaar A. Tabelarvutus	61
5.6	Kaar A. Paindemomendi epüür	62
5.7	Kaar A. Põikjõu epüür	62
5.8	Kaar A. Normaaljõu epüür	63
5.9	Kaar B. Koormused	63
5.10	Kaar B	64
5.11	Kaar B. Paindemomendi epüür	64
5.12	Kaar B. Põikjõu epüür	64
5.13	Kaar B. Normaaljõu epüür	65
5.14	Kaar B. Paindemomendi epüür kolmekümne jaotusega	65
5.15	Kolme liigendiga raam	66
5.16	Kolme liigendiga raami sisejõud	67
6.1	Sõrestikskeemide liigitus	69
6.2	Sõlmede eraldamise võte	71
6.3	Varda suunakoosinused	71
6.4	Varraste eraldamise võte	72
6.5	Sõrestiku topoloogia	72
6.6	Võrrandisüsteemi vasak pool	73
6.7	Võrrandisüsteemi koostamine	74
6.8	Jõud sõlmedes	75
6.9	Vasaku poole pöördmaatriks G'	75
6.10	Lõige I-I	76
6.11	Momendipunkti võte	76
6.12	Maxwelli-Cremona diagramm	78
6.13	Jõuhulknurgad	78
6.14	Sõrestiku sisejõud	80
6.15	Sõrestiku vasakpoolne osa	87
6.16	Sõrestiku parempoolne osa	88
6.17	Sõlme 7 tasakaal	89
6.18	Sõlme 4 tasakaal	89
6.19	Sõrestik. Ühikjõud paremal	90
6.20	Sõrestik. Ühikjõud vasakul	90
6.21	Sõlm 7	92
6.22	Sõlm 4	92
6.23	Sõrestiku mõjujooned	93

7.1	Märgikokkulepped	95
7.2	Passiivtöö	97
7.3	Aktiivtöö	97
7.4	Täiendtöö	97
7.5	Vastastikune töö	97
7.6	Prinkused temperatuuri muutusest	102
7.7	Märgikokkulepped	103
7.8	Vereštšagini võte	105
7.9	Epüüride pindalad	106
7.10	Siirete arvutus	107
8.1	Tundmatud ja võrrandid	115
9.1	Tundmatute üldarv	119
9.2	Kinnised kontuurid ja lihtliigendid.	121
9.3	Geomeetriliselt ja hetkmuutuvad skeemid	121
9.4	Raam ja põhiskeemi	122
9.5	Põhiskeemi epüürid	123
9.6	Paindemomendi epüür <i>Octave</i> 'ga	126
10.1	Jätkuvtala põhiskeem	127
10.2	Jätkuvtala ühikepüürid	128
10.3	Jätkuvtala tähised	130
10.4	Jätkuvtala. Kolme momendi võrrand	130
10.5	Fiktiivsete koormuste leidmine	131
10.6	Kolme momendi võrrandisüsteemi lahendamine	132
10.7	Jätkuvtala. Toereaktsioonid	133
10.8	Jätkuvtala fookused	135
10.9	Jätkuvtala fookussuhted	135
10.10	Jätkuvtala toemomendid	137
10.11	Jätkuvtala. Fookussuhted	139
10.12	Fookussuhete arvutamine	140
10.13	Toemomentide arvutamine	141
10.14	Fookussuhted. Koormus kolmandal sildel	141
10.15	Fookussuhted. Koormus teisel sildel	142
10.16	Fookussuhted. Koormus konsoolil	143
10.17	Fookussuhted. Koormus esimesel sildel	144
10.18	Alaline koormus	145
10.19	Alalise koormuse fiktiivsed reaktsioonid	146
11.1	Poolusplaan ja varraste pöörded	148
11.2	Varda deformatsioon	149
11.3	Raam	151
11.4	Geomeetriliselt määratud põhiskeem	151
11.5	Varrasahel	152

11.6	Kinnitusemomendid	152
11.7	Reaktsioonimomendid sõlme 1 pöördest	153
11.8	Reaktsioonimomendid sõlme 2 pöördest	155
11.9	Reaktsioonimomendid varda pöördest	156
11.10	Pöördenurkade arvutamine	158
11.11	Momendid varda otstes	159
11.12	Momendid varda otstes ja paindemomendi epüür	160
11.13	Raami põikjõu märk ja epüür	160
11.14	Sõlme 1 tasakaal	161
11.15	Sõlme 2 tasakaal	161
11.16	Raami normaaljõu epüür	162
11.17	Raam II	163
11.18	Raami varrasahel II	163
11.19	Geomeetriliselt määratud põhiskeem II	164
11.20	Sõlme a pööre φ_a	164
11.21	Sõlme b pööre φ_b	164
11.22	Varda ad pööre ψ_1	165
11.23	Varda kinnitusemomendid koormusest II	166
11.24	Deformatsioonimeetod <i>Octave</i> 'iga	167
11.25	Momendid varraste otstes	169
11.26	Põikjõu epüür	169
12.1	Kaared	171
12.2	Kahe liigendiga kaar	173
12.3	Kahe liigendiga kaar	175
12.4	Kahe liigendiga kaare paindemomendi epüür	177
12.5	Liigendita sümmeetriline kaar	178
12.6	Liigendita kaar. Tundmatu X_1	179
12.7	Liigendita kaar. Tundmatu X_2	179
12.8	Liigendita kaar. Tundmatu X_3	180
12.9	Liigenditeta kaar	183
A.1	Vasaku ja parema käe teljestik	189
A.2	Koordinaatide teisendus	190
B.1	Maatriksi sisestamine <i>Octave</i> 'iga	197
B.2	Maatriksite ja vektorite element-element korrutamine	201

Tabelid

1.1 Koormused	23
6.1 Sõrestiku arvutustabel I	81
6.2 Sõrestiku arvutustabel II	81
6.3 Varraste sisejõudude võrdlus	93
10.1 Valemid vabaliikmete arvutamiseks	134
11.1 Kinnitusemomendid ja põikjõud	150

Osa I

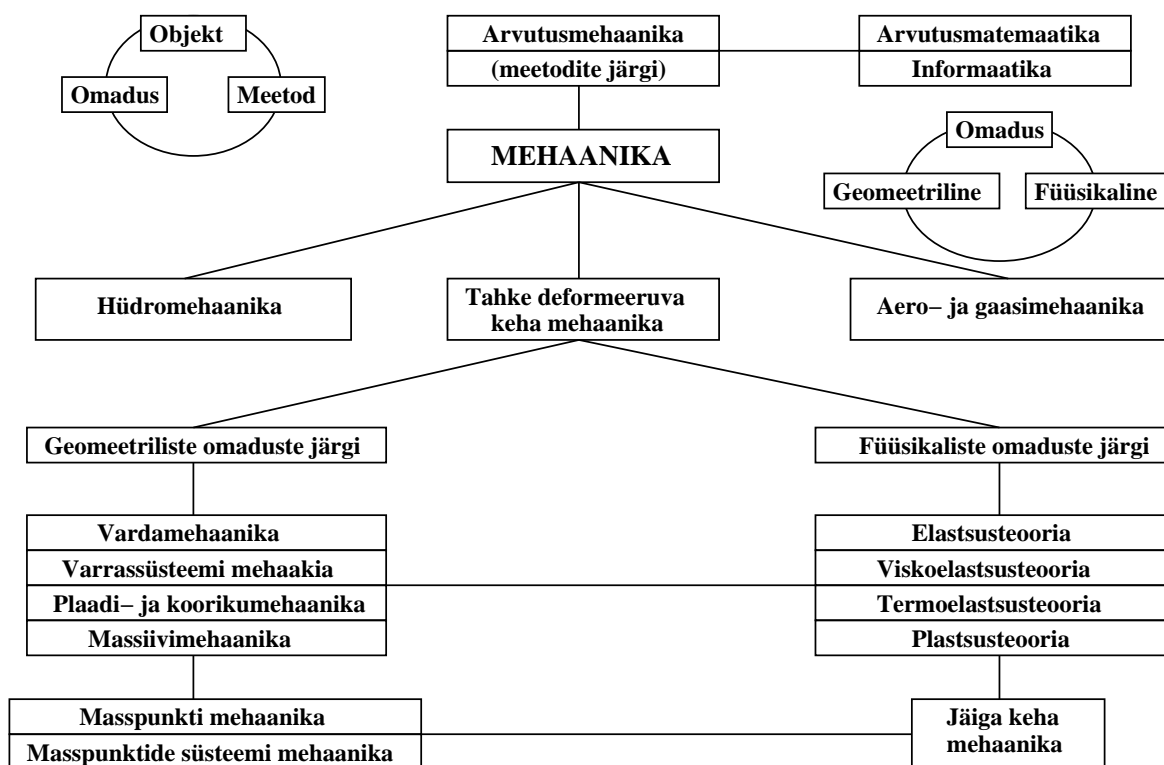
Staatiliselt määratud süsteemid

Peatükk 1

Sissejuhatus

1.1 Varrassüsteemide koht mehaanikas

Mehaanika on teadus, mis käsitleb vedelike, tahkete kehade ja gaaside liikumist (paigalseisu) neile rakendatud jõudude mõjul. Klassikaline mehaanika uurib makrokehade



Joonis 1.1. Varrassüsteemi koht mehaanikas

paigalseisu ja liikumist valguse kiirusest tunduvalt väiksemate kiiruste juures. Valguse kiirusele lähedaste kiiruste ja mikroosakeste puhul rakendatakse relativistlikku mehaanikat ja kvantmehaanikat.

Vaatleme klassikalist mehaanikat ja nimetame seda lühiduse mõttes mehaanikaks. Varrassüsteemide mehaanika koha määramiseks võtame aluseks mõisted *objekt*, *omadus* ja *meetod* (vt joonis 1.1).

Mehaanika üheks *objektiks* on tahked kehad. Tahkeid kehi võib liigitada nende geometriliste ja füüsikaliste omaduste järgi. Üheks geometriliseks omaduseks on kuju. *Geomeetrilise kuju* (omaduse) järgi on tahked kehad *vardad*, *plaadid* ja *koorikud* ning *massiivid*. *Füüsikaliste omaduste* põhjal räägitakse elastsetest, plastsetest, viskoelastsetest jne kehadest.

Abstraksioonina loetakse tahket keha vahel jäigaks, vahel vaadeldakse jäika keha masspunktina.

Mehaanika objektide liikumise kirjeldamiseks ja nende omaduste uurimiseks kasutatakse *teooriaid*, mida võib liigitada selle järgi, missuguse omaduse nad seavad esikohale (fokusesse). Füüsikaliste omaduste uurimisega tegelevad elastsusteooria, plastsusteooria, viskoelastsusteooria (vt joonis 1.1). Abstraktse jäiga keha liikumist uurib teoreetiline mehaanika.

Tahke keha geometriliste omaduste alt loeme vardamehaanika, *varrassüsteemi mehaanika*, plaadi- ja koorikumehaanika ning massiivimehaanika (joonis 1.1).

Vardamehaanikas on kasutusel järgmised teooriad: Bernoulli¹ vardateooria, Navier² vardateooria, elastsusteooria, viskoelastsusteooria jne. Edaspidi vaatleme põhiliselt Bernoulli vardateooriat, mida käsitleti tehnilises mehaanikas.

Iga teooria kasutab objektide (kehade) liikumise ja nende omaduste uurimiseks kindlapiirilisi uurimisviise ehk *meetodeid*. Näiteks kasutatakse vardateoorias varda tasakaaluvõrrandite koostamiseks *lõikemeetodit*, tasakaaluvõrrandite lahendamiseks võib aga kasutada Gaussi meetodit. Varda deformatsioonide pidevusvõrrandi koostamisel kasutatakse toe eemaldamise võtet. Pingete ja deformatsioonide vaheline seos leitakse katseliselt. Näeme, et üks teooria vajab erinevaid meetodeid. Igale meetodile on võimalik koostada algoritm.

1.2 Lõikemeetod

Lõikemeetodi eesmärk on keha (süsteemi) jaotamisega osadeks muuta sisejõud vaadeldava osa suhtes välisjõududeks, et nende määramiseks rakendada tasakaalutingimusi ([Jür85] lk 12).

Vaatleme õpikutes [Jür85] [MR96] [Rää75] leiduvaid lõikemeetodi erinevaid määranguid. Lõikemeetodi määranguid:

- ([Jür85] lk 12) Tasakaalus kehast mõtteliselt väljalõigatud osa on ka tasakaalus. Vaadeldavale kehast väljalõigatud osale mõjub jõudude süsteem, milles tuntud välisjõudude kõrval *rakendatakse tundmatuid jõude* lõikepindadel, *asendamaks lahtilõikamata keha vastavaid sisejõudusid*. Lõikepindadel mõjuvad tundmatud jõud, mis on võrdsed sisejõududega, määratakse vaadeldava osa tasakaalutingimustest.

¹ Jakob Bernoulli, sveitsi matemaatik, 1655–1705.

²Louis Marie Navier, prantsuse insener ja füüsik, 1785–1836.

- ([MR96] lk 15) Kohas, kus soovitakse leida sisejõude, sooritatakse läbi varda kujuteldav lõige, mis jaotab varda kaheks. Et *kogu varras on tasakaalus, siis peab tasakaalus olema ka kumbki tema mõtteline osa. Ükskõik kummale osale rakendatud sisejõude saab arvutada osa tasakaakutingimustest.*
- ([Rää75] lk 316) Sisejõudude töö arvutamiseks eraldatakse vardast, varda teljega kahe perpendikulaarse lõikega lõpmatult lühike element pikkusega ds . *Kahe naaberosa mõju sellele eraldatud elemendile asendatakse jõududega, mis arvuliselt on võrdsed terve varda nendes lõigetes esinevate sisejõududega. Eraldatud elemendi suhtes mõjuvad need jõud välisjõududena.*
- ([Rää75] lk 369) ... kui läbilõigatud kohtades on rakendatud nendes ristlõigetes esinevate sisejõududega arvuliselt võrdsed jõud, mida edaspidi lihtsuse pärast nimetatakse ka sisejõududeks.

Välja arvatud tehnilise mehaanika õpikus ([MR96] lk 15), kus lõikepinnale rakendatakse sisejõudu ei ole õpikutes [Jür85] lk 12 ja [Rää75] lk 316 lõikepinnale rakendatud jõud sisejõud (vt "Eraldatud elemendi suhtes mõjuvad need jõud välisjõududena"). Rajajõudude mõiste selgitamiseks kirjutame pikijõu diferentsiaalse

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x) \quad (1.1)$$

ehk

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = -q_x(x) \quad (1.2)$$

Korrutame avaldise (1.2) suvalise siirdega \hat{u} ja integreerime üle tala pikkuse l

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \hat{u} dx = - \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx \quad (1.3)$$

Võrrandi (1.3) parempoolne liige väljendab väliskoormuse q_x tööd W_v siirdel \hat{u} . On võimalik näidata, et koondkoormuse F_{xi} töö varda telje punkti i siirdel \hat{u}_i on $F_{xi}\hat{u}_i$. Seega

$$W_v = \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi}\hat{u}_i \quad (1.4)$$

Võrrandi (1.3) vasakpoolset avaldist integreerime ositi valemi

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (1.5)$$

järgi, võttes u ja dv järgmiselt:

$$\int_a^b \underbrace{\hat{u}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right)}_{dv} dx$$

saame avaldise

$$\int_a^b \hat{u} d \left(EA \frac{du}{dx} \right) = \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx} \right) \hat{u}}_{N_x} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx} \right)}_{N_x} \underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{\lambda}} dx \quad (1.6)$$

Võrrandi (1.6) parema poole esimene liige väljendab rajajõudude \vec{N}_x tööd W_r rajasiretel \hat{u} . Võrrandi (1.6) parema poole teine liige kirjeldab sisejõudude tööd W_s . Võttes arvesse välisjõudude töö avaldise (1.4) ja rajajõudude töö avaldise (1.6), võib integraali (1.3) kirjutada kujul

$$\underbrace{\vec{N}_x \hat{u}}_{W_r} \Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b N_x \hat{\lambda} dx}_{W_s} = - \underbrace{\left(\int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \right)}_{W_v} \quad (1.7)$$

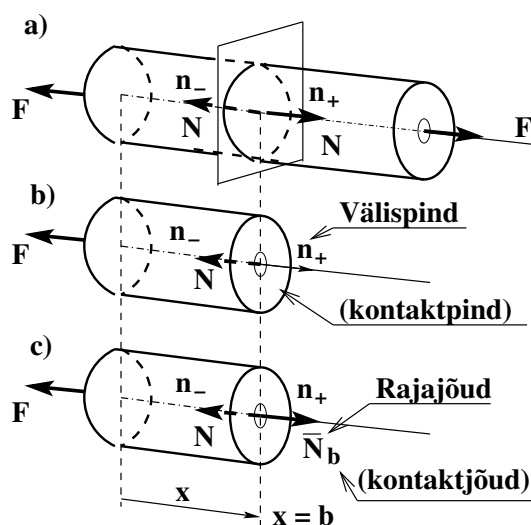
Rajajõudu N_x avaldises (1.6) tähistatakse \vec{N}_{xb} (joonis 1.2). Kui rajajõudu tähistatakse N_x -ga, siis on see mugavusest, kusjuures peab aru saama, et see ei ole sisejõud N_x . Rajajõu väärtus punktis b on võrdne sisejõu väärtusega selles punktis. Nende suunad punktis b on vastupidised (joonis 1.2).

Nagu selgub avaldisest (1.6), on rajajõudude mõiste üldisem kui toereaktsioonide (joonis 3.1) ja kontaktjõudude mõiste. Välisjõud avaldises (1.4) on kui joon- ja punktallikas. Rajajõude võib vaadelda kui vooge läbi pinna (punkti) (1.6). Rajajõudude ja välisjõudude olemused on erinevad.

Rajajõudude mõistet vaatlevad W.B. Krätzig ja U. Wittek [KW90]. F. Hartmanni „Ehitumehaanika matemaatilistes alustes“ [Har85] käsitletakse neid mõisteid põhjalikult.

Vaadeldud lõikemeetodi määrangutest selguvad järgmised lõikemeetodi sammud:

- Vaadeldava varda (joonis 1.2a) sisepindadel n_+ , n_- (kontaktpindadel [MR96] lk 9) mõjuvad sisejõud on paarisjõud, mis koosnevad kahest võrdvastupidisest jõust või momendist.
- Vardast eraldatakse mõttelise lõikega üks osa ja edasi vaadeldakse seda osa (teine osa jääb vaatlusest välja). Selle osa pinnanormal n_+ määrab vaadeldava osa välispinna (joonis 1.2b).
- Vardast mõttelise lõikega eraldatud osa tasakaalustamiseks rakendame selle välispinnale n_+ rajajõudu (kontaktjõudu) \vec{N}_b (joonis 1.2c) (vaadeldavale osale ei rakendata sisejõude ega ka ära visatud osa sisejõude, sest need ei ole vaatluse all), mis on võimelised tasakaalustama vaadeldavat osa. Arvuliselt on see rajajõud võrdne vastava sisejõuga, kuid vastupidise suunaga.



Joonis 1.2. Sisejõud ja kontaktjõud

- Koostame vardast mõttelise lõikega eraldatud osale tasakaalutingimused. Leitud *rajajõud* (kontaktjõud) \vec{N}_b (joonis 1.2c) on arvuliselt võrdsed vastavate sisejõududega.

1.3 Sisejõud ja rajajõud

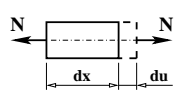
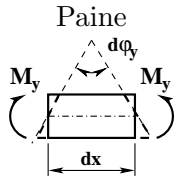
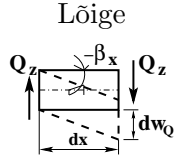
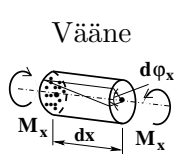
Tehnilises mehaanikas [MR96] kasutusel olevad sisejõudude mõisted on joonisel 1.3. *Tahke keha sisejõududena mõistame jõudusid keha osade vahel, mis säilitavad keha terviklikkuse ja annavad talle iseloomuliku mahu- ja kujukindluse mõõdukate välisjõudude mõju all [Jür85].*

Varda toereaktsioonid on joonisel 3.1.

1.4 Sise- ja rajasiirded

Sisesiireteks on *pikkuse muut* [MR95] Λ , *paindenurk* Ψ , *lihe*, *lihke* [MR95] B_z , *väändnurk* Θ (joonis 1.3). Terminit sisesiire kasutavad W.B. Krätzig ja U. Wittek [KW90]. Tehnilises mehaanikas [MR95] nimetatakse neid *põhideformatsioonideks*.

Rajasiirded $u|_a^b$ avaldises (1.6) on varda siirded punktides a ja b . Rajasiirete ja rajajõudude arv on vastavuses. Kui üks nendest on ette antud, siis teine tuleb leida. Rajasiirete ja rajajõudude üheks osaks on toesiirded ja toereaktsioonid. Vaata etteantud ja tundmatuid toetingimusi (joonis 3.1).

Tööseisund	Prinkus [MR95]	Sisejõud [MR96]	Ristlõike jäikus	Elastus- seosed	Deformatsiooni- energia [MR96]
Pike 	Pikkeprinkus $\lambda = \frac{du}{dx}$ $\lambda^* = \frac{\Lambda}{L}$ siin $\Lambda = \Delta u$	Pikkejõud N	Pikke- jäikus EA	$N = EA\lambda$	$dU_N = \frac{1}{2}N\lambda dx$
Paine 	Paindeprinkus $\psi = \frac{d\varphi_y}{dx}$ $\psi^* = \frac{\Psi}{L}$ siin $\Psi = \Delta\varphi_y$	Painde- moment M_y	Painde- jäikus EI_y	$M_y = EI_y\psi$	$dU_M = \frac{1}{2}M_y\psi dx$
Lõige 	Lõikeprinkus $-\beta_z = \frac{dw_Q}{dx}$ $-\beta_z^* = \frac{B_z}{L}$ siin $B_z = \Delta w_Q$	Põikjõud Q_z	Lõike- jäikus GA_{red}	$Q_z = GA_{red}\beta_z$	$dU_Q = \frac{1}{2}Q_z\beta_z dx$
Vääne 	Väändeprinkus $\vartheta = \frac{d\varphi_x}{dx}$ $\vartheta^* = \frac{\Theta}{L}$ siin $\Theta = \Delta\varphi_x$	Väändemo- ment M_x	Väände- jäikus GI_x	$M_x = GI_x\vartheta$	$dU_\gamma = \frac{1}{2}M_x\vartheta dx$

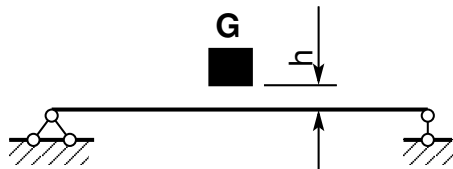
Joonis 1.3. Varda tööseisundid

1.5 Koormused ja koondatud jõud

Koormusi liigitatakse ajas muutumise järgi *dünaamilisteks* ja *staatilisteks*. Kui koormus muutub ajas nii aeglaselt, et konstruktsiooni deformeerumisel võib inertsjõu hüljata, siis nimetatakse koormust *staatiliseks*. Suuruselt, sihilt, suunalt või asukohalt muutuvat koormust nimetatakse *dünaamiliseks*. Edaspidi piirdume ainult staatiliste koormuste vaatlemisega. Koormused esinevad alati kas kogu konstruktsiooni või selle osa ulatuses hajutatult *lauskoormustena*, mida võib jaotada ruum-, pind- ja joonkoormusteks.

Ruumkoormus rakendub tavaliselt massi kaudu (raskusjõud, inertsjõud jne) ja on ruumis hajutatud. Ruumkoormust mõõdetakse selle intensiivsusega $\vec{q}(x, y, z)$, mis näitab vaadeldava punkti vahetus läheduses ruumiühikule mõjuvat jõudu N/m^3 , kN/m^3 jne.

Pindkoormus rakendub konstruktsiooni kogu pinnale või selle osadele ja väljendab teiste kehade vahetut kontaktmõju. Pindkoormuse intensiivsus $\vec{q}(x, y)$ näitab pinna-



Joonisel 1.4 on tehnilise mehaanika näide, kus raskuse G kukkumine (löök) kõrguselt $h = 0$ kutsub esile kaks korda suuremad si-sejõud ja siirded kui staatiline koormus.

Joonis 1.4. Löök kõrguselt $h = 0$

ühikule mõjuvat jõudu vaadeldavas punktis N/m^2 , kN/m^2 .

Joonkoormus on nii taandatud ruum- kui ka pindkoormus intensiivsusega $\vec{q}(x)$, mille mõõtühikuks on N/m , kN/m , vt tabelit 1.1.

Tabel 1.1. Koormused

Indeksid	Koormus	Tähis	Mõõtühik	Mõõde
F_z v j põhjus koht siht	Koondkoormus	F_z, F_x	N, kN, MN	$[F]$
	Moment	$\mathcal{M}_y, \mathcal{M}_x$	Nm, kNm, MNm	$[FL]$
	Joonkoormus	q_z, q_x	$N/m, kN/m, MN/m$	$[F/L]$
	Lausmoment	m_x, m_y, m_z	N, kN, MN	$[FL/L]$

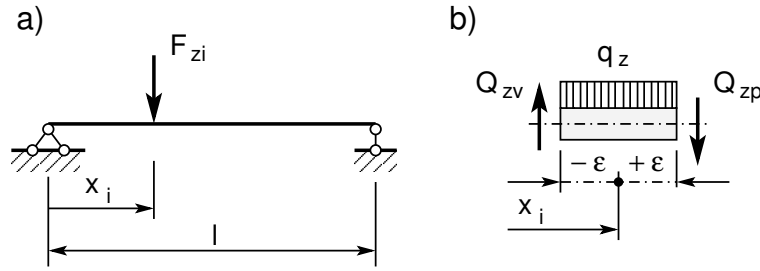
Sageli mõjub pind- ja joonkoormus konstruktsiooni üldmõõtmetega võrreldes väikesele pinnale (joonele). Sellist koormust loetakse ühte punkti koondatud *punkt-* ehk *koondkoormuseks*, mille tähiseks on \vec{F} ja mõõtühikuks N/m , kN/m . Koondkoormus esitatakse enamasti projektsioonidena F_x, F_y, F_z , (tabel 1.1).

Vahel taandub koormus jõupaariks, mille toimet hinnatakse *momendiga*. Momendi tähisena kasutatakse tähti $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y$ ja \mathcal{M}_z , mis väljendavad momendi mõju telje x, y, z suhtes.

Suhteliselt harva esineb hajutatud moment m ehk *lausmoment*. Lausmomendi projektsioonid on m_x, m_y ja m_z ning mõõtühikud N, kN (tabel 1.1).

Vaatleme joonkoormuse q_z koondamist koondkoormuseks F_z (joonis 1.5). Olgu koondkoormuse F_z rakenduspunkti koordinaat x_i . Koondjõu väärtus avaldub joonkoormuse kaudu järgmiselt:

$$F_{zi} = q_z \cdot 2\varepsilon \quad (1.8)$$



Joonis 1.5. Koondjõud

ehk

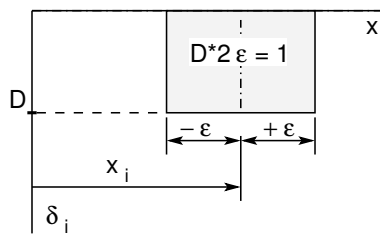
$$F_{zi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} q_z(x) dx \quad (1.9)$$

Varda ristlõiget, kus mõjub koondatud koormus, nimetame *iseäraseks ehk singulaarseks ristlõikeks*. Vaatleme varda elementi (joonis 1.5) pikkusega 2ε . Parempoolses ristlõikes mõjub põikjõud Q_{zp} ja vasakpoolses ristlõikes põikjõud Q_{zv} . Need põikjõud erinevad üksteisest $q_z \cdot \varepsilon$ võrra. Kui nüüd vähendada varda elemendi pikkust ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$), siis saab ühes ristlõikes kaks erinevat põikjõudu Q_{zp} ja Q_{zv} . Selline ristlõige on *iseärane ristlõige*.

Võtame kasutusele deltafunktsiooni δ_i (joonis 1.6). Lisaks avaldisele (1.11) võib kirjutada järgmise seose:

$$\int_0^l F_{zi} \delta(x - x_i) dx = \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} F_{zi} \delta(x - x_i) dx = F_{zi} \quad (1.10)$$

Joonisel 1.6 on deltafunktsioon $\delta_i = \delta(x - x_i)$. See funktsioon on aproksimeeritud ristkülikulise kujuga, mille pindala $D \cdot \varepsilon = 1$, kui $\varepsilon \rightarrow 0$ ning $D \rightarrow \infty$



Joonis 1.6. Deltafunktsioon

$$\begin{aligned} \int_0^l \delta(x - x_i) dx &= \\ &= \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} \delta(x - x_i) dx = 1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

kus ε on meelevaldselt väike positiivne arv.

1.6 Aproksimatsiooni tasemed. Mudelid

Tegeliku konstruktsiooni aproksimeerimine³ on inseneripraktikas üheks raskemaks ülesandeks (joonis 1.7). Tegelikku konstruktsiooni pole alati võimalik otseselt uurida kui

³**Aproksimeerimine, lähendamine** – objekti asendamine mingi teise, temast teatavas mõttes vähe erineva objektiga.

tervikut, sest konstruktsiooni olekuparameetrite arv on suur. *Olekuparameetrite* all mõistame füüsikalisi suurusi, mis iseloomustavad süsteemi olekut. *Väljeste* olekuparameetriteks on välisjõud ja väliste väljade tugevus. *Sisemiste* olekuparameetriteks on sisejõud, siseenergia, temperatuur jne. Erinevate olekuparameetrite kirjeldamiseks on olemas erinevaid teooriaid: Bernoulli⁴ vardateooria, Navier'i⁵ vardateooria, elastsus teooria, viskoelastsusteooria jne. Parameetrite hulga vähendamiseks peab tegema lihtsustavaid hüpoteese. Nende hüpoteeside aluseks on kas vaatlus (katsetused), teoreetilised kaalutlused või tehakse need intuiitiivselt [Krä91a].

Kaasaliikuvate Lagrange'i⁶ koordinaatide abil on võimalik kirjeldada suuri deformatsioone ja stabiilsuse kadu.

Varraste asukohti kirjeldatakse topoloogiaga. Absoluutselt sirgeid vardaid tegelikus ei esine, seega jälle aproksimatsioon. Konstruktsioonis on vardad omavahel ühendatud kas jäigalt või liigenditega.

Vaadeldav teooria koosneb fenomenoloogilisest⁷ ja matemaatilisest mudelist. Siin tehakse teise taseme aproksimatsioonid. Fenomenoloogilise mudeli⁸ struktuuriskeem on joonisel 1.8. Matemaatiline mudel kirjeldab fenomenoloogilise mudeli kvalitatiivseid liikmeid. Kolmanda taseme aproksimatsioonid tehakse arvutusmeetodi valikul. Üldiselt ei ole arvutusmeetodis võimalik kõiki arvutusmudeli muutujaid arvestada. Võib osutada, et osa muutujaid tuleb elimineerida. Tavaliselt on selle taseme aproksimatsioonide üle hea kontroll, sest on võimalik anda vea hinnang.

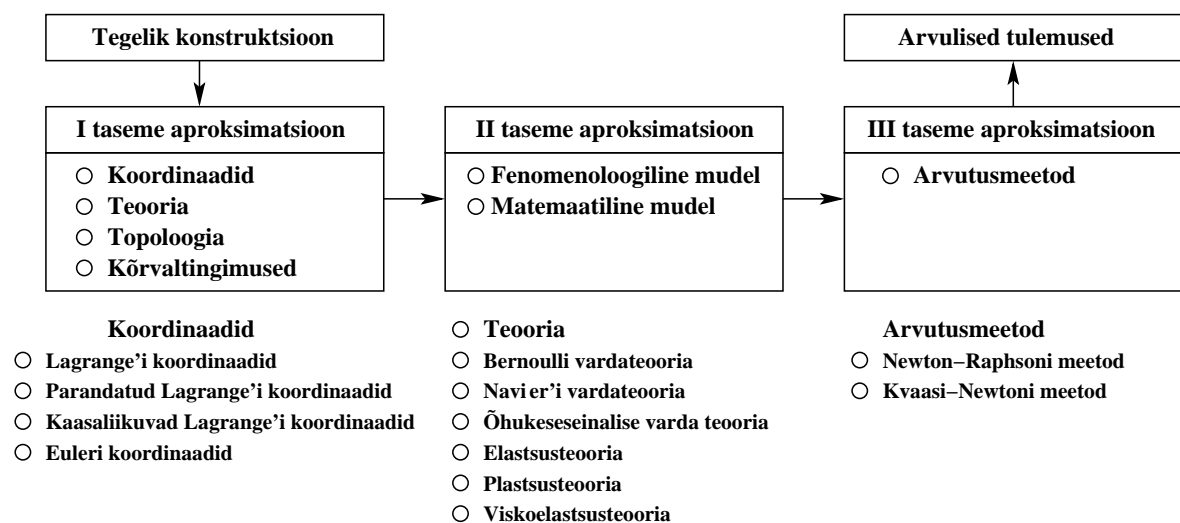
⁴Jakob Bernoulli, šveitsi matemaatik, 1654–1705.

⁵Louis Marie Henri Navier, prantsuse insener ja füüsik, 1785–1836.

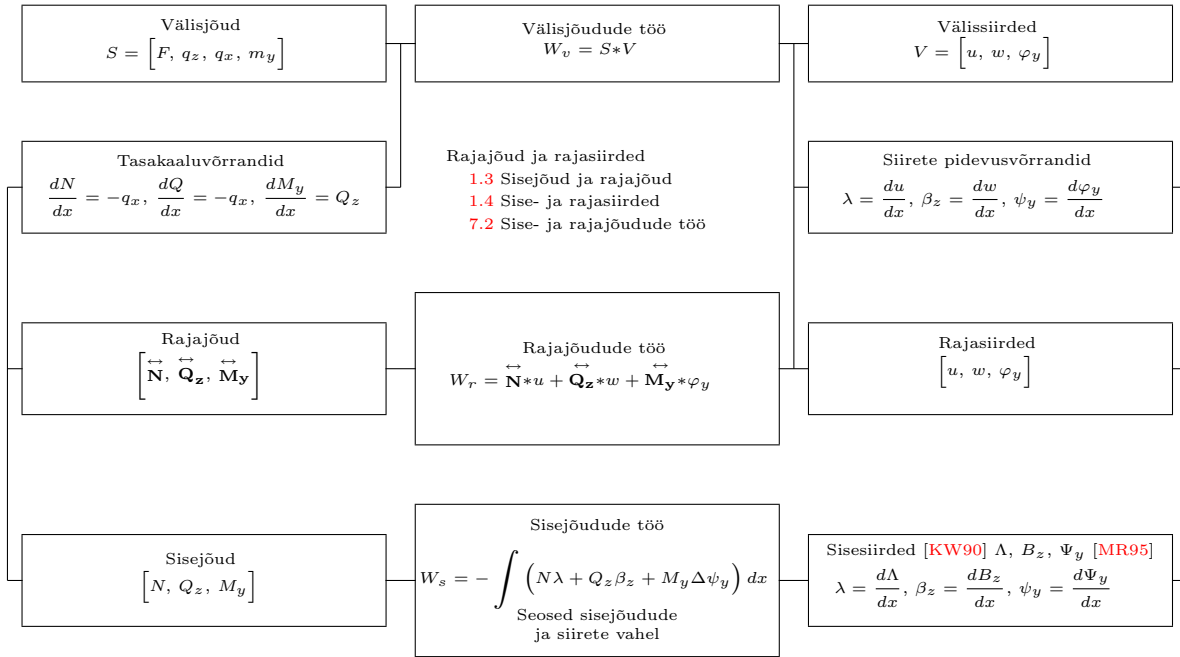
⁶Joseph Louis de Lagrange, prantsuse matemaatik ja mehaanikateadlane, 1736–1813.

⁷**Fenomen** (< *kr phainomenos 'nähtavale ilmuv'*) – juhtum, meeltega tajutav olukord või fakt.

⁸**Mudel** – süsteemi, teooria või fenomeni kirjeldus, mis arvestab nende tuntud omadusi ja mida võib kasutada nende omaduste uurimiseks.



Joonis 1.7. Aproksimatsiooni tasemed



Joonis 1.8. Varda fenomenoloogilise mudeli struktuuriskeem

Varrassüsteemide mehaanikas on fookuses geomeetiline omadus – kuju, mille füüsikaliste omaduste kirjeldamiseks valitakse sobiv teooria ja seejärel sobivad meetodid. Kõikides teooriates, mida varrassüsteemid kasutavad, esinevad järgmised mõisted (joonis 1.8): välisjõud (F), välissiirded (V), sisejõud (N, Q, M ; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$), sisesiirded ($+Lambda, B, \Psi, \Theta$; $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}$), rajajõud ($\vec{N}, \vec{Q}_z, \vec{M}_y$), rajasiirded ($\Delta u, \Delta w, \Delta \varphi_y$), tasakaaluvõrrandid, siirete pidevusvõrrandid, olekuvõrrandid, rajatingimused.

Rajajõudude mõiste üldistab toereaktsioone ja varraste vahel mõjuvaid kontaktjõude. Rajasiirded on tugede vajumised ja varraste siirded ning pöörded ühendustes (liigendites). Joonisel 1.8 toodud mõisteid on käsitletud tehnilises mehaanikas varda teoorias.

Tasakaaluvõrrandid seostavad sisejõud välisjõududega. Siirete pidevuse võrrandid loovad seosed sisesiirete (tehnilises mehaanikas varda pikkuse muut) ja välissiirete vahel. *Geomeetriselt mittelineaarses* teoorias on sisesiirete ja välissiirete vahelised seosed mittelineaarsed.

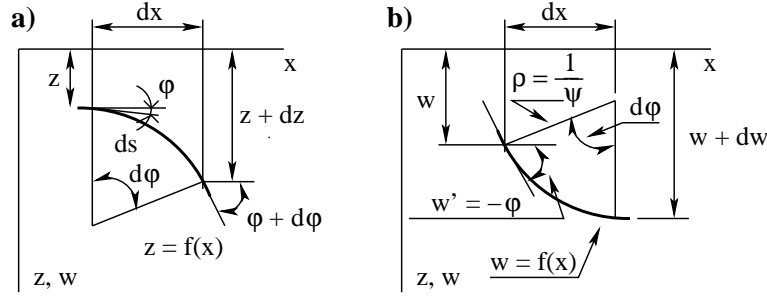
Rajajõud ristlõike välispinnal on võrdsed ja suunatud vastupidi vastavate sisejõududega ristlõike sisepinnal. Rajasiireteks on toe siirded ja varraste ühenduspunktides (sõlmedes) varraste vastastikused siirded ja pöörded.

Füüsikaliselt lineaarse vardateooria olekuvõrrandid (elastusseosed) väljenduvad Hooke'i⁹ seaduse kaudu.

⁹Robert Hooke, inglise füüsik, 1635–1703.

1.7 Lihtsustused varda paindeteoorias

Vaatleme joone kõverust diferentsiaalgeomeetrias ja elastse joone kõverust tehnilises mehaanikas



Joonis 1.9. Joone kõverus

Tähistame joone $z = f(x)$ kõveruse ψ_j -ga ja elastse joone $w = f(x)$ kõveruse ψ_p -ga. Joone element ds (joonis 1.9)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + (z')^2} \quad (1.12)$$

kus

$$z' = \frac{dz}{dx} = \tan \varphi, \quad \varphi = \arctan \frac{dz}{dx} \quad (1.13)$$

Elastse joone element ds

$$ds = \varrho d\varphi, \quad \frac{1}{\varrho} = \psi = \frac{d\varphi}{ds} \quad (1.14)$$

siin

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d(\arctan z')}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{z''}{1 + (z')^2} \frac{dx}{dx\sqrt{1 + (z')^2}} \quad (1.15)$$

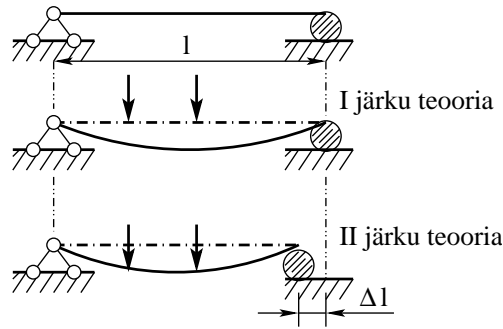
Joone kõverus ψ_j

$$\psi_j = \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{z''}{[1 + (z')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.16)$$

siin on ϱ joone kõverusraadius. Teeme lihtsustused

- lihtsustus $\tan \varphi \approx \varphi$, millest järeldub

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{z''}{\sqrt{1 + (z')^2}} \quad (1.17)$$



Joonis 1.10. Tala deformatsioon

- lihtsustus $\tan \varphi \approx \varphi$, $ds \approx dx$, millest järeldub

$$\psi_j = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = z'' \quad (1.18)$$

Kuna elastse joone kõverus $\psi_p = -\psi_j$, siis

$$\psi \equiv \psi_p = -w'' \quad (1.19)$$

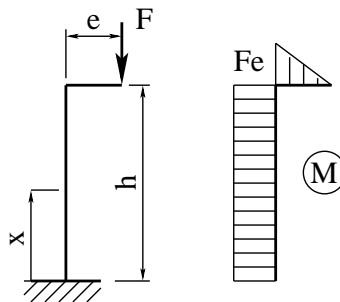
Avaldis (1.19) on lineaarne diferentsiaalvõrrand.

Lineaarses ehk esimest järku teoorias (I järku teoorias) kasutatakse seost (1.19)

$$\begin{aligned} \psi &= -w'', & ds &\approx dx, & \frac{dw}{dx} &= w' = -\varphi, \\ \tan \varphi &\approx \sin \varphi \approx \varphi, & \cos \varphi &\approx 1 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Diferentsiaalseoste (tasakaalutingimuste) koostamisel lähtutakse deformeerumata kujust (algmõõtmete printsibist) (joonis 1.10).

Joonisel 1.11 on ekstsentrilise surve paindemomendi epüür I järku teoorias, kus ei



Joonis 1.11. Ekstsentriline surve

arvestata varda deformatsiooni. Üldistatud Hooke'i seadus I järku teoorias

$$M_y = -EI_y w'' \quad (1.21)$$

Teist järku teoorias (II järku teoorias) arvestatakse varda deformeerunud kuju diferentsiaalseste (tasakaalutingimuste) koostamisel. Joonisel 1.12 on esitatud jõu ja momendi vaheline seos. Kui esimest järku teoorias on seos lineaarne, siis teist järku teoorias mittelineaarne.

$$M(x) = \underbrace{Fe}_{I \text{ järku teooria}} + \underbrace{F[w_1(x) + w_2(, F)]}_{\text{lisa liikmed}} \quad (1.22)$$

kus

$$w_1(x, F) = f \left(1 - \frac{x}{h}\right) \quad (1.23)$$

Kolmandat järku teooriat (III järku teooriat) kasutatakse eriti saledate konstruktsioonide ja ka vedrude arvutamiseks. Arvestatakse deformeerunud kuju ja kõveruse täpset avaldist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{z''}{[1 + (z')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.24)$$

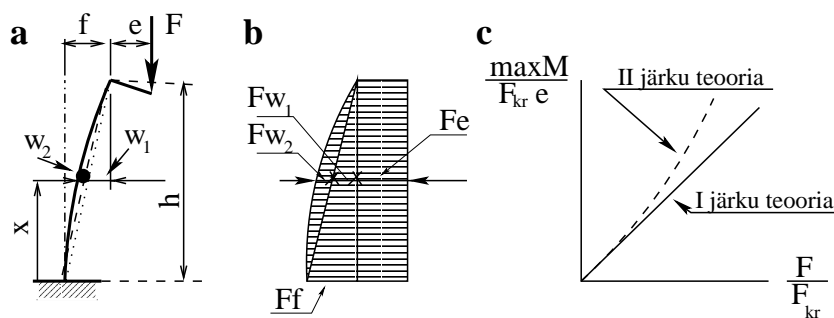
ehk

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{z''}{\sqrt{1 + (z')^2}} \quad (1.25)$$

Ehituskonstruktsioonide arvutamisel III järku teooriat peaaegu ei kasutata.

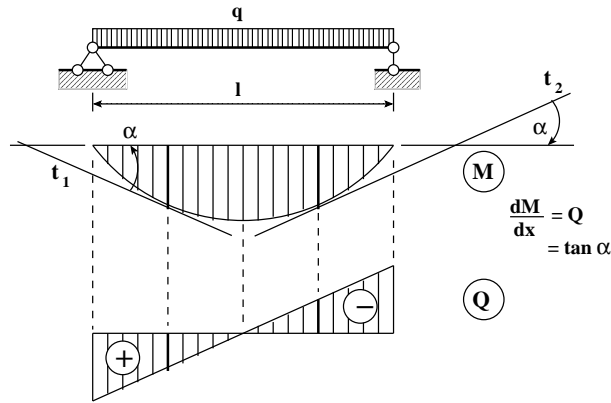
1.8 Epüürid ja diferentsiaalseosed

Varraste põikjõu märgi määramiseks vaatleme joonist 1.13. Paindemomendi tuletise geomeetriliseks tõlgenduseks punktis on selles punktis paindemomendi epüüri puutuja



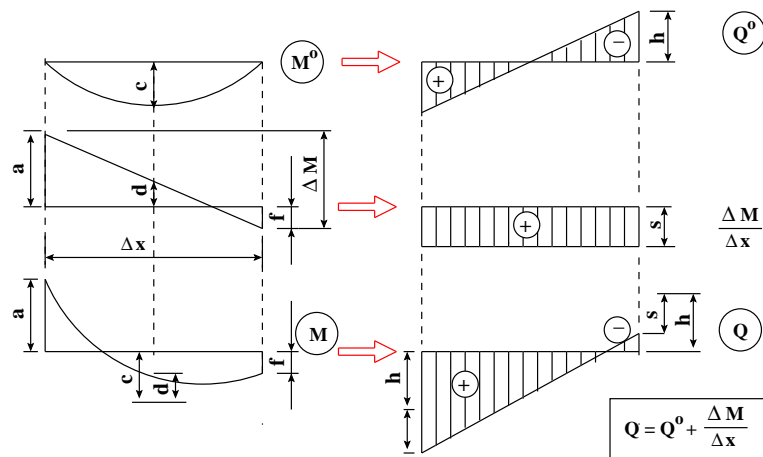
Joonis 1.12. Ekstsentriline surve II järku teoorias

t_1 (t_2) tõusunurga tangens ($\tan \alpha$). Põikjõu märk oleneb puutuja (joonis 1.13) pööramise suunast (puutujat pöörame nii, et ta ühtiks varda teljega, seejuures $\alpha < \frac{\pi}{2}$): vastupäeva pöörates on põikjõud positiivne ja päripäeva pöörates negatiivne.



Joonis 1.13. Põikjõu märgi määramine

Põikjõud horisontaalses vardas leiame epüüride liitmisena (joonis 1.14). Joonisel



Joonis 1.14. Põikjõud horisontaalses vardas

1.14 on näidatud paindemomendid ja nende vastavad põikjõud. Lineaarselt muutuva paindemomendi korral võime diferentsiaalseose (1.26) asendada

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (1.26)$$

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta x} \quad (1.27)$$

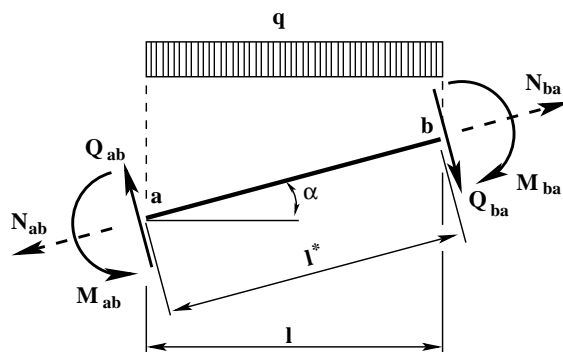
diferentsseosega (1.27).

$$Q = Q^{(0)} + \frac{\Delta M}{\Delta x} \quad (1.28)$$

siin on $Q^{(0)}$ vastava lihttala põikjõud.

1.9 Põikjõud vardas

Põikjõu leidmiseks kaldu olevas vardas (joonist 1.15) koostame tasakaaluvõrrandi varda lõpu b kohta



Joonis 1.15. Põikjõud kaldu vardas

$$\Sigma M_b = 0 : \quad Q_{ab} \cdot l^* - M_{ab} + M_{ba} - (q \cdot l) \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad (1.29)$$

$$Q_{ab} = \frac{(q \cdot l)}{2} \cdot \frac{l}{l^*} + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l^*} \quad (1.30)$$

$$Q_{ab} = Q_{ab}^{(0)} \cdot \cos \alpha + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l} \cdot \cos \alpha \quad (1.31)$$

ning tasakaaluvõrrandi varda alguse a kohta

$$\Sigma M_a = 0 : \quad Q_{ba} \cdot l^* - M_{ab} + M_{ba} + (q \cdot l) \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad (1.32)$$

$$Q_{ba} = -\frac{(q \cdot l)}{2} \cdot \frac{l}{l^*} + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l^*} \quad (1.33)$$

$$Q_{ba} = Q_{ba}^{(0)} \cdot \cos \alpha + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l} \cdot \cos \alpha \quad (1.34)$$

kus $l^* = \frac{l}{\cos \alpha}$

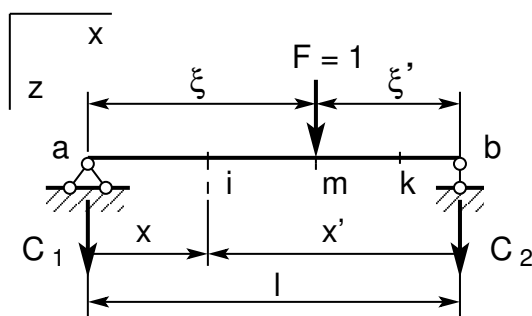
Peatükk 2

Tala mõjujooned

2.1 Mõjujoone mõiste

Liikuvat koormust tuleb arvestada sildade, kraanatalade ja teiste tehnoehitiste projekteerimisel. Paigalseisva koormuse puhul kujutati varraste sisejõude epüüridel. Koormus oli fikseeritud ja sisejõud olid varda telje (x -koordinaadi) funktsioonid. Liikuva koormuse puhul fikseeritakse ristlõige ja leitakse selles sisejõud või toereaktsioon sõltuvalt koormuse asukohast. Ristlõigete jaoks koostatakse graafikud (mõjujooned).

Mõjujoon on graafik, mis kujutab konstruktsioonil liikuvast ja suunda säilitavast ühikjõust tingitud toereaktsiooni, sisejõu, siirde vms suurust arvutuskeemi kindlas ristlõikes. Mõjujoone ja epüüri erinevust selgitame mõjufunktsiooni $M(x, \xi)$ abil. Mõjufunktsiooni üheks muutujaks on ristlõike asukoht x (joonis 2.1) ja teiseks muutujaks jõu asukoht ξ . Tala elastse joone diferentsiaalvõrrandi $\frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$ lahendina



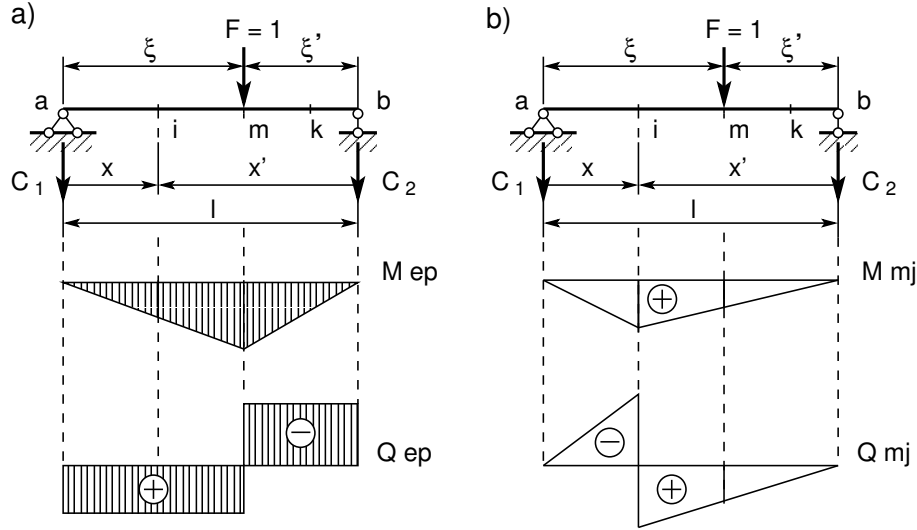
Joonis 2.1. Liikuv koormus

järgmistel rajatingimustel $M(0) = 0$, $M(l) = 0$ saab leida mõjufunktsiooni (Greeni¹ funktsiooni)

$$M(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{l}, & kui \quad x \leq \xi \\ \frac{\xi(l-x)}{l}, & kui \quad x \geq \xi \end{cases} \quad (2.1)$$

¹Georg Green, inglise füüsik ja matemaatik, 1793–1841.

Epüüride ja mõjujoonte võrdlemiseks vaatleme mõjufunktsiooni (2.1). Epüüride saamiseks fikseerime muutuja ξ ($\xi = a_m$) ja mõjujoonte saamiseks muutuja x ($x = a_i$).



Joonis 2.2. Epüürid ja mõjujooned

Epüüride puhul fikseerime muutuja ξ ($\xi = a_m$)

$$M(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-a_m)}{l}, & \text{kui } x \leq a_m \\ \frac{a_m(l-x)}{l}, & \text{kui } x \geq a_m \end{cases} \quad (2.2)$$

Mõjujoonte puhul fikseerime muutuja x ($x = a_i$)

$$M(x, \xi) = \begin{cases} \frac{a_i(l-\xi)}{l}, & \text{kui } a_i \leq \xi \\ \frac{\xi(l-a_i)}{l}, & \text{kui } a_i \geq \xi \end{cases} \quad (2.3)$$

Avaldistega (2.2) ja (2.3) leitud graafikud on joonisel 2.2. Põikjõudude epüüride ja mõjujoonte saamiseks tuleb võtta vastavad tuletised, mida me tegema ei hakka. Mõjujoonte leidmist vaatleme eraldi.

2.2 Toereaktsioonide mõjujooned

Staatiline meetod

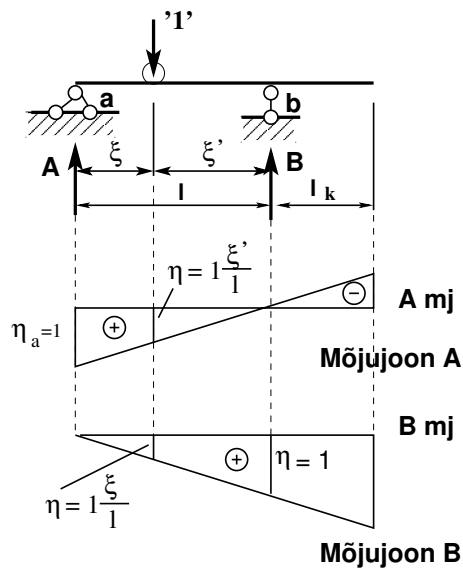
Tala avas liigub koondatud koormus $F = 1$, mille kaugus toest a on ξ ja toest b $\xi' = l - \xi$. Tasakaalutingimusest $\Sigma M_b = 0$

$$\sum M_b = 0; \quad -Al + F \cdot (1 - \xi) = 0 \quad (2.4)$$

saame

$$A = F \cdot \frac{l - \xi}{l} = \frac{\xi'}{l} \quad (2.5)$$

Toereaktsioon A on muutuja ξ' lineaarne funktsioon (joonisel 2.3 sirgjoon).
Sarnaselt leiame tasakaalutingimusest $\sum M_a = 0$



Joonis 2.3. Toereaktsioonide A ja B mõjujooned

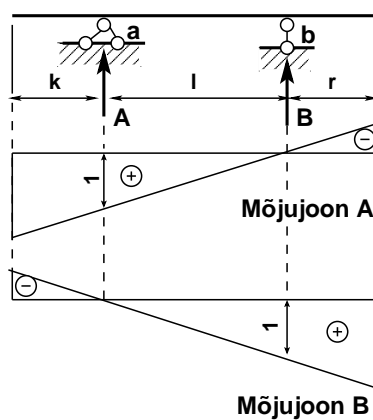
$$\sum M_a = 0; \quad -Bl + F \cdot \xi = 0 \tag{2.6}$$

toereaktsiooni B

$$B = F \cdot \frac{\xi}{l} = \frac{\xi}{l} \tag{2.7}$$

on joonisel 2.3 näidatud sirgjoon.

Konsoolidega tala toereaktsioonide mõjujooned on joonisel 2.4.



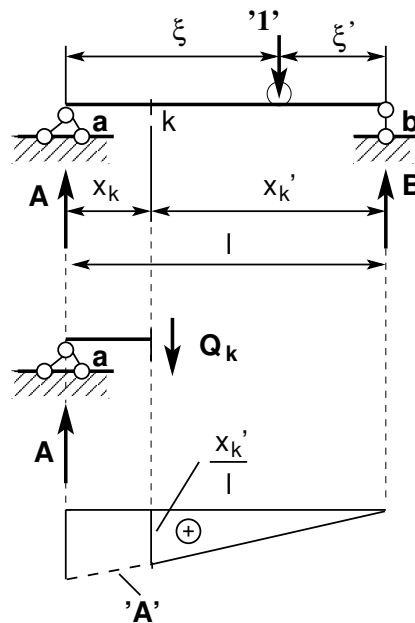
Joonis 2.4. Konsoolidega tala toereaktsioonide mõjujooned

2.3 Põikjõu mõjujooned

Staatiline meetod

Vaatleme kahte juhtu.

- Liikuv koormus asub ristlõike k ja toe b vahel (joonis 2.5).
Tasakaalutingimusest $\Sigma Y = 0$ saame $Q_k - A = 0$; $Q_k = A$. Vahemikus $x_k \leq \xi \leq l$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni A mõjujoonega (avaldis 2.5).

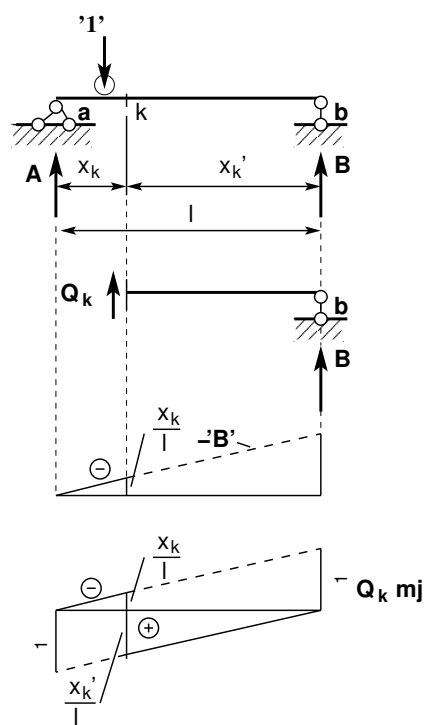


Joonis 2.5. Põikjõu mõjujoone vasak pool

- Liikuv koormus asub toe a ja ristlõike k vahel (joonis 2.6).
Tasakaalutingimusest $\Sigma Y = 0$ saame $Q_k + B = 0$; $Q_k = -B$. Vahemikus $0 \leq \xi \leq x_k$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni $-B$ mõjujoonega (2.7).

Põikjõu Q_k mõjujoon

$$Q_k = \begin{cases} A = \frac{(l-\xi)}{l}, & \text{kui } a_k \leq \xi \leq l \\ -B = -\frac{\xi}{l}, & \text{kui } 0 \leq \xi \leq a_k \end{cases} \quad (2.8)$$



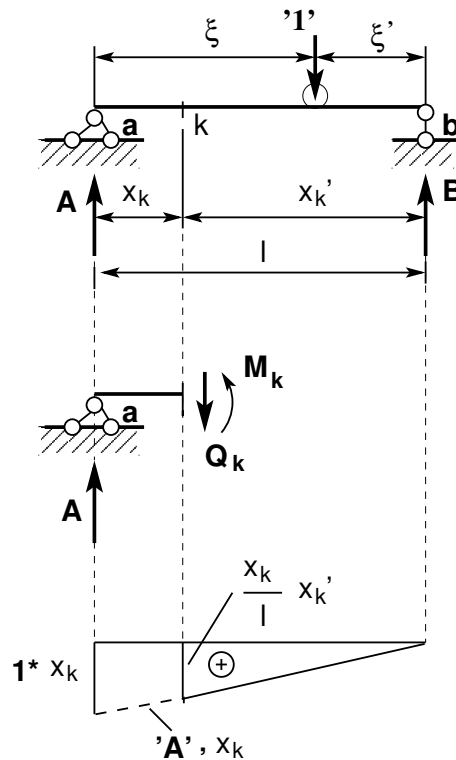
Joonis 2.6. Põikjõu Q_k mõjujoon

2.4 Paindemomendi mõjujooned

Staatiline meetod

Vaatleme kahte juhtu.

- Liikuv koormus asub ristlõike k ja toe b vahel (joonis 2.7).
Tasakaalutingimusest $\Sigma M_k = 0$ saame $M_k - A \cdot x_k = 0$; $M_k = A \cdot x_k$. Vahemikus $x_k \leq \xi \leq l$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni A mõjujoonega, mis on korrutatud x_k .
- Liikuv koormus asub toe a ja ristlõike k vahel (joonis 2.8).
Tasakaalutingimusest $\Sigma M_k = 0$ saame $M_k - B \cdot x_k' = 0$; $M_k = B \cdot x_k'$. Vahemikus $0 \leq \xi \leq x_k$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni B mõjujoonega, mis on korrutatud x_k' .



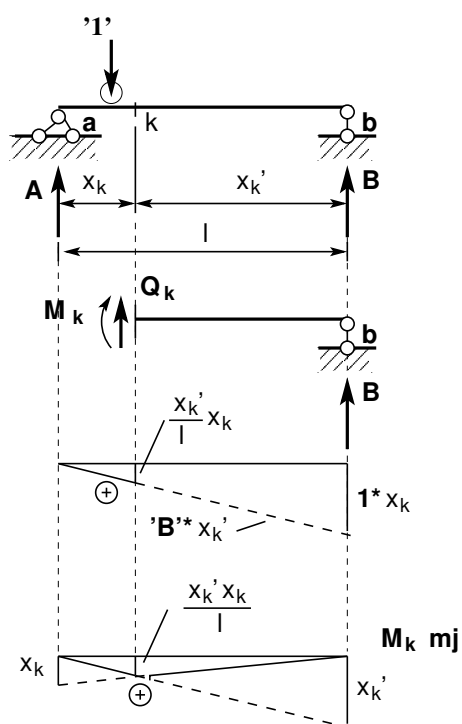
Joonis 2.7. Paindemomendi vasak pool

Paindemomendi M_k mõjujoon

$$M_k = \begin{cases} a_k \cdot A = a_k \cdot \frac{(l-\xi)}{l}, & \text{kui } a_k \leq \xi \leq l \\ (l - a_k) \cdot B = (l - a_k) \cdot \frac{\xi}{l}, & \text{kui } 0 \leq \xi \leq a_k \end{cases} \quad (2.9)$$

kus a_k on ristlõike k kaugus vasakust toest (x_k).

Konsolidega tala paindemomendi ja põikjõu mõjujooned õpikust [DK62] on toodud joonisel 2.10.

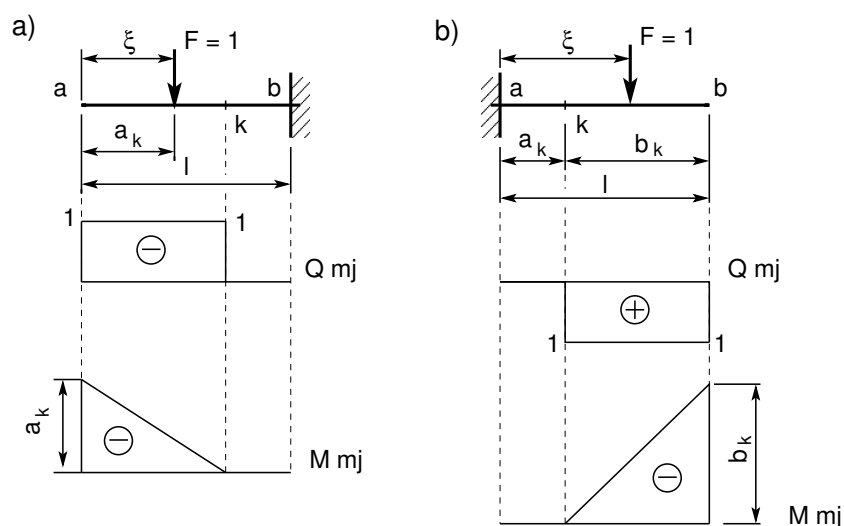


Joonis 2.8. Paindemomendi M_k mõjujoon

2.5 Konsooli mõjujooned

2.5.1 Põikjõu mõjujoon

Konsooli (joonis 2.9 a) põikjõu mõjujoon lõike k jaoks koosneb kahest sirgest. Kui ühikjõud asetseb lõikest k paremal, on põikjõud lõikes k null. Kui ühikjõud asetseb



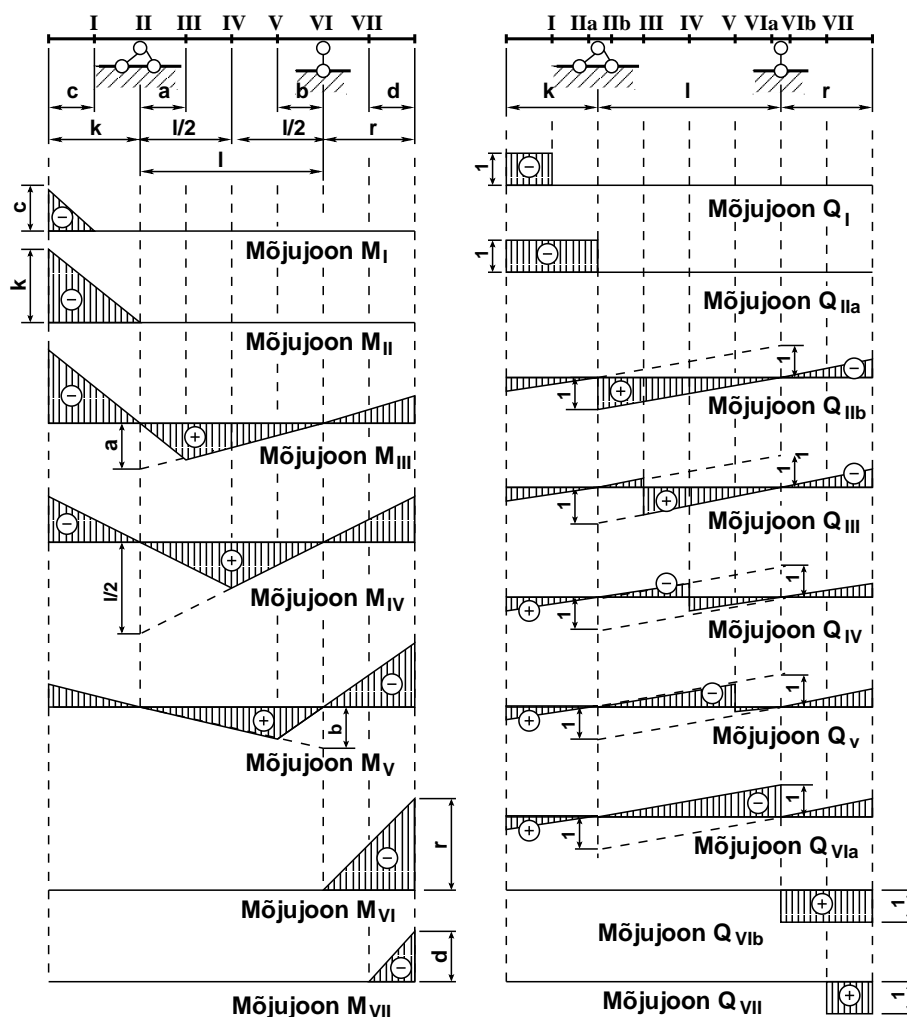
Joonis 2.9. Konsooli mõjujooned.

lõikest k vasakul, on lõikes k põikjõud $Q_k = -1$. Põikjõu Q_k mõjujoon on joonisel 2.9 a). Joonisel 2.9 b) on toodud parempoolse konsooli ristlõike k põikjõu Q_k mõjujoon. Erinevus vaskpoolsest on põikjõu märgis.

2.5.2 Paindemomendi mõjujoon

Konsooli lõike k paindemomendi mõjujoon M_k on joonisel 2.9 a). Kui ühikjõud on lõike k ja toe vahel, siis $M_k = 0$. Kui ühikjõud asetseb vasakul pool lõiget k (joonis 2.9 a), siis

$$M_k = -F \cdot (a_k - \xi) \quad (2.10)$$



Joonis 2.10. Momendi ja põikjõu mõjujooned

2.6 Mõjujoonte kasutamine

Tuleb teada, kuidas kasutada mõjujooni toereaktsioonide, sisejõudude ja siirete leidmiseks.

Mõjujoone iga ordinaat η_i näitab otsitavat suurust ühikulisest koormusest $F_i^* = 1$ (vt joonis 2.11). Kui talale mõjub koormus F_i , siis leime otsitava suuruse Z_k avaldisest $Z_k = F_i \cdot \eta_i$. Mitme koondatud jõu olemasolul summeerime need (vt avaldist 2.11).

$$Z_k = F_1 \cdot \eta_1 + F_2 \cdot \eta_2 + \dots + F_i \cdot \eta_i \quad (2.11)$$

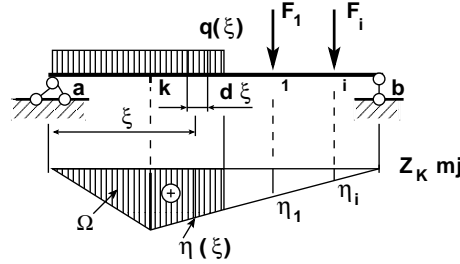
siin on F_1 , F_i koondatud jõud ja η_1 , η_i vastavate jõudude all olevad ordinaadid mõjujoonel (joonis 2.11). Ühtlaselt jaotatud koormusest ($q = konst$) põhjustatud si-sejõu Z_k (joonis 2.11) saame avaldisest (2.12)

$$Z_k = \int_a^c q(\xi) \eta(\xi) d\xi = q \cdot \Omega \quad (2.12)$$

kus Z_k on sisejõud ning Ω mõjujoone pindala (vt joonisel 2.11 viirutatud osa) ja kogu koormusest (vt joonist 2.11) avaldisega (2.13).

$$Z_k = F_1 \cdot \eta_1 + F_i \cdot \eta_i + q \int_a^c \eta(\xi) d\xi = F_1 \cdot \eta_1 + F_i \cdot \eta_i + q \cdot \Omega \quad (2.13)$$

siin on F_1 , F_i koondatud jõud ja η_1 , η_i vastavate jõudude all olevad ordinaadid mõjujoonel (joonis 2.11).



Joonis 2.11. Mõjujoonte kasutamine

Näide 2.1 Arvutada joonisel 2.12 kujutatud konsoolidega tala toereaktsioon A, põikjõud Q_a^p toest a paremal, põikjõud Q_a^v toest a vasakul, paindemoment M_k , põikjõud Q_k lõikes k. Talale mõjuv koormus ja vajalikud mõjujooned on joonisel 2.12. Kasutades avaldist (2.13), saame toereaktsiooni A väärtuseks

$$A = 4 * 1.2 + 5 * 0.4 + 2 \frac{0.4 * 2}{2} - 2 \frac{0.2 * 1}{2} = 7.4 \text{ kN} \quad (2.14)$$

Põikjõud Q_a^p toest a paremal leiame avaldisega

$$Q_a^p = 4 * 0.2 + 5 * 0.4 + 2 \frac{0.4 * 2}{2} - 2 \frac{0.2 * 1}{2} = 3.4 \text{ kN} \quad (2.15)$$

Põikjõud Q_a^v toest a vasakul arvutame avaldisega

$$Q_a^v = -4 * 1.0 = -4.0 \text{ kN} \quad (2.16)$$

Paindemomendi M_b väärtuseks toel b saame

$$M_b = -2 \frac{1.0 * 1}{2} = -1.0 \text{ kNm} \quad (2.17)$$

Paindemoment M_k ristlõikes k on

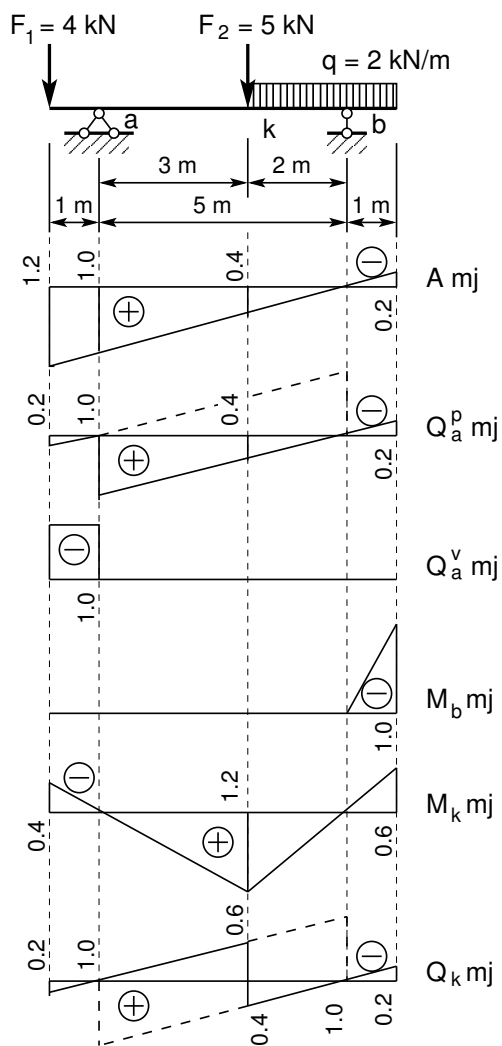
$$M_k = -4.0 * 0.4 + 5 * 1.2 + 2 \frac{1.2 * 2}{2} - 2 \frac{0.6 * 1}{2} = 6.2 \text{ kNm} \quad (2.18)$$

Ristlõikes k on põikjõul kaks väärtust. Parempoolse põikjõu väärtuse Q_k^p (2.19) saab, kui kasutada mõjujoone vasakpoolset väärtust

$$Q_k^p = 4.0 * 0.2 - 5 * 0.6 + 2 \frac{0.4 * 2}{2} - 2 \frac{0.2 * 1}{2} = -1.6 \text{ kNm} \quad (2.19)$$

Vasakpoolse põikjõu väärtuse Q_k^v (2.20) saab, kui kasutada mõjujoone parempoolset väärtust

$$Q_k^v = 4.0 * 0.2 + 5 * 0.6 + 2 \frac{0.4 * 2}{2} - 2 \frac{0.2 * 1}{2} = 3.4 \text{ kNm} \quad (2.20)$$



Joonis 2.12. Sisejõu leidmine mõjujoonte abil

Peatükk 3

Varrassüsteemide liigitus

3.1 Varrassüsteemide liigituse alused

Varrassüsteemiks nimetatakse varraste kogumit, milles iga varda asend ja asendi muutus on määratud ülejäänud varraste asendi muutusega.

Varraskonstruksiooni liigitamisel võetakse arvesse järgmisi varrassüsteemi omadusi:

- varda telgjoone kuju
- varda tööseisundit (joonis 1.3)
- varraskonstruksiooni toesidemete arvu
- liigendite arvu.

Esmalt vaatleme, kas konstruksioon on valmistatud sirgetest või kõveratest varrastest või kasutatakse mõlemaid, s.t tegemist on segasüsteemiga. Järgnevalt uurime, milline on varraste tööseisund (joonis 1.3). Näiteks sirgetest varrastest valmistatud varrassüsteemi, mille vardad töötavad pikkele, nimetatakse talaskeemiks. Sirgetest varrastest valmistatud varrassüsteemi, mille vardad töötavad liittööseisundis, nimetatakse raamskeemiks. Edaspidi vaatleme liigendite arvu ja räägime kolme liigendiga, kahe liigendiga ja liigenditeta raamskeemist.

Kõvera telgjoonega varrast, mis töötab ainult tõmbele, nimetame *vandiks* (kasutatakse ka nimetust *niit*, *niidivõrrand*) ja nendest moodustatud varrassüsteemi *vantskeemiks*. Kõvera telgjoonega varrastest valmistatud varrassüsteemi, mille vardad töötavad liittööseisundis (võimalik on valida selline varraste telgjoone kuju, et varrassüsteem töötab ainult survele), nimetatakse *kaarskeemiks*. Liigendite arvu alusel eristatakse kolme liigendiga, kahe liigendiga ja liigenditeta kaarskeemi.

Tuleb vahet teha sõrestikkonstruksiooni ja sõrestikskeemi vahel, sest sõrestikkonstruksioone on võimalik arvutada nii sõrestikskeemi kui ka raamskeemi järgi.

Sõrestikskeemi, talaskeemi, raamskeemi, kaarskeemi, vantskeemi ja segaskeemi üldnimetuseks on *arvutuskeem*. Ühel konstruksioonil võib olla mitu arvutuskeemi. See sõltub tehtud aproksimatsioonidest.

	Jäik tugi	Paigalseisev liigendtugi	Liikuv liigendtugi		Vaba ots	Liikuv pöördumatu tugi
Tugede sümbolid						
Toe-tingimused: ette antud ja tundmatud	$u = 0$ $w = 0$ $\varphi_y = 0$ $F_x = ?$ $F_z = ?$ $M_y = ?$	$u = 0$ $w = 0$ $\varphi_y = ?$ $F_x = ?$ $F_z = ?$ $M_y = 0$	$u = ?$ $w = 0$ $\varphi_y = ?$ $F_x = 0$ $F_z = ?$ $M_y = 0$	$u = 0$ $w = ?$ $\varphi_y = ?$ $F_x = ?$ $F_z = 0$ $M_y = 0$	$u = ?$ $w = ?$ $\varphi_y = ?$ $F_x = 0$ $F_z = 0$ $M_y = 0$	$u = 0$ $w = ?$ $\varphi_y = 0$ $F_x = ?$ $F_z = 0$ $M_y = ?$
Toe siirde tähis ja arv	— 0	φ_y 1	u, φ_y 2	w, φ_y 2	u, w, φ_y 3	w 1
Toereaktsioonid ja nende arv	 3	 2	 1	 1	0	 2

Joonis 3.1. Toed ja toereaktsioonid

3.2 Toed ja toereaktsioonid

Lihtsuse mõttes vaatleme tasapinnalist konstruktsiooni. Kirjeldame toereaktsioonide \vec{F}_x , \vec{F}_z ja \vec{M}_y tööd W_t tugede siiretel u , w ja φ_y

$$W_t = \vec{F}_x \cdot u + \vec{F}_z \cdot w + \vec{M}_y \cdot \varphi_y \quad (3.1)$$

Toereaktsioonid kuuluvad rajajõudude hulka, tugede siirded ja pöörded rajasiirete hulka. Rajatingimustest antakse ette kas toereaktsioon või toe siire (pööre). Kui toed ei vaju, siis on tugede siire (pööre) null. Arvutuskeemil kasutatavate tugede sümbolid on joonisel 3.1. Joonisel 3.1 on järgmised toed:

- *Jäik tugi* ei võimalda siirdeid ega pööret, tema vabadusastmete arv on null. Tundmatuid toereaktsioone on kolm. Tundmatute toereaktsioonide ja vabadusastmete summa on kolm;
- *Paigalseisev liigendtugi* võimaldab ainult pööret. Vabadusastmete arv on üks. Tundmatuteks on horisontaalne ja vertikaalne toereaktsioon ning pööre. Tundmatute toereaktsioonide ja vabadusastmete summa on kolm;
- *Liikuv liigendtugi* võimaldab pööret ja ühes sihis siiret. Vabadusastmete arv on kaks. Tundmatuteks on üks toereaktsioon, pööre ja siire;
- *Vaba ots* võimaldab siirdeid ja pööreid. Vabadusastmete arv on kolm, need on ka tundmatuteks. Toereaktsioonid puuduvad;
- *Liikuv pöördumatu tugi* võimaldab siiret ühes sihis. Vabadusastmete arv on üks. Tundmatuteks on toemoment, üks toereaktsioon (joonisel 3.1 on selleks horisontaalne toereaktsioon) ja siire.

3.3 Kontaktjõud ja liigendid

Liigendite sümbolid arvutuskeemi jaoks ja kontaktjõudude tähised on joonisel 3.2. Nii nagu tugede ja toereaktsioonide vaatlemisel kasutame töö mõistet ka kontaktjõudude ja liigendite vaatlemisel.

Vaatleme hõõrdevabu liigendeid, mille kontaktjõudude töö on null nii nagu toereaktsioonidel

$$W_k = \vec{N}_x \cdot \Delta u + \vec{Q}_z \cdot \Delta w + \vec{M}_y \cdot \Delta \varphi_y \quad (3.2)$$

siin vaatleme kontaktjõudude \vec{N}_x , \vec{Q}_z , \vec{M}_y tööd W_k kontaktpindade vastastikustel siiretel ja pööretel Δu , Δw , $\Delta \varphi_y$, kus

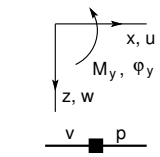
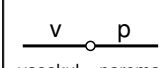
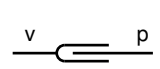
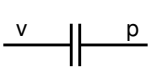
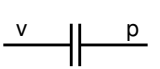
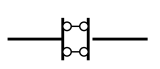
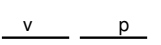
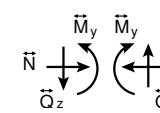
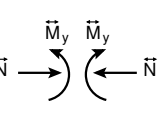
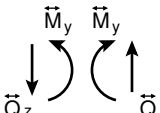
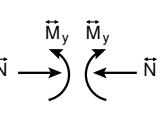
$$\Delta u = u_p - u_v, \quad \Delta w = w_p - w_v, \quad \Delta \varphi_y = \varphi_{yp} - \varphi_{yv} \text{quad} \quad (3.3)$$

Avaldised (3.3) tähistavad indeksid p ja v siirdeid ja pööreid liigendist paremal ja vasakul. Varda otsa ristlõikepinda kirjeldame tema pinnanormaliga. Varda ristlõikepinda, mille pinnanormal on suunatud varraste ühenduse poole, nimetatakse *kontaktpinnaks*, kontaktpindadel mõjuvaid jõude kontaktjõududeks. Varda otsa ristlõikepind, mille pinnanormal on suunatud varda sisse, on *sisepind*. Sisepinnal mõjuvad jõud on *sisejõud*. Kontaktjõud ja sisejõud varda otsa ristlõikes on võrdsed, kuid suunalt erinevad. Sisejõud leitakse kontaktjõudude kaudu.

3.4 Rajajõud ja sõlmpunktid

Arvutite kasutamise tõttu tuleb vaatluse alla võtta nii konstruktsioonelemendid (vardad) kui ka nende ühenduspunktid, nn sõlmpunktid.

Varrassüsteemide uurimise põhiliseks probleemiks on rajatingimuste kirjeldamine. Täpsemalt käsitletakse seda probleemi tala-, sõrestik-, raam- ja kaarskeemide juures.

	Jäik ühendus	Painde- momendi liigend	Normaaljõu liigend	Põikjõu liigend	Vabad otsad
Ühenduste sümbolid. Vastastikused siirded	 $\Delta u = u_p - u_v$ $\Delta w = w_p - w_v$ $\Delta \varphi_y = \varphi_p - \varphi_v$	 vasakul paremal	 	 	
Kontakti- tingimused sõlmedes: ette antud ja tundmatud	$\Delta u = 0$ $\Delta w = 0$ $\Delta \varphi_y = 0$ $\uparrow N_x = ?$ $\uparrow Q_z = ?$ $\uparrow M_y = ?$	$\Delta u = 0$ $\Delta w = 0$ $\Delta \varphi_y = ?$ $\uparrow N_x = ?$ $\uparrow Q_z = ?$ $\uparrow M_y = 0$	$\Delta u = ?$ $\Delta w = 0$ $\Delta \varphi_y = ?$ $\uparrow N_x = 0$ $\uparrow Q_z = ?$ $\uparrow M_y = 0$	$\Delta u = 0$ $\Delta w = ?$ $\Delta \varphi_y = 0$ $\uparrow N_x = ?$ $\uparrow Q_z = 0$ $\uparrow M_y = ?$	$\Delta u = ?$ $\Delta w = ?$ $\Delta \varphi_y = ?$ $\uparrow N_x = 0$ $\uparrow Q_z = 0$ $\uparrow M_y = 0$
Vastastikuste siirete tähis ja vabadusastmete arv	0	$\Delta \varphi_y$ 1	Δu 1	Δw 1	$\Delta u, \Delta w, \Delta \varphi_y$ 3
Kontaktjõud ja nende arv	 3	 2	 2	 2	0

Joonis 3.2. Kontaktjõud ja liigendid

3.5 Arvutuskeem

Arvutuskeem on ehituskonstruksiooni, masina vms kujutis, mille alusel tehakse arvutusi.

Valitud arvutuskeemist oleneb arvutuse täpsus ja keerukus. Alati on võimalik valida täpsem arvutuskeem ja täpsem teooria, kuid siis muutuvad arvutused keerulisemaks. Täpsemaid teooriaid on vaja selleks, et kindlaks teha lihtsamate teooriate kehtivuse piirid. Arvutuskeem sisaldab vähemalt järgmist informatsiooni [KW90]:

- kõigi sõlmpunktide asukohti koos mõõtmetega

- varraste telgjooni
- tugede ja liigendite asukohti
- kõigi varraste ristlõikejäikusi
- koormusi
- kohalike telgede positiivseid suundi.

Arvutis tuleb arvutusskeemi toetada arvutustabeliga [KW90].

Arvutusskeem ja arvutustabel sõltuvad vaadeldavast konstruktsioonist.

Peatükk 4

Staatikaga määratav mitmesildeline tala

4.1 Staatikaga määratav mitmesildeline tala

Liigenditeta mitmesildeline tala on toeraktsioonide suhtes staatikaga määratav. Staatilise määratavuse aste leitakse valemiga (10.1)

$$n = t - 3 \quad (4.1)$$

kus t on toesidemete arv.

Mitmesildeline tala on staatikaga määratav, kui lihtliigendite arv l on võrdne ilma liigenditeta tala staatikaga määratavuse astmega (10.1)

$$l = t - 3 \quad (4.2)$$

kus t on toesidemete arv.

Liigendite asetus peab olema niisugune, mis tagab mitmesildelise tala geomeetrilise muutumatuse.

Geomeetriselt muutumatus staatikaga määratavas mitmesildelises talas ei ole ühes sildes rohkem kui kaks ja kahes naabersildes rohkem kui kolm liigendit. Kahes naabersildes peab olema vähemalt üks liigend [Rää75].

4.2 Põhiosad ja lisaosad

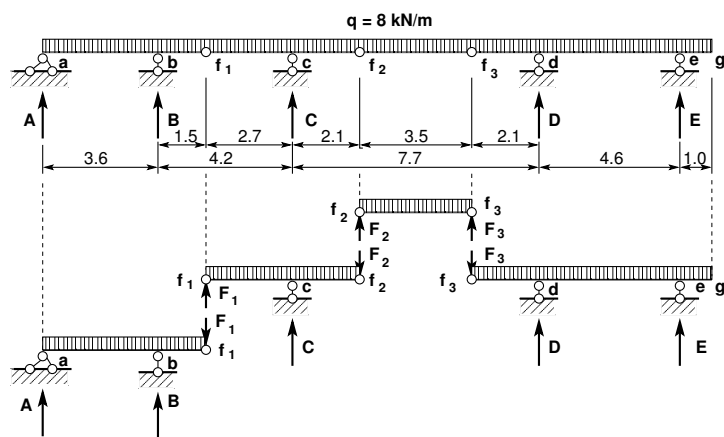
Staatikaga määratavad mitmesildelised talad koosnevad *põhi-* ja *lisaosadest*. *Põhiosa* on geomeetriselt muutumatu ka siis, kui naaberosad on eemaldatud. *Lisaosad* muutuvad naaberosade eemaldamisel mehhanismideks.

Joonisel 4.1 on põhiosad $a - f_1$ ja $f_3 - g$. Lisaosadeks on $f_1 - f_2$ ja $f_2 - f_3$.

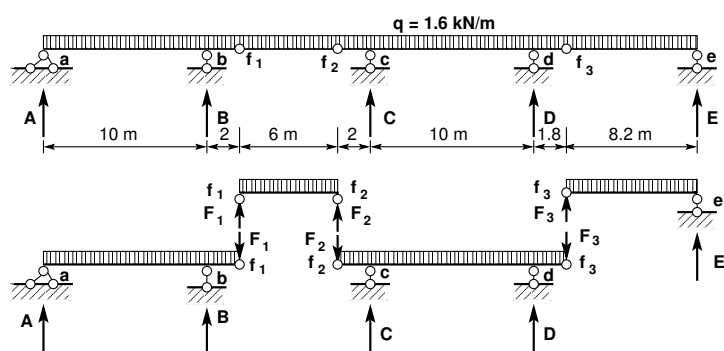
Joonisel 4.2 on põhiosad $a - f_1$ ja $f_2 - f_3$. Lisaosadeks on $f_1 - f_2$ ja $f_3 - e$.

Joonisel 4.3 on põhiosad $a - f_1$ ja $f_3 - d$. Lisaosadeks on $f_1 - f_2$ ja $f_2 - f_3$.

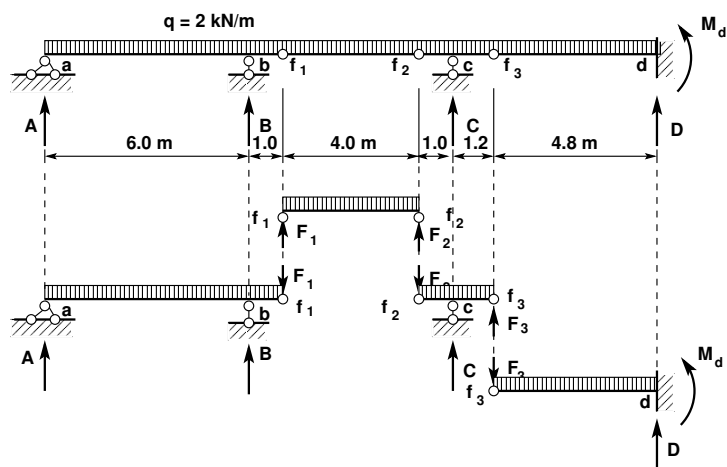
”Korrusskeemide” joonistamisel (joonised 4.1 – 4.3) võib ette kujutada, et niisugune on montaaži järjekord. Põhiosad saab monteerida ilma naabertaladeta.



Joonis 4.1. Gerberi tala 1. Lisaosad ja põhiosad



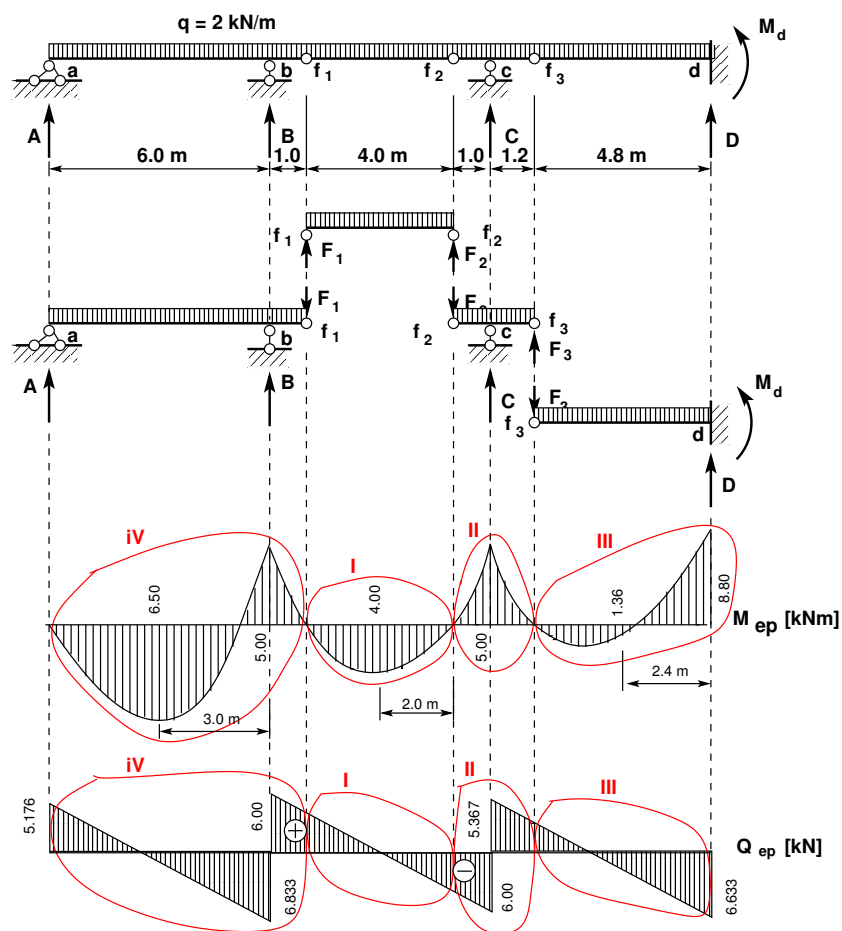
Joonis 4.2. Gerberi tala 2



Joonis 4.3. Gerberi tala 3

4.3 Sisejõudude arvutus

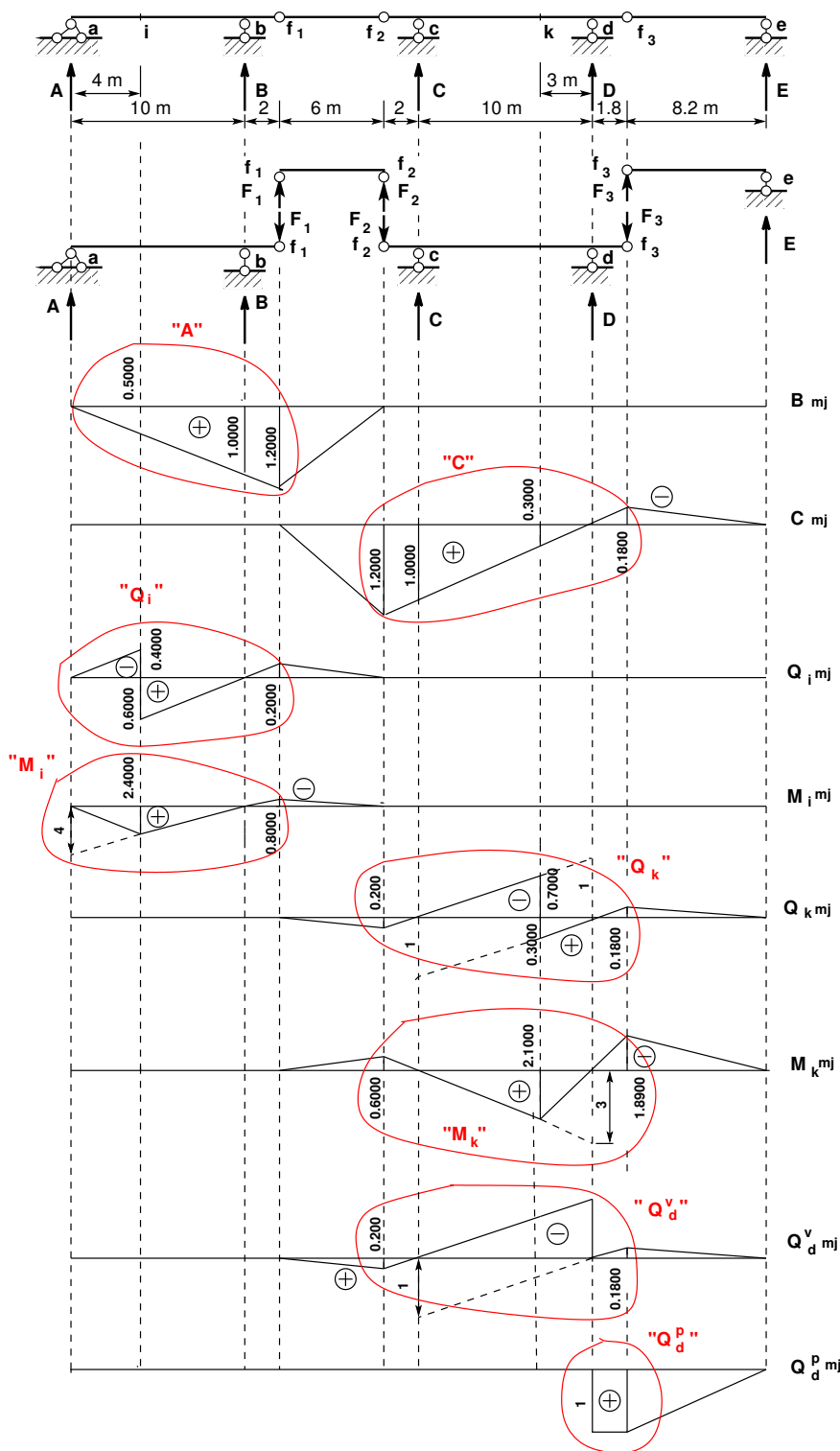
Sisejõudude arvutust alustatakse lisaosadest (vt joonist 4.4). Lisaosade liigendites määratavad jõud rakendatakse allpool olevale talale vastupidiste suundadega (vt joonist 4.4).



Joonis 4.4. Gerberi tala 3 epiürid

4.4 Gerberi tala mõjujooned

Staatiliselt määratud mitmesildelise tala (joonis 4.5) mõjujoonte leidmisel kasutame joonisel 2.10 toodud konsoolidega tala paindemomendi ja põikjõu mõjujooni. Gerberi tala (joonis 4.5) toereaktsioonide A ja C mõjujoonte leidmisel joonistame vastava konsoolidega tala (joonis 2.4) toereaktsioonide mõjujooned joonisele 4.5.



Joonis 4.5. Gerberi tala 2 mõjujooned

Kui vaadeldava tala toereaktsioon sõltub naabertalal liikuvast ühikkoormusest, siis jätkame seda mõjujoont. Ühikjõu liikumisel sõlme f_2 , on jõud $F_1 = 0$ (joonis 4.5) ja

sellest tulenevalt $B = 0$. Selle väärtuse kanname joonisel 4.5 ühikjõu alla.

Jätkame toereaktsiooni C mõjujoont sõlmest f_2 vasakule. Ühikjõu liikumisel sõlme f_1 , on reaktsioon $F_2 = 0$ ja sellest tulenevalt $C = 0$. Selle väärtuse kanname joonisel 4.5 ühikjõu alla.

Põikjõu Q_i ja paindemomendi M_i mõjujoonte leidmisel joonestame vastavad mõjujooned jooniselt 2.10 joonisele 4.5 ringi. Ühikkoormuse liikumisel naaberosale jälgime reaktsiooni F_1 muutumist. Kui ühikjõud on sõlmes f_2 on $F_1 = 0$. Selle väärtuse kanname ühikjõu alla (st sõlme f_2 alla).

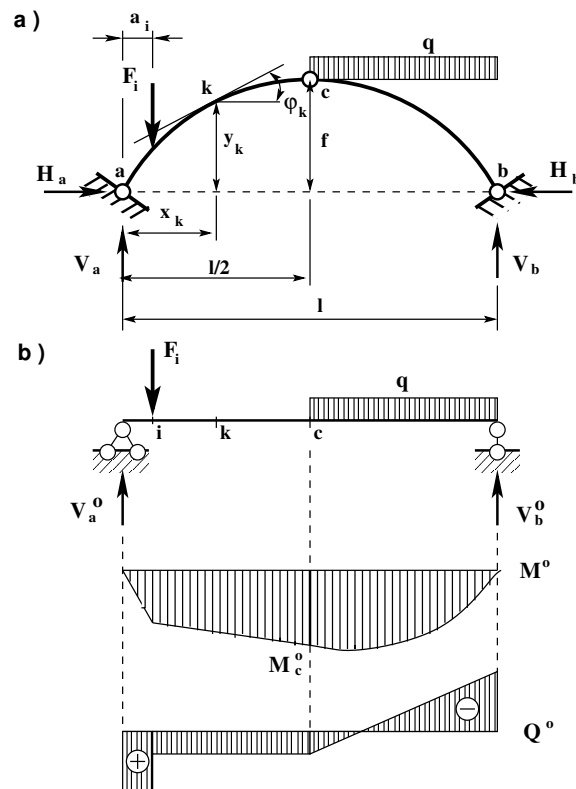
Peatükk 5

Kolme liigendiga kaar ja raam

5.1 Üldmõisted

Kahele toele toetuvast ühest või mitmest surutud kõverast vardast moodustatud konstruktsiooni, milles vertikaalne koormus põhjustab nii vertikaalseid kui ka horisontaalseid toereaktsioone, nimetatakse kaareks.

Kolme liigendiga kaare toeliigendeid a ja b (joonis 5.1) nimetatakse *kannaliigenditeks*



Joonis 5.1. Kolme liigendiga kaar

ja keskmist liigendit c *lukuliigendiks*. Lukuliigendi vertikaalset kaugust toeliigendide

ühendavast sirgest nimetatakse *kaare kõrguseks* ja tähistatakse tähega f (vt joonist 5.1). Kaare kõrguse ja *silde* l suhet $\frac{f}{l}$ nimetatakse kaare *tõusuks*.

5.2 Toereaktsioonide ja sisejõudude arvutus

5.2.1 Vertikaalne koormus

Toereaktsioonide vertikaalsed komponendid tähistame V_a ja V_b (joonis 5.1) ja leiame tuge a ja b kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest (5.2).

$$\Sigma M_b = 0; \quad -V_a \cdot l + F_i \cdot (l - a_i) + q \cdot \frac{l^2}{2} = 0 \quad (5.1)$$

$$\Sigma M_a = 0; \quad -V_b \cdot l + F_i \cdot a_i + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4} \right) = 0 \quad (5.2)$$

Horisontaalsed toereaktsioonid H_a ja H_b leiame *lukuliigendi* c kohta kirjutatud tasakaaluvõrrandist (5.3).

$$\Sigma M_c^v = 0; \quad -H_a \cdot f + V_a \cdot \frac{l}{2} + F_i \cdot \left(\frac{l}{2} - a_i \right) = 0 \quad (5.3)$$

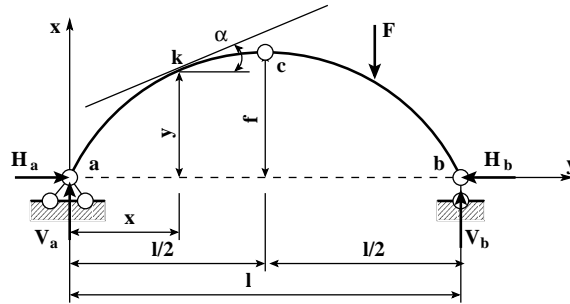
$$H_a = H_b = \frac{M_c^o}{f} \quad (5.4)$$

5.3 Kaare telgjoone võrrandid

Kaare telgjooneks on ruutparabool, mille võrrand on

$$y = \frac{4f x (l - x)}{l^2} \quad (5.5)$$

Kaare sille l , tõus f ja kaare telje puutuja kaldenurk φ on näidatud joonisel 5.2. Kaare



Joonis 5.2. Kaare telgjoon

telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse leiame valemitega

$$\sin \varphi = \frac{\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}} \quad (5.6)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2 \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}} \quad (5.7)$$

Tähistades

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \xi' = \frac{(l-x)}{l} \quad (5.8)$$

saame

$$y = 4f\xi\xi' \quad (5.9)$$

$$\sin \varphi = \frac{(1 - 2\xi)}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2 + (1 - 2\xi)^2}} \quad (5.10)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2 (1 - 2\xi)^2}} \quad (5.11)$$

Kaare telgjooneks on ringi kaar, mille võrrand on

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - (R - f) \quad (5.12)$$

Avaldises (5.12) on R kaare telje kõverusraadius, mille arvutame järgmise valemiga:

$$R = \frac{(l^2 + 4f^2)}{8f} \quad (5.13)$$

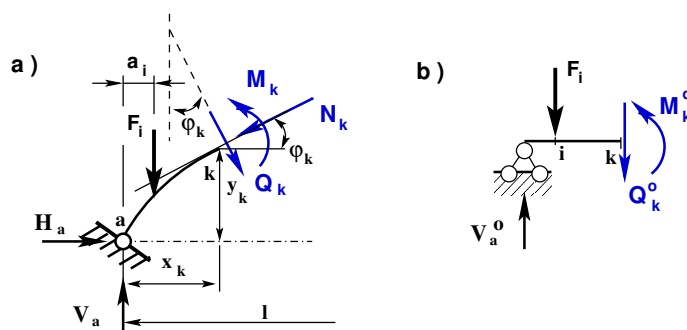
Kaare telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse leiame valemitega

$$\sin \varphi = \frac{l}{R} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right) \quad (5.14)$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)^2} \quad (5.15)$$

5.4 Kaare sisejõud

Kaare sisejõudude arvutamise valemite kirjutamiseks vaatame joonist 5.1. Teeme mõttelises ristlõikes k mõttelise lõike ja vaatleme vaskule poole jäävat osa (joonis 5.3). Ristlõikes k koostatud momentide tasakaaluvõrrand



Joonis 5.3. Kolme liigendiga kaare sisejõud

$$M_k = V_a \cdot x_k - F_i \cdot a_i - H \cdot y \quad (5.16)$$

ehk

$$M_k = M_k^o - H \cdot y \quad (5.17)$$

Jõudude projektsioonide tasakaaluvõrrand Q_k suunale

$$Q_k = (V_a - F_i) \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k \quad (5.18)$$

ehk

$$Q_k = Q_k^o \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k \quad (5.19)$$

Jõudude projektsioonide tasakaaluvõrrand N_k suunale

$$N_k = (V_a - F_i) \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k \quad (5.20)$$

ehk

$$Q_k = Q_k^o \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k \quad (5.21)$$

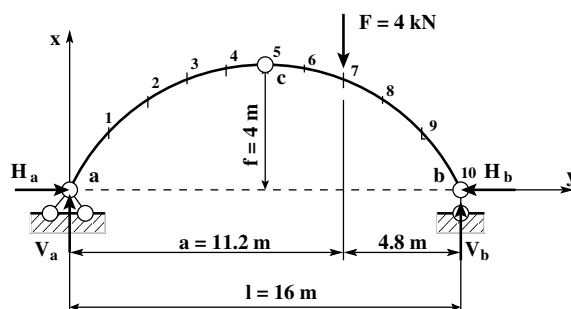
Sisejõud kaare lõikes x arvutame järgmiste valemitega:

$$M_x = M_x^o - H \cdot y \quad (5.22)$$

$$Q_x = Q_x^o \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (5.23)$$

$$N_x = Q_x^o \sin \varphi + H \cos \varphi \quad (5.24)$$

Näide 5.1 Arvutada joonisel 5.4 toodud kaare sisejõud. Kaare telgjooneks on parabool.



Joonis 5.4. Kaar A. Koormused

Kaare horisontaalsed toereaktsioonid leiame avaldisega (5.4). Kaare telgjoone võrrandi (5.9), $\sin \varphi$ ja $\cos \varphi$ (5.11) ja sisejõudude (5.24) avaldised kanname tabelarvutusse 5.5. See tabelarvutus on arvutivõrgus – KaarA.sdc¹. Tabelarvutusega leitud sisejõud on joonisel 5.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1		L=	f=	H=		Kaare telgjoon on parabool									
2		16.00	4.00	2.40											
3		siin Q-s on hüpe													
4	xi	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	1		
5	xi'	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.1	0		
6	x	0	1.6	3.2	4.8	6.4	8	9.6	11.2	11.2	12.8	14.4	16		
7	y	0	1.44	2.56	3.36	3.84	4	3.84	3.36	3.36	2.56	1.44	0		
8	sinFi	0.7071	0.6247	0.5145	0.3714	0.1961	0.0000	-0.1961	-0.3714	-0.3714	-0.5145	-0.6247	-0.7071		
9	cosFi	0.7071	0.7809	0.8575	0.9285	0.9806	1.0000	0.9806	0.9285	0.9285	0.8575	0.7809	0.7071		
10	Mo	0.000	1.920	3.840	5.760	7.680	9.600	11.520	13.440	13.440	8.960	4.480	0.000		
11	Qo	1.200	1.200	1.200	1.200	1.200	1.200	1.200	1.200	-2.800	-2.800	-2.800	-2.800		
12	H*y	0.000	3.456	6.144	8.064	9.216	9.600	9.216	8.064	8.064	6.144	3.456	0.000		
13	M	0.000	-1.536	-2.304	-2.304	-1.536	0.000	2.304	5.376	5.376	2.816	1.024	0.000		
14	Qo*cosFi	0.849	0.937	1.029	1.114	1.177	1.200	1.177	1.114	-2.600	-2.401	-2.186	-1.980		
15	H*sinFi	1.697	1.499	1.235	0.891	0.471	0.000	-0.471	-0.891	-0.891	-1.235	-1.499	-1.697		
16	Q	-0.849	-0.562	-0.206	0.223	0.706	1.200	1.647	2.006	-1.708	-1.166	-0.687	-0.283		
17	Qo*sinFi	0.849	0.750	0.617	0.446	0.235	0.000	-0.235	-0.446	1.040	1.441	1.749	1.980		
18	H*cosFi	1.697	1.874	2.058	2.228	2.353	2.400	2.353	2.228	2.228	2.058	1.874	1.697		
19	N	2.546	2.624	2.675	2.674	2.589	2.400	2.118	1.783	3.268	3.499	3.623	3.677		
20		siin Q-s on hüpe													
21															

Joonis 5.5. Kaar A. Tabelarvutus

Järgnevalt teisendame tabelarvutusega saadud tabeli, mis on joonisel 5.5, andmed programmide *Octave*² (matlab) andmeteks.

Selleks

- avame StarOffice'ga (*OpenOffice*³) uue teksti dokumendi;
- avame StarCalc'iga tabeli KaarA.sdc;

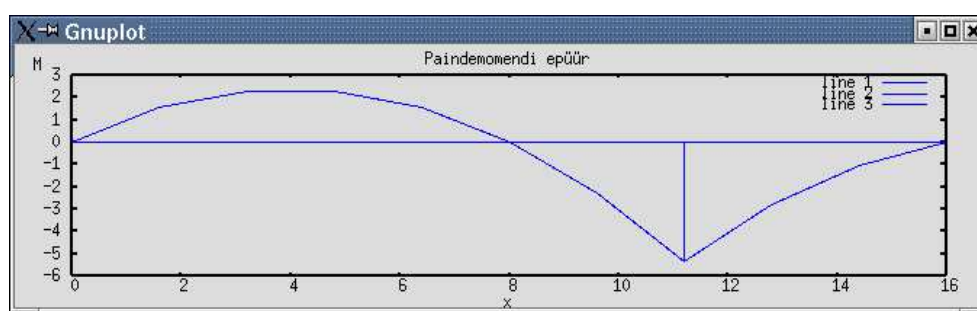
¹<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/>

²<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/dtoops/node32.html>

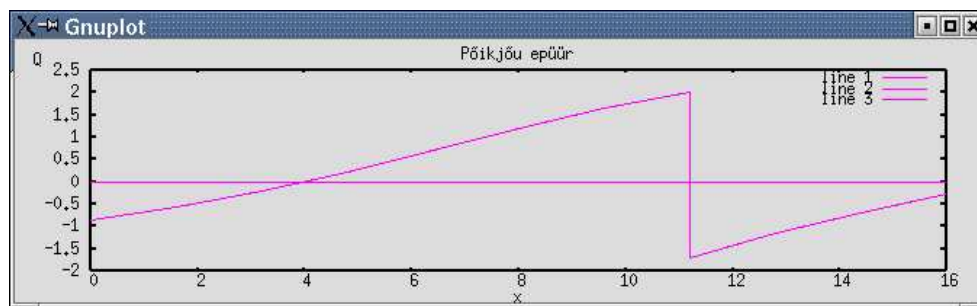
³http://www.openoffice.org/dev_docs/source/1.0.2/index.html

- kopeerime tabeli ja asetame ('Paste Special'), kui formateerimata teksti ('unformatted text') uude teksti dokumenti ja salvestame (.sdw);
- salvestame veel kord kui teksti (.txt) faili;
- teksti redaktoriga avame selle (.txt) faili ja salvestame octave failina (.m);
- töötleme seda faili (vt Programm C.5 KaarA1.m). Lisades "[", "]" ja plot() käsud ja asendades korrutusmärgi "*" vektori nimetustes "_" märgiga.

Programmi C.5 KaarA1.m (lk 213) abil leiame paindemomendi (5.6), põikjõu (5.7) ja normaaljõu (12.3) epüürid. Joonistel (5.6, (5.7), (5.8) on epüürid joonistatud, kui kaar oli



Joonis 5.6. Kaar A. Paindemomendi epüür



Joonis 5.7. Kaar A. Põikjõu epüür

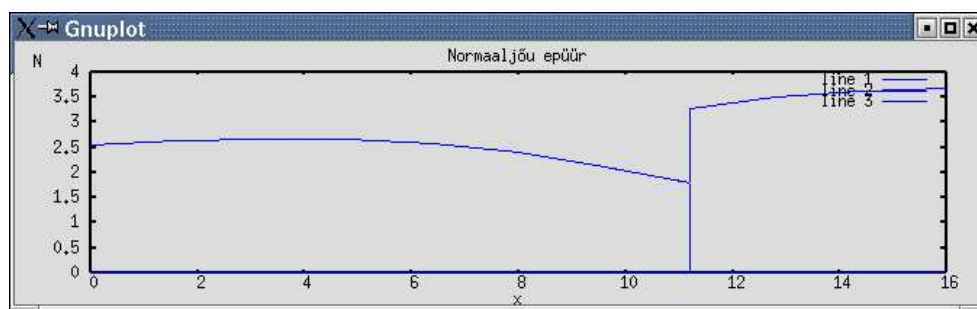
jaotatud 10-neks. Antud epüüride puhul suurema jaotusega (30 punkti) epüürid langevad hästi kokku 10-ne punktise jaotusega. Mitte alati ei ole see nii (vt joonist 5.14).

Näide 5.2 Arvutada joonisel 5.9 toodud kaare sisejõud. Kaare telgjooneks on ringjoon.

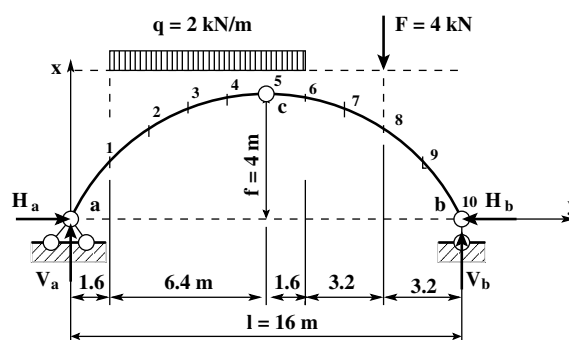
Kaare horisontaalsed toereaktsioonid leiame avaldisega (5.4). Kaare telgjoone võrrandi (5.12), (5.13), $\sin \varphi$ ja $\cos \varphi$ (5.15), sisejõudude (5.24) avaldised kanname tabelarvutusse 5.10. See tabelarvutus on arvutivõrgus – KaarB.sdc⁴. Tabelarvutusega leitud sisejõud on joonisel 5.10.

Tabelarvutusega saadud tabeli, mis on joonisel 5.10, andmed teisendame nagu programmi C.5 (lk 213) andmed.

⁴<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/>



Joonis 5.8. Kaar A. Normaaljõu epüür



Joonis 5.9. Kaar B. Koormused

Programmi *C.6 KaarB1.m* (lk 215) abil leiame paindemomendi (5.13), põikjõu (5.12) ja normaaljõu (5.13) epüürid. Joonistel (5.11, (5.12), (5.13) on epüürid joonistatud, kui kaar oli jaotatud kümneks. Täpsemate epüüride saamiseks oleks vaja rohkem punkte (suuremat jaotust). Vaata joonist 5.14, kus on toodud graafikud kümne ja kolmekümne jaotuse puhul.

StarOffice 5.2 - [KaarB.sdc]

File Edit View Insert Format Tools Data Window Help

file:///home/andres/office52/user/work/Kaar

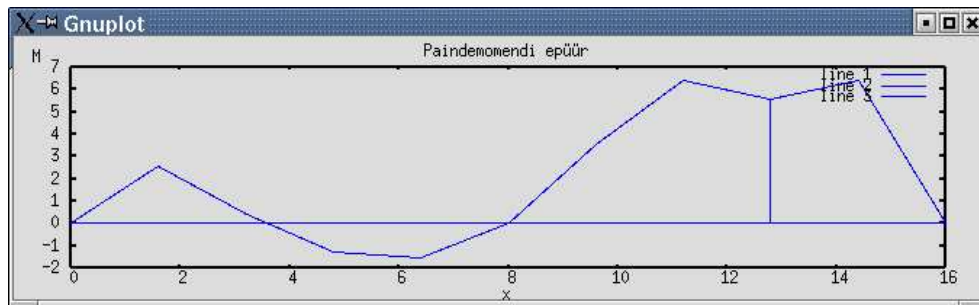
Helvetica 10

M22

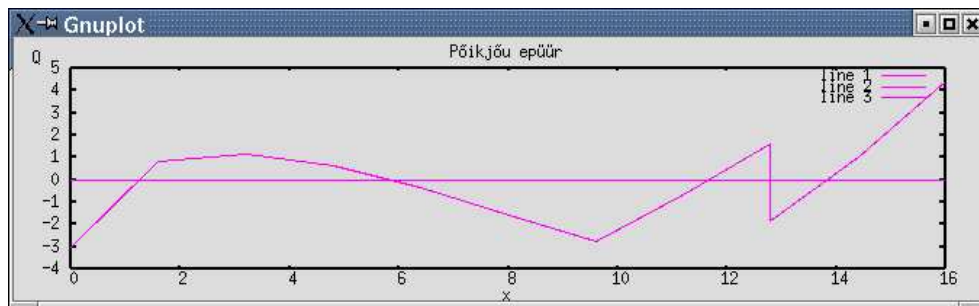
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		L=	f=	H=		Kaare telgjoon on ring				R=				
2		16.00	4.00	12.16						10				
3										siin Q-s on hüpe				
4	xi	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.8	0.9	1	
5	xi'	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1	0	
6	x	0	1.6	3.2	4.8	6.4	8	9.6	11.2	12.8	12.8	14.4	16	
7	y	0.000	1.684	2.773	3.474	3.871	4.000	3.871	3.474	2.773	2.773	1.684	0.000	
8	sinFi	0.8000	0.6400	0.4800	0.3200	0.1600	0.0000	-0.1600	-0.3200	-0.4800	-0.4800	-0.6400	-0.8000	
9	cosFi	0.6000	0.7684	0.8773	0.9474	0.9871	1.0000	0.9871	0.9474	0.8773	0.8773	0.7684	0.6000	
10	Mo	0.000	17.920	33.280	43.540	48.640	48.640	43.520	35.840	28.160	28.160	14.080	0.000	
11	Qo	11.200	11.200	8.000	4.800	1.600	-1.600	-4.800	-4.800	-8.000	-8.000	-8.000	-8.000	
12	H*y	0.000	20.474	33.716	42.246	47.073	48.640	47.073	42.246	33.716	33.716	20.474	0.000	
13	M	0.000	-2.554	-0.436	1.294	1.567	0.000	-3.553	-6.406	-5.556	-5.556	-6.394	0.000	
14	Qo*cosFi	6.720	8.606	7.018	4.548	1.579	-1.600	-4.738	-4.548	-4.211	-7.720	-6.762	-5.280	
15	H*sinFi	9.728	7.782	5.837	3.891	1.946	0.000	-1.946	-3.891	-5.837	-5.837	-7.782	-9.728	
16	Q	-3.008	0.823	1.181	0.656	-0.366	-1.600	-2.793	-0.656	1.626	-1.883	1.021	4.448	
17	Qo*sinFi	8.960	7.168	3.840	1.536	0.256	0.000	0.768	1.536	2.304	4.224	5.632	7.040	
18	H*cosFi	7.296	9.343	10.668	11.521	12.003	12.160	12.003	11.521	10.668	10.668	9.343	7.296	
19	N	16.256	16.511	14.508	13.057	12.259	12.160	12.771	13.057	12.972	14.892	14.975	14.336	
20										siin Q-s on hüpe				
21														

Sheet 1 / 3 Default 100% STD Sum=0 Help Agent

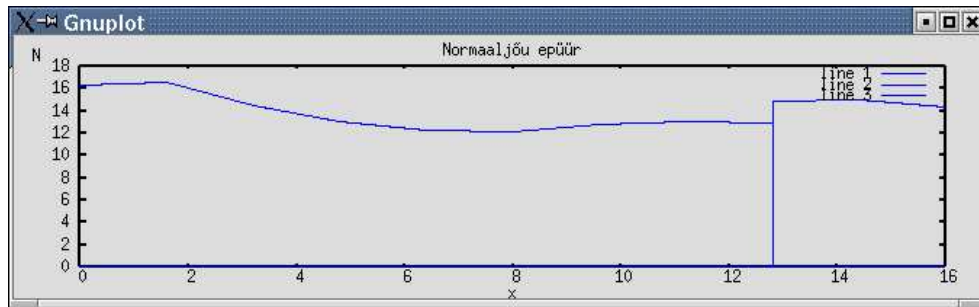
Joonis 5.10. Kaar B



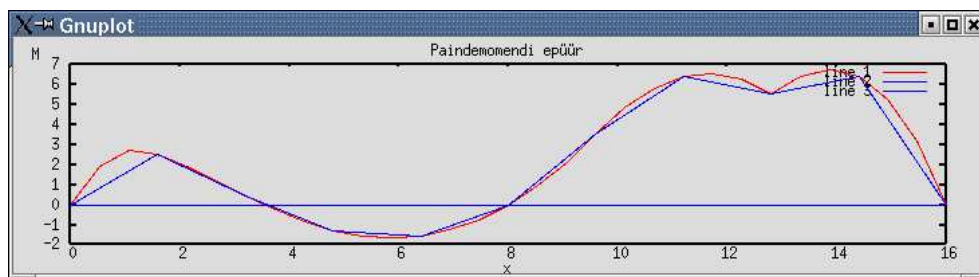
Joonis 5.11. Kaar B. Paindemomendi epüür



Joonis 5.12. Kaar B. Põikjõu epüür



Joonis 5.13. Kaar B. Normaaljõu epüür



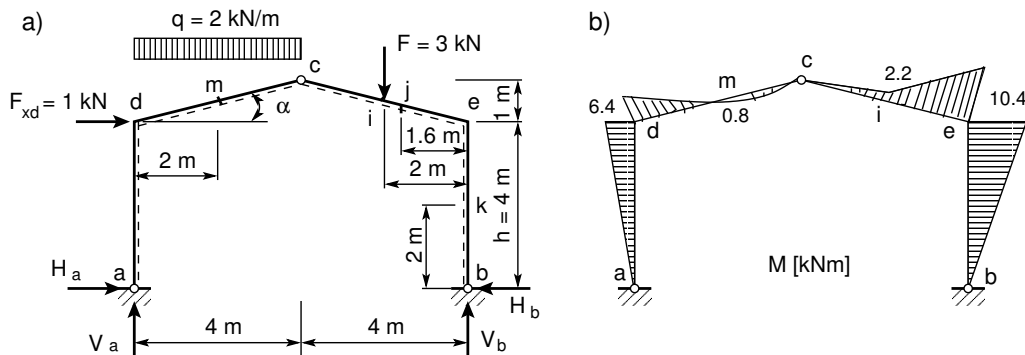
Joonis 5.14. Kaar B. Paindemomendi epüür kolmekümne jaotusega

5.5 Kolme liigendiga raam

Kolme liigendiga raami arvutamisel kehtivad kolme liigendiga kaare jaoks tuletatud valemid. Raamil võetakse tõmme positiivsena ja surve negatiivsena.

5.5.1 Kolme liigendiga raami arvutus

Näide 5.3 Koostada joonisel 5.15 kviitunud kolme liigendiga raami sisejõudude epüürid (näide on võetud nädisülesannetest [ER83] lk 47) $\cos \alpha = 0.9701$, $\sin \alpha = 0.2425$.



Joonis 5.15. Kolme liigendiga raam

Vertikaalsete toereaktsioonide arvutus

$$\sum M_b = 0; \quad V_a \cdot 8 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$V_a = 6.25 \text{ kN} \quad (5.25)$$

$$\sum M_a = 0; \quad -V_b \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$V_b = 4.75 \text{ kN} \quad (5.26)$$

Vertikaalsete toereaktsioonide arvutuse kontroll

$$\sum Y = 0; \quad 6.25 + 4.75 - 2 \cdot 4 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \quad (5.27)$$

Horisontaalsete toereaktsioonide arvutus

$$\sum M_c^v = 0; \quad -H_a \cdot 5 + 6.25 \cdot 4 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$H_a = 1.6 \text{ kN} \quad (5.28)$$

$$\sum M_c^p = 0; \quad -H_b \cdot 5 + 4.75 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$H_b = 2.6 \text{ kN} \quad (5.29)$$

Horisontaalsete toereaktsioonide arvutuse kontroll

$$\sum X = 0; \quad 1.6 + 1 - 2.6 = 0$$

$$0 = 0 \quad (5.30)$$

Paindemomendi epüüri (vt joonis 5.15 b) ordinaatide arvutus

$$M_d = -1.6 \cdot 4 = -6.4 \text{ kNm} \quad (5.31)$$

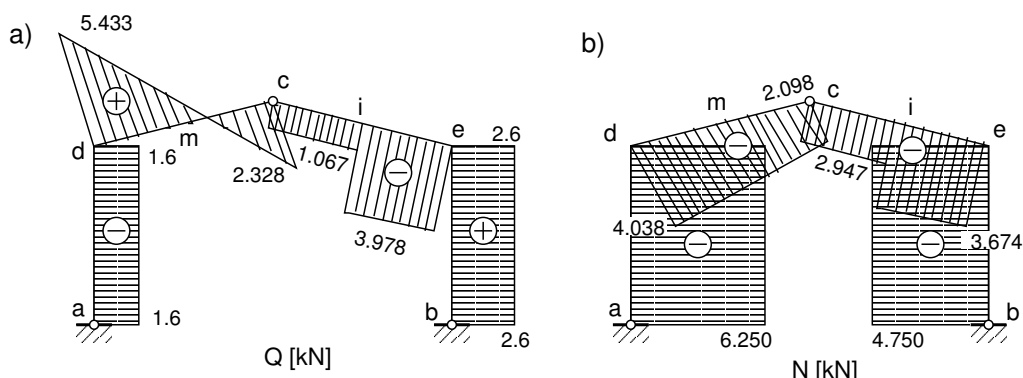
$$M_m = 6.25 \cdot 2 - 1.6 \cdot 4.5 - 1 \cdot 0.5 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0.8 \text{ kNm} \quad (5.32)$$

$$M_m = 2 \cdot \frac{4^2}{8} - \frac{6.4}{2} = 0.8 \text{ kNm} \quad (5.33)$$

$$M_i = 4.45 \cdot 2 - 2.6 \cdot 4.5 = -2.2 \text{ kNm} \quad (5.34)$$

$$M_i = 3 \cdot \frac{4}{4} - \frac{10.4}{2} = -2.2 \text{ kNm} \quad (5.35)$$

$$M_e = -2.6 \cdot 4 = -10.4 \text{ kNm} \quad (5.36)$$



Joonis 5.16. Kolme liigendiga raami sisejõud

Põikjõu epüüri (vt joonis 5.16 a) ordinaatide arvutus

$$Q_{ad} = -1.6 \text{ kN} \quad (5.37)$$

$$Q_{dc} = 6.25 \cdot 0.9701 - (1.6 + 1.0) \cdot 0.2425 = 5.433 \text{ kN} \quad (5.38)$$

$$Q_{cd} = (6.25 - 2 \cdot 4) \cdot 0.9701 - 2.6 \cdot 0.2425 = -2.328 \text{ kN} \quad (5.39)$$

$$Q_{ci} = (6.25 - 2 \cdot 4) \cdot 0.9701 + 2.6 \cdot 0.2425 = -1.067 \text{ kN} \quad (5.40)$$

$$Q_{ie} = -4.5 \cdot 0.9701 + 2.6 \cdot 0.2425 = -3.978 \text{ kN} \quad (5.41)$$

Pikijõu epüüri (vt joonis 5.16 b) ordinaatide arvutus

$$N_{ad} = -6.25 \text{ kN} \quad (5.42)$$

$$N_{dc} = 6.25 \cdot 0.2425 - (1.6 + 1.0) \cdot 0.9701 = -4.038 \text{ kN} \quad (5.43)$$

$$N_{cd} = (2 \cdot 4 - +6.25) \cdot 0.2425 - 2.6 \cdot 0.9701 = -2.098 \text{ kN} \quad (5.44)$$

$$N_{ci} = (6.25 - 2 \cdot 4) \cdot 0.2425 + 2.6 \cdot 0.9701 = -2.947 \text{ kN} \quad (5.45)$$

$$N_{ie} = -4.5 \cdot 0.2425 + 2.6 \cdot 0.9701 = -3.674 \text{ kN} \quad (5.46)$$

Peatükk 6

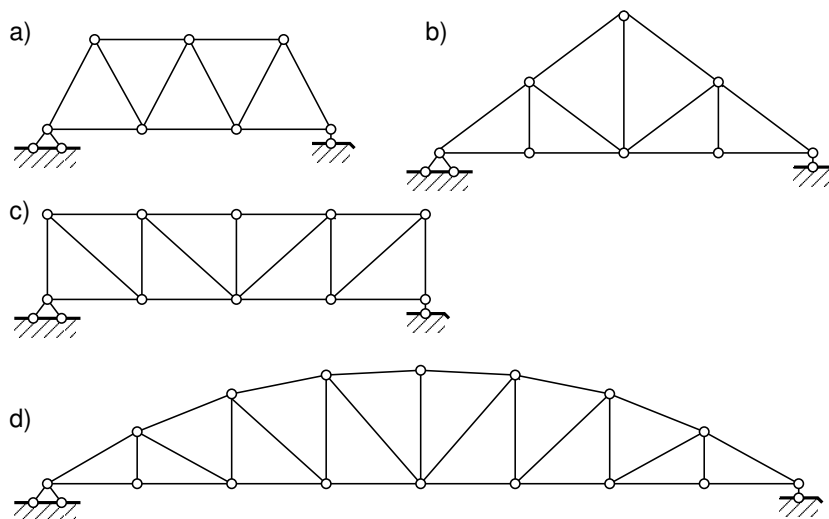
Sõrestikskeemid

6.1 Sõrestikskeemide liigitus

Varrassüsteemide mehaanikas võetakse arvutuskeemide liigitamise aluseks varda telgjoone kuju, varda töö seisund (joonis 1.3), toesidemete arv, liigendite arv.

Otstes hõõrdevabade liigenditega ühendatud sirgetest varrastest geometriselt muutu matut konstruktsiooni, mis on koormatud vaid hõõrdevabades liigendites, nimetatakse *sõrestikskeemiks*.

Sõrestikskeemi vardad töötavad ainult pikkele. Sõrestiku ülemised vardad (joonis 6.1)



Joonis 6.1. Sõrestikskeemide liigitus

moodustavad *ülemise vöö*, alumised vardad *alumise vöö*. Vöödevahelised vardad moodustavad *sõrestikuvõrgu*. Võrgu vertikaalseid vardaid nimetatakse *postideks* ja kaldvardaid *diagonaalideks*. Horisontaalse vöö kahe naabersõlme vahekaugust nimetatakse *paneeli pikkuseks*. Sõrestikke liigitatakse

- ülesande järgi – katusesõrestikud, sillasõrestikud, kraanasõrestikud jne

- toereaktsioonide järgi – talasõrestikud, konsoolsõrestikud, konsoolidega talasõrestikud; kaar-, raam- ja rippõrestikud; kombineeritud sõrestikud
- kuju järgi – paralleelvöödega sõrestikud (joonis 6.1 a); kolmnurksõrestikud (joonis 6.1 b); kõvera vööga sõrestikud (joonis 6.1 d)
- võrgu järgi – diagonaalvõrguga sõrestikud (joonis 6.1 a); post-diagonaalvõrguga sõrestikud (joonis 6.1 c).

6.2 Staatiliselt määratud sõrestike arvutus

Staatiliselt määratud sõrestike sisejõudude leidmiseks koostatakse tasakaaluvõrrandid. Tasakaaluvõrrandite koostamiseks kasutatakse *lõikemeetodit*. Sõrestiku arvutusskeemist eraldatakse üks sõlm või osa sõrestikust ja teiste osade mõju asendatakse läbilõigatud varraste kontaktjõududega (rajajõududega). Eraldatud sõlme või sõrestikuosa tasakaalutingimustest leitakse läbilõigatud varraste kontaktjõud. Kontaktjõud on läbilõigatud varda välispinnal. Läbilõigatud varda ristlõike sisepinnal on kontaktjõuga võrdne sisejõud.

Esimese märgikokkuleppe puhul loetakse kontaktjõud positiivseks, kui tema suund ühtib kohaliku telje positiivse suunaga. Teise märgikokkuleppe puhul loetakse kontaktjõud positiivseks, kui tema suund ühtib kohaliku telje positiivse suunaga. Arvutuse tulemuseks saadud miinusmärk näitab, et oletus oli vale ja kontaktjõud on vastupidise suunaga. Staatiliselt määratud tasandsõrestikus ei ole liigseid sidemeid. Liigsidemete arv on null.

$$n = n_v + n_t - 2 * n_s \quad (6.1)$$

kus n_v on sõrestikuvarraste arv, n_t toesidemete arv, n_s sõrestikusõlmede arv. Sõrestikuvarraste kontaktjõudude arvutamisel kasutatakse

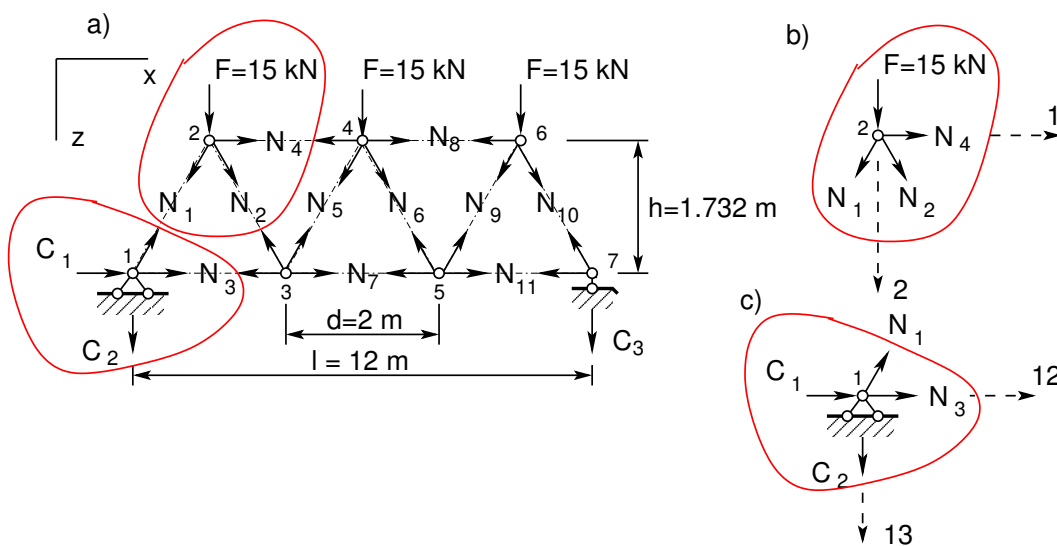
- sõlmede eraldamise võtet
- momendipunkti võtet
- projektsioonide võtet

Nende võtete abil koostatakse tasakaaluvõrrandid. Kui tasakaaluvõrrandid koostatakse ja lahendatakse käsitsi, siis on otstarbekas koostada võrrandid nii, et seal oleks ainult üks tundmatu.

6.2.1 Sõlmede eraldamise võte

Eraldame lõikega sõrestikskeemist sõlmed (joonis 6.2) ja koostame nende jaoks tasakaalutingimused. Tasandil võib iga sõlme jaoks koostada kaks teineteisest sõltumatut tasakaaluvõrrandit $2 * n_s$.

Toereaktsioonide määramiseks kasutatakse n_t (staatiliselt määratud tasandraami puhul $n_t = 3$) võrrandit. Sõltumatute tasakaaluvõrrandite üldarv on $2 * n_s - n_t$.



Joonis 6.2. Sõlmede eraldamise võte

Näide 6.1 Vaatleme joonisel 6.2 toodud sõrestikskeemi. Eraldame lõikega sõlmed. Arvutame sõrestikuvarraste suunakoosinused (vt joonis 6.3).

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{l} \tag{6.2}$$

$$\cos \beta = \frac{\Delta z}{l} \tag{6.3}$$

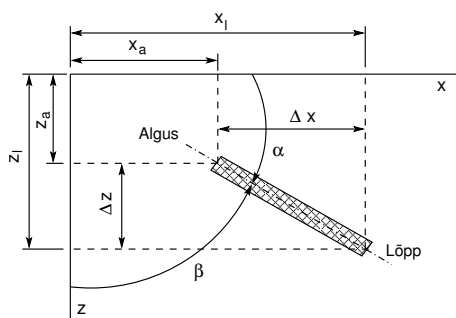
kus l on varda pikkus

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} \tag{6.4}$$

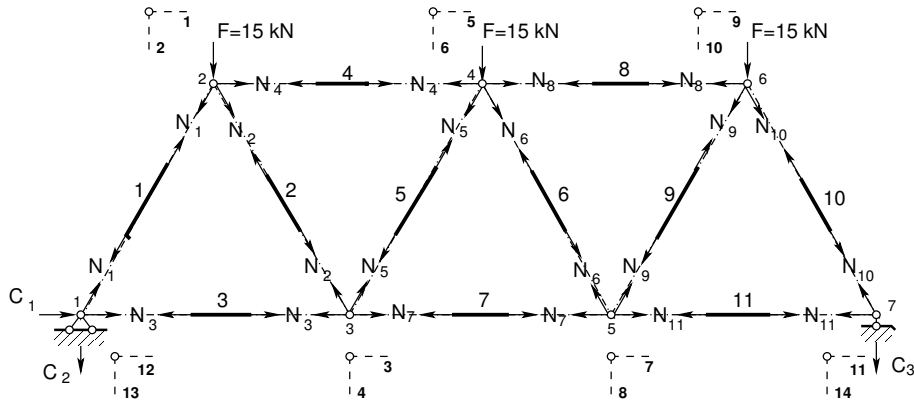
siin

$$\Delta x = x_L - x_A \tag{6.5}$$

$$\Delta z = z_L - z_A \tag{6.6}$$



Joonis 6.3. Varda suunakoosinused



Joonis 6.4. Varraste eraldamise võte

ja x_A, z_A, x_L, z_L on varda alguse ning lõpu koordinaadid. Sõrestiku (joonis 6.2) sõlmede koordinaadid on toodud joonisel 6.5 tabelina „Sõlmed”. Valime varraste algused ja lõpud nii, nagu on näidatud joonisel 6.5 tabelis „Topoloogia”. Arvutusprogrammiga C.11 (vt lisa C.4 lk 228) leiame varraste koosinused. Varraste koosinuste väärtused on joonisel 6.6 tabelis „Varraste suunakoosinused” ridades „Algus cosA” ja „Algus cosB”.

srstkn1topo.gnumeric : Gnumeric

Fail Redigeerimine Vaade Lisa Vormindamine Tööriistad Andmed Abi

Helvetica 9 B I U

N2

Sõlmed		Vabadusastmete numbrid sõlmedes*						Toesõlmed : kinni -1, lahti -0		
Koordinaadid	x	z	Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas	Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas		
sõlm 1	0.000	1.732	sõlm 1	12	13	sõlm 1	1	1		
sõlm 2	1.000	0.000	sõlm 2	1	2	sõlm 2	0	0		
sõlm 3	2.000	1.732	sõlm 3	3	4	sõlm 3	0	0		
sõlm 4	3.000	0.000	sõlm 4	5	6	sõlm 4	0	0		
sõlm 5	4.000	1.732	sõlm 5	7	8	sõlm 5	0	0		
sõlm 6	5.000	0.000	sõlm 6	9	10	sõlm 6	0	0		
sõlm 7	6.000	1.732	sõlm 7	11	14	sõlm 7	0	1		

*Toesõlmed on nummerdatud viimastena

Topoloogia											
Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Algus	1	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5
Lõpp	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7

Varraste vabadusastmed											
Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Algus x-suund	12	1	12	1	3	5	3	5	7	9	7
Algus z-suund	13	2	13	2	4	6	4	6	8	10	8
Lõpp x-suund	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11
Lõpp z-suund	2	4	4	6	6	8	8	10	10	14	14

Leht1

Summa=0

Joonis 6.5. Sõrestiku topoloogia

Joonisel 6.6 on tabelisse „Varraste suunakoosinused” kantud varraste (joonis 6.4) suuna-

koosinused joonisel 6.2 näidatud sisejõudude suundade alusel.

Varraste suunakoosinused														
Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
Algus oosA	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000			
Algus oosB	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000			
Lõpp oosA	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000			
Lõpp oosB	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000			
Võrrandisüsteemi vasak pool														
Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	C1	C2	C3
Vabadusaste 1	0.500	-0.500		-1.000										
Vabadusaste 2	-0.866	-0.866		0.000										
Vabadusaste 3		0.500	1.000		-0.500		-1.000							
Vabadusaste 4		0.866	0.000		0.866		0.000							
Vabadusaste 5				1.000	0.500	-0.500		-1.000						
Vabadusaste 6				0.000	-0.866	-0.866		0.000						
Vabadusaste 7					0.500	1.000		-0.500		-1.000				
Vabadusaste 8					0.866	0.000		0.866		0.000				
Vabadusaste 9							1.000	0.500	-0.500					
Vabadusaste 10							0.000	-0.866	-0.866					
Vabadusaste 11								0.500	1.000					
Vabadusaste 12	-0.500		-1.000									-1.000		
Vabadusaste 13	0.866		0.000										-1.000	
Vabadusaste 14										0.866	0.000			-1.000

Joonis 6.6. Võrrandisüsteemi vasak pool

Sõlmede vabadusastmete suunad nummerdame nii, nagu on näidatud joonisel 6.5 tabelis „Vabadusastmete numbrid sõlmedes”. Nii koostame sõlme 2 tasakaalvõrrandid suundadele 1 ja 2.

$$\sum S u_{n s_1} = 0; \quad N_1 \cos \alpha_{2-1} + N_2 \cos \alpha_{2-3} + N_4 \cos \alpha_{2-4} = 0 \quad (6.7)$$

$$\sum S u_{n s_2} = 0; \quad N_1 \cos \beta_{2-1} + N_2 \cos \beta_{2-3} + N_4 \cos \beta_{2-4} = 0 \quad (6.8)$$

Sõlmes 1 on tasakaalvõrrandid suundadele 12 ja 13.

$$\sum S u_{n s_{12}} = 0; \quad N_1 \cos \alpha_{1-2} + N_3 \cos \alpha_{1-3} + C1 = 0 \quad (6.9)$$

$$\sum S u_{n s_{13}} = 0; \quad N_1 \cos \beta_{1-2} + N_3 \cos \beta_{1-3} + C2 = 0 \quad (6.10)$$

Nii nagu võrrandid (6.7), (6.8), (6.9) ja (6.10) koostatakse võrrandid igas sõlmes. Saame võrrandisüsteemi (6.11).

$$\mathbf{GX} = \mathbf{S} \quad (6.11)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Varraste vabadusastmed														
2	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
3	Algus x-suund	12	1	12	1	3	5	3	5	7	9	7			
4	Algus z-suund	13	2	13	2	4	6	4	6	8	10	8			
5	Lõpp x-suund	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11			
6	Lõpp z-suund	2	4	4	6	6	8	8	10	10	14	14			
7															
8	Varraste suunakoosinused														
9	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
10	Algus oosA	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000			
11	Algus oosB	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000			
12	Lõpp oosA	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000			
13	Lõpp oosB	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000			
14															
15	Võrrandisüsteemi vasak pool														
16	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
17	Vabadusaste 1	0.500	-0.500		-1.000										
18	Vabadusaste 2	-0.866	-0.866		0.000										
19	Vabadusaste 3		0.500	1.000		-0.500		-1.000							
20	Vabadusaste 4		0.866	0.000		0.866		0.000							
21	Vabadusaste 5				1.000	0.500		-0.500		-1.000					
22	Vabadusaste 6				0.000	-0.866		-0.866		0.000					
23	Vabadusaste 7						0.500	1.000		-0.500		-1.000			
24	Vabadusaste 8						0.866	0.000		0.866		0.000			
Leht1	Summa=0														

Joonis 6.7. Võrrandisüsteemi koostamine

kus \mathbf{X} koosneb sõrestikuvarraste sisejõudude vektorist \mathbf{N} ja toereaktsioonide vektorist \mathbf{C} , \mathbf{S} on koormusvektor. Tasakaaluvõrrandite süsteemi vasak pool on joonisel 6.6.

Koormusvektor \mathbf{S} ehk võrrandisüsteemi parem pool on joonisel 6.8. Koormusvektori saame jõu väärtuste, vt tabel „Jõud sõlmedes”, kandmisel tabelisse „Võrrandisüsteemi parem pool” vastavalt tabelile „Vabadusastmete numbrid sõlmedes”.

Võrrandisüsteemi saame koostada ka kõigi varraste (joonis 6.4) vabadusastmete ja nende suunakoosinuste abil (vt joonis 6.7). Arvutusprogramm C.11 kasutab moodust, kus sõlmede tasakaaluvõrrandid saadakse kõigi varraste suunakoosinuste võrrandisüsteemi kandmisega. Toereaktsioonide leidmiseks lisatakse võrrandisüsteemi (joonis 6.6) negatiivne ühikmaatriks.

Mõjujoonte ordinaatide leidmiseks kasutame võrrandisüsteemi (6.11) vasaku poole \mathbf{G} pöördmaatriksit \mathbf{G}' (joonis 6.9), mÕjujoonte vajalike ordinaatide väljatoomiseks pöördmaatriksit \mathbf{G}'

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}' * \mathbf{S} \quad (6.12)$$

vaatleme joonist 6.2 ja teeme kindlaks, milliseid sõlmi läbib ühikjõud. Nii näiteks „sõdutee all” puhul läbib ühikjõud sõlmi 1, 3, 5 ja 7. Need sõlmed ja nendele vastavad vabadusastmed on joonisel 6.8. Vabadusastmete järgi valitakse pöördmaatriksit \mathbf{G}' veerud (vt joonis 6.9).

Jõud sõlmedes			Vabadusastmete numbrid sõlmedes*				Ühikjõud labib sõlmi		
Jõud	x-suunas	z-suunas	Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas	Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas	
			sõlm 1	12	13	sõlm 1		1	
			sõlm 2	1	2	sõlm 2			
		15.0	sõlm 3	3	4	sõlm 3		1	
			sõlm 4	5	6	sõlm 4			
		15.0	sõlm 5	7	8	sõlm 5		1	
			sõlm 6	9	10	sõlm 6			
		15.0	sõlm 7	11	14	sõlm 7		1	

Võrrandisüsteemi parem pool														
Suund	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
kN			15.0			15.0							15.0	

Sõlmede vabadusastmed mida labib ühikjõud				
Vabadusaste	13	4	8	14
Jõud "1"	1	1	1	1

Joonis 6.8. Jõud sõlmedes

Vabadusaste	13	4	8	14	Vab. aste	13	4	8	14
Jõud "1"	1	1	1	1	x koord	0.0	2.0	4.0	6.0

Võrrandisüsteemi vasaku poole pöördmaatriks G''														
Vabadusaste	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N1	0.33333	-0.96226	0.00000	-0.76981	0.33333	-0.57735	0.00000	-0.38490	0.33333	-0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N2	-0.33333	-0.19245	0.00000	0.76981	-0.33333	0.57735	0.00000	0.38490	-0.33333	0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N3	0.83333	0.48114	1.00000	0.38491	0.83333	0.28868	1.00000	0.19246	0.83333	0.09623	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N4	-0.66667	-0.38491	0.00000	-0.76982	0.33333	-0.57737	0.00000	-0.38491	0.33333	-0.19246	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N5	0.33333	0.19245	0.00000	0.38490	0.33333	-0.57735	0.00000	-0.38490	0.33333	-0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N6	-0.33333	-0.19245	0.00000	-0.38490	-0.33333	-0.57735	0.00000	0.38490	-0.33333	0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N7	0.50000	0.28868	0.00000	0.57737	0.50000	0.86605	1.00000	0.57737	0.50000	0.28868	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N8	-0.33333	-0.19246	0.00000	-0.38491	-0.33333	-0.57737	0.00000	-0.76982	0.66667	-0.38491	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N9	0.33333	0.19245	0.00000	0.38490	0.33333	0.57735	0.00000	0.76981	0.33333	-0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N10	-0.33333	-0.19245	0.00000	-0.38490	-0.33333	-0.57735	0.00000	-0.76981	-0.33333	-0.96226	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N11	0.16667	0.09623	0.00000	0.19246	0.16667	0.28868	0.00000	0.38491	0.16667	0.48114	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
C1 (12)	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	-1.00000	0.00000	0.00000
C2 (13)	0.28867	-0.83333	0.00000	-0.66667	0.28867	-0.50000	0.00000	-0.33333	0.28867	-0.16667	0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000
C3 (14)	-0.28867	-0.16667	0.00000	-0.33333	-0.28867	-0.50000	0.00000	-0.66667	-0.28867	-0.83333	0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000

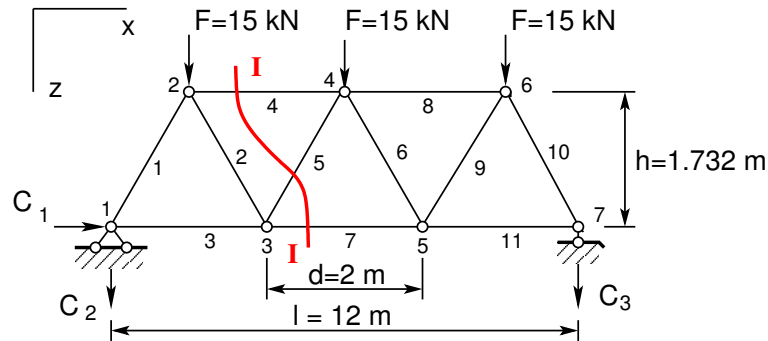
Võrrandisüsteemi lahend														
Sisejõud	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	C1	C2	C3
kN	-25.98095	8.66032	12.99076	-17.32102	-8.66032	-8.66032	21.65127	-17.32102	8.66032	-25.98095	12.99076	0.00000	-22.50000	-22.50000

Joonis 6.9. Vasaku poole pöördmaatriks G''

6.2.2 Momendipunkti võtte

Momendipunkti võtte eeliseks on, et ta võimaldab leida sisejõu ühes sõrestikuvardas sõltumata teiste sõrestikuvarraste sisejõududest.

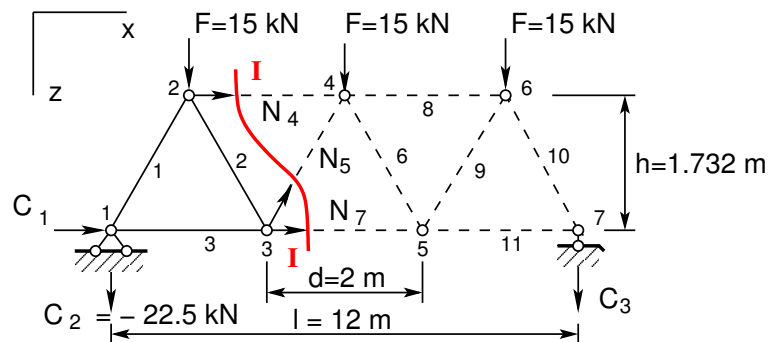
Momendipunkti võtet nimetatakse ka Ritteri¹ lõikemeetodiks.



Joonis 6.10. Lõige I-I

Momendipunkti võtte puhul jagatakse sõrestiku arvutuskeem lõikega kaheks osaks (joonis 6.10). Lõigatakse läbi varras, mille sisejõudu otsitakse (näiteks varras 7) ja veel kaks varrast (vardad 4 ja 5, vt lõiget I-I). Nende kahe läbilõigatud varda sihtide lõikepunkti nimetatakse *momendipunktiks* ehk *Ritteri punktiks*. Varda 4 ja 5 sihtide lõikepunktiks on 4, mis on varda 7 sisejõu N_7 leidmise momendipunkt. Varda 4 ja 5 sisejõu (N_4 , N_5) moment momendipunkti (sõlmpunkt 4) suhtes on null.

Vaatleme lõikest I-I vasakule (paremale) jäävat sõrestikuosa (joonis 6.11).



Joonis 6.11. Momendipunkti võtte

Koostame selle sõrestikuosa kohta momentide tasakaalu tingimuse momendipunkti 4 suhtes (6.13)

$$\sum M_4 = 0; \quad N_7 * h + F * d + C_2 * 1.5d = 0 \quad (6.13)$$

Toereaktsioon $C_1 = 0$ ja sisejõu N_4 ning N_5 õlg momendipunkti 4 suhtes on null. Toereaktsiooni C_2 väärtuseks on -22.5 , sest toereaktsiooni suund on vastupidi joonisel

¹August Ritter, insener ja mehaanikaprofessor Hannoveris ja Aachenis 1826–1908.

oletatuga. Tingimusest (6.13) avaldame sisejõu N_7

$$N_7 = -\frac{F * d + C2 * 1.5d}{h} = \frac{M_4^o}{h} \quad (6.14)$$

kus M_4^o on sõrestikule vastava lihttala moment punkti 4 suhtes.

Sõrestikuvarda sisejõu N_4 leidmiseks on momentpunktiks sõlmpunkt 3. Selle punkti suhtes on momentide tasakaalu tingimus

$$\Sigma M_3 = 0; \quad -N_4 * h + F * 0.5d + C2 * d = 0 \quad (6.15)$$

Tingimusest (6.15) avaldame sisejõu N_4

$$N_4 = -\frac{F * 0.5d + C2 * d}{h} = -\frac{M_3^o}{h} \quad (6.16)$$

kus M_3^o on sõrestikule vastava lihttala moment punkti 3 suhtes.

Sõrestikuvarda sisejõu N_5 leidmiseks momendipunkti võte ei kõlba, sest kahe *ülejäädud varda* (varras 4 ja 7) sihid ei lõiku (om ∞).

6.2.3 Projektsioonide võte

Paralleelvöödega sõrestiku diagonaali sisejõudu (N_5) (joonis 6.10) ei saa leida momentide tasakaalu tingimusest, kuna momendipunkt on lõpmatuses.

Kahe läbilõigatud paralleelse vöö risttelje kohta kirjutatud jõudude projektsioonide tasakaalu tingimus (6.17), (joonis 6.11)

$$\Sigma Z = 0; \quad -N_5 * \cos(n, z) + F + C2 = 0 \quad (6.17)$$

kus $\cos(n, z)$ väärtuse saab joonise 6.6 tabelist „Varraste suunakoosinused”.

Kantud varraste (joonis 6.4) suunakoosinuste väärtused on toodud joonisel 6.6 tabelis „Varraste suunakoosinused” ridades „Algas cosA” ja „Algas cosB”. Sisejõu N_5 suund ühtib varda 5 suunaga 3 – 4. Nii saab $\cos(n, z) = -0.866$. Võrrandist (6.17) saame avaldada sisejõu N_5

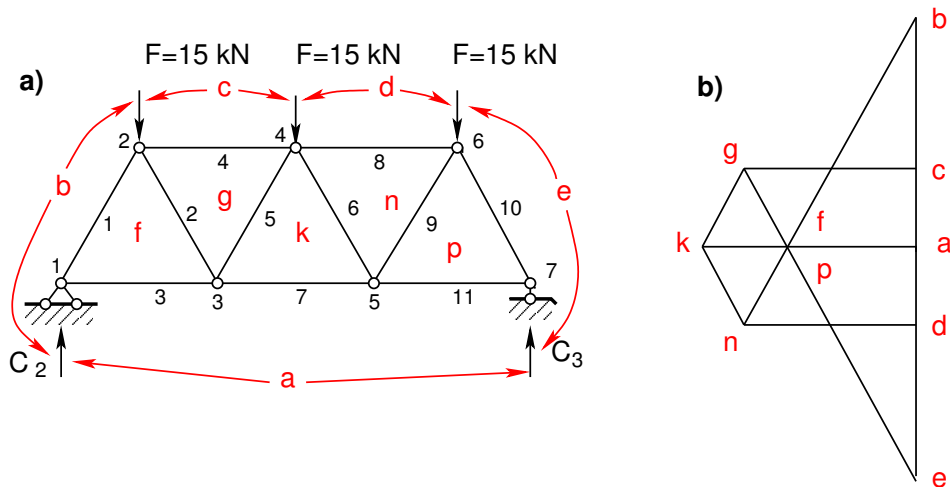
$$N_5 = -\frac{F + C2}{\cos(n, z)} = \frac{Q_{3-4}^o}{\cos(n, z)} \quad (6.18)$$

kus Q_{3-4}^o on sõrestikule vastava lihttala põikjõud sõlmede 3 ja 4 vahel.

6.2.4 Maxwelli-Cremona diagramm

Sõrestikuvarraste sisejõudude graafilisel leidmisel konstrueeritskse Maxwelli-Cremona diagramm (sisejõudude diagramm). Sisejõudude diagrammi võib koostada käsitsi või arvutiprogrammiga *Design View*.

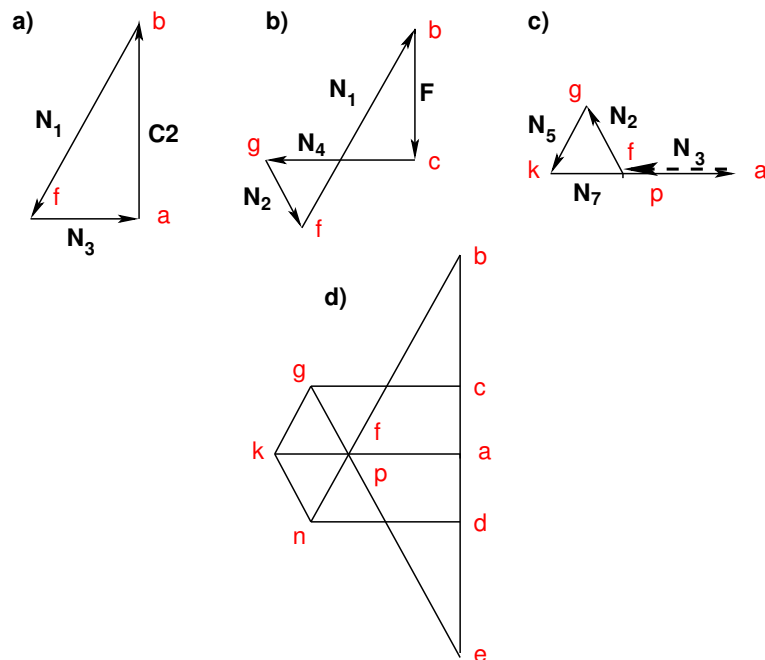
Sisejõudude diagrammi koostamist selgitame joonise 6.12 abil. Sõrestiku väliskontuuril kahe naabervälisjõuga ja vööga piiratud pinda tähistatakse tähega (või numbriga).



Joonis 6.12. Maxwelli-Cremona diagramm

Need pinnad ja varrastega ümbritsetud pinnad on *väljad*. Joonisel 6.12 a on sõrestikku ümbritsevad väljad a, b, c, d, e ning sõrestikuvarrastega ümbritsetud väljad f, g, k, n, p. Välis- ja sisejõud märgitakse kahe tähega, mis näitavad, milliste väljade vahel jõud asub. Toereaktsiooni C_2 tähistatakse $a - b$ ja sõlmes 2 rakendatud jõudu F $b - c$.

Välisjõudude hulknurk koostatakse järjekorras, nagu neid kohatakse päripäeva liikumisel ümber sõrestiku. Joonisel 6.12 b) on välisjõud $b - c$, $c - d$, $d - e$, $e - a$ ja $a - b$. Sisejõudude määramine põhineb vaadeldava jõu tasakaalustamisel jõududega, mil-



Joonis 6.13. Jõuhulknurgad

le sihid ühtivad sõrestikuvarraste telgjoonte sihtidega (joonis 6.13). Sisejõudude diagrammi koostamist alustatakse sõlmest, mis on moodustatud kahest vardast (sõlm 1, joonis 6.12 a). Toereaktsiooni $C2$ tasakaalustame varraste 1 ja 3 sisejõududega (joonis 6.13). Nende varraste sihid lõikuvad punktis f (joonis 6.12 b).

Leitud sisejõudude märgi määramiseks liigume ümber sõlme 1 päripäeva (joonis 6.12 a). Liikudes väljalt b väljale f , näeme diagrammilt (joonis 6.12 b), et jõud mõjub sõlme 1 suunas, s.t varras $b-f$ on surutud. Liikudes väljalt f väljale a , näeme diagrammilt, et varras $f-a$ on tõmmatud. Joonisel 6.13 b ja c on näidatud sõlmi 2 ja 3 tasakaalustavate jõudude hulknurgad. Varda sisejõud esineb diagrammi kahe naabersõlme jõuhulknurgas vastupidiste suundadega (sisejõud N_1 , joonis 6.13 a ja b). sisjõudude diagrammis (joonis 6.12 b) jõudude suundi ei märgita.

6.3 Talasõrestike mõjujooned

6.3.1 Mõjujoonte leidmine arvutiga

Sõrestiku sõlmede eraldamisel saadud tasakaaluvõrrandid (vt näide 6.1 joonis 6.6) esitame võrrandiga

$$\mathbf{G} * \mathbf{s} = \mathbf{S} \quad (6.19)$$

kus \mathbf{G} on *tasakaalumaatriks* ja \mathbf{s} sisejõudude ja toereaktsioonide vektor, \mathbf{S} sõlmkoormuste vektor (tähistused on võetud õpikust [KW90]).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(N, N) & \mathbf{G}(N, C) \\ \mathbf{G}(C, N) & \mathbf{G}(C, C) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_i \\ \vdots \\ C1 \\ C2 \\ C3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} F_{x,1} \\ F_{z,1} \\ F_{x,2} \\ F_{z,3} \\ \vdots \\ F_{x,i} \\ F_{z,i} \\ \vdots \\ F_{C1} \\ F_{C2} \\ F_{C3} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

kus $\mathbf{G}(C, C)$ on negatiivne ühikmaatriks

$$\mathbf{G}(C, C) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Lahendades võrrandisüsteemi (6.19), saame

$$\mathbf{s} = \mathbf{G}^{-1} * \mathbf{S} = \mathbf{b} * \mathbf{S} \quad (6.22)$$

kus \mathbf{b} on pööratud tasakaalumatriks, mille struktuur on (vt näide 6.1 joonis 6.9)

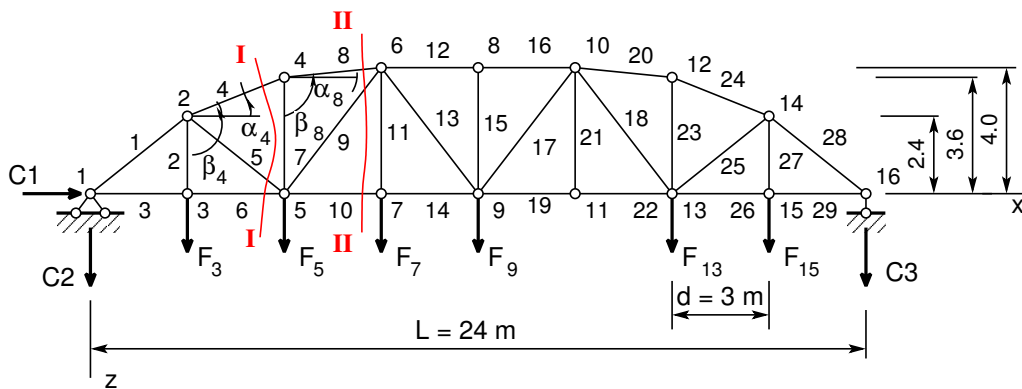
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}(N, F) & \mathbf{b}(N, C) \\ \mathbf{b}(C, F) & \mathbf{b}(C, C) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Maatriksit \mathbf{b} võiksime nimetada ka mõjumaatriksiks, sest tema elemendid määravad kõikide mõjujoonte ordinaadid.

Maatriksiga $\mathbf{b}(N, F)$ saame määrata sisejõud N_i sõluvalt väliskoormusest F_j . Valides väliskoormuse $F_j = 1$, saame mõjujoone ordinaadid.

6.4 Sõrestiku arvutamise näited

Näide 6.2 Leida joonisel esitatud sõrestikuvarraste sisejõud arvutiprogrammiga C.12 lk 238. Kontrollida sõrestiku kolmanda paneeli varraste sisejõude ja konstrueerida nende mõjujooned. Sõrestikule mõjub koormus $F_3 = 5 \text{ kN}$, $F_5 = 10 \text{ kN}$, $F_7 = 4 \text{ kN}$, $F_9 = 8 \text{ kN}$, $F_{13} = 4 \text{ kN}$, $F_{15} = 8 \text{ kN}$. Sõrestiku mõõtmed on arvutuskeemil 6.14.



Joonis 6.14. Sõrestiku sisejõud

Sõrestikuvarraste sisejõudude leidmiseks arvutil lisame arvutustabelid (tabel 6.1 ja 6.2). Sõrestikusõlmede kirjeldamiseks valime x -telje sõrestiku alumisse vöösse ja z -telje vertikaalselt sõlmest 1 alla (joonis 6.14). Sõlmpunktide koordinaadid ja sõlmedes mõjuvad koormused on esitatud tabelina 6.1.

Sõrestikuvarraid kirjeldame sõlmede abil, andes varda alguse ja lõpu sõlme numbre. Varraste kirjeldus (topoloogia) on tabelis 6.2. Sõrestiku sisejõud arvutame programmiga srstkN2.m C.12 lk 238. Arvutiprogrammis langevad toereaktsioonide ja koormuste positiivsed suunad kokku koordinaattelgede positiivsete suundadega.

Tulemused kirjutame päevikusse 6.1.

```
Päevik 6.1 %srstkN2.out
octave:2> diary srstkN2.out
octave:3> diary on
octave:4> srstkN2
SolmedeArv = 16
ElementideArv = 29
```


Tabel 6.1. Sõrestiku arvutustabel I

Sõlm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0.0	3.0	3.0	6.0	6.0	9.0	9.0	12.0	12.0	15.0
Z	0.0	-2.4	0.0	-3.0	0.0	-4.0	0.0	-4.0	0.0	-4.0
F_z	0.0	0.0	5.0	0.0	10.0	0.0	4.0	0.0	8.0	0.0

Sõlm	11	12	13	14	15	16
X	15.0	18.0	18.0	21.0	21.0	24.0
Z	0.0	-3.6	0.0	-2.4	0.0	0.0
F_z	0.0	0.0	4.0	0.0	8.0	0.0

Tabel 6.2. Sõrestiku arvutustabel II

Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Algus	1	2	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	8
Lõpp	2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	8	9	9	9

Varras	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Algus	8	9	10	9	10	10	11	12	12	13	13	14	14	15
Lõpp	10	10	13	11	12	11	13	13	14	14	15	15	16	16

ans = Sõlmpunktide ja Elementide arv on 16,29
Kui SolmedeArv ja ElementideArv on õiged vajuta klahvile Enter

=====
Sõlmede koordinaadid

X Z

0.00000 0.00000
3.00000 -2.40000
3.00000 0.00000
6.00000 -3.60000
6.00000 0.00000
9.00000 -4.00000
9.00000 0.00000
12.00000 -4.00000
12.00000 0.00000
15.00000 -4.00000
15.00000 0.00000
18.00000 -3.60000
18.00000 0.00000
21.00000 -2.40000
21.00000 0.00000
24.00000 0.00000


```

0 0
0 0
0 1

```

```

-----
=====
Sõlmede vabadusastmete numbrid

```

```

X-suunas  Z-suunas

```

```

-----
30 31
 1  2
 3  4
 5  6
 7  8
 9 10
11 12
13 14
15 16
17 18
19 20
21 22
23 24
25 26
27 28
29 32

```

```

-----
=====
Elementide suunakoosinused

```

```

cosAlpha  cosBeta

```

```

-----
0.78087  -0.62470
0.00000   1.00000
1.00000   0.00000
0.92848  -0.37139
0.78087   0.62470
1.00000   0.00000
0.00000   1.00000
0.99123  -0.13216
0.60000  -0.80000
1.00000   0.00000
0.00000   1.00000
1.00000   0.00000
0.60000   0.80000
1.00000   0.00000
0.00000   1.00000
1.00000   0.00000
0.60000  -0.80000
0.60000   0.80000
1.00000   0.00000
0.99123   0.13216
0.00000   1.00000
1.00000   0.00000
0.00000   1.00000

```

0.92848	0.37139
0.78087	-0.62470
1.00000	0.00000
0.00000	1.00000
0.78087	0.62470
1.00000	0.00000

 =====
 Jõud sõlmedes
 X-suunas Z-suunas

 0 0
 0 0
 0 5
 0 0
 0 10
 0 0
 0 4
 0 0
 0 8
 0 0
 0 0
 0 0
 0 4
 0 0
 0 8
 0 0

 =====
 Varraste sisejõud
 N

 -32.61591
 5.00000
 25.46875
 -32.08661
 5.53603
 25.46875
 7.94444
 -30.05531
 -1.75347
 30.84375
 4.00000
 -31.87500
 1.71875
 30.84375
 0.00000
 -31.87500
 8.28125
 -4.21875
 26.90625
 -24.59071

0.00000
 26.90625
 6.50000
 -26.25268
 1.40068
 23.28125
 8.00000
 -29.81455
 23.28125
 -0.00000
 -20.37500
 -18.62500

 =====
 Ühikjõud sõlmedes
 X-suunas Z-suunas

 0 1
 0 0
 0 1
 0 0
 0 1
 0 0
 0 1
 0 0
 0 1
 0 0
 0 1
 0 0
 0 1
 0 0
 0 1
 0 0
 0 1
 0 1

 =====
 Mõjujooned N(i)-le sõlmedes. Viimased kaks on
 toereaktsioonide mõjujooned

 Columns 1 through 8:

0.00000	-1.40068	-1.20059	-1.00049	-0.80039	-0.60029	-0.40020	-0.20010
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.09375	0.93750	0.78125	0.62500	0.46875	0.31250	0.15625
0.00000	-0.67315	-1.34629	-1.12191	-0.89753	-0.67315	-0.44876	-0.22438
0.00000	-0.60029	0.40020	0.33350	0.26680	0.20010	0.13340	0.06670
0.00000	1.09375	0.93750	0.78125	0.62500	0.46875	0.31250	0.15625
0.00000	0.16667	0.33333	0.27778	0.22222	0.16667	0.11111	0.05556
0.00000	-0.63053	-1.26106	-1.05089	-0.84071	-0.63053	-0.42035	-0.21018
0.00000	0.26042	0.52083	-0.60764	-0.48611	-0.36458	-0.24306	-0.12153
0.00000	0.46875	0.93750	1.40625	1.12500	0.84375	0.56250	0.28125
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-0.37500	-0.75000	-1.12500	-1.50000	-1.12500	-0.75000	-0.37500


```

0.00000
0.00000
-1.00000

```

```

=====
Mõjujoone x koordinaadid
=====

```

```

0 3 6 9 12 15 18 21 24
=====

```

```

octave:5> diary off

```

```

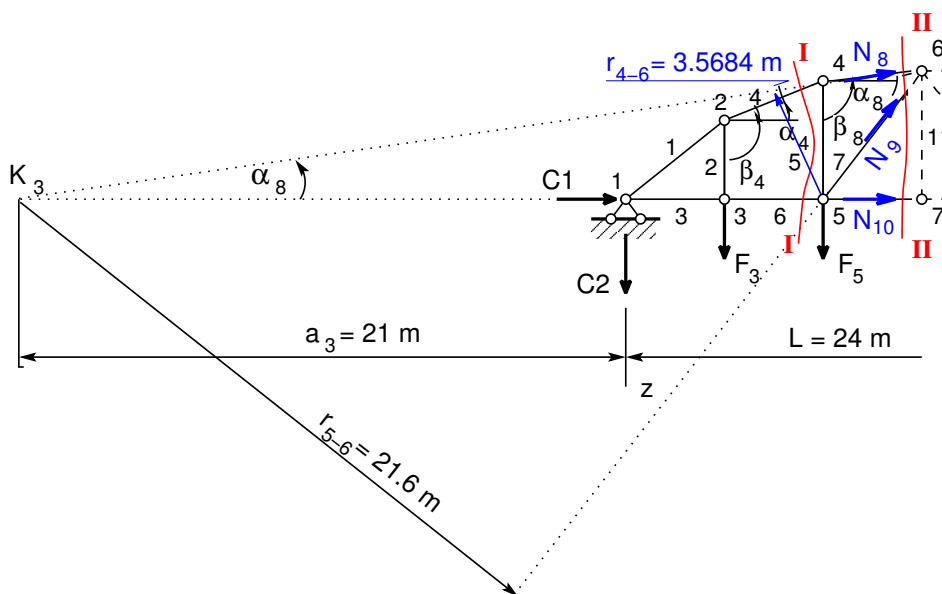
%%%%%%%%%%

```

Päevikust 6.1 saame kontrollida sisestatud sõlmede koordinaate ja varraste topoloogiat. Varda 4 ja 8 suunakoosinused saame päevikust $\cos \alpha_4 = 0.92848$, $\cos \beta_4 = -0.37139$, $\cos \alpha_8 = 0.99123$, $\cos \beta_8 = -0.13216$. Kontrollime leitud toereaktsioonide väärtusi $C2 = -20.375 \text{ kN}$, $C3 = -18.625 \text{ kN}$, koostades tasakaalutingimuse Z-teljele $\sum Z = 0$

$$-20.375 - 18.625 + 5 + 10 + 4 + 4 + 8 + 8 = 0 \text{ kN} \quad (6.24)$$

Sisejõudude leidmiseks eraldame lõikega II – II sõrestiku vasakpoolse osa ja vaatleme selle tasakaalu (joonis 6.15). Varda 10 momendipunktiks on sõlm 6 (joonis 6.15). Varda momen-



Joonis 6.15. Sõrestiku vasakpoolne osa

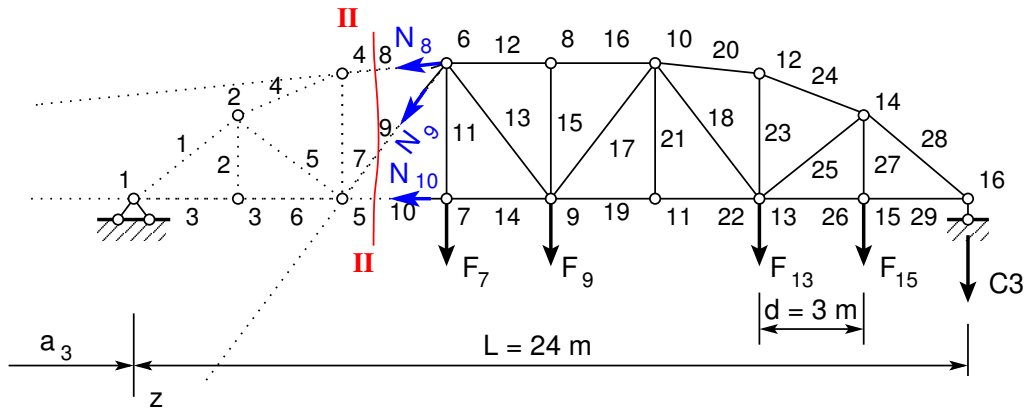
dipunkti otsimiseks teeme lõike II – II läbi kolme varda. Fikseerime varda, mille sisejõudu otsime. Selle varda momendipunkt on seal, kus kaks ülejäänud varrast lõikuvad. Sisejõu N_{10} sihi kaugus sõlmest 6 $r_{5-7} = 4.0 \text{ m}$. Momendipunkti kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_6 = 0: \quad -N_{10} * r_{5-7} - F_5 * d - F_3 * 2d - C2 * 3d = 0 \quad (6.25)$$

saame

$$N_{10} = \frac{M_5^o}{r_{5-7}} = \frac{-10 * 3 - 5 * 6 + 20.375 * 9}{4} = 30.84 \text{ kN} \quad (6.26)$$

siin tähistab M_5^o vastava lihttala paindemomendi punkti 5 suhtes antud koormusest. Varda 8



Joonis 6.16. Sõrestiku parempoolne osa

momendipunktiks on sõlm 5. Varda momendipunkti otsimiseks teeme lõike II – II läbi kolme varda. Fikseerime varda, mille sisejõudu otsime. Selle varda momendipunkt on seal, kus kaks ülejäänud varrast lõikuvad. Sisejõu N_8 sihi kaugus sõlmest 5 on $r_{4-6} = h_2 * \cos \alpha_8 = 3.5684$ m. Siin $h_2 = 3.6$ m. Momendipunkti 5 kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_5 = 0 : \quad -N_8 * r_{4-6} - F_3 * d - C2 * 2d = 0 \quad (6.27)$$

tuleneb

$$N_8 = -\frac{M_5^o}{r_{4-6}} = \frac{5 * 3 - 20.375 * 6}{3.5684} = -30.06 \text{ kN} \quad (6.28)$$

kus M_5^o tähistab vastava lihttala paindemomendi punkti 5 suhtes antud koormusest. Märk - näitab, et ülemised kiud on surutud.

Sõrestikuvarda 8 momendipunktiks on sõlm 5. Varda momendipunkti otsimiseks teeme lõike I – I (joonis 6.15) läbi kolme varda. Fikseerime varda, mille sisejõudu otsime. Selle varda momendipunkt on seal, kus kaks ülejäänud varrast lõikuvad. Koostame lõikega I – I eraldatud osa kohta tasakaalutingimuse, millest saame analoogiliselt varda 8 sisejõuga

$$N_4 = -\frac{M_5^o}{r_{2-4}} = \frac{5 * 3 - 20.375 * 6}{3.3425} = -32.09 \text{ kN} \quad (6.29)$$

siin on sisejõu N_4 sihi kaugus sõlmest 5 $r_{2-4} = h_2 * \cos \alpha_4 = 3.3425$ m, kus $h_2 = 3.6$ m.

Varda 9 momendipunkti otsimiseks teeme lõike II – II (joonis 6.15) läbi kolme varda. Fikseerime varda 9, milles otsime sisejõudu. Selle varda momendipunkt on seal, kus kaks ülejäänud varrast (vardad 10 ja 8) lõikuvad. Joonisel 6.15 on see punkt tähistatud K_3 -ga. Koostame selle punkti kohta tasakaaluvõrrandi

$$\sum M_{K3} = 0 : \quad -N_9 * r_{5-6} + F_5 * (a_3 + 2d) + F_3 * (a_3 + d) + C2 * a_3 = 0 \quad (6.30)$$

kus $r_{5-6} = 21.6$ m ja $a_3 = 21$ m (joonis 6.15). Tasakaaluvõrrandist (6.30) saame

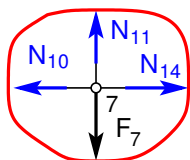
$$N_9 = \frac{10 * 27 + 5 * 24 - 20.375 * 21}{21.6} = -1.75 \text{ kN} \quad (6.31)$$

Sõlme 7 tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0 : \quad -N_{11} + F_7 = 0 \quad (6.32)$$

saame

$$N_{11} = 4 \text{ kN} \quad (6.33)$$



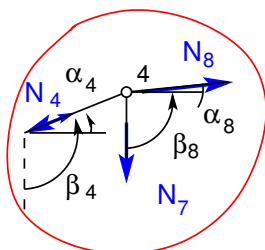
Joonis 6.17. Sõlme 7 tasakaal

Sõlme 4 tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0 : \quad N_7 - N_8 * \cos \beta_8 + N_4 * \cos \beta_4 = 0 \quad (6.34)$$

saame avaldise (6.28) ja (6.29) kasutades

$$N_7 = \frac{M_5^o}{r_{4-6}} * \cos \beta_8 - \frac{M_5^o}{r_{2-4}} * \cos \beta_4 \quad (6.35)$$



Joonis 6.18. Sõlme 4 tasakaal

Varraste 11 ja 7 sisejõu leidmiseks lõikame sõlmed 7 ja 4 välja (joonis 6.17 ja 6.18).

Võttes arvesse seosed $r_{4-6} = h_2 * \cos \alpha_8$ ja $r_{2-4} = h_2 * \cos \alpha_4$, saame

$$N_7 = \frac{M_5^o}{h_2} \left(\frac{\cos \beta_8}{\cos \alpha_8} - \frac{\cos \beta_4}{\cos \alpha_4} \right) \quad (6.36)$$

ehk arvestades seoseid (6.2) ja (6.3) saame

$$N_7 = \frac{M_5^o}{h_2} (\tan \alpha_4 - \tan \alpha_8) = \frac{20.375 * 6 - 5 * 3}{3.6} \left(\frac{1.2}{3} - \frac{0.4}{3} \right) = 7.94 \text{ kN} \quad (6.37)$$

Sõrestiku sisejõude võib leida ka lõikest II–II paremale jääva osa (joonis 6.16) vaatlemisega.

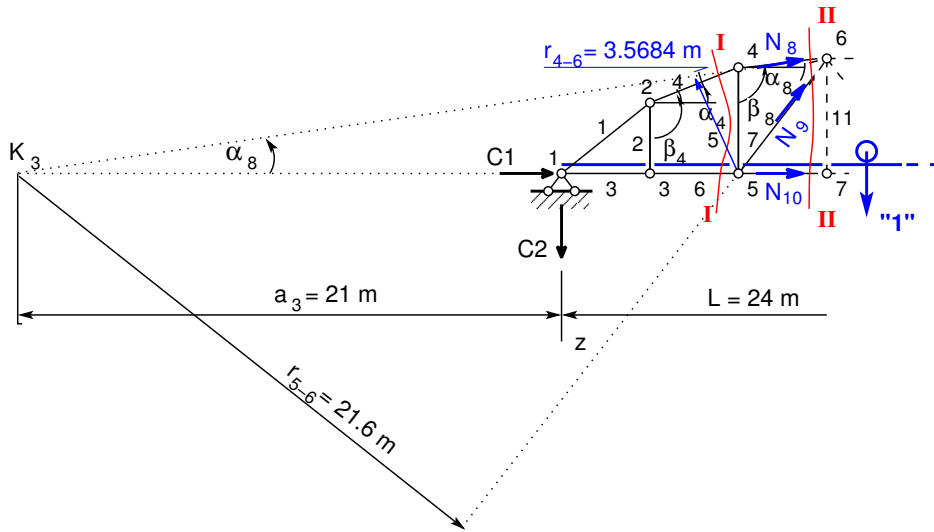
Mõjujoonte konstrueerimiseks jagame lõikega II–II sõrestiku kaheks osaks (joonis 6.23). Kui ühikjõud liigub läbilõigatud paneelist paremal, siis vaatleme vasakpoolse osa tasakaalu (joonis 6.19) ja kui ühikjõud liigub läbilõigatud paneelist vasakul, siis vaatleme parempoolse osa tasakaalu (joonis 6.20).

Varda 10 momendipunktiks on sõlm 6 (joonis 6.19). Sisejõu N_{10} sihi kaugus sõlmest 6 $h_3 = 4.0 \text{ m}$. Momendipunkti kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_6 = 0 : \quad -N_{10} * h_3 - C2 * 3d = 0 \quad (6.38)$$

saame

$$N_{10} = \frac{M_5^o}{r_{5-7}} = -\frac{C2 * 3d}{h_3} = \frac{9}{4} \quad (6.39)$$



Joonis 6.19. Sõrestik. Ühikjõud paremal

Varda 10 mõjujoon (joonis 6.23) on sarnane lihttala mõjujoonega M_5^o ristlõike 5 jaoks, mille ordinaadid on jagatud $h_3 = 4$ m-ega. Varda 10 mõjujoone iseloomuliku ordinaadi saame, kui korrutame toereaktsiooni C2 mõjujoone ordinaadid $-\frac{9}{4}$ -ga.

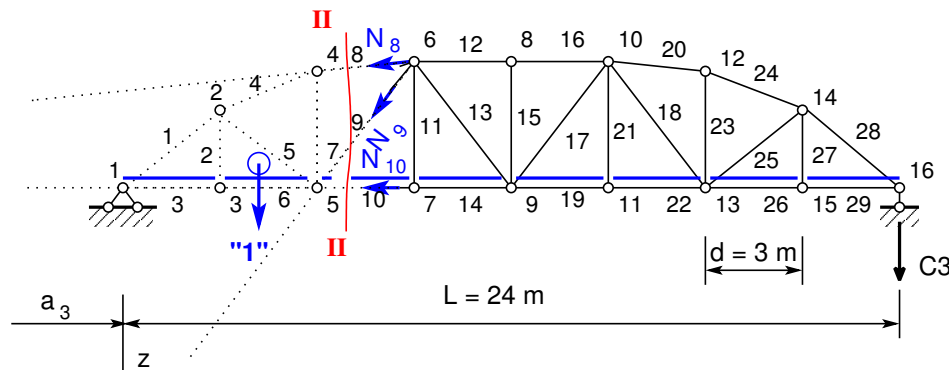
Varda 8 momendipunktiks on sõlm 5. Sisejõu N_8 sihi kaugus sõlmest 5 on $r_{4-6} = h_2 * \cos \alpha_8 = 3.5684$ m. Siin $h_2 = 3.6$ m. Momendipunkti 5 kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_5 = 0: \quad -N_8 * r_{4-6} + C2 * 2d = 0 \tag{6.40}$$

saame

$$N_8 = -\frac{M_5^o}{r_{4-6}} = \frac{C2 * 2d}{r_{4-6}} = \frac{6}{3.5684} \tag{6.41}$$

kus M_5^o on sõrestikule vastava lihttala paindemomendi mõjujoon punkti 5 suhtes. Varda 8 mõjujoon on joonisel 6.23. Varda 8 mõjujoon sarnaneb lihttala mõjujoonega M_5^o , mille ordinaadid on jagatud r_{4-6} -ga.



Joonis 6.20. Sõrestik. Ühikjõud vasakul

Sõrestikuvarda 4 momendipunktiks on sõlmpunkt 5. Koostame löikega I – I eraldatud sõrestikuosa (joonis 6.15) kohta tasakaalutingimuse, millest saame varda 8 sisejõu

$$N_4 = -\frac{M_5^o}{r_{2-4}} = \frac{C2 * 2d}{r_{2-4}} = \frac{6}{3.3425} \quad (6.42)$$

kus sisejõu N_4 sihi kaugus sõlmest 5 on $r_{2-4} = h_2 * \cos \alpha_4 = 3.3425$ m.

Varda 9 momendipunktiks on varraste 8 ja 10 sihtide löikepunkt K_3 . Sisejõu N_9 sihi kaugus punktist K_3 on $r_{4-6} = 21.6$ m. Momendipunkti K_3 kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_{K3} = 0 : \quad -N_9 * r_{5-6} + C2 * a_3 = 0 \quad (6.43)$$

kus $a_3 = 21$ m (joonis 6.19), saame

$$N_9 = \frac{C2 * a_3}{r_{5-6}} = -\frac{21}{21.6} \quad (6.44)$$

Liikva koormuse all (läbilõigatud paneelist paremal) sarnaneb varda N_9 mõjujoon toereakt-siooni $C2$ mõjujoonega, mille ordinaadid on korrutatud a_3/r_{5-6} -ga.

Kui koormus liigub vasakul pool läbilõigatud paneeli, siis vaatleme sõrestiku parempoolse osa tasakaalu (joonis 6.20). Varda 9 momendipunkti K_3 kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_{K3} = 0 : \quad -N_9 * r_{5-6} + C3 * (a_3 + L) = 0 \quad (6.45)$$

kus $a_3 = 21$ m (joonis 6.19), saame

$$N_9 = -\frac{C3 * (a_3 + L)}{r_{5-6}} = \frac{21 + 24}{21.6} = \frac{45}{21.6} \quad (6.46)$$

Liikva koormuse all (läbilõigatud paneelist vasakul) sarnaneb varda N_9 mõjujoon toereakt-siooni $C3$ mõjujoonega, mille ordinaadid on korrutatud $(a_3 + L)/r_{5-6}$ -ga (joonis 6.23).

Varda 11 mõjujoone leidmiseks lõikame sõrestikust (joonis 6.23) välja sõlme 7 (joonis 6.21).

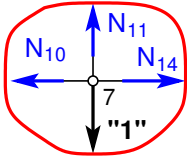
Varda 7 mõjujoone leidmiseks lõikame sõrestikust (joonis 6.23) välja sõlme 4 (joonis 6.22).

Sõlme 7 tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0: \quad -N_{11} + 1 = 0 \quad (6.47)$$

saame

$$N_{11} = 1 \quad (6.48)$$



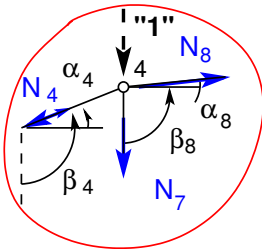
Joonis 6.21. Sõlm 7

Sõlme 4 tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0: \quad N_7 - N_8 * \cos \beta_8 + N_4 * \cos \beta_4 = 0 \quad (6.49)$$

saame avaldisi (6.28) ja (6.29) kasutades

$$N_7 = \frac{M_5^o}{r_{4-6}} * \cos \beta_8 + \frac{M_5^o}{r_{2-4}} * \cos \beta_4 \quad (6.50)$$



Joonis 6.22. Sõlm 4

Võttes arvesse seosed $r_{4-6} = h_2 * \cos \alpha_8$ ja $r_{2-4} = h_2 * \cos \alpha_4$, (6.2), (6.3), saame

$$N_7 = \frac{M_5^o}{h_2} (\tan \alpha_4 - \tan \alpha_8) = \frac{M_5^o}{3.6} \left(\frac{1.2}{3} - \frac{0.4}{3} \right) \quad (6.51)$$

Varda N_7 mõjujoon sarnaneb lihttala mõjujoonega M_5^o , mille ordinaadid on korrutatud $\frac{1}{3.6} \left(\frac{1.2}{3} - \frac{0.4}{3} \right)$ (joonis 6.23).

Mõjujoonte abil arvutame sisejõud valemiga

$$N_i = \sum F_j * \eta_{ij} = F_j * \eta_{ij} \quad (6.52)$$

kus η_{ij} on sisejõu N_i mõjujoone ordinaat sõlmes j ja F_j on koormus sõlmes j.

$$N_{10} = 5 * 0.4688 + 10 * 0.9375 + 4 * (1.4063 + 0.5625) + 8 * (1.1250 + 0.2812) = 30.84 \text{ kN}$$

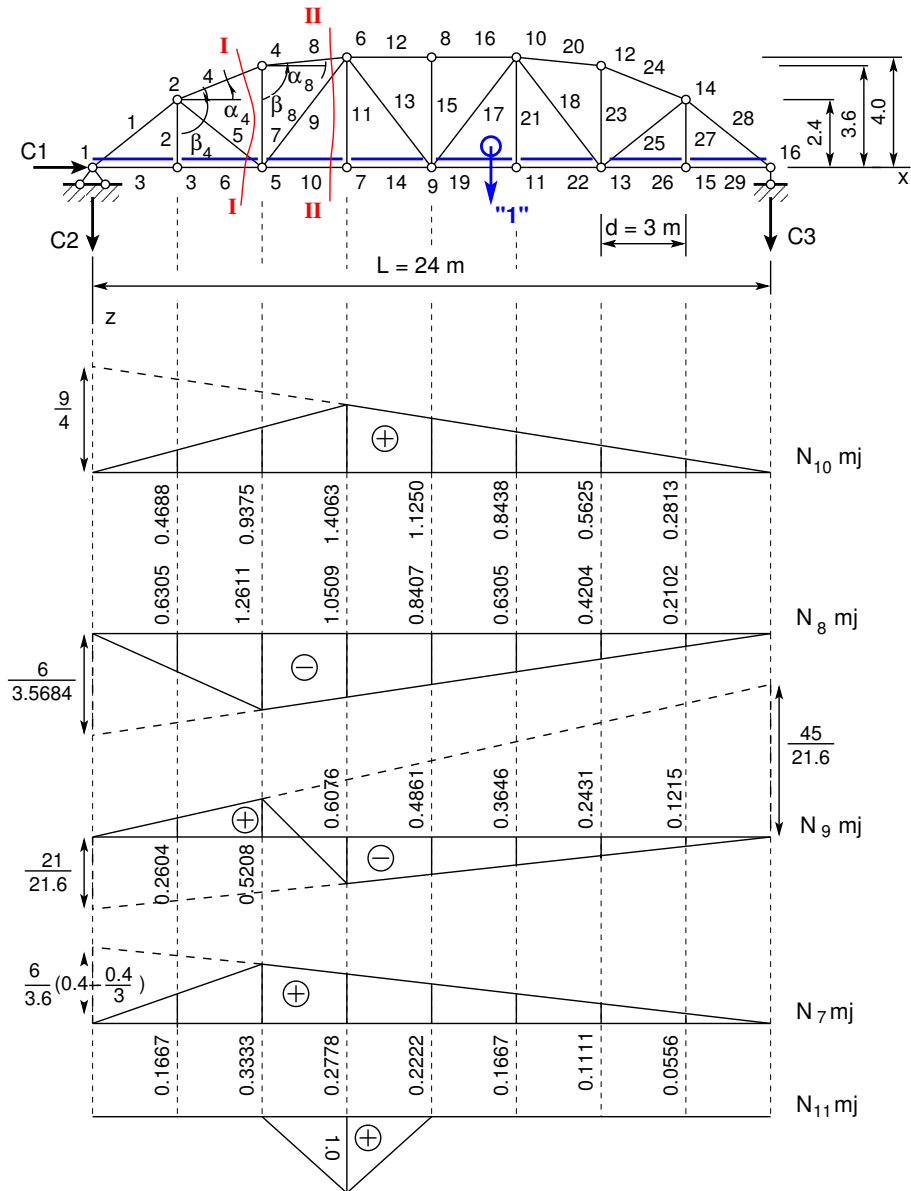
$$N_8 = - [5 * 0.6305 + 10 * 1.2611 + 4 * (1.0509 + 0.4204) + 8 * (0.8407 + 0.2102)] = -30.06 \text{ kN}$$

$$N_9 = 5 * 0.2604 + 10 * 0.5208 + 4 * (0.6076 + 0.2430) + 8 * (0.4861 + 0.1215) = -1.75 \text{ kN}$$

$$N_{11} = 4 * 1.000 = 4.00 \text{ kN}$$

$$N_7 = 5 * 0.1667 + 10 * 0.3333 + 4 * (0.2778 + 0.1111) + 8 * (0.2222 + 0.0556) = 7.94 \text{ kN}$$

Tabelis 6.3 on otseselt ja mõjujoonte abil leitud sisejõudude võrdlus.



Joonis 6.23. Sõrestiku mõjujooned

Tabel 6.3. Varraste sisejõudude võrdlus

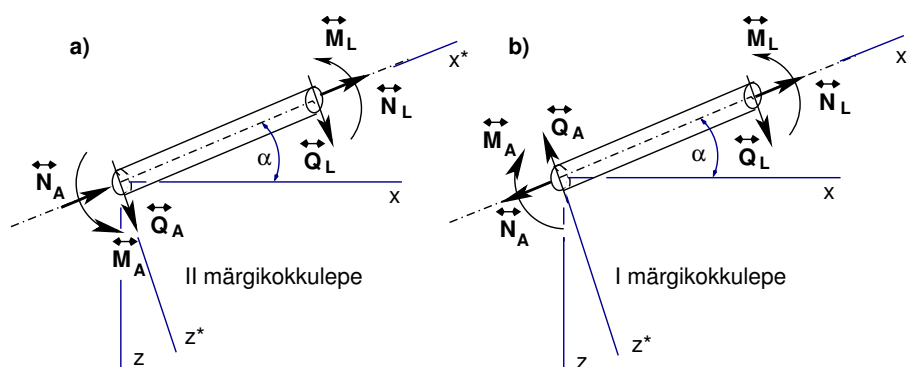
Varras	N_i otseselt [kN]	N_i mõjujoontega [kN]
10	30.84	30.84
8	-30.06	-30.06
9	-1.75	-1.75
11	4.00	4.00
7	7.94	7.94

Peatükk 7

Siirete arvutus

7.1 Märgikokkulepped

Rajajõudude (kontaktjõudude) positiivse suuna määramisel on kasutusel kaks märgikokkulepet (joonis 7.1, kus on kasutusel parema käe teljestik, vt joonis A.1). *Esimene*



Joonis 7.1. Märgikokkulepped

märgikokkulepe (joonis 7.1 b) on tuttav tehnilisest mehaanikast. *Teine märgikokkulepe* (joonis 7.1 a) on vajalik varrassüsteemide tasakaaluvõrrandite algoritmide koostamiseks.

Võrreldes I märgikokkulepet II märgikokkuleppega, näeme, et varda lõpus olevad rajajõudude (kontaktjõudude) suunad langevad kokku. Varda alguses on rajajõudude suunad vastasmärgilised. *Sisejõude* leitakse rajajõudude kaudu. Sisejõudude märgid ei tohi sõltuda rajajõudude märgikokkuleppest.

Sisejõudude märgireeglid on raamatus [MR96] lk 35 „Tõmbejõu loeme positiivseks”, „Survejõu loeme negatiivseks”; lk 45 „Põikjõu range märgireegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis *positiivset sisepinda* nihutab koordinaattelje positiivses suunas või *negatiivset sisepinda* koordinaattelje negatiivses suunas”, „Põikjõu märgi tööreegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis nihutab *positiivset sisepinda* päripäeva”; lk 43 „Paindemomendi loeme positiivseks, kui varda positiivsed kiud on tõmmatud”.

Tehnilises mehaanikas (tugevusõpetuses) langevad sisejõudude märgireeglid ja rajajõudude (kontaktjõudude) märgireeglid (I märgikokkulepe) kokku. Kasutades II märgikokkulepet, tuleb sisejõudude märgi määramisel rajajõudude (kontaktjõudude) kaudu varda alguses arvestada nende erinevaid märke. Rõhutame, et sisejõud on varda *sise-pinnal* ja rajajõud (kontaktjõud) mõjuvad varda *välispinnal*.

7.2 Sise- ja rajajõudude töö

Tööde avaldise (1.7) pikkel kirjutame kujule

$$\underbrace{\vec{N}_x \hat{u} \Big|_a^b}_{W_r} - \underbrace{\int_a^b N_x \hat{\lambda} dx}_{W_s} + \underbrace{\left(\int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \right)}_{W_v} = 0 \quad (7.1)$$

Kui vaadelda avaldises (7.1) \hat{u} -d kui *virtuaalset siiret*, siis väljendab see avaldis *virtuaalsiirete printsiipi*. Kirjutame võrrandi (7.1) ringi järgmiselt:

$$W^{(p)} = W_r^{(p)} + W_s^{(p)} + W_v^{(p)} = 0 \quad (7.2)$$

kus

$$W_r^{(p)} = \vec{N}_x \hat{u} \Big|_a^b \quad (7.3)$$

$$W_s^{(p)} = - \int_a^b N_x \hat{\lambda} dx \quad (7.4)$$

$$W_v^{(p)} = \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \quad (7.5)$$

Avaldist (7.2) nimetatakse *energiateoreemiks pikkel*: rajajõudude, sisejõudude ja välisjõudude tööde summa on null. Avaldises (7.2) esinevat tööd $W^{(p)}$ on *passiivtööd*, kuna vaadeldavad jõud ei kutsunud esile virtuaalsiirdeid \hat{u} .

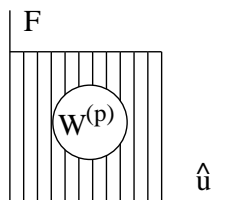
Kui vaadeldav jõud sõltub siiretest ja pööretest, siis tööd, mida need jõud teevad nendel siiretel ja pööretel, nimetatakse *aktiivtööks* (joonis 7.3). Aktiivtööde *energiateoreem* [KW90]

$$W^{(a)} = W_r^{(a)} + W_s^{(a)} + W_v^{(a)} = 0 \quad (7.6)$$

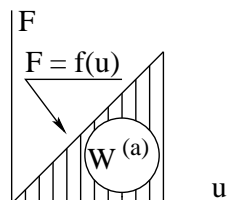
kus

$$W_r^{(a)} = \frac{1}{2} \vec{N}_x \hat{u} \Big|_a^b \quad (7.7)$$

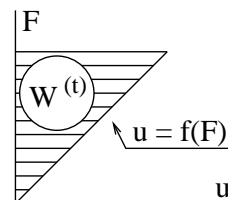
$$W_s^{(a)} = - \frac{1}{2} \int_a^b N_x \hat{\lambda} dx \quad (7.8)$$



Joonis 7.2. Passiivtöö



Joonis 7.3. Aktiivtöö



Joonis 7.4. Täiendtöö

$$W_v^{(a)} = \frac{1}{2} \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \quad (7.9)$$

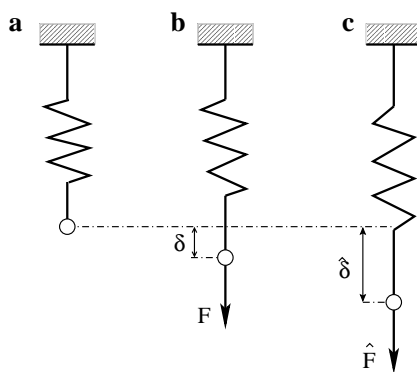
Sisejõudude töö avaldisel (7.8) on miinusmärk. Sisejõudude *potentsiaalne energia* Π_s ehk *deformatsioonienergia* (joonis 1.3) U on arvuliselt võrdne sisejõudude tööga, kuid vastupidise märgiga

$$\Pi_s = U = -W_s^{(a)} = \frac{1}{2} \int_a^b N_x \hat{\lambda} dx \quad (7.10)$$

7.3 Töö ja energia

Vaatleme vedrut (joonis 7.5 a) kui lihtsaimat elementi, et selgitada vardamehaanika printsiipe. Rakendame vedrulle jõu F ja \hat{F} (joonis 7.5 a, b). Vedru jäikusega c siirded δ , $\hat{\delta}$ on jõududega proportsionaalsed

$$F = k\delta, \quad \hat{F} = k\hat{\delta} \quad (7.11)$$



Joonis 7.5. Vastastikune töö

siin on k vedru jäikus.

Siirete δ , $\hat{\delta}$ erinevate arvuliste väärtuste korral kirjutame samasuse

$$\underbrace{\delta k}_F \hat{\delta} - \delta k \hat{\delta} = 0 \quad (7.12)$$

Kui asendame avaldise (7.12) δk jõuga F , saame

$$F \hat{\delta} - \delta k \hat{\delta} = 0 \quad (7.13)$$

Seda triviaalset samasust nimetatakse *vedru esimeseks samasuseks* [Har85]

$$G(\delta, \hat{\delta}) \equiv F \hat{\delta} - \delta k \hat{\delta} = 0, \quad \forall \delta, \hat{\delta} \quad (7.14)$$

siin tuleb tähistust $\forall \delta, \hat{\delta}$ lugeda kõigi $\delta, \hat{\delta}$ puhul. Avaldis (7.14) väljendab *energiateoreemi*, s.t välisjõudude ja sisejõudude tööde summa on null. Samasus (7.14) jääb kehtima, kui vahetame δ ja $\hat{\delta}$ ning F ja \hat{F} ära

$$G(\hat{\delta}, \delta) \equiv \hat{F} \delta - \hat{\delta} k \delta = 0, \quad \forall \delta, \hat{\delta} \quad (7.15)$$

Vedru teise samasuse saame, kui lahutame avaldisest (7.14) avaldise (7.15)

$$B(\delta, \hat{\delta}) \equiv G(\delta, \hat{\delta}) - G(\hat{\delta}, \delta) = F \hat{\delta} - \hat{F} \delta \quad (7.16)$$

Avaldis (7.16) väljendab Betti¹ teoreemi (*tööde vastastikkuse teoreemi*): *esimese koormusolukorra välisjõudude võimalik töö teise koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel on võrdne teise koormusolukorra välisjõudude võimaliku tööga esimese koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel.*

Vaatleme vedru aktiivtööd $W^{(a)}$ (joonis 7.3). Elastse vedru *deformatsioonienergia* U (vedru sisejõudude potentsiaalne energia Π_s) on võrdne vedru aktiivtööga $W_s^{(a)}$, kuid vastupidise märgiga

$$U(\delta) = \Pi_s(\delta) = -W_s^{(a)}(\delta) = \frac{1}{2} \delta k \hat{\delta} \quad (7.17)$$

Energiateoreem (7.14) aktiivtöö korral

$$\frac{1}{2} G(\delta, \delta) \equiv \frac{1}{2} F \delta - \frac{1}{2} \delta k \delta = 0 \quad (7.18)$$

Vedru potentsiaalne energia $\Pi(\delta)$ koosneb sisejõudude potentsiaalsest energiast $\Pi_s^{(a)}$ ja välisjõudude potentsiaalsest energiast $\Pi_v^{(a)}$

$$\Pi(\delta) = \Pi_v^{(a)} + \Pi_s^{(a)} = \frac{1}{2} \delta k \delta - \frac{1}{2} F \delta \quad (7.19)$$

siin

$$\Pi_v = W_v \quad (7.20)$$

ja W_v on välisjõudude töö.

Vedru potentsiaalse energia (7.19) esimene variatsioon on funktsionaal $\Pi(\delta)$

¹Enrico Betti, itaalia ehitusinsener, 1823–1892.

7.4 Tööde vastastikkuse teoreem

Tööde vastastikkuse teoreem (Betti teoreemi): *esimese koormusolukorra välisjõudude võimalik töö teise koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel on võrdne teise koormusolukorra välisjõudude võimaliku tööga esimese koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel*. Sisejõudude tööde vastastikkuse teoreem *pikk*el on toodud avaldisega (A.26) lk 193.

$$\int_0^l N_x \frac{\hat{N}_x}{EA} dx = \int_0^l \hat{N}_x \frac{N_x}{EA} dx \quad (7.21)$$

ja *paindel* avaldisega (A.41)

$$\underbrace{\int_0^l M_y \frac{\hat{M}_y}{EI_y} dx}_{W_s^I)} = \underbrace{\int_0^l \hat{M}_y \frac{M_y}{EI_y} dx}_{W_s^{II)}} \quad (7.22)$$

Raja- ja välisjõudude töö vastastikkuse teoreem *pikk*el on toodud avaldisega (A.22) lk 193.

$$\underbrace{\vec{N}_x \hat{u}}_{W_r^I} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l q_x(x) \hat{u} dx}_{W_v^I} + F_{xi} \hat{u}_i = \underbrace{\vec{N}_x u}_{\hat{W}_r^{II}} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_x(x) u dx}_{\hat{W}_v^{II}} + \hat{F}_{xi} u_i \quad (7.23)$$

ja *paindel* avaldisega (A.39)

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[\vec{Q}_z \hat{w} + \vec{M}_y \hat{\varphi}_y \right]}_{W_r^I} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx}_{W_v^I} + F_{zi} \hat{w}_i = \\ & = \underbrace{\left[\vec{Q}_z w + \vec{M}_y \varphi_y \right]}_{\hat{W}_r^{II}} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_z(x) w dx}_{\hat{W}_v^{II}} + F_{zi} w_i \end{aligned} \quad (7.24)$$

siin on Q_z , M_y , p_z , w ja φ_y esimese koormusolukorra jõud ja siirded, ning \hat{Q}_z , \hat{M}_y , \hat{p}_z , \hat{w} ja $\hat{\varphi}_y$ teise koormusolukorra jõud ja siirded.

7.5 Siirete vastastikkuse teoreem

Siirete vastastikkuse teoreem on tööde vastastikkuse teoreemi erijuht.

Siirete vastastikkuse teoreem (J. Maxwell²): *kohas k mõjuvale jõule 1_k vastav üldistatud siire, mis on põhjustatud ühikjõust kohas i , võrdub jõule 1_i vastava üldistatud siirdega, mis on põhjustatud ühikjõust kohas k .*

²James Clerk Maxwell, inglise füüsik, 1831–1879.

7.6 Reaktsioonide vastastikkuse teoreem

Reaktsioonide vastastikkuse teoreem (J. Rayleigh³): *sideme j ühiksiirdest põhjustatud reaktsioon sidemes i võrdub sideme i ühiksiirdest põhjustatud reaktsiooniga sidemes j .*

7.7 Siirete arvutamine

Konstruksiooni mingi punkti siirde arvutamisel vaadeldakse konstruksiooni arvutuskeemi kahte tasakaaluolukorda. Ühe olukorrana vaadeldakse koormuse põhjustatud tasakaaluolukorda p ja arvutuskeemis tekkivaid sisejõude tähistatakse sel juhul N_p , Q_p , M_p . Teise olukorrana vaadeldakse tasakaaluolukorda, kus arvutuskeemile mõjub ainult üks otsitavale siirdele vastav üldistatud ühikjõud 1_i . Selles tasakaaluolukorras i sisejõud ja reaktsioonid tähistatakse väikeste tähtedega n_i , q_i , m_i ja c_i .

Võimaliku töö avaldised pikkel (A.18) ja paindel (A.37) on

$$W^p = F_{xi}\hat{u}_i + \int_0^l q_x(x) \hat{u} dx + \vec{N}_x \hat{u} \Big|_0^l - \int_0^l N_x \hat{\lambda} dx = 0 \quad (7.25)$$

$$W^p = F_{zi}\hat{w}_i + \int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + \left[\vec{Q}_z \hat{w} + \vec{M}_y \hat{\varphi}_y \right] \Big|_0^l - \int_0^l M_y \hat{\psi}_y dx = 0 \quad (7.26)$$

Kirjutagem lahti avaldistes (7.25) ja (7.26) esinevad rajaväärtused

$$\vec{N}_x \hat{u} \Big|_a^b = \vec{N}_{xb} \hat{u}_b - \vec{N}_{xa} \hat{u}_a \quad (7.27)$$

$$\left[\vec{Q}_z \hat{w} + \vec{M}_y \hat{\varphi}_y \right] \Big|_a^b = \vec{Q}_{zb} \hat{w}_b + \vec{M}_{yb} \hat{\varphi}_{yb} - \vec{Q}_{za} \hat{w}_a - \vec{M}_{ya} \hat{\varphi}_{ya} \quad (7.28)$$

Tugede siirete mõju arvestamisel võetakse kasutusele II märgikokkulepe. See kokkulepe avaldub toe siirde ja toereaktsiooni korrutises, vt R. Räämet [Rää75] lk 335: „*Korrutis $\Delta c_j \cdot r'_{jk}$ on positiivne, kui paigutise ja reaktsiooni suunad ühtivad, ja negatiivne, kui nad on vastassuunalised.*” Võtame kasutusele parema käe teljestiku (joonis A.1). Seome x-telje varda teljega nii, et x-telg on suunatud varda algusest A lõppu B. Võtame kasutusele II märgikokkuleppe, mille puhul varda lõpus olevate rajavõimude suunad langevad kokku I märgikokkulepes kasutusel olevate suundadega. Varda alguses olevate rajavõimude suunad on vastupidised I märgikokkulepes kasutusel olevate suundadega. Seega langevad varda alguses olevad rajavõimude suunad kokku varda lõpus olevate rajavõimude suundadega. Selgituse kohaselt võtame avaldistes (7.25) ja (7.26) kasutusele

³John William Rayleigh, inglise füüsik, 1842–1919, 1904. a Nobeli preemia.

järgmised tähised:

$$\begin{aligned}
F_{xi} \cdot \hat{u}_i &\equiv \quad , , 1_i'' \cdot u_i \\
N_x \cdot \hat{\lambda} &\equiv \quad n_i \cdot \frac{N_p}{EA} \\
\overleftrightarrow{N}_x \cdot \hat{u} |_a &\equiv \quad -C_a^{(N)} \cdot u_a \\
\overleftrightarrow{N}_x \cdot \hat{u} |^b &\equiv \quad C_b^{(N)} \cdot u_b \\
F_{zi} \cdot \hat{w}_i &\equiv \quad , , 1_i'' \cdot w_i \\
M_y \cdot \hat{\psi}_y &\equiv \quad m_i \cdot \frac{M_p}{EI} \\
\overleftrightarrow{M}_y \cdot \hat{\varphi}_y |_a &\equiv \quad -C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \\
\overleftrightarrow{M}_y \cdot \hat{\varphi}_y |^b &\equiv \quad C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b \\
\overleftrightarrow{Q}_z \cdot \hat{w} |_a &\equiv \quad -C_a^{(Q_z)} \cdot w_a \\
\overleftrightarrow{Q}_z \cdot \hat{w} |^b &\equiv \quad C_b^{(Q_z)} \cdot w_b
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Üldistatud ühikjõu $, , 1_i''$ rakendamisel $q_x(x) = 0$ ja $q_z(x) = 0$. Koormuse põhjustatud tasakaaluolukorra $, , p''$ arvutusskeemis tekkivad sisejõud N_p , Q_p , M_p ja siire leitakse üldistatud ühikjõu $, , 1_i''$ sihis järgmiste avaldistega:

$$, , 1_i'' \cdot u_i = \int_a^b n_i \frac{N_p}{EA} dx - C_b^{(N)} \cdot u_b - C_a^{(N)} \cdot u_a \tag{7.30}$$

$$, , 1_i'' \cdot w_i = \int_a^b m_i \frac{M_p}{EI} dx - C_b^{(Q_z)} \cdot w_b - C_a^{(Q_z)} \cdot w_a - C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b - C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \tag{7.31}$$

Siin on ühikjõust $, , 1_i$ põhjustatud rajajõudude (kontaktjõudude $, , C''$ – *contact force* [KW90]) $C_a^{(N)}$, $C_b^{(N)}$, $C_a^{(Q_z)}$, $C_b^{(Q_z)}$, $C_a^{(M_y)}$ $\cdot \varphi_a$, $C_a^{(M_y)}$ $\cdot \varphi_b$ ja toe siirete u_a , u_b , w_a , w_b , φ_a , φ_b korrutised positiivsed siis, kui nende suunad ühtivad.

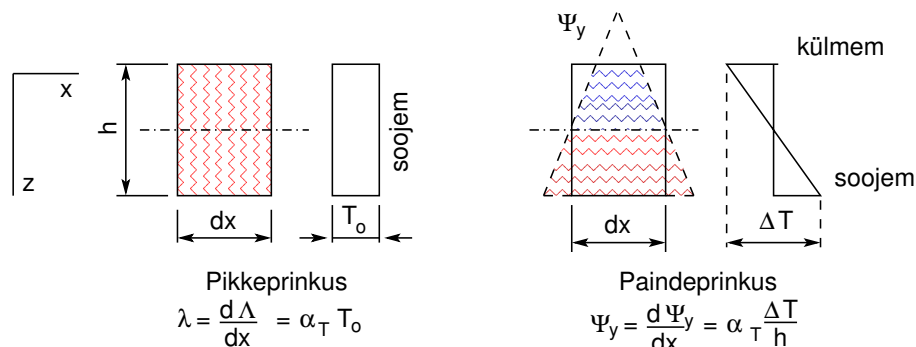
7.8 Siirded temperatuuri muutusest

Joonisel 7.6 on vardast eraldatud elementaarlõik pikkusega dx . Temperatuuri muutust z-telje positiivsel poolel tähistame $T_{(+)}$ ja z-telje negatiivsel poolel $T_{(-)}$. Temperatuuri tõusmisel varda elementaarlõigu ülemised ja alumised kiud pikenevad $\alpha_T \cdot T_{(+)} dx$ ja $\alpha_T \cdot T_{(-)} dx$. Varda elementaarlõigu pikenemine

$$\lambda = \alpha_T \cdot T_0 \tag{7.32}$$

kus α_T on materjali joonpaisumistegur. Näiteks ehitusterasel (St 37) $\alpha_T = 1.1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$. Kui ristlõige on mõlema peatelje suhtes sümmeetriline, siis arvutatakse temperatuuri muut telgjoonel valemiga

$$T_0 = \frac{1}{2} (T_{(+)} + T_{(-)}) \tag{7.33}$$



Joonis 7.6. Prinkused temperatuuri muutusest

Kui aga ristlõige ei ole peatelje suhtes sümmeetriline, siis arvutatakse temperatuuri muut telgjoonel järgmise avaldisega:

$$T_0 = \frac{1}{h} (h_{\text{ülemine}} \cdot T_{(+)} + h_{\text{alumine}} \cdot T_{(-)}) \quad (7.34)$$

kus $h_{\text{ülemine}}$ ja h_{alumine} on tala ristlõike ülemiste ja alumiste kiudude kaugused varda telgjoonest.

Ülemiste ja alumiste kiudude erinevast temperatuuri muutusest tingitud varda kõverdumist nimetatakse temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud prinkuseks ψ_y

$$\psi_y = \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T \quad (7.35)$$

siin

$$\Delta T = (T_{(+)} - T_{(-)}) \quad (7.36)$$

Temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamiseks asendame valemities (7.25), (7.26) $\hat{\lambda}$ ja $\hat{\psi}_y$ avaldistega (7.32), (7.35). Koormusest põhjustatud siirete arvutamiseks valemities (7.30), (7.31) saab järgmised temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamise avaldised:

$$, , 1_i'' \cdot u_i = \int_a^b n_i \alpha_T \cdot T_0 dx - C_b^{(N)} \cdot u_b - C_a^{(N)} \cdot u_a \quad (7.37)$$

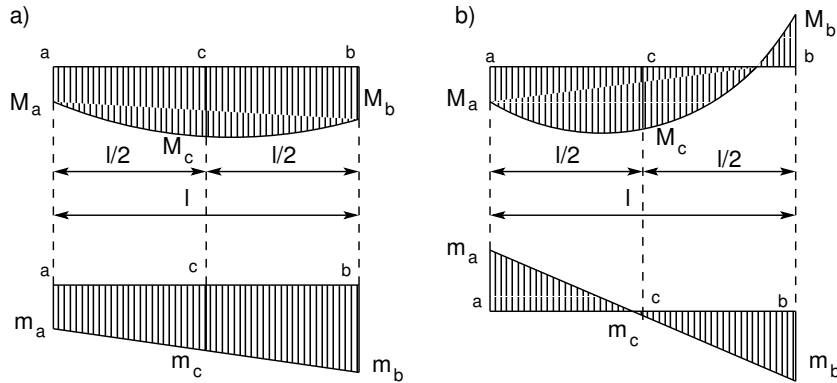
$$, , 1_i'' \cdot w_i = \int_a^b m_i \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T dx - C_b^{(Q_z)} \cdot w_b - C_a^{(Q_z)} \cdot w_a - C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b - C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \quad (7.38)$$

Avaldises (7.37) esineva integraali märk sõltub sisejõu n_i ja temperatuurist põhjustatud pikkeprinkuse $\alpha_T \cdot T_0$ märkidest. Kui sisejõud n_i ja $\alpha_T \cdot T_0$ on ühemärgilised, siis on integraali märk positiivne.

Avaldises (7.38) esineva integraali märgi võib määrata ka varda deformeerunud kuju järgi: kui ühikjõust põhjustatud kõverus $\frac{mn_i}{EI}$ ja temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud kõverus $\alpha_T \frac{1}{h} \Delta T$ on ühesuunalised, siis on korrutis positiivne vastupidisel juhul negatiivne. Viimase kõveruse hindamisel arvestame, missugused kiud pikenevad ja missugused lühenevad.

7.9 Numbriline integreerimine

Paljude varraskonstruksiooni ülesannete lahendamisel tuleb arvutada siirdeid. Sirgetest varrastest koosneva konstruksiooni elementide siirded leitakse valemitega (7.30) ja (7.31), milles on piki- ja paindemomentide integraalid. Vaatleme nende integraalide numbrilist integreerimist. Kasutame lühiduse mõttes järgmist tähistust $m_i \frac{M_p}{EI} \equiv f(x)$. Seega vaatleme integraali $\int_a^b f(x) dx$ numbrilist integreerimist.



Joonis 7.7. Märgikokkulepped

7.9.1 Simpsoni valem

Simpsoni⁴ valemi puhul jagame pideva funktsiooni $f(x)$ integreerimisel lõigu $[a, b]$ pikusega l pooleks ($l/2$ ja $l/2$) ja saame

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{l}{6} [f(a) + 4 \cdot f(c) + f(b)] \quad (7.39)$$

kus $f(a)$ – funktsiooni väärtus lõigu alguses,

$f(c)$ – funktsiooni väärtus lõigu keskel,

$f(b)$ – funktsiooni väärtus lõigu lõpus.

Simpsoni valem (7.39) annab täpse tulemuse kuni kuuppolünoomini.

Simpsoni valemi (7.39) kuju integreerimisvahemiku a - b paarisarvuliseks n võrdseks osaks jagamisel $\Delta s = l/n$

$$\int_a^b f(s) ds \approx \frac{\Delta s}{3} [f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 4 \cdot f_3 + 2 \cdot f_4 + \dots \\ \dots + 2 \cdot f_{n-2} + 4 \cdot f_{n-1} + f_n] \quad (7.40)$$

Joonisel 7.7 a on koormusest põhjustatud epüüri M_p ja ühikjõust põhjustatud epüüri m_i ordinaadid ühesuguste märkidega. Joonisel 7.7 b on epüüridel M_p ja m_i otstes erinevad märgid. Siirete arvutamiseks rakendame Simpsoni valemit (7.39)

$$\int_a^b m_i \cdot \frac{M_p}{EI} dx = \frac{l}{6} \left[m_a \frac{M_a}{EI} + 4 \cdot m_c \frac{M_c}{EI} + m_b \frac{M_b}{EI} \right] \quad (7.41)$$

⁴T. Simpson sai selle valemi 1743. aastal.

Valemis (7.41) on korrutised $m_a \frac{M_a}{EI}$, $m_c \frac{M_c}{EI}$ ja $m_b \frac{M_b}{EI}$ positiivsed, kui ühikjõust ja koormusest põhjustatud epüüride ordinaadid on varda samal poolel, ja negatiivsed, kui epüüride ordinaadid on vastupidiste märkidega. Näiteks joonisel 7.7 b on lõigu algul (punktis a) ja lõpus (punktis b) epüüride ordinaatide korrutis negatiivne, kuna ordinaadid on suunatud eri poole. Lõigu keskel (punktis c) on epüüride ordinaatide korrutis positiivne. Simpsoni valemiga (7.41) saab täpse tulemuse lineaarsete epüüride korrutise, lineaarsete ja ruutparaboolse epüüri korrutise korral. Kõrgemat järku epüüride korrutise puhul tuleb kasutada $3/8$ valemit (7.47).

Numbrilisel integreerimisel Simpsoni valemiga (7.41) kasutame arvutusprogrammi *Octave*. Vektorite \mathbf{a} (7.42) ja \mathbf{b} (7.43) korrutamiseks kasutame element-element korrutamist (vt paragrahvi B.5 avaldist (B.24) lk 201). Korrutamise tulemus on näidatud avaldisega (7.44)

$$\mathbf{a} = [m_a \quad m_c \quad m_b] \quad (7.42)$$

$$\mathbf{b} = [M_a \quad M_c \quad M_b] \quad (7.43)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [m_a \cdot M_a \quad m_c \cdot M_c \quad m_b \cdot M_b] \quad (7.44)$$

Võtame kasutusele Simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori \mathbf{smps} , mille transponeeritud kuju on toodud avaldisega (7.45)

$$\mathbf{smps}' = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} l & l & l \\ EI & 4 \cdot EI & EI \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

Element-element korrutamise saadud tulemuse (7.44) korrutame skalaarselt (vt avaldist B.14 lk 199) vektoriga (7.45). Tulemuseks on Simpsoni valem (7.41).

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{smps} &= \frac{1}{6} [m_a \cdot M_a \quad m_c \cdot M_c \quad m_b \cdot M_b] \begin{bmatrix} \frac{l}{EI} \\ 4 \cdot \frac{l}{EI} \\ \frac{l}{EI} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l}{6} \left[m_a \frac{M_a}{EI} + 4 \cdot m_c \frac{M_c}{EI} + m_b \frac{M_b}{EI} \right] \end{aligned} \quad (7.46)$$

7.9.2 Simpsoni $3/8$ valem

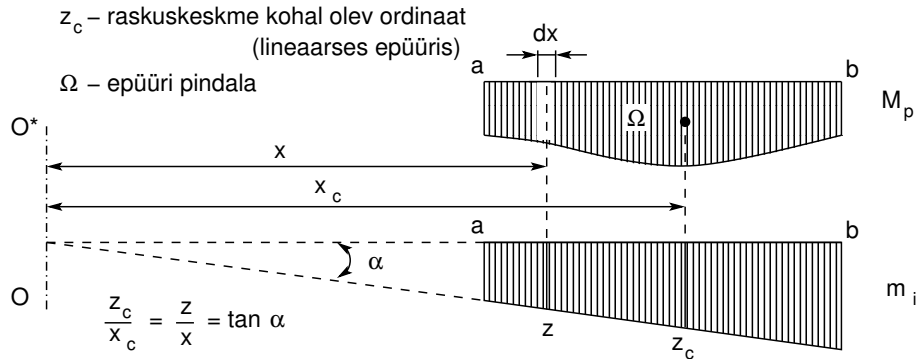
Simpsoni $3/8$ valemit kasutades jagame pideva funktsiooni $f(x)$ integreerimisel lõigu $[a, b]$ pikkusega l kolmeks ($l/3$, $l/3$ ja $l/3$) ja saame

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{l}{8} [f(a) + 3 \cdot f(c) + 3 \cdot f(d) + f(b)] \quad (7.47)$$

kus $f(a)$ – funktsiooni väärtus lõigu alguses,
 $f(c)$ – funktsiooni väärtus $\frac{1}{3}$ lõigul $[a, b]$,
 $f(d)$ – funktsiooni väärtus $\frac{2}{3}$ lõigul $[a, b]$,
 $f(b)$ – funktsiooni väärtus lõigu lõpus.

7.9.3 Vereštšagini võte

Vereštšagini⁵ võtte integraali arvutamisel, kui $EI = konst$ ja üks epüüridest on lineaarne. Joonisel 7.8 on ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür lineaarne ja tema ordinaadi



Joonis 7.8. Vereštšagini võtte

m_i saab avaldada $m_i = z = x \cdot \tan \alpha$. Siirde valemi integraali teisendame kujule

$$\Delta_{ip} = \int_a^b m_i \frac{M_p}{EI} dx = \frac{\tan \alpha}{EI} \int_a^b x \cdot M_p dx \quad (7.48)$$

Epüüri M_p staatiline moment telje OO^* suhtes

$$\Omega \cdot x_c = \int_a^b x \cdot M_p dx \quad (7.49)$$

Siirde valemi integraalis (7.48) asendame $\int_a^b x \cdot M_p dx$ avaldisega (7.49). Jooniselt 7.8 näeme, et $x_c \cdot \tan \alpha = z_c$, kus viimane on koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pindala Ω raskuskeskme kohal olev ordinaat z_c teises *lineaarselt* muutuv epüüris. Eelnenut arvesse võttes avaldub siirde valemi integraal (7.48) järgmiselt:

$$\Delta_{ip} = \Omega \cdot x_c \frac{1}{EI} \quad (7.50)$$

Seega on paindemomendi epüüride m_i , M_p ordinaatide korrutise integraal lõigul $[a, b]$ võrdne korrutisega, mille üheks teguriks on epüüri pindala ja teiseks teguriks epüüri pindala raskuskeskme kohal olev ordinaat teises *lineaarselt* muutuv epüüris. Korrutis $\Omega \cdot z_c$ on positiivne, kui koormusest põhjustatud paindemomendi epüür M_p ja ordinaat z_c on sama märgiga. Joonisel 7.9 on näidatud lihtsate epüüride pindalad ja nende raskuskeskmete kaugused.

Epüüri raskuskeskme arvutamise asemel on lihtsam kasutada Simpsoni valemit.

⁵A. N. Vereštšagin, Moskva Raudteetranspordi Inseneride Instituudi üliõpilane, esitas selle valemi 1925. aastal.

7.9.4 Siirete arvutamise näited

Näide 7.1 Vaatleme siirete arvutust 1) koormusest, 2) temperatuuri muutusest, 3) tugede siiretest (näide on võetud raamatust [Rää75] lk 346). Arvutada joonisel 7.10 a) kujutatud muratud varda arvutusskeemi ristlõike c vertikaalsiire, toeristlõike a horisontaalsiire ja toeristlõike b pööre 1) koormusest, 2) temperatuuri muutusest, 3) tugede siiretest. Temperatuur tõuseb sisepool 10°C ja välispool vasakul ning üleval 20°C ja paremal 10°C võrra. Varraste ristlõiked on sümmeetrilised, ristlõigete inertsimomendid $I_1 = I_3 = I$ ja $I_2 = 2I$ ning ristlõigete kõrgused $h_1 = h_3 = 50$ cm ja $h_2 = 60$ cm. Joonpaisumistegur $\alpha = 2.1 \cdot 10^{-5}$. Tugi a vajub $\Delta a_z = 2$ cm ja tugi b $\Delta b_z = 1$ cm ning nihkub vasakult paremale $\Delta b_x = 0.5$ cm võrra.

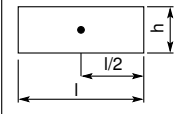
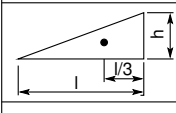
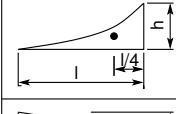
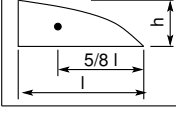
Koormusest põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.10 b. Ristlõike c vertikaalsiirde arvutamiseks rakendatakse sinna ühikjõudu. Ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.10 c. Vertikaalsiirde w_{cp} arvutamiseks vaatleme epüüri M_p (joonis 7.10 b) ja epüüri m_c (joonis 7.10 c). Määrame integreerimisrajad (korrutisel $m_c \cdot M_p$ ei tohi vaadeldaval lõigul olla murdepunkte).

$$w_{cp} = \int_c^d m_c \frac{M_p}{E2I} dx + \int_e^c m_c \frac{M_p}{E2I} dx \quad (7.51)$$

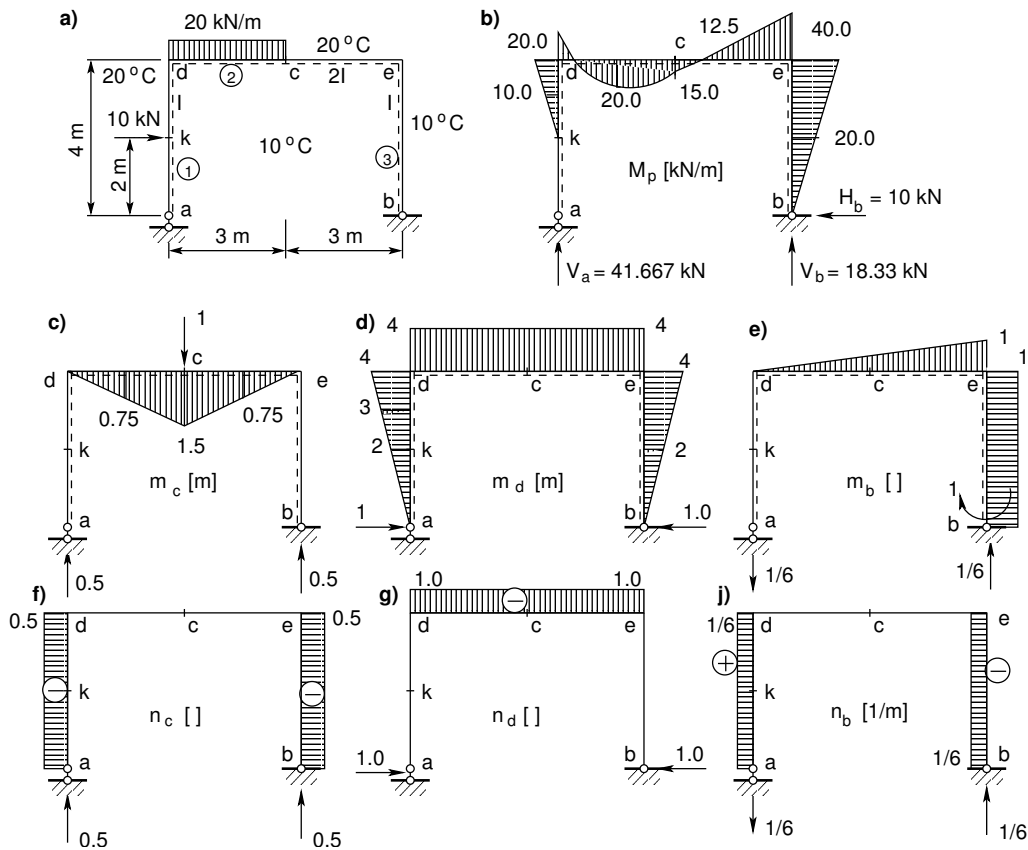
Avaldise (7.51) mõlemad integraalid arvutame Simpsoni valemi (7.41) järgi

$$\begin{aligned} w_{cp} &= \frac{3.0}{6E2I} [0 * 20.0 + 4 * 0.75 * 20.0 + 1.5 * 15.0] + \\ &+ \frac{3.0}{6E2I} [1.5 * 15.0 - 4 * 0.75 * 12.5 + 0 * 40.0] = \\ &= 16.875 \frac{1.0}{EI} \approx 16.9 \frac{1.0}{EI} \text{ cm} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Ristlõikesse a rakendatud horisontaalsest ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.10 d). Toeristlõike a horisontaalsiirde arvutamiseks vaatleme epüüri M_p (joonis 7.10 b)

Epüüri kuju	Epüüri pindala	Raskuskeskme kaugus
	$l \cdot h$	$1/2 l$
	$1/2 l \cdot h$	$1/3 l$
	$1/3 l \cdot h$	$1/4 l$
	$2/3 l \cdot h$	$5/8 l$

Joonis 7.9. Epüüride pindalad



Joonis 7.10. Siirete arvutus

ja epüüri m_d (joonis 7.10 d. Määrame integreerimisrajad (korrutisel $m_d \cdot M_p$ ei tohi vaadeldaval lõigul olla murdepunkte).

$$u_{ap} = \int_d^k m_d \frac{M_p}{EI} dx + \int_c^d m_d \frac{M_p}{E2I} dx + \int_e^c m_d \frac{M_p}{E2I} dx + \int_b^e m_d \frac{M_p}{E2I} dx \quad (7.53)$$

Avaldise (7.53) esimesed kaks integraali arvutame Simpsoni valemi (7.41) järgi. Viimase kahe integraali arvutamiseks kasutame Vereštšagini võtet (7.50).

$$\begin{aligned} u_{ap} &= \frac{2.0}{6EI} [2 * 0 + 4 * 3 * 10.0 + 4.0 * 20.0] + \\ &+ \frac{3.0}{6E2I} [4 * 20.0 - 4 * 4 * 20.0 - 4 * 15.0] + \\ &+ \frac{1.0}{E2I} (12.5 * 3) * 4 + \frac{1.0}{EI} \left(\frac{1}{2} 40.0 * 4 \right) \left(\frac{2}{3} 4 \right) = 280 \frac{1.0}{EI} m \end{aligned} \quad (7.54)$$

Toeristlõikesse b rakendatud ühikmomendist põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.10 e. Määrame integreerimisrajad (korrutisel $m_e \cdot M_p$ ei tohi vaadeldaval lõigul olla murdepunkte).

$$\varphi_{bp} = \int_d^c m_e \frac{M_p}{EI} dx + \int_c^e m_e \frac{M_p}{E2I} dx + \int_e^d m_e \frac{M_p}{E2I} dx \quad (7.55)$$

Avaldise (7.55) esimesed kaks integraali arvutame Simpsoni valemi (7.41) järgi. Viimase integraali arvutamiseks kasutame Vereštšagini võtet (7.50).

$$\begin{aligned}\varphi_{bp} &= \frac{3.0}{6E2I} [0 * 20.0 - 4 * 0.25 * 20.0 - 0.5 * 15.0] + \\ &+ \frac{3.0}{6E2I} [-0.5 * 15.0 + 4 * 0.75 * 12.5 + 1 * 40.0] + \\ &+ \frac{1.0}{EI} \left(\frac{1}{2} 40.0 * 4 \right) * 1 = \\ &= 90.625 \frac{1.0}{EI} \text{ rad} \approx 90.6 \frac{1.0}{EI} \text{ rad}\end{aligned}\quad (7.56)$$

Sümmeetriliste ristlõigetega varraste puhul arvutatakse temperatuuri muutus varda telgjoonel valemiga (7.33)

$$T_{01} = \frac{1}{2} (T_{(+)} + T_{(-)}) = \frac{1}{2} (10 + 20) = 15^\circ\text{C} \quad (7.57)$$

$$T_{02} = T_{01} = 15^\circ\text{C} \quad (7.58)$$

$$T_{03} = \frac{1}{2} (10 + 10) = 10^\circ\text{C} \quad (7.59)$$

Temperatuuri muutused varraste alumiste ja ülemiste kiudude vahel on järgmised (7.36):

$$\Delta T_1 = \Delta T_2 = (T_{(-)} - T_{(+)}) = 10 - 20 = -10^\circ\text{C} \quad (7.60)$$

$$\Delta T_3 = 10 - 10 = 0^\circ\text{C} \quad (7.61)$$

Süüded temperatuuri muutusest arvutatakse valemitega (7.37), (7.38)

$$\Delta_{iT} = \int_a^b n_i \alpha_T \cdot T_0 dx + \int_a^b m_i \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T dx \quad (7.62)$$

Ristlõike c vertikaalsiire temperatuuri muutusest

$$\begin{aligned}w_{ct} &= 1.2 * 10^{-5} \left[15 \left(-\frac{1}{2} * 4 \right) + 10 \left(-\frac{1}{2} * 4 \right) \right] + \\ &+ 1.2 * 10^{-5} \left[-\frac{10}{0.6} * \frac{1.5 * 6.0}{2} \right] = \\ &= -15 * 10^{-4} \text{ m} = -1.5 \text{ mm}\end{aligned}\quad (7.63)$$

Toeristlõike a horisontaalsiire temperatuuri muutusest

$$\begin{aligned}u_{at} &= 1.2 * 10^{-5} [15 (0 * 4) + 15 (-1 * 6) + 10 (0 * 4)] + \\ &+ 1.2 * 10^{-5} \left[-\frac{10}{0.5} \left(-\frac{4 * 4.0}{2} \right) + \frac{-10}{0.6} (-4 * 6.0) + \frac{0}{0.5} (4 * 4.0) \right] = \\ &= 564 * 10^{-5} \text{ m} = 5.64 \text{ mm}\end{aligned}\quad (7.64)$$

Toeristlõike b pööre temperatuuri muutusest

$$\begin{aligned}\varphi_{bt} &= 1.2 * 10^{-5} \left[15 \left(\frac{1}{6} * 4 \right) + 15 (0 * 6) + 10 (0 * 4) \right] \\ &+ 1.2 * 10^{-5} \left[-\frac{10}{0.6} \left(-\frac{1 * 6.0}{2} \right) + \frac{0}{0.5} (-1 * 4.0) \right] = \\ &= 64 * 10^{-5} \text{ rad} = 0.00064 \text{ rad}\end{aligned}\quad (7.65)$$

Süüred tugele nihkumisest arvutatakse valemitega (7.30), (7.31)

$$\begin{aligned} \Delta_{ic} = & -C_b^{(N)} \cdot u_b - C_a^{(N)} \cdot u_a - \\ & -C_b^{(Qz)} \cdot w_b - C_a^{(Qz)} \cdot w_a - C_b^{(My)} \cdot \varphi_b - C_a^{(My)} \cdot \varphi_a \end{aligned} \quad (7.66)$$

$$w_{cr} = -(-2 * 0.5 - 1 * 0.5) = 1.5 \text{ cm} \quad (7.67)$$

$$u_{ar} = -(-0.5 * 1) = 0.5 \text{ cm} \quad (7.68)$$

$$\varphi_{cr} = -\left(2 * \frac{1}{600} - 1 * \frac{1}{600}\right) = -\frac{1}{600} \text{ rad} \quad (7.69)$$

Näide 7.2 Vaatleme eelmist näidet 7.1. Teostame arvutused arvutiprogrammiga Octave (vt lõik C.5 programm C.13 lk 251). Numbrilisel integreerimisel kasutame Simpsoni valemit (7.46 lk 104). Moodustame ühikepüüridest (vt joonist 7.10 c, d ja e) maatriksi \mathbf{M}_x ja koormusest põhjustatud paindemomendi epüürist maatriksi \mathbf{M}_p

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -2.0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -2.0 & 0 \\ 0 & -3.0 & 0 \\ 0 & -4.0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -4.0 & 0.0 \\ 0.75 & -4.0 & -0.25 \\ 1.5 & -4.0 & -0.5 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1.5 & -4.0 & -0.5 \\ 0.75 & -4.0 & -0.75 \\ 0 & -4.0 & -1.0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -4.0 & -1.0 \\ 0 & -2.0 & -1.0 \\ 0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{post 2} \end{array} \quad \mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -10 \\ -20 \\ \dots \\ -20 \\ 20 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ -12.5 \\ -40 \\ \dots \\ -40 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

Võtame kasutusele Simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori \mathbf{smps} ja varda telgjoonel tem-

peratuuri kirjeldava vektori \mathbf{T}_o , mille transponeeritud kuju on toodod avaldisega (7.71)

$$\mathbf{smps} = \frac{1}{6} * \begin{bmatrix} h2/I2 \\ 4 * h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 * h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ L05/I1 \\ 4 * L05/I1 \\ L05/I1 \\ \dots \\ L05/I1 \\ 4 * L05/I1 \\ L05/I1 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 * h2/I2 \\ h2/I2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{post 2} \end{matrix} ; \quad \mathbf{T}_o = 1.2 * 10^{-5} \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (7.71)$$

siin

$$\begin{aligned} h &= 4; & h2 &= h/2; \\ L &= 6; & L05 &= L/2; \\ I1 &= 2; & I2 &= 1; \end{aligned}$$

Simpsoni valemi abil pindalat integreerides ei ole vaja ristlõike inertsimomente $I1$, $I2$. Järgnevalt avaldame simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori $\mathbf{smps0}'$ (7.72)

$$\mathbf{smps0}' = \frac{1}{6} * \left[\begin{array}{ccc} \underbrace{h2 \quad 4 * h2 \quad h2}_{\text{pool posti 1}} & \underbrace{h2 \quad 4 * h2 \quad h2}_{\text{pool posti 1}} & \\ \underbrace{L05 \quad 4 * L05 \quad L05}_{\text{pool riivi}} & \underbrace{L05 \quad 4 * L05 \quad L05}_{\text{pool riivi}} & \\ & \underbrace{h \quad 4 * h \quad h}_{\text{post 2}} & \end{array} \right] \quad (7.72)$$

Ühikjõust põhjustatud normaaljõu epüüridest (vt joonis 7.10 f, g ja j) moodustame maatriksi N_x ja temperatuuri muutusi alumiste ja ülemiste kiudude vahel kirjeldava vektori T_p (7.73)

(paine temperatuurist)

$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ \dots & \dots & \dots \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -0.5 & 0.0 & -1/6 \\ -0.5 & 0.0 & -1/6 \\ -0.5 & 0.0 & -1/6 \end{bmatrix} ; \quad \begin{matrix} \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{post 1 (pool postist 1)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{riiv (pool riivist)} \\ \dots \\ \text{post 2} \end{matrix} \quad \mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} -10 \setminus H_{post} \\ -10 \setminus H_{post} \\ -10 \setminus H_{post} \\ \dots \\ -10 \setminus H_{post} \\ -10 \setminus H_{post} \\ -10 \setminus H_{post} \\ \dots \\ -10 \setminus H_{riiv} \\ -10 \setminus H_{riiv} \\ -10 \setminus H_{riiv} \\ \dots \\ -10 \setminus H_{riiv} \\ -10 \setminus H_{riiv} \\ -10 \setminus H_{riiv} \\ \dots \\ 0 \setminus H_{post} \\ 0 \setminus H_{post} \\ 0 \setminus H_{post} \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

siin

 H_{post} – posti ristlõike kõrgus, H_{riiv} – riivi ristlõike kõrgus.

Vektorite \mathbf{M}_x' (7.70) ja \mathbf{M}_p (7.70) korrutamiseks kasutame element-element korrutamist (vt paragrahvi B.5 avaldist (B.24) lk 201). Tulemuse korrutame veel vektoriga \mathbf{smps} (7.71)

$$\mathbf{W} = \mathbf{M}_x' \cdot [\mathbf{M}_p'; \mathbf{M}_p'; \mathbf{M}_p'] \cdot \mathbf{smps} = \begin{bmatrix} 16.875 \\ 280.000 \\ 90.625 \end{bmatrix} \quad (7.74)$$

Saadud tulemus langeb kokku avaldistega (7.52), (7.54) ja (7.56).

Süirete arutamiseks temperatuurist transponeerime ning korrutame \mathbf{T}_p ja \mathbf{T}_o avaldised (7.73) ja (7.71) joonpaisumisteguriga ($\alpha = 2.1 \cdot 10^{-5}$) läbi.

$$\mathbf{T}_p \mathbf{T} = \alpha \cdot \mathbf{T}_p' \quad (7.75)$$

$$\mathbf{T}_o \mathbf{T} = \alpha \cdot \mathbf{T}_o' \quad (7.76)$$

Korrutame epüürid temperatuuri ja temperatuuri erinevustega

$$\mathbf{M}_x \mathbf{T} \mathbf{T}_p = \mathbf{M}_x' \cdot [\mathbf{T}_p \mathbf{T}; \mathbf{T}_p \mathbf{T}; \mathbf{T}_p \mathbf{T}] \quad (7.77)$$

$$\mathbf{N}_x \mathbf{T} \mathbf{T}_o = \mathbf{N}_x' \cdot [\mathbf{T}_o \mathbf{T}; \mathbf{T}_o \mathbf{T}; \mathbf{T}_o \mathbf{T}] \quad (7.78)$$

Leiame siirded temperatuurist

$$\mathbf{W} \mathbf{T} = \mathbf{M}_x \mathbf{T} \mathbf{T}_p \cdot \mathbf{smps}_0 + \mathbf{N}_x \mathbf{T} \mathbf{T}_o \cdot \mathbf{smps}_0 = \begin{bmatrix} -1.5000e^{-03} \\ 5.6400e^{-03} \\ 6.4000e^{-04} \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

Leitud tulemus (7.79) ühtib tulemustega (7.63), (7.64) ja (7.65).

Osa II

Staatiliselt määratud süsteemid

Peatükk 8

Staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutus

8.1 Staatikaga määramatu konstruktsioon

Konstruktsiooni arvutuskeem on staatikaga määramatu, kui kõik sisejõud ja toereaktsioonid ei ole arvutatavad ainult tasakaaluvõrranditest.

Staatikaga määramatu konstruktsiooni arvutamisel esineb kahte liiki tundmatuid.

Joonisel 8.1 a on näidatud tala, mille sisejõudude ja toereaktsioonide leidmiseks ei piisa staatika tasakaaluvõrranditest.

Tundmatute arv n

$$n = 8 \times n_{\text{varras}} + n_{\text{tugi}}; \quad (8 = 4_{\text{jõudu}} + 4_{\text{siiret}})$$

kus n_{varras} – varraste arv;

n_{tugi} – toereaktsioonide arv.

Tasakaalu- ja siirdevõrrandid

$$n_{\text{varda tasakaalu}} = 2 \times n_{\text{varras}}$$

$$n_{\text{varda siire}} = 2 \times n_{\text{varras}}$$

$$n_{\text{sõlme tasakaalu}} = 2 \times n_{\text{sõlm}}$$

$$n_{\text{sõlme siire}} = 2 \times n_{\text{sõlm}}$$

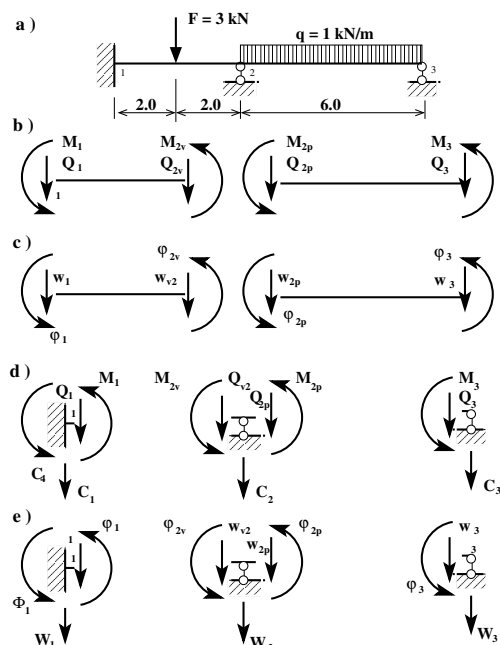
Toetingimused on võrrandites:

$n_{\text{sõlme tasakaalu}}$ sisaldab võrrandit $M_3 = 0$;

$n_{\text{sõlme siire}}$ sisaldab nelja võrrandit $\varphi_1 = 0$,

$w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$.

Ülejäänud kaks $n_{\text{sõlme siire}}$ siirdevõrrandit seovad sõlmes 2 siirded ja pöörded.



Joonis 8.1. Tundmatud ja võrrandid

Varraste otstes esinevaid rajajõude ehk kontaktjõude (vahel lihtsuse mõttes nime-

tatakse neid ka sisejõududeks vt [Rää75] lk 369) ja toereaktsioone nimetatakse *staatikalisteks tundmatuteks* (staatikalisteks rajatingimusteks). Varraste otstes esinevaid rajasiirdeid nimetatakse *kinemaatilisteks tundmatuteks* (kinemaatilisteks rajatingimusteks). Nüüdisaegne arvutustehnika võimaldab neid tundmatuid arvutada ühel ajal. Üheks selliseks meetodiks on rajaelementide meetod (REM) [Har87]. Täpse lahendi rajajõududele ja rajasiiretele saab EST meetodiga [Lah97a], [Lah97b], [Lah98a], [Lah98b].

Suurte hõredate mittesümmeetriliste võrrandisüsteemide lahendamiseks on loodud häid meetodeid.

Kui kõiki tundmatuid ei arvutata ühel ajal, koostatakse võrrandisüsteem esialgu leitavatele tundmatutele ehk *lisatundmatutele*. Ülejäänud teised tundmatud arvutatakse koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena. Sõltuvalt sellest, missugused tundmatud võetakse lisatundmatuteks, jagatakse arvutusmeetodid järgmiselt:

- *Jõumeetodi* puhul valitakse lisatundmatuteks varraste otstes olevad rajajõud. Lisatundmatute leidmiseks koostatakse võrrandisüsteem geomeetriliste pidevustingimuste alusel.
- *Siirde- ehk deformatsioonimeetodi* puhul valitakse lisatundmatuteks raami sõlmede siirded. *Kinemaatiliste lisatundmatute* leidmiseks koostatakse võrrandisüsteem sõlmede tasakaalutingimuste alusel.
- *Segameetodi* puhul võetakse lisatundmatuteks osalt siirded ja osalt jõud.
- *Tervikmeetodi* (ingl *Integrity Method*) puhul koostatakse võrrandisüsteem kõigi tundmatute kohta (ei tehta vahet lisatundmatute ja ülejäänud tundmatute vahel) korraga.

Staatiliselt määramatute konstruktsioonide üheks iseloomulikumaks iseärasuseks on see, et nende sisejõudude jaotus oleneb varraste ristlõike jäikusest. Tugede siirded ja ka temperatuuri muutus kutsuvad esile sisejõude.

8.2 Staatikaga määramatute konstruktsioonide omadused

Loetelu on võetud raamatust [Rää75].

1. Staatikaga määramatul konstruktsioonil on lõpmata palju lahendeid, mis rahuldavad tasakaalutingimusi, kuid ainult üks neist rahuldab ka deformatsioonide pidevuse tingimusi.
2. Staatikaga määramatul konstruktsioonil on liigsideid. *Liigside* on niisugune element, mille eemaldamisel ülejäänud konstruktsiooniosa on ikka geomeetriselt muutumatu.

8.2. STAATIKAGA MÄÄRAMATUTE KONSTRUKTSIOONIDE OMADUSED 117

3. Tingimata vajalikes sidemetes on sisejõud leitavad tasakaalutingimustega. Tingimata vajaliku sideme eemaldamisel muutub osa konstruktsioonist geomeetriliselt muutuvaks.
4. Temperatuuri muutus, tugevate siirded ja konstruktsiooni elementide mõõtmete ebatäpsus võib põhjustada staatikaga määramatus konstruktsioonis sisejõudusid. Tingimata vajalikes sidemetes need mõjud sisejõudusid ei põhjusta.
5. Staatikaga määramatu konstruktsiooni sisejõud olenevad varraste jäikusest.
6. Staatikaga määramatus konstruktsioonis võivad esineda pinged ka ilma koormuseta. Neid pingeid nimetatakse *eelpingeteks*.

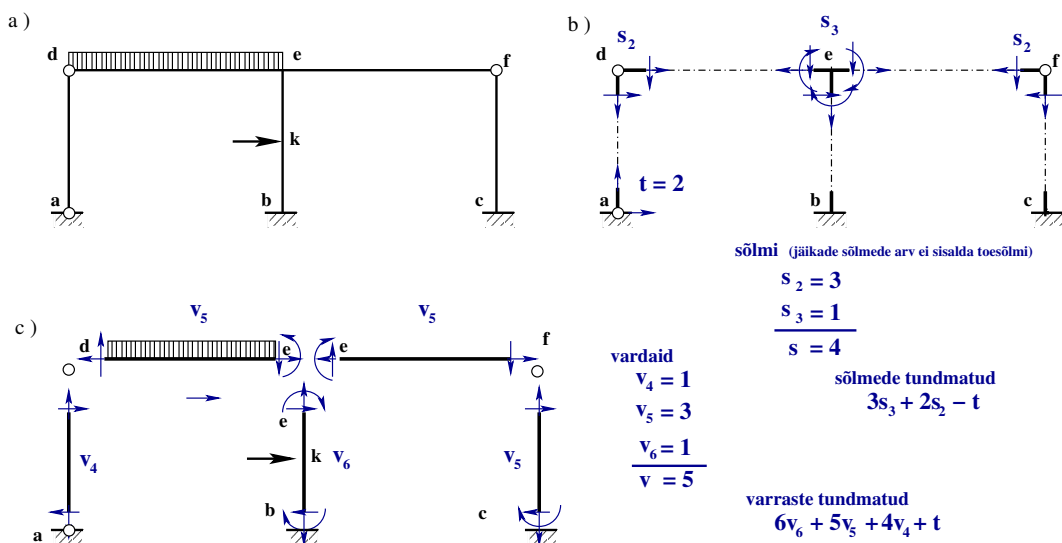
Peatükk 9

Jõumeetod

Konstruksiooni varraste arv v (vt joonis 9.1) koosneb kolmest osast.

$$v = v_6 + v_5 + v_4 \quad (9.1)$$

kus v_6 on mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varraste arv, v_5 ühest otsast jäigalt ja teises otsas liigendiga kinnitatud varraste arv, v_4 mõlemast otsast liigendiga kinnitatud varras. Varraste otstes olevad rajajõud koos toereaktsioonidega on



Joonis 9.1. Tundmatute üldarv

$$6 \cdot v_6 + 5 \cdot v_5 + 4 \cdot v_4 + t \quad (9.2)$$

siin on t liigendtugede toesidemete arv.

Konstruksiooni sõlmede arv s

$$s = s_3 + s_2 \quad (9.3)$$

kus s_2 on liigendsõlmede arv ja s_3 jääkade sõlmede arv, mis ei sisalda jääkasid toesõlmi. Varraste ja sõlmede kohta saab kirjutada

$$3 \cdot v + 3 \cdot s_3 + 2 \cdot s_2 \quad (9.4)$$

tasakaaluvõrrandit. Lisatundmatute arv n on võrdne staatikaliste tundmatute üldarvu (9.2) ja tasakaaluvõrrandite (9.4) arvu vahega

$$n = 6 \cdot v_6 + 5 \cdot v_5 + 4 \cdot v_4 + t - 3 \cdot v - 3 \cdot s_3 - 2 \cdot s_2 \quad (9.5)$$

mida nimetatakse *staatilise määramatuse astmeks*. Kui asetada avaldisse (9.5) varraste üldarv v (9.1), saab

$$n = 3 \cdot v_6 + 2 \cdot v_5 + v_4 + t - 3 \cdot s_3 - 2 \cdot s_2 \quad (9.6)$$

Valemis (9.6) tähistab t ainult liigendtugede toesidemete arvu. Ülesannet nimetatakse n -kordselt staatikaga määramatuks.

9.1 Raamid

9.1.1 Staatikalise määramatuse aste

Avaldis (9.6) kehtib kõigi varrastest moodustatud konstruktsioonide kohta. Raamide staatikalise määramatuse astet saab arvutada lihtsamate valemitega.

Kui konstruktsioonis on nii liigendita kui ka liigenditega suletud kontuure, siis saab staatikalise määramatuse astet arvutada valemiga (9.7)

$$n = 3 \cdot m_1 - l_1 \quad (9.7)$$

siin on m_1 suletud (nii liigendita kui ka liigenditega) kontuuride arv, l_1 – lihtliigendite arv.

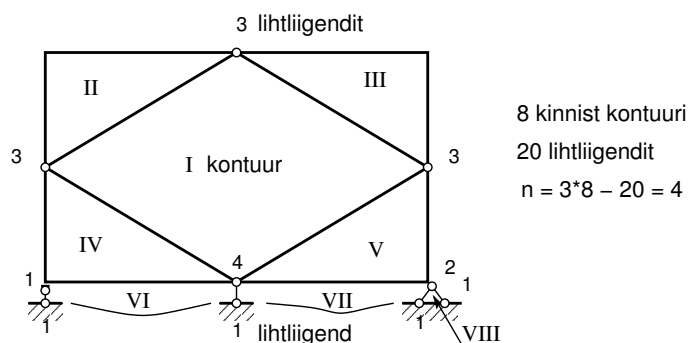
Näiteks raamil (joonis 9.1 a) on suletud kontuuride arv $m_1 = 2$ ja lihtliigendeid $l_1 = 3$. Seega on staatilise määramatuse aste n

$$n = 3 \cdot m_1 - l_1 = 3 \cdot 2 - 3 = 3 \quad (9.8)$$

kolm. Joonisel 9.2 näidatud raamil on 8 kinnist kontuuri ja 20 lihtliigendit.

$$n = 3 \cdot m_1 - l_1 = 3 \cdot 8 - 20 = 4 \quad (9.9)$$

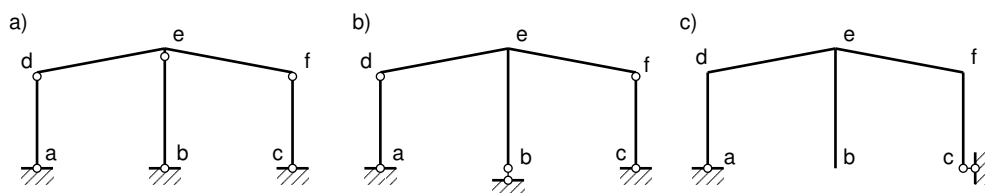
Lihtliigendite arv on ühe võrra väiksem selles liigendis kinnitatud kehade arvust. Näiteks on joonisel 9.2 all vasakus nurgas üks lihtliigend (kinnitatud üks jääk nurk ja toe varras). Samal joonisel üleval keskel olevas liigendis on ühendatud neli keha (varrast) ja lihtliigendite arv on kolm.



Joonis 9.2. Kinnised kontuurid ja lihtliigendid.

9.1.2 Põhiskeem ja lisatundmatud

Staatikaga määramatust raamist saadakse liigsidemete eemaldamisel staatikaga määratav raam. Selliselt saadud uut staatikaga määratavat skeemi nimetatakse *põhiskeemiks*. Jõumeetodi puhul on eemaldatud sidemete asemel rakendatud jõud lisatundmatuteks. Liigsidemeteks võib valida sidemed, mille eemaldamisel skeem ei ole geomeetriselt muutuv (vt joonis 9.3 a ja b) või hetkmuutuv (joonis 9.3 c).



Joonis 9.3. Geomeetriselt ja hetkmuutuvad skeemid

9.1.3 Võrrandid lisatundmatute arvutamiseks

Lisatundmatute X_i leidmiseks koostatakse võrrandid staatikaga määramatu skeemi siirete pidevustingimuste alusel.

Arvutusskeemi suvalise punkti siire arvutatakse jõudude sõltumatuse printsiibi alusel.

$$\Delta_k = \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{k0} \tag{9.10}$$

kus Δ_{k0} on ristlõike k siire koormusest, temperatuurist ja tugevde vajumisest põhjustatud siire põhiskeemis; δ_{ki} on ristlõike k siire lisatundmatust $X_i = 1$.

Kui arvutusskeem on n korda staatikaga määramatu, siis koostatakse n võrrandit:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{10} \\ \Delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{20} \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_k &= \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{k0} \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n0} \end{aligned} \tag{9.11}$$

ehk

$$\Delta_k = \delta_{ki} X_i + \Delta_{k0} \quad (k, i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.12)$$

Võrrandisüsteemi (9.12) nimetatakse *jõumeetodi kanooniliseks võrrandisüsteemiks*.

Võrrandisüsteemi (9.11), (9.12) kordajad δ_{ij} ja Δ_{i0} leitakse valemitega

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i m_j}{EI} + \frac{n_i n_j}{EA} + k_j \frac{q_i q_j}{EA} \right) dx \\ \Delta_{ip} &= \sum \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p^0}{EI} + \frac{n_i N_p^0}{EA} + k_j \frac{q_i Q_p^0}{EA} \right) dx \\ \Delta_{it} &= \sum \int_0^{l_j} \alpha_j \left(\frac{\Delta t_j}{h_j} m_i + t_{0j} n_i \right) dx \\ \Delta_{ir} &= - \sum \Delta c_j r'_{ji} \\ \Delta_{i0} &= \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{ir} \end{aligned} \quad (9.13)$$

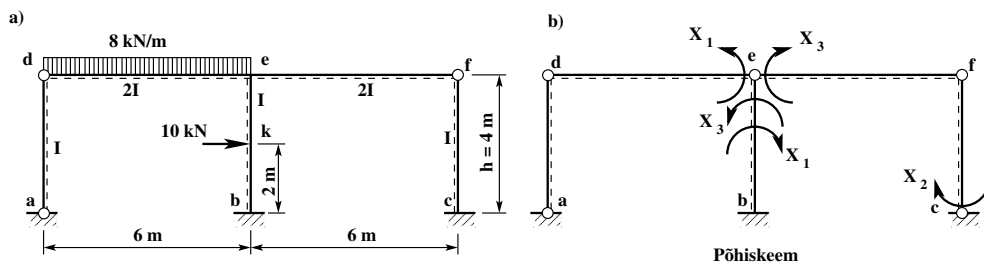
kus α_j – varda j materjali temperatuuri-joonpaisumistegur;

k_j – tegur, mis arvestab nihkepinde ebaühtlast jaotumist varda j ristlõikes, näiteks ristkülikulise ristlõike puhul $k_j = 1.2$.

Võrrandisüsteemi (9.11), (9.12) kordajad δ_{ij} ja Δ_{i0} leidmiseks kasutame numbrilist integreerimist (vt näidet (9.1) ja programmi C.14 lk 255).

9.1.4 Raami arvutamise näited

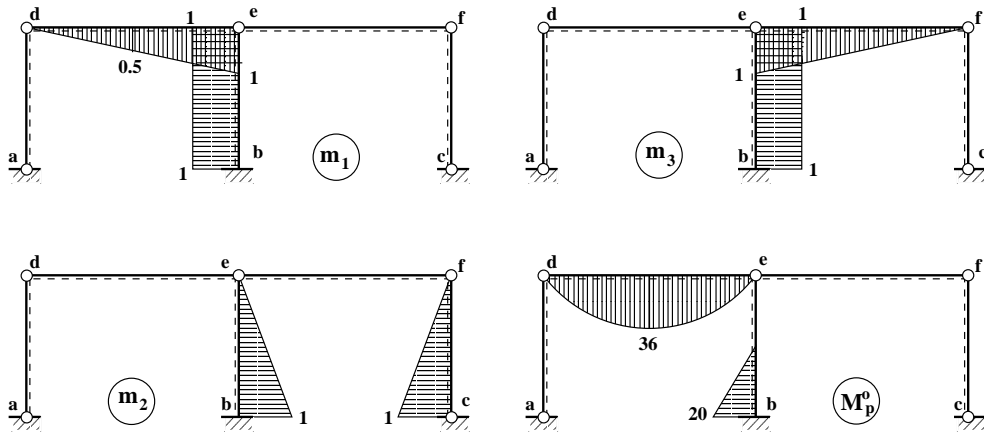
Näide 9.1 Koostada joonisel 9.4 a näidatud raamile paindemomendi epüür, kasutades arvutusprogrammi Octave (programm C.14 lk 255). Raami kõrgus $h = 4$ m ja avad $l = 6$ m. Raami rüüvile $d-e$ on rakendatud ühtlaselt jaotatud koormus $q = 8$ kN/m ja posti $b-e$ keskele koondatud jõud $F = 10$ kN. Raami postide ristlõike jäikus $I_2 = I$ ja rüüvide ristlõike jäikus $I_1 = 2I$.



Joonis 9.4. Raam ja põhiskeemi

Joonisel 9.4 b on näidatud valitud põhiskeem. Selle põhiskeemile vastavad ühikjõududest ja koormusest põhjustatud momendid on näidatud joonisel 9.5.

Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks arvutusprogrammiga Octave (programm C.14 lk 255) esitame ühikjõududest ja koormusest põhjustatud momendid matriksitena M_x ja M_p (vt avaldised (9.14) ja (9.15)). Nendes sõltub avaldistes elementide arv integreerimispiirkondade arvust (kasutame Simpsoni valemit (7.41), kus on momendi väärtused alguses, keskel ja lõpus). Raami varras, millel on koondatud jõud, on jagatud punktis k kaheks. Vaatleme põhiskeemi epüüre joonisel 9.5. Iga varda otsas ja lõpus ning varda $d - e$



Joonis 9.5. Põhiskeemi epüürid

keskel tähistame momendid järgmiselt:

Momentide märgi võtame kokkuleppeliselt. Jooniselt 9.19 võtame positiivse märgiga väärtused, mis asetsevad punktiirjoonega tähistatud poolel ja kanname maatriksisse (9.15) (vt programm C.14).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{ad} \\ M_{adk} \\ M_{da} \\ \dots \\ M_{de} \\ M_{dek} \\ M_{ed} \\ \dots \\ M_{ek} \\ M_{ekk} \\ M_{ke} \\ \dots \\ M_{kb} \\ M_{kbb} \\ M_{bk} \\ \dots \\ M_{fe} \\ M_{fek} \\ M_{ef} \\ \dots \\ M_{fc} \\ M_{fck} \\ M_{cf} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Mx} = \begin{bmatrix} m_{ad}^1 & m_{ad}^2 & m_{ad}^3 \\ m_{adk}^1 & m_{adk}^2 & m_{adk}^3 \\ m_{da}^1 & m_{da}^2 & m_{da}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{de}^1 & m_{de}^2 & m_{de}^3 \\ m_{dek}^1 & m_{dek}^2 & m_{dek}^3 \\ m_{ed}^1 & m_{ed}^2 & m_{ed}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{ek}^1 & m_{ek}^2 & m_{ek}^3 \\ m_{ekk}^1 & m_{ekk}^2 & m_{ekk}^3 \\ m_{ke}^1 & m_{ke}^2 & m_{ke}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{kb}^1 & m_{kb}^2 & m_{kb}^3 \\ m_{kbb}^1 & m_{kbb}^2 & m_{kbb}^3 \\ m_{bk}^1 & m_{bk}^2 & m_{bk}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{ef}^1 & m_{ef}^2 & m_{ef}^3 \\ m_{efk}^1 & m_{efk}^2 & m_{efk}^3 \\ m_{fe}^1 & m_{fe}^2 & m_{fe}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{fc}^1 & m_{fc}^2 & m_{fc}^3 \\ m_{fck}^1 & m_{fck}^2 & m_{fck}^3 \\ m_{cf}^1 & m_{cf}^2 & m_{cf}^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{post 1} \\ \dots \\ \text{riiv 1} \\ \dots \\ \text{pool postist 2} \\ \dots \\ \text{pool postist 2} \\ \dots \\ \text{riiv 2} \\ \dots \\ \text{post 3} \end{matrix}; \quad \mathbf{Mp} = \begin{bmatrix} M_{ad}^o \\ M_{adk}^o \\ M_{da}^o \\ \dots \\ M_{ed}^o \\ M_{edk}^o \\ M_{de}^o \\ \dots \\ M_{ek}^o \\ M_{ekk}^o \\ M_{ke}^o \\ \dots \\ M_{kb}^o \\ M_{kbb}^o \\ M_{bk}^o \\ \dots \\ M_{ef}^o \\ M_{efk}^o \\ M_{fe}^o \\ \dots \\ M_{fc}^o \\ M_{fck}^o \\ M_{cf}^o \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

Raami varras, millel on koondatud jõud, on jagatud kaheks. Nii tuleb kokku 6 integreerimispiirkonda.

Igas piirkonnas on kirjeldatud 3 ordinaati (alguses, keskel, lõpus). Kokku $3 \times 6 = 18$ väärtust igalt epüürilt (ühikepüüridelt $\Rightarrow Mx$ ja $Mp0$ epüürilt $\Rightarrow Mp$). Paremaks jälgimiseks on matriksites (9.15) integreerimispiirkonnad eraldatud punktiiriga.

$$\mathbf{Mx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0.0 & -1 \\ 1 & -0.25 & -1 \\ 1 & -0.5 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & -0.5 & -1 \\ 1 & -0.75 & -1 \\ 1 & -1.0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{matrix} \textit{post 1} \\ \dots \\ \textit{riiv 1} \\ \dots \\ \textit{pool postist 2} \\ \dots \\ \textit{pool postist 2} \\ \dots \\ \textit{riiv 2} \\ \dots \\ \textit{post 3} \end{matrix} \quad \mathbf{Mp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 36 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \textit{post 1} \\ \dots \\ \textit{riiv 1} \\ \dots \\ \textit{pool postist 2} \\ \dots \\ \textit{pool postist 2} \\ \dots \\ \textit{riiv 2} \\ \dots \\ \textit{post 3} \end{matrix} \quad (9.15)$$

Ühikepüüride korrutamiseks kasutame element-element korrutamist (vt paragrahvi B.5 avaldist (B.24) lk 201). Integreerime numbriliselt Simpsoni valemi (7.41) järgi. Selleks korrutame element-element korrutamisega saadud tulemuse skalaarselt (vt avaldist B.14 lk 199)

vektoriga (9.16).

$$\mathbf{smps}^T = \frac{1}{6} * \begin{bmatrix} h/I2 \\ 4 * h/I2 \\ h/I2 \\ \dots \\ L/I1 \\ 4 * L/I1 \\ L/I1 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 * h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 * h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ L/I1 \\ 4 * L/I1 \\ L/I1 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4 * h2/I2 \\ h2/I2 \end{bmatrix} \begin{matrix} post\ 1 \\ \dots \\ riiv\ 1 \\ \dots \\ pool\ postist\ 2 \\ \dots \\ pool\ postist\ 2 \\ \dots \\ riiv\ 2 \\ \dots \\ post\ 3 \end{matrix} \quad (9.16)$$

siin

$$\begin{aligned} h &= 4; & h2 &= h/2; \\ L &= 6; & L05 &= L/2; \\ I1 &= 2; & I2 &= 1; \end{aligned}$$

Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}x_1 & \delta_{12}x_2 & \delta_{13}x_3 \\ \delta_{21}x_1 & \delta_{22}x_2 & \delta_{23}x_3 \\ \delta_{31}x_1 & \delta_{32}x_2 & \delta_{33}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_{1p} \\ -\Delta_{2p} \\ -\Delta_{3p} \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

ehk

$$\delta_{ij}x_i = -\Delta_{ip} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (9.18)$$

koostab ja lahendab arvutiprogramm Octave ise. Saadud lahendit x_i ($i=1,2,3$) kasutame paindemomentide arvutamiseks.

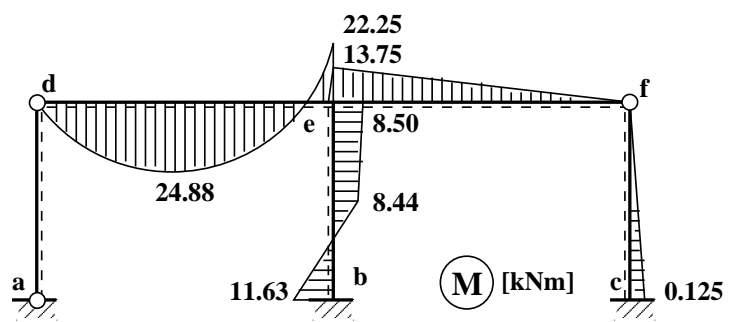
Paindemomendid arvutatakse ühikepüüride m_1, m_2, m_3 (joonis 9.5) korrutamisega vastavate x_i -dega

$$M_p = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + M_p^0 \quad (9.19)$$

Võrrandi (9.19) kirjutame maatrikskujule

$$\mathbf{M} = \mathbf{Mx} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{Mp} \quad (9.20)$$

Saadud tulemuste põhjal koostame (programm C.14) epüüri (joonis 9.6).



Joonis 9.6. Paindemomendi epüür *Octave*'ga

Peatükk 10

Jätkuvtalad

Jätkuvtalaks nimetatakse liigenditeta mitmesildelist tala.

Tasapinnalise geomeetriselt muutumatu kujundi kinnitamiseks on vaja kolme toesidet.

Jätkuvtalal on toesidemeid rohkem kui kolm, seepärast on ta staatikaga määratu.

Staatilise määramatuse aste leitakse valemiga (10.1)

$$n = t - 3 \quad (10.1)$$

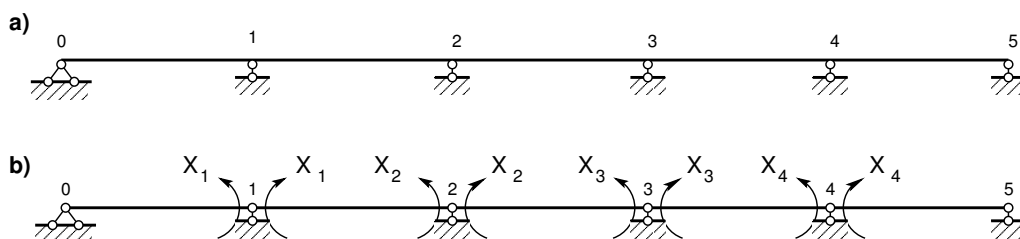
kus t on toesidemete arv

10.1 Põhiskeem ja lisatundmatud

Põhiskeem ja lisatundmatud tuleb valida nii, et kanoonilise võrrandisüsteemi (10.2) kordajaid oleks lihtne arvutada.

$$\delta_{ij}X_j + \Delta_{ip} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (10.2)$$

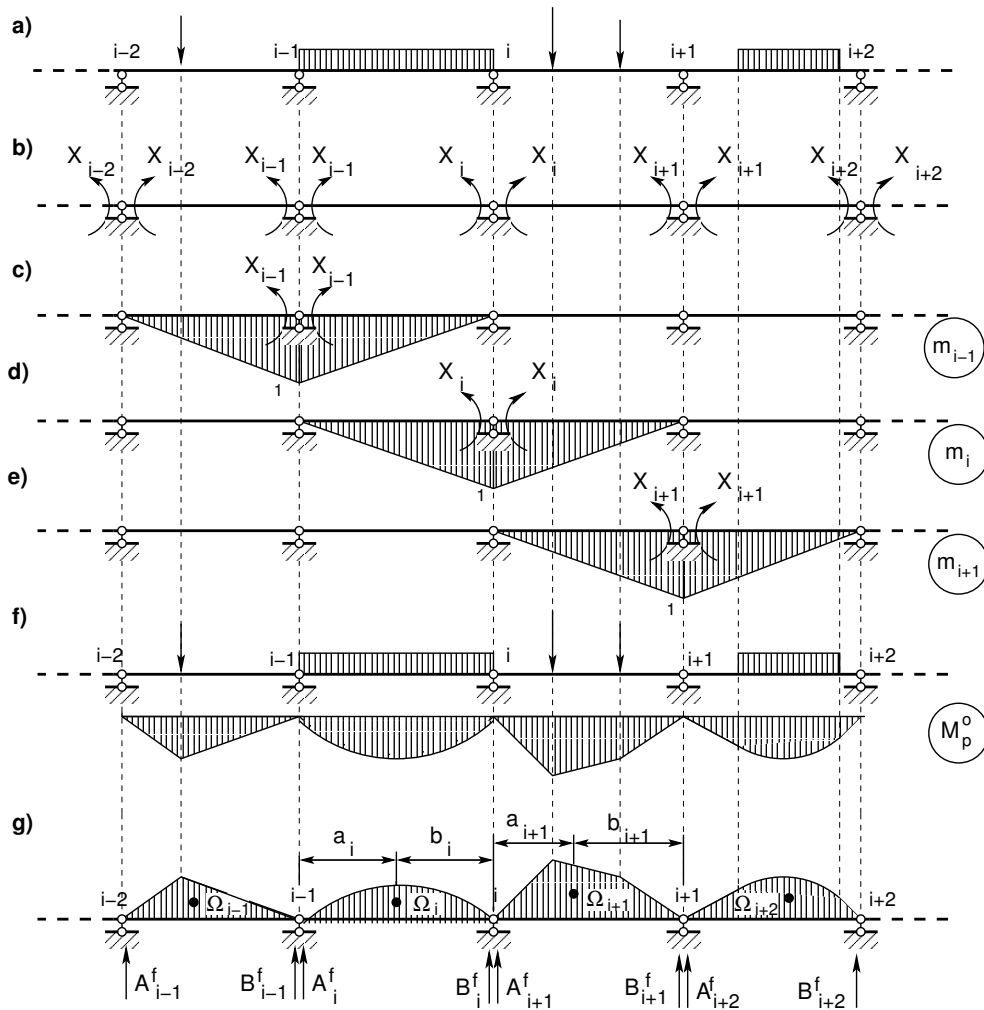
Joonisel 10.1 on lisatundmatuteks valitud toemomendid.



Joonis 10.1. Jätkuvtala põhiskeem

10.2 Kanoonilised võrrandid

Valime jätkuvtala (joonis 10.2 a) põhiskeemi nii, et tundmatuteks on toemomendid X_i (joonis 10.2 b). Võrrandisüsteemi (10.2) kordajad leiame avaldisega



Joonis 10.2. Jätkuvtala ühikepüürid

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{m_i m_j}{EI} ds \quad (10.3)$$

siin on n varraste arv ja EI ristlõike jäikus.

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{m_i M_p^o}{EI} ds \quad (10.4)$$

Ühikepüüride (joonis 10.2 c, d, e) korrutamisel ja integreerimisel saame järgmised nullist erinevad kordajad δ_{ij}

$$EI_o \delta_{i-1} = \frac{1 \cdot 1 \cdot l_i I_o}{6I_i} \quad (10.5)$$

$$EI_o \delta_{ii} = \frac{1 \cdot 1 \cdot l_i I_o}{3I_i} + \frac{1 \cdot 1 \cdot l_{i+1}}{3I_{i+1}} \quad (10.6)$$

$$EI_o \delta_{i+1} = \frac{1 \cdot 1 \cdot l_{i+1} I_o}{6I_{i+1}} \quad (10.7)$$

Koormusliikme Δ_{ip} integreerimisel kasutame Vereštšagini võtet 7.9.3 lk 105.

$$EI_o \Delta_{ip} = \Omega_i \frac{1 \cdot a_i I_o}{l_i I_i} + \Omega_{i+1} \frac{1 \cdot b_{i+1} I_o}{l_{i+1} I_{i+1}} \quad (10.8)$$

Toe i kohta koostatud pidevusvõrrand on

$$\dots + \delta_{i-1} X_{i-1} + \delta_i X_i + \delta_{i+1} X_{i+1} + \dots + \Delta_{ip} = 0 \quad (10.9)$$

Avaldistes (10.5), (10.6), (10.7) ja (10.8) võtame kasutusele järgmised tähistused

$$l'_i = l_i \frac{I_0}{I_i} \quad (10.10)$$

$$B_i^f = \Omega_i \frac{a_i}{l_i} \quad (10.11)$$

$$A_{i+1}^f = \Omega_{i+1} \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}} \quad (10.12)$$

ning asetame võrrandisse (10.9). Saame kolme momendi võrrandi (10.13)

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} - 6A_{i+1}^f \frac{I_0}{I_{i+1}} \quad (10.13)$$

kus $l'_i = l_i \frac{I_0}{I_i}$, ning A_{i+1}^f , B_i^f on fiktiivsed koormused. Fiktiivsed koormused A_i^f , B_i^f on toodud tabelis 10.1 [Rää75]. Ühtlaselt jaotatud koormuse q , ühtlase ristlõike jäikuse ($I_i = I_0$) puhul on avaldis (10.14) ning koondatud jõu F_k puhul avaldised (10.15) ja (10.16).

$$6A_i^f = 6B_i^f = \frac{ql_i^3}{4} \quad (10.14)$$

$$6A_i^f = F_k l_i^2 \cdot \xi_k \cdot \xi'_k (1 + \xi'_k) \quad (10.15)$$

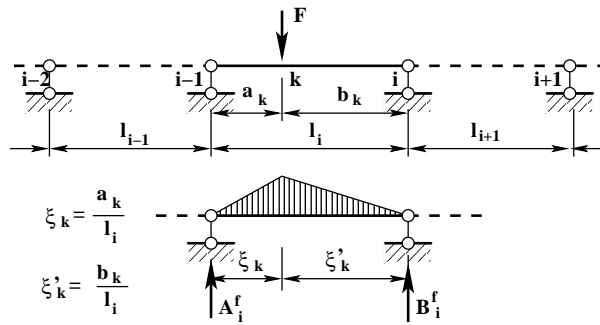
$$6B_i^f = F_k l_i^2 \cdot \xi_k \cdot \xi'_k (1 + \xi_k) \quad (10.16)$$

Siin $\xi_k = \frac{a_k}{l_i}$ ja $\xi'_k = \frac{b_k}{l_i}$ (vt joonis 10.3).

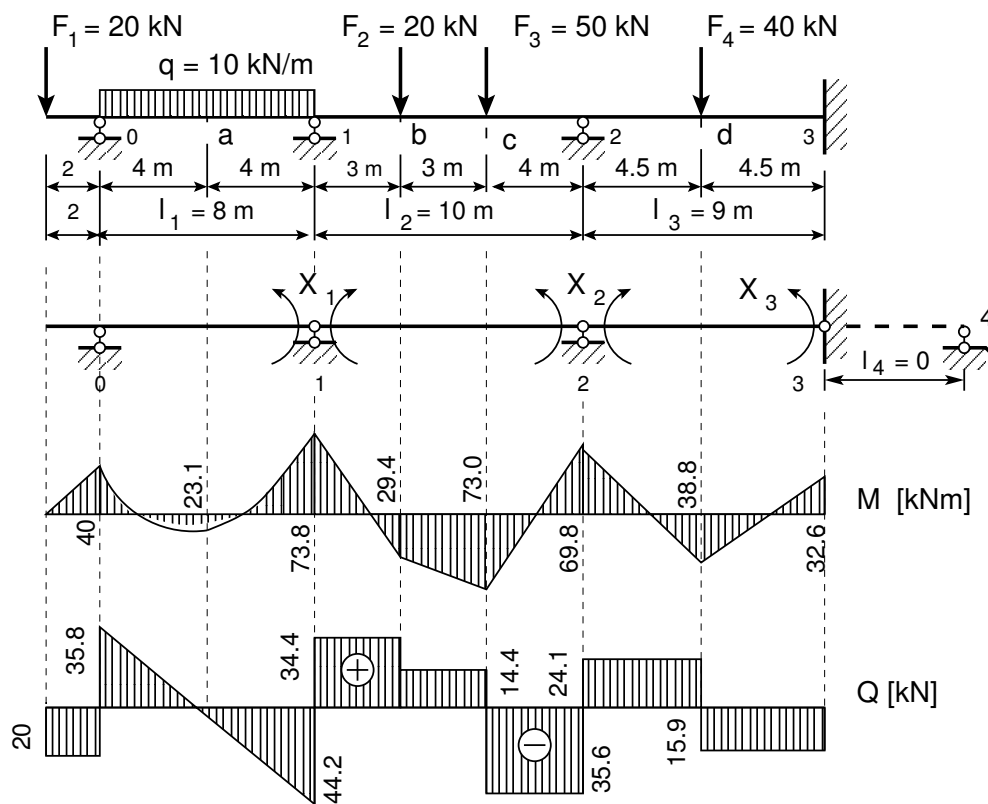
10.3 Kolme momendi võrrandiga arvutamise näited

Näide 10.1 Arvutada joonisel 10.4 a) esitatud jätkuvtala toemomendid kolme momendi võrrandiga ning kujutada paindemomendi ja põikjõu epüürid. Andmed: $l_1 = 8 \text{ m}$, $l_2 = 10 \text{ m}$, $l_3 = 9 \text{ m}$; $F_1 = 20 \text{ kN}$, $F_2 = 20 \text{ kN}$, $F_3 = 50 \text{ kN}$, $F_4 = 40 \text{ kN}$, $q = 10 \text{ kN/m}$; $EI = \text{konst}$. Staatikaga määramatuse aste $n = 3$. Lisatundmatuteks on toemomendid X_1 , X_2 ja X_3 (joonis 10.4 b). Näide on võetud raamatust [ERL85].

Kolme momendi võrrandi (10.13) vabaliikmed koondatud jõu puhul leiame avaldistega (10.15) ja (10.16).



Joonis 10.3. Jätkuvtala tähised



Joonis 10.4. Jätkuvtala. Kolme momendi võrrand

Ühtlasest koormusest põhjustatud vabaliikmed leiame avaldisega (10.14).
Tugede 1, 2 ja 3 kohta koostatud kolme momendi võrrandid on järgmised:

$$\begin{aligned}
 l_1 \cdot X_0 + 2(l_1 + l_2) \cdot X_1 + l_2 \cdot X_2 &= -6B_1^f - 6A_2^f \\
 l_2 \cdot X_1 + 2(l_2 + l_3) \cdot X_2 + l_3 \cdot X_3 &= -6B_2^f - 6A_3^f \\
 + l_3 \cdot X_2 + 2l_3 \cdot X_3 &= -6B_3^f
 \end{aligned} \tag{10.17}$$

kus toemoment X_0 ja koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on

$$X_0 = -F_1 \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned}
6B_1^f &= \frac{ql_1^3}{4} = \frac{10 \cdot 8^3}{4} = 1280 \text{ kNm}^2 \\
6A_2^f &= F_2 l_2^2 \cdot \xi_2 \cdot \xi_2' (1 + \xi_2') + F_3 l_2^2 \cdot \xi_3 \cdot \xi_3' (1 + \xi_3') = \\
&= 20 \cdot 10^2 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot (1 + 0.7) + 50 \cdot 10^2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot (1 + 0.4) = \\
&= 2394 \text{ kNm}^2 \\
6B_2^f &= F_2 l_2^2 \cdot \xi_2 \cdot \xi_2' (1 + \xi_2) + F_3 l_2^2 \cdot \xi_3 \cdot \xi_3' (1 + \xi_3) = \\
&= 20 \cdot 10^2 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot (1 + 0.3) + 50 \cdot 10^2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot (1 + 0.6) = \\
&= 2466 \text{ kNm}^2 \\
6A_3^f &= 6B_3^f = 40 \cdot 9^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot (1 + 0.5) = 1215 \text{ kNm}^2
\end{aligned} \tag{10.18}$$

Vabaliikmete arvutamiseks võib kasutada Octave'i funktsiooni [C.15 lk 258](#). Funktsiooni afbfikt1.m kasutamist jälgi joonisel [10.5](#).

```

xterm
bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> cd matlabr
octave:2> ABF1=afbfikt1(8,0,8,0,8,10,0,8,1,1)
Vb = 40
Va = 40
ABF1 =

    1280    1280

octave:3> ABF2=afbfikt1(10,20,3,50,6,0,0,10,1,1)
Vb = 36
Va = 34
ABF2 =

    2394    2466

octave:4> ABF3=afbfikt1(9,40,4.5,0,9,0,0,10,1,1)
Vb = 20
Va = 20
ABF3 =

    1215    1215

octave:5>

```

Joonis 10.5. Fiktiivsete koormuste leidmine

Pärast toemomendi X_o ja vabaliikmete $6A_i^f$, $6B_i^f$ arväärtuste ([10.18](#)) asetamist võrrandisse ([10.13](#)) saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3354 \\ 3681 \\ 1215 \end{bmatrix} \tag{10.19}$$

ehk

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{10.20}$$

```

xterm
bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> A=[36 10 0; 10 38 9; 0 9 18]
A =

   36   10    0
   10   38    9
    0    9   18

octave:2> B=-[3354; 3681; 1215]
B =

  -3354
  -3681
  -1215

octave:3> X=A\B
X =

  -73.801
  -69.716
  -32.642

octave:4>

```

Joonis 10.6. Kolme momendi võrrandisüsteemi lahendamine

kus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = - \begin{bmatrix} 3354 \\ 3681 \\ 1215 \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

Võrrandisüsteemi lahendame arvutiprogrammiga Octave (vt lõik C.1 lk 205).
Võrrandisüsteemi (10.19) lahend on

$$X_1 = -73.801 \text{ kNm}; \quad X_2 = -69.716 \text{ kNm}; \quad X_3 = -32.642 \text{ kNm} \quad (10.22)$$

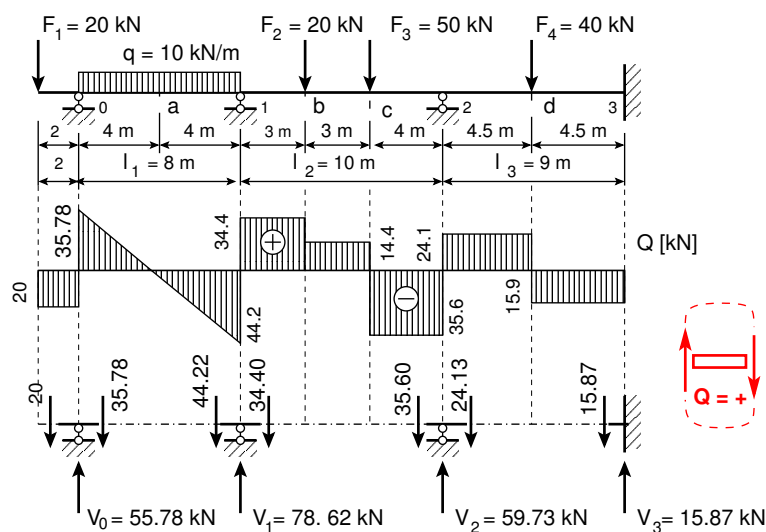
Paindemomendi ja põikjõu epüüri (joonis 10.4) lõigetes a, b, c ja d leiame järgmise avaldis-
tega:

$$M_k = M_k^o + X_{i-1} * \xi_k' + X_i * \xi_k \quad (10.23)$$

$$Q_k = Q_k^o + \frac{\Delta M}{\Delta x} \quad (10.24)$$

kus ξ_k ja ξ_k' on ristlõike k mõõduta kaugused vasakust ja paremast toest (vt joonis 10.3 lk 130).
Põikjõu Q_k ja $\Delta M / \Delta x$ kohta on selgitus joonisel 1.14 (vt lk 30).

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{10 * 8^2}{8} - 40 * 0.5 - 73.80 * 0.5 = 23.100 \text{ kNm} \\ M_b &= (20 * 0.7 + 50 * 0.4) * 0.3 * 10 - 0.7 * 73.80 - 0.3 * 69.72 = \\ &= 29.424 \text{ kNm} \\ M_c &= (20 * 0.3 + 50 * 0.6) * 0.4 * 10 - 0.4 * 73.80 - 0.6 * 69.72 = \\ &= 72.648 \text{ kNm} \\ M_d &= 20 * 4.5 - 0.5 * 69.72 - 0.5 * 32.64 = 37.82 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (10.25)$$



Joonis 10.7. Jätkuvtala. Toereaktsioonid

$$\begin{aligned}
 Q_{01} &= 40 + \frac{-73.78 + 40}{8} = 35.78 \text{ kN} \\
 Q_{10} &= -40 + \frac{-73.78 + 40}{8} = 44.225 \text{ kN} \\
 Q_{12} &= 20 * 0.7 + 50 * 0.4 + \frac{-69.78 + 73.78}{10} = 34.41 \text{ kN} \\
 Q_{21} &= -20 * 0.3 - 50 * 0.6 + \frac{-69.78 + 73.78}{10} = -35.59 \text{ kN} \\
 Q_{23} &= 20 + \frac{-32.61 + 69.78}{9} = 24.12 \text{ kN} \\
 Q_{32} &= -20 + \frac{-32.61 + 69.78}{9} = -15.88 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

Konsoolis on põikjõud $Q_a^{(v)} = -20 \text{ kN}$.

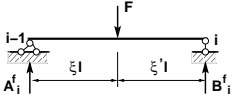
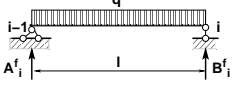
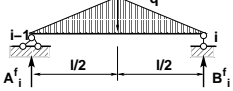
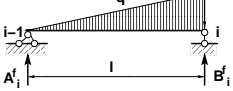
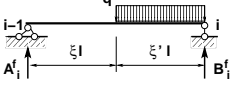
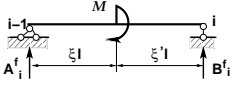
Jätkuvtala vertikaalsed toereaktsioonid V_i (vt joonis 10.7) leiame põikjõu epüüri abil.

$$\begin{aligned}
 V_0 &= 20 + 35.78 = 55.78 \text{ kN} \\
 V_1 &= 44.25 + 34.41 = 78.66 \text{ kN} \\
 V_2 &= 35.59 + 24.12 = 59.71 \text{ kN} \\
 V_3 &= 15.88 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{10.27}$$

Kontrollime tasakaalu

$$\begin{aligned}
 \Sigma Y = 0; \quad 20 + 10 * 8 + 20 + 50 + 40 - 55.78 - 78.66 - 59.71 - 15.88 &= 0 \\
 210 - 210.03 &= 0
 \end{aligned} \tag{10.28}$$

Tabel 10.1. Valemid vabaliikmete arvutamiseks

Jrk. nr	Skeem	$6\frac{I_0}{I_i}A_i^f$	$6\frac{I_0}{I_i}B_i^f$
1		$Fl_i l'_i \xi \xi' (1 + \xi')$	$Fl_i l'_i \xi \xi' (1 + \xi)$
2		$\frac{1}{4}ql_i^2 l'_i$	$\frac{1}{4}ql_i^2 l'_i$
3		$\frac{5}{32}ql_i^2 l'_i$	$\frac{5}{32}ql_i^2 l'_i$
4		$\frac{7}{60}ql_i^2 l'_i$	$\frac{2}{15}ql_i^2 l'_i$
5		$\frac{1}{4}ql_i^2 l'_i \xi'^2 (2 - \xi'^2)$	$\frac{1}{4}ql_i^2 l'_i \xi \xi' (2 - \xi')^2$
6		$-Ml'_i (1 - 3\xi'^2)$	$Ml'_i (1 - 3\xi^2)$

10.4 Jätkuvtalade arvutus fookussuhtega

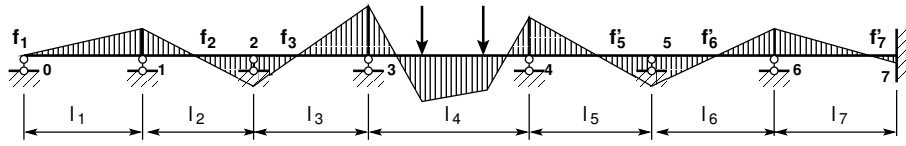
10.4.1 Fookussuhted

Jätkuvtala arvutamisel *fookussuhtega* koormatakse ainult ühte sillet (joonis 10.8). Koormatud sildest kaugemal asetseval toel on toemoment väiksem kui koormatud sildele lähemal asetseval toel. Kuna koormamata silde paindemomendid on erinevate märkidega, siis on igas koormamata sildes paindemomendi epüüris üks nullpunkt. Seda nullpunkti nimetatakse *fookuseks*. Fookus asub koormatud sildest kaugemal asetsevale toele lähemal. Koormatud sildest vasakul asetsevaid nullpunkte (joonisel 10.8 f_1 , f_2 ja f_3) nimetatakse *vasakpoolseteks fookusteks*. Koormatud sildest paremal asetsevaid nullpunkte (joonisel 10.8 f'_5 , f'_6 ja f'_7) nimetatakse *parempoolseteks fookusteks*.

Fookuste asukohad ei olene koormusest. Koormatud silde paindemomendi epüüri nullpunktid olenevad koormusest ega ole seepärast fookused.

Sildes on kaks fookust: *vasakpoolne fookus* f_i ja *parempoolne fookus* f'_i .

Vasakpoolseks fookussuhteks nimetatakse vasakpoolse fookuse kauguste suhet parem- ja vasakpoolsest toest (vt joonis 10.9 d), kus vasakpoolne kaugus on c_{i-1} ja parempoolne



Joonis 10.8. Jätkuvtala fookused

kaugus $(l_{i-1} - c_{i-1})$.

$$k_{i-1} = \frac{(l_{i-1} - c_{i-1})}{c_{i-1}} \quad (10.29)$$

Parempoolseks fookussuhteks nimetatakse parempoolse fookuse kauguste suhet vasak- ja parempoolsest toest (vt joonist 10.9 d), kus vasakpoolne kaugus on $(l_{i+1} - c'_{i+1})$ ja parempoolne kaugus c'_{i+1} .

$$k'_{i+1} = \frac{(l_{i+1} - c'_{i+1})}{c'_{i+1}} \quad (10.30)$$

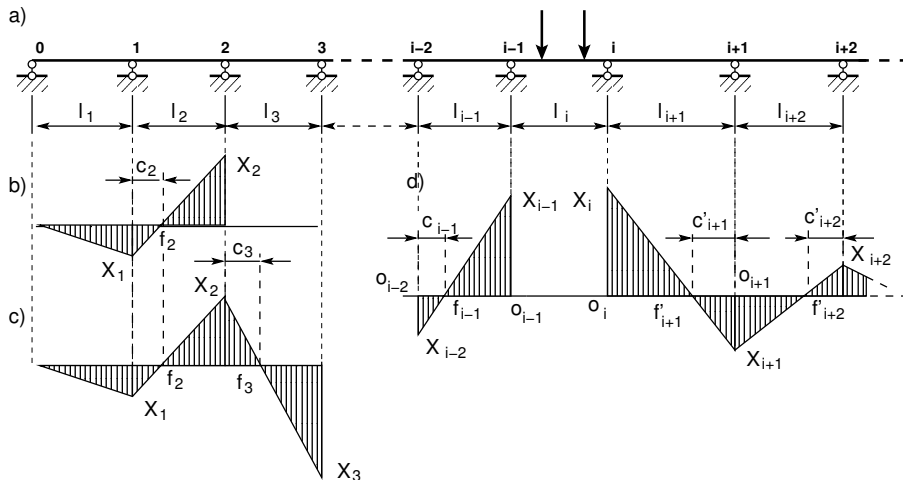
Kuna koormatud sildest kaugemal asetseval toel on toemoment väiksem kui koormatud sildele lähemal asetseval toel, siis vasak- ja parempoolse fookussuhte k_{i-1} ja k'_{i+1} arv- väärtus on suurem kui üks.

Joonisel 10.9 sarnastest kolmnurkadest $\triangle X_{i-1}o_{i-1}f_{i-1}$ ja $\triangle X_{i-2}o_{i-2}f_{i-1}$ saame

$$\frac{X_{i-1}}{X_{i-2}} = -\frac{(l_{i-1} - c_{i-1})}{c_{i-1}} = -k_{i-1} \quad (10.31)$$

ja kolmnurkadest $\triangle X_{i1}o_i f'_{i-1}$ ja $\triangle X_{i+1}o_{i+1} f'_{i-1}$

$$\frac{X_i}{X_{i+1}} = -\frac{(l_{i+1} - c'_{i+1})}{c'_{i+1}} = -k'_{i+1} \quad (10.32)$$



Joonis 10.9. Jätkuvtala fookussuhted

Fookussuhete avaldiste saamiseks vaatleme joonist 10.9 b ja sõlme 1 kohta kirjutame välja kolme momendi võrrandi (10.13), arvestades, et avad on koormamata.

$$l'_1 X_0 + 2(l'_1 + l'_2) X_1 + l'_2 X_2 = 0 \quad (10.33)$$

siin $X_0 = 0$ ja

$$2(l'_1 + l'_2) X_1 + l'_2 X_2 = 0 \quad (10.34)$$

ning

$$\frac{X_2}{X_1} = -\frac{2(l'_1 + l'_2)}{l'_2} = -k_2 \quad (10.35)$$

Sõlme 2 kohta on kolme momendi võrrand

$$l'_2 X_1 + 2(l'_2 + l'_3) X_2 + l'_3 X_3 = 0 \quad (10.36)$$

Võrrandist (10.35) avaldame $X_1 = -\frac{X_2}{k_2}$ ja astame võrrandisse (10.36)

$$-l'_2 \frac{X_2}{k_2} + 2(l'_2 + l'_3) X_2 + l'_3 X_3 = 0 \quad (10.37)$$

Siit saame

$$\frac{X_3}{X_2} = -\left[2 + \frac{l'_2}{l'_3} \left(2 - \frac{1}{k_2}\right)\right] = -k_3 \quad (10.38)$$

Sõlme 3 kohta saame

$$l'_3 X_2 + 2(l'_3 + l'_4) X_3 + l'_4 X_4 = 0 \quad (10.39)$$

Võrrandist (10.38) avaldame $X_2 = -\frac{X_3}{k_3}$ ja astame võrrandisse (10.39)

$$-l'_3 \frac{X_3}{k_3} + 2(l'_3 + l'_4) X_3 + l'_4 X_4 = 0 \quad (10.40)$$

Siit saame

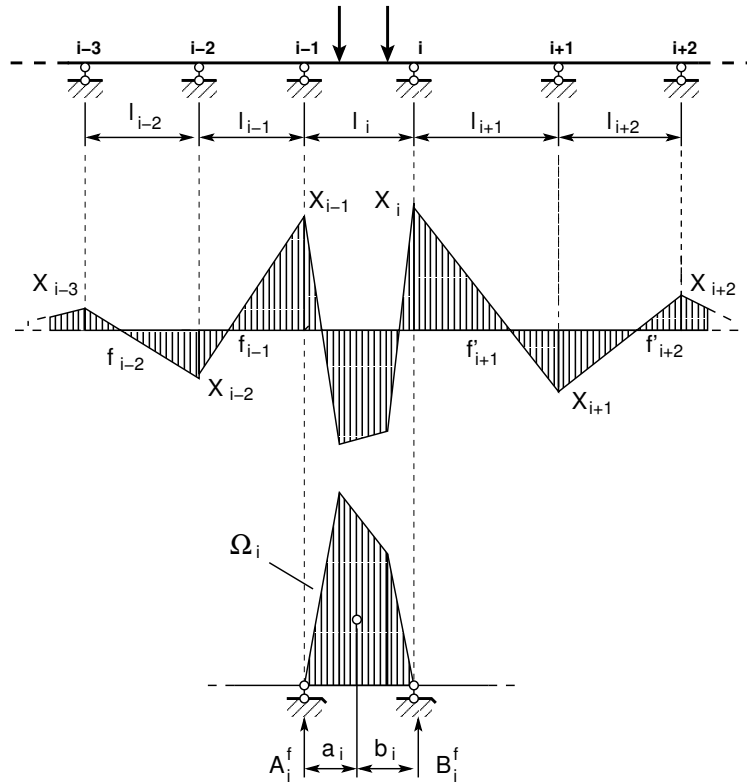
$$\frac{X_4}{X_3} = -\left[2 + \frac{l'_3}{l'_4} \left(2 - \frac{1}{k_3}\right)\right] = -k_4 \quad (10.41)$$

Üldistame saadud avaldised (10.35), (10.38) ja (10.41). Vasakpoolseteks fookussuheteks on avaldis (10.42)

$$k_j = 2 + \frac{l'_{j-1}}{l'_j} \left(2 - \frac{1}{k_{j-1}}\right), \quad X_{j-1} = -\frac{X_j}{k_j} \quad (10.42)$$

Samamoodi saadakse valem ka parempoolsete fookussuhete arvutamiseks

$$k'_j = 2 + \frac{l'_{j+1}}{l'_j} \left(2 - \frac{1}{k'_{j+1}}\right), \quad X_j = -\frac{X_{j-1}}{k'_j} \quad (10.43)$$



Joonis 10.10. Jätkuvtala toemomendid

10.4.2 Koormatud silde toemomendid

Joonisel 10.10 esitatud tala tugede $i-1$ ja i kohta kirjutame kolme momendi võrrandi (10.13)

$$\begin{aligned} l'_{i-1}X_{i-2} + 2(l'_{i-1} + l'_i)X_{i-1} + l'_iX_i &= -6A_i^f \frac{I_0}{I_i} \\ l'_iX_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})X_i + l'_{i+1}X_{i+1} &= -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} \end{aligned} \quad (10.44)$$

Võrranditest (10.44) elimineerime momendid valemite (10.42) ja (10.43) abil momendid X_{i-2} ja X_{i+1}

$$X_{i-2} = -\frac{X_{i-1}}{k_{i-1}}, \quad X_{i+1} = -\frac{X_i}{k'_{i+1}} \quad (10.45)$$

Arvestades seoseid (10.45), esitame võrrandisüsteemi (10.44) järgmisel kujul:

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right) & 1 \\ 1 & 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i-1} \\ X_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6A_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \\ 6B_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \end{bmatrix} \quad (10.46)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} k_i & 1 \\ 1 & k'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i-1} \\ X_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{6A_i^f}{l_i} \\ \frac{6B_i^f}{l_i} \end{bmatrix} \quad (10.47)$$

siin

$$\frac{1}{l_i} = \frac{I_0}{I_i l'_i} \quad (10.48)$$

st koormusliikmetes ei ole redutseeritud pikkused.

Võrrandisüsteemi (10.47) lahend ja toemomendid on

$$X_{i-1} = - \frac{6A_i^f k'_i - 6B_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)} \quad (10.49)$$

$$X_i = - \frac{6B_i^f k_i - 6A_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)} \quad (10.50)$$

Kui äärmised toed on liigendtoed (s.t $k_i = \infty$, $k'_i = \infty$), siis avaldiste (10.49), (10.50) kasutamisel tekib määramatus $\frac{\infty}{\infty}$ ning see tuleb avada

$$\begin{aligned} k'_n = \infty; \quad X_n = 0; \quad X_{n-1} &= - \frac{6A_n^f k'_n - 6B_n^f}{l_n (k_n k'_n - 1)} * \frac{\frac{1}{k'_n}}{\frac{1}{k'_n}} = \\ &= - \frac{6A_n^f - \frac{6B_n^f}{k'_n}}{l_n \left(k_n - \frac{1}{k'_n} \right)} = - \frac{6A_n^f}{l_n k_n} \end{aligned} \quad (10.51)$$

$$\begin{aligned} k_1 = \infty; \quad X_0 = 0; \quad X_1 &= - \frac{6B_1^f k_1 - 6A_1^f}{l_1 (k_1 k'_1 - 1)} * \frac{\frac{1}{k_1}}{\frac{1}{k_1}} = \\ &= - \frac{6B_1^f - \frac{6A_1^f}{k_1}}{l_1 \left(k'_1 - \frac{1}{k_1} \right)} = - \frac{6B_1^f}{l_1 k'_1} \end{aligned} \quad (10.52)$$

10.5 Fookussuhetega arvutamise näited

Näide 10.2 Arvutada joonisel 10.11 c esitatud jätkuvtala toemomendid fookussuhetega ning kujutada paindemomendi ja põikjõu epüürid. Andmed: $l_1 = 8 \text{ m}$, $l_2 = 10 \text{ m}$, $l_3 = 9 \text{ m}$. Tala on koormatud ajutise koormusega sillete kaupa:

1. koormusvariant: koormatud on kolmas sille $F_4 = 40 \text{ kN}$ (joonis 10.11 a);
2. koormusvariant: koormatud on teine sille $F_2 = 20 \text{ kN}$ ja $F_3 = 50 \text{ kN}$ (joonis 10.11 b);
3. koormusvariant: koormatud on konsool $F_1 = 20 \text{ kN}$ (joonis 10.11 c);
4. koormusvariant: koormatud on esimene sille $q = 10 \text{ kN/m}$ (joonis 10.11 d).

Sillete ristlõikejäikused $EI = \text{konst.}$ Näide on järg näitele 10.1 lk 129.

Fookussuhted joonisel 10.11 c esitatud tala jaoks arvutame valemitega (10.42) ja (10.43)

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \infty \\
 k_2 &= 2 + \frac{l_1}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k_1} \right) = 2 + \frac{8}{10} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 3.6 \\
 k_3 &= 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) = 2 + \frac{10}{9} \left(2 - \frac{1}{3.6} \right) = 3.9136
 \end{aligned} \tag{10.53}$$

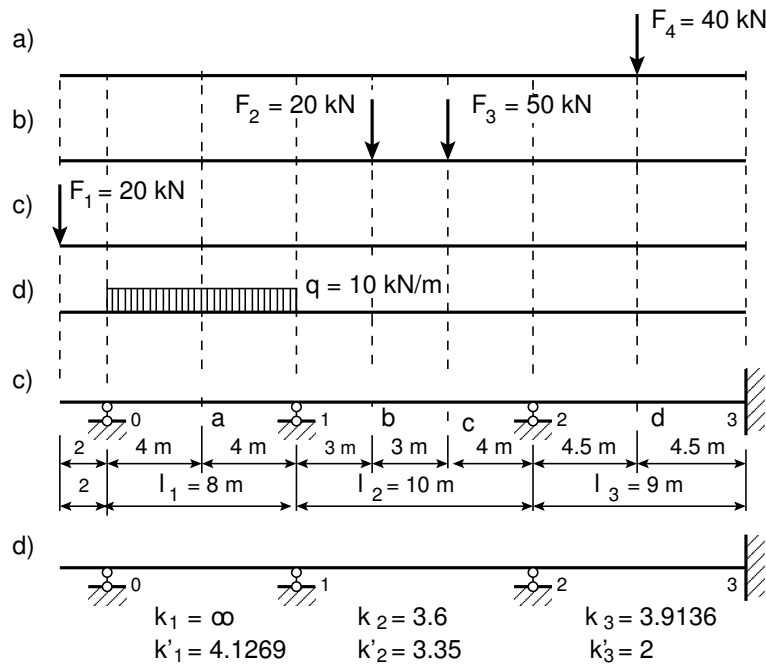
Samamoodit arvutame ka parempoolsed fookussuhted

$$\begin{aligned}
 k'_3 &= 2 \\
 k'_2 &= 2 + \frac{l_3}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k'_3} \right) = 2 + \frac{9}{10} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3.35 \\
 k'_1 &= 2 + \frac{l_2}{l_1} \left(2 - \frac{1}{k'_2} \right) = 2 + \frac{10}{8} \left(2 - \frac{1}{3.35} \right) = 4.1269
 \end{aligned} \tag{10.54}$$

Fookussuheid võib arvutada Octave'i funktsiooni C.16 (vt 260) abil. Arvutamise näide on joonisel 10.12. Kus esimese ava fookussuhe $k_1 = \infty \sim \frac{1}{\text{eps}}$. Siin on eps arvutil lõpmatult väike suurus (arvuti null). Tema pöördväärtus on lõpmatult suur arv (arvuti lõpmatus).

Tulemused näitame joonisel 10.11 d.

Fookussuhetega leiame toemomendid eraldi iga silde koormusest. Alustame kolmandast sildest (vt joonis 10.11 a ja 10.14). Kolmanda silde koormamisel tekkinud toemomendid arvutame valemitega (10.49) ja (10.50). Nendes esinevad koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on juba leitud näites



Joonis 10.11. Jätukvtala. Fookussuhted

```

xterm
bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> FS=fooksuhe(3,[8; 10; 9],1/eps,2,[1; 1; 1],1)
FS =
    4.5036e+15    4.1269e+00
    3.6000e+00    3.3500e+00
    3.9136e+00    2.0000e+00
octave:2>

```

Joonis 10.12. Fookussuhete arvutamine

10.1 lk 129 (vt avaldis 10.18 lk 131)

$$X_{23} = -\frac{6A_3^f k_3' - 6B_3^f}{l_3 (k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1215 * 2 - 1215}{9 * (3.9136 * 2 - 1)} = -19.774 \text{ kNm} \quad (10.55)$$

$$X_{33} = -\frac{6B_3^f k_3 - 6A_3^f}{l_3 (k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1215 * 3.9136 - 1215}{9 * (3.9136 * 2 - 1)} = -57.613 \text{ kNm} \quad (10.56)$$

Toemomente võib arvutada Octave'i funktsiooni C.17 (vt 261) abil. Arvutamise näide on joonisel 10.13, kus esimese ava fookussuhe $k_1 = \infty \sim \frac{1}{\text{eps}}$. Siin on eps arvutil lõpmatult väike suurus (arvuti null). Tema pöördväärtus on lõpmatult suur arv (arvuti lõpmatus).

Toemomendi X_{13} leiame vasakpoolse fookussuhetega (10.42)

$$X_{13} = -\frac{X_{23}}{k_2} = \frac{19.774}{3.6} = 5.493 \text{ kNm} \quad (10.57)$$

Leitud toemomendid X_{i3} kanname epüürile (joonis 10.14).

Kolmanda ava keskel oleva paindemomendi epüüri ordinaadi arvutamiseks kasutame valemite (10.23).

$$\begin{aligned} M_d &= M_d^o + X_2 * \xi_d' + X_3 * \xi_d = 20 * 4.5 - 19.774 * 0.5 - 57.613 * 0.5 = \\ &= 51.306 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (10.58)$$

Teise silde koormamisel tekkinud toemomendid arvutame valemitega (10.49) ja (10.50). Nendes esinevad koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on juba leitud näites 10.1 lk 129 (vt avaldis 10.18 lk 131)

$$X_{12} = -\frac{6A_2^f k_2' - 6B_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2394 * 3.35 - 2468}{10 * (3.6 * 3.35 - 1)} = -50.198 \text{ kNm} \quad (10.59)$$

$$X_{22} = -\frac{6B_2^f k_2 - 6A_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2468 * 3.6 - 2394}{10 * (3.6 * 3.35 - 1)} = -58.687 \text{ kNm} \quad (10.60)$$

```

xterm
bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> cd matlabr
octave:2> TM1=toemom1(8,1/eps,4.1269,0,8,0,8,10,0,8,1,1)
Vb = 40
Va = 40
TM1 =

    0.00000   -38.77002

octave:3> TM2=toemom1(10,3.6,3.35,20,3,50,6,0,0,10,1,1)
Vb = 36
Va = 34
TM2 =

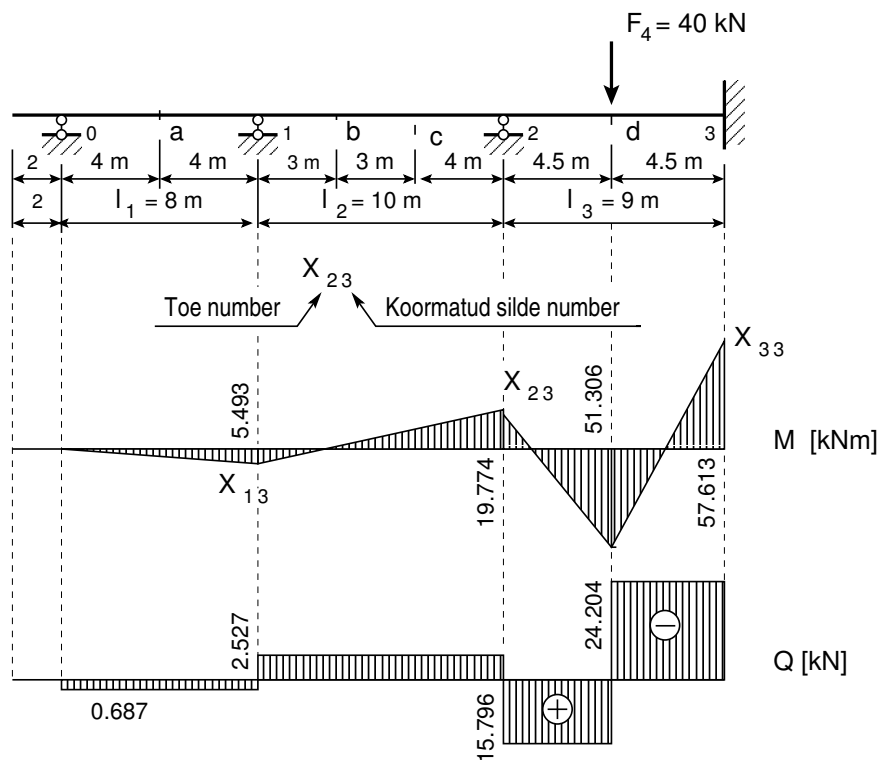
   -50.216   -58.622

octave:4> TM3=toemom1(9,3.9136,2,40,4.5,0,9,0,0,9,1,1)
Vb = 20
Va = 20
TM3 =

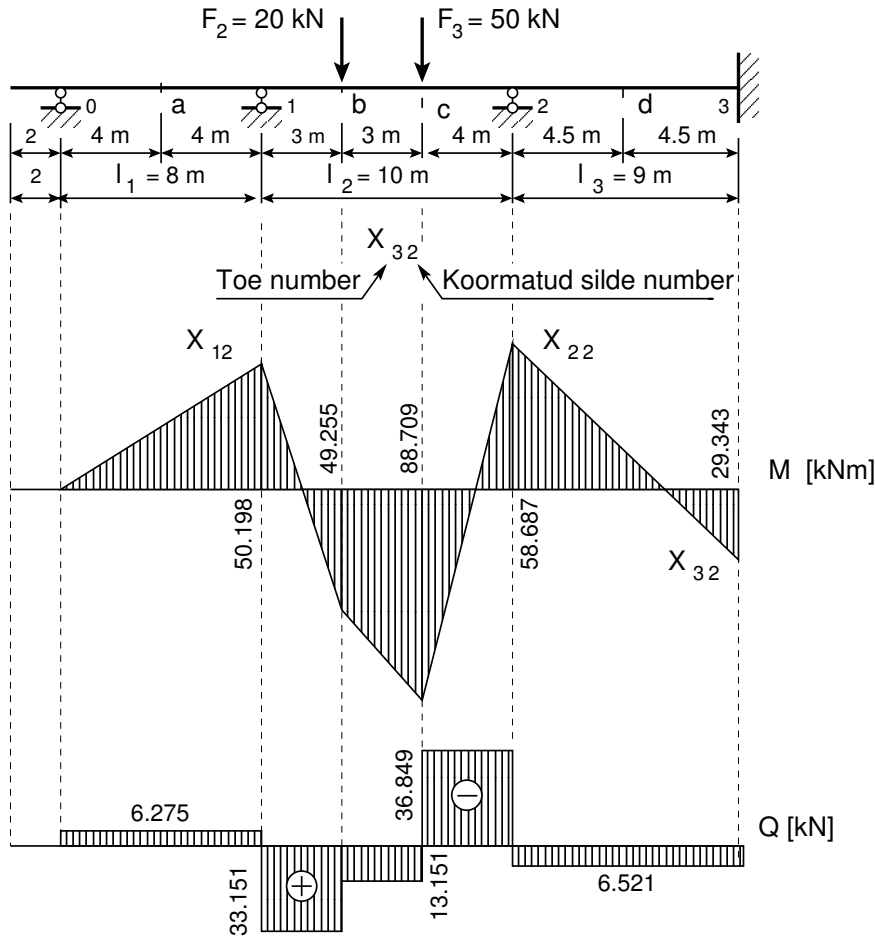
   -19.774   -57.613

octave:5> █
    
```

Joonis 10.13. Toemomentide arvutamine



Joonis 10.14. Fookussuhted. Koormus kolmandal sildel



Joonis 10.15. Fookussuhted. Koormus teisel sildel

Parempoolse toemomendi X_{32} leiame parempoolse fookussuhtega (10.43)

$$X_{32} = -\frac{X_{22}}{k'_3} = \frac{58.687}{2} = 29.343 \text{ kNm} \quad (10.61)$$

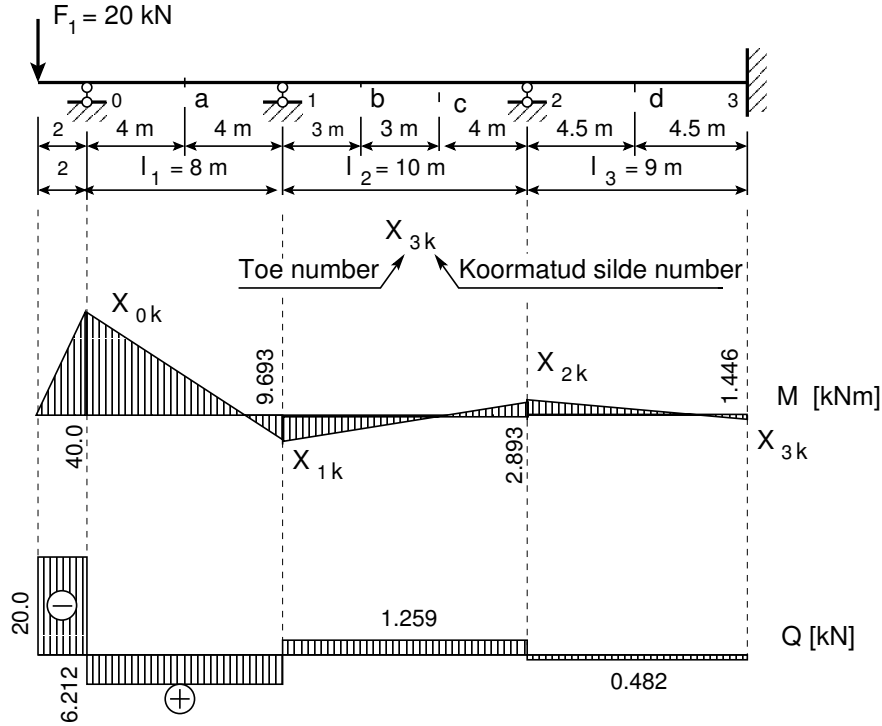
Arvutame teise ava lihttala toereaktsioonid V_1 ja V_2 koormusest F_2 ja F_3 . Kasutame toereaktsioonide mõjujooni (vt avaldist (2.11)), siin on toereaktsiooni A_i jaoks $\eta_i = \xi'_i$ ja toereaktsiooni B_i jaoks $-\eta_i = \xi_i$.

$$\begin{aligned} V_1 &= F_2 * \xi'_b + F_3 * \xi'_c = 20 * 0.7 + 50 * 0.4 = 34 \text{ kN} \\ V_2 &= F_2 * \xi_b + F_3 * \xi_c = 20 * 0.3 + 50 * 0.6 = 36 \text{ kN} \end{aligned} \quad (10.62)$$

Teise ava ristlõigetes b ja c olevate paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamiseks kasutame valemit (10.23).

$$\begin{aligned} M_b &= M_b^o + X_1 * \xi'_b + X_2 * \xi_b = 34 * 0.3 * 10 - 50.198 * 0.7 - 58.687 * 0.3 = \\ &= 49.255 \text{ kNm} \\ M_c &= M_c^o + X_1 * \xi'_b + X_2 * \xi_b = 36 * 0.4 * 10 - 50.198 * 0.7 - 58.687 * 0.3 = \\ &= 88.709 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (10.63)$$

Konsoolil mõjuv koormus tekitab toel 0 momendi $X_{0k} = -40 \text{ kNm}$ (joonis 10.16). Parempoolsed toemomendid X_{ik} leiame parempoolse fookussuhtega (10.43)



Joonis 10.16. Fookussuhted. Koormus konsoolil

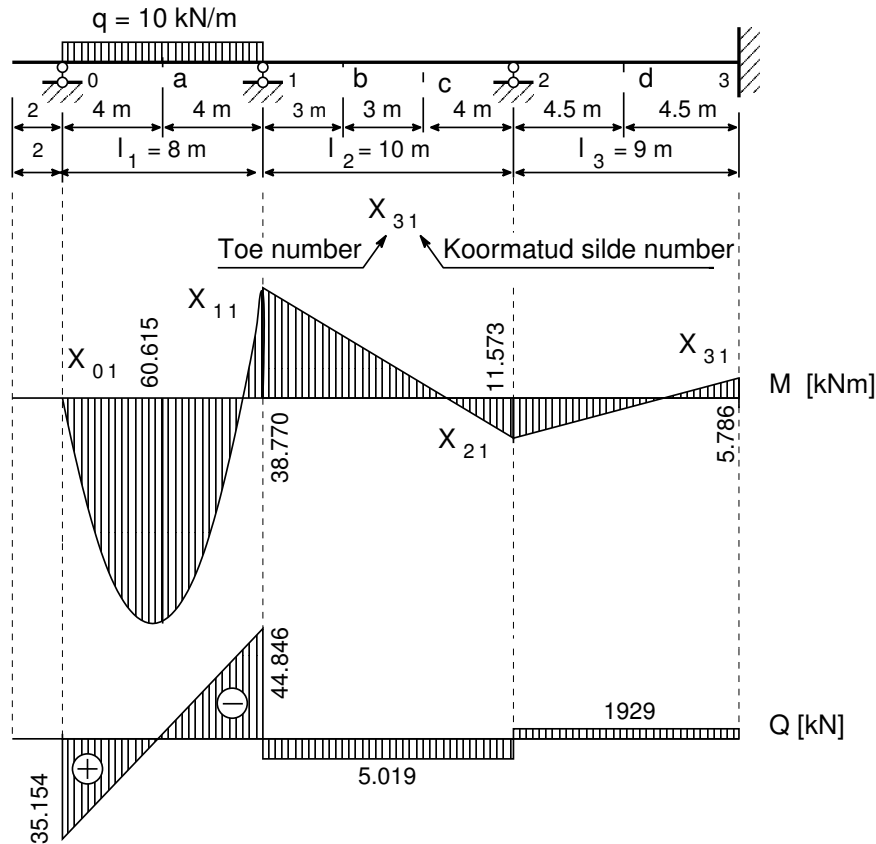
$$\begin{aligned}
 X_{1k} &= -\frac{X_{0k}}{k'_1} = -\frac{-40.0}{4.1269} = 9.693 \text{ kNm} \\
 X_{2k} &= -\frac{X_{1k}}{k'_2} = -\frac{9.693}{3.35} = -2.893 \text{ kNm} \\
 X_{3k} &= -\frac{X_{2k}}{k'_3} = -\frac{-2.893}{2} = 1.446 \text{ kNm}
 \end{aligned} \tag{10.64}$$

Esimese ava koormamisel leiame momendi toel 1 X_{11} . Toel 0 on moment $X_{01} = 0$ ja vasakpoolne fookussuhe $k_1 = \infty$. Toereaktsiooni X_{11} määramiseks kasutame valemit (10.52). Fiktiivne toereaktsioon $6B_1^f = 1280 \text{ kNm}^2$ on leitud varem (vt avaldisi (10.18) lk 131).

$$X_{11} = -\frac{6B_1^f}{l_1 k'_1} = -\frac{1280}{8 * 4.1269} = -38.770 \text{ kNm} \tag{10.65}$$

Parempoolsed toemomendid leiame parempoolsete fookussuhtega (10.43)

$$\begin{aligned}
 X_{21} &= -\frac{X_{11}}{k'_2} = -\frac{-38.770}{3.35} = 11.573 \text{ kNm} \\
 X_{31} &= -\frac{X_{21}}{k'_3} = -\frac{11.573}{2} = -5.786 \text{ kNm}
 \end{aligned} \tag{10.66}$$



Joonis 10.17. Fookussuhted. Koormus esimesel sildel

Esimese ava ristlõikes a oleva paindemomendi epüüri ordinaadi leidmiseks kasutame valemit (10.23).

$$\begin{aligned} M_a &= M_a^o + X_0 * \xi'_a + X_1 * \xi_a = \frac{10 * 8^2}{8} - 0.0 * 0.5 - 38.770 * 0.5 = \\ &= 60.515 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (10.67)$$

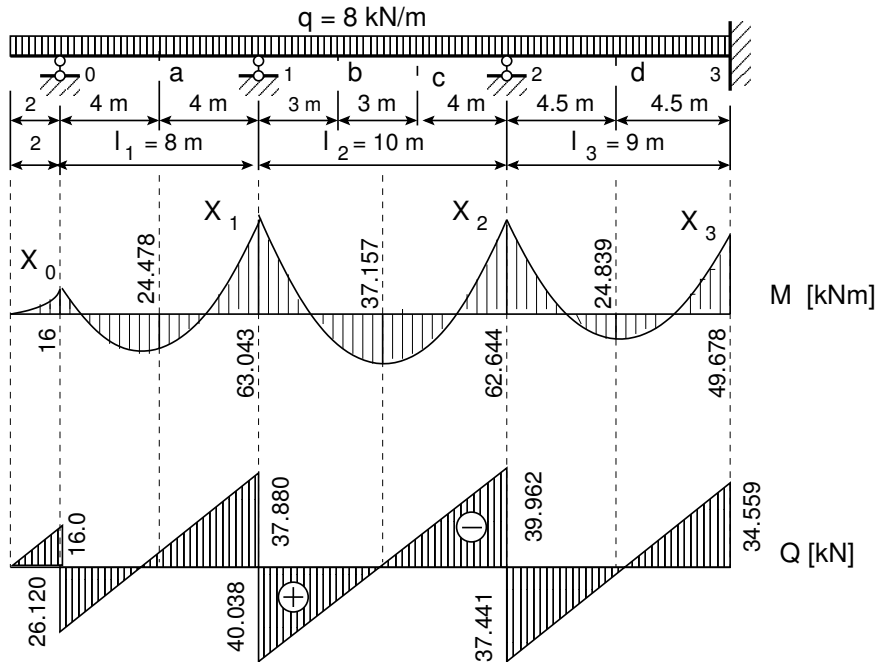
Saadud tulemused kanname joonisele 10.17.

Talale (joonis 10.18) mõjub alaline koormus $q = 8 \text{ kN/m}$. Toemomendid leiame kolme momendi võrrandiga (10.13). Tugede 1, 2 ja 3 kohta koostatud kolme momendi võrrandid (10.68) on sarnased võrranditega (10.17)

$$\begin{aligned} l_1 \cdot X_0 + 2(l_1 + l_2) \cdot X_1 + l_2 \cdot X_2 &= -6B_1^f - 6A_2^f \\ l_2 \cdot X_1 + 2(l_2 + l_3) \cdot X_2 + l_3 \cdot X_3 &= -6B_2^f - 6A_3^f \\ + l_3 \cdot X_2 + 2l_3 \cdot X_3 &= -6B_3^f \end{aligned} \quad (10.68)$$

kus toemoment X_0 ja koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on

$$\begin{aligned} X_0 &= -\frac{q \cdot 2^2}{2} = -\frac{8 \cdot 2^2}{2} = -16 \text{ kNm} \\ 6B_1^f &= \frac{ql_1^3}{4} = \frac{8 \cdot 8^3}{4} = 1024 \text{ kNm}^2 \end{aligned}$$



Joonis 10.18. Alaline koormus

$$\begin{aligned}
 6A_2^f &= \frac{ql_2^3}{4} = \frac{8 \cdot 10^3}{8} = 2000 \text{ kNm}^2 \\
 6B_2^f &= 6A_2^f = 2000 \text{ kNm}^2 \\
 6A_3^f &= 6B_3^f = \frac{ql_3^3}{4} = \frac{8 \cdot 9^3}{4} = 1458 \text{ kNm}^2
 \end{aligned} \tag{10.69}$$

Vabaliikmete arvutamiseks võib kasutada Octave'i funktsiooni [C.15 lk 258](#). Funktsiooni afb-fikt1.m kasutamist jälgib joonisel [10.5](#). Pärast toemomendi X_0 ja vabaliikmete $6A_i^f$, $6B_i^f$ arvuväärtuste ([10.69](#)) asetamist võrrandisse ([10.68](#)) saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2896 \\ 3458 \\ 1458 \end{bmatrix} \tag{10.70}$$

ehk

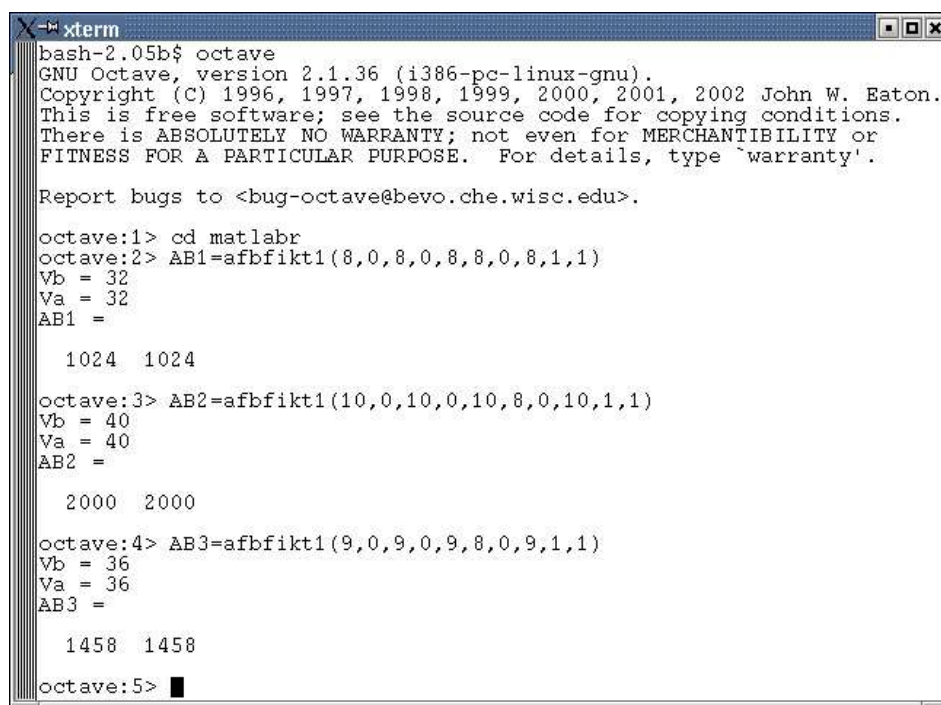
$$\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{10.71}$$

kus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = - \begin{bmatrix} 2896 \\ 3458 \\ 1458 \end{bmatrix} \tag{10.72}$$

Võrrandisüsteemi lahendamise arvutiprogrammiga Octave (vt lõik [C.1 lk 205](#)). Võrrandisüsteemi ([10.70](#)) lahend on

$$X_1 = -63.043 \text{ kNm}; \quad X_2 = -62.644 \text{ kNm}; \quad X_3 = -49.678 \text{ kNm} \tag{10.73}$$



```
bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> cd matlabr
octave:2> AB1=afbikt1(8,0,8,0,8,8,0,8,1,1)
Vb = 32
Va = 32
AB1 =

    1024    1024

octave:3> AB2=afbikt1(10,0,10,0,10,8,0,10,1,1)
Vb = 40
Va = 40
AB2 =

    2000    2000

octave:4> AB3=afbikt1(9,0,9,0,9,8,0,9,1,1)
Vb = 36
Va = 36
AB3 =

    1458    1458

octave:5> █
```

Joonis 10.19. Alalise koormuse fiktiivsed reaktsioonid

Leitud toemomendid (10.73) kanname joonisele 10.18.

Peatükk 11

Deformatsioonimeetod

11.1 Geomeetrilise määratuse aste

Sirgetest varrastest moodustatud raami *geomeetrilise määratuse aste*, s.t lisatundmatute arv, leitakse valemiga (11.1)

$$n^* = s_3 + w \quad (11.1)$$

kus w

$$w = 2s - v - t \quad (11.2)$$

on *raami vabadusaste* ja tähistab varraste pöördenurki määravate sõltumatute geomeetriliste parameetrite arvu. Geomeetrilise määratuse aste (11.1) võrdub jääkade sõlmede (ilma toesõlmedeta) arvuga, kui raami vabadusaste (11.2) on null või negatiivne

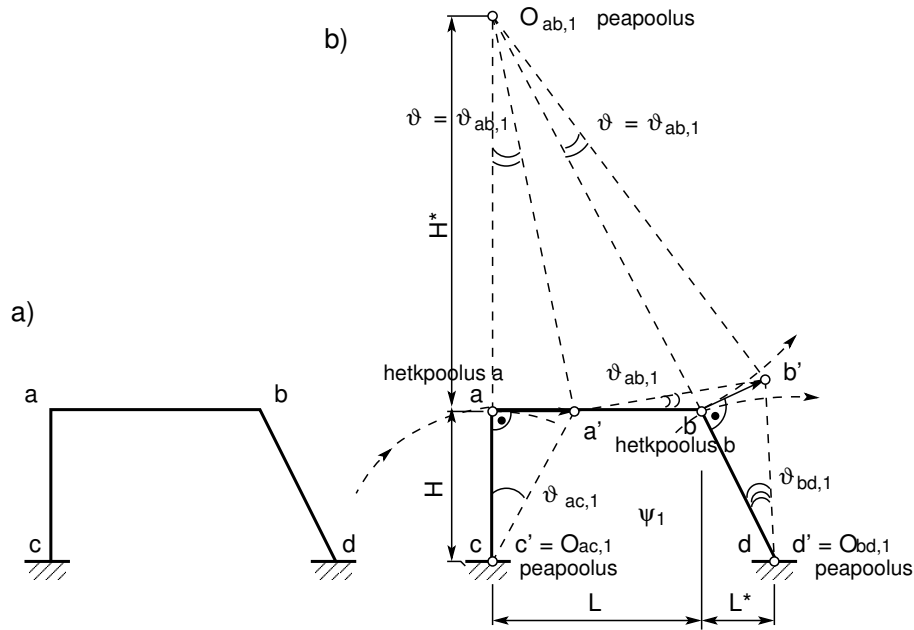
$$n^* = s_3, \quad w \leq 0 \quad (11.3)$$

Viltu olevate postidega raamide varrasahela pöörded leitakse poolusplaanist (joonis 11.1). Varrasahela ühele vardale antakse ühikpööre ja teiste varraste pöörded leitakse selle varda pöörde funktsioonina.

Joonisel 11.1 kujutatud varrasahela paigutusolukorras ψ_1 pöörduvad vardad \overline{ca} ja \overline{db} ümber toesõlme c ja d . Nende varraste peapoolusteks on toesõlmed $c \equiv O_{ac,1}$ ja $d \equiv O_{bd,1}$. Liigend a ühendab vardaid \overline{ac} ja \overline{ab} ning on nende varraste liikumise *hetkpoolus*.

Varda \overline{ab} peapoolus asub vektoriga $\overrightarrow{aa'}$ risti oleval sirgel. Liigend b ühendab vardaid \overline{ab} ja \overline{db} ning on nende varraste liikumise *hetkpoolus*. Varda \overline{ab} peapoolus asub ka vektoriga $\overrightarrow{bb'}$ risti oleval sirgel. Nende risti olevate sirgete lõikepunktiks on $O_{ab,1}$. See punkt $O_{ab,1}$ on varda \overline{ab} peapoolus. Varras \overline{ab} pöörduv ümber peapooluse $O_{ab,1}$ uude asendisse $a'b'$. Paigutusolukorras ψ_1 antakse vardale \overline{ab} pöördenurk $\vartheta_{ac,1} = 1$ (vt joonist 11.1). Kolmnurkadel $\Delta aa'O_{ab,1}$ ja $\Delta aa'c$ on ühine külg aa' . Sellest tingimusest saame

$$\begin{aligned} H \cdot \vartheta_{ac,1} &= -H^* \cdot \vartheta_{ab,1} \\ \vartheta_{ab,1} &= -\frac{H}{H^*} \cdot \vartheta_{ac,1} \end{aligned} \quad (11.4)$$



Joonis 11.1. Poolusplaan ja varraste pöörded

Kolmnurkadel $\Delta bb'O_{ab,1}$ ja $\Delta bb'd$ on ühine külg bb' . Siit saame

$$\begin{aligned} \overline{bO_{ab,1}} \cdot \vartheta_{ab,1} &= -\overline{bd} \cdot \vartheta_{bd,1} \\ \vartheta_{bd,1} &= -\frac{\overline{bO_{ab,1}}}{\overline{bd}} \cdot \vartheta_{ab,1} \end{aligned} \quad (11.5)$$

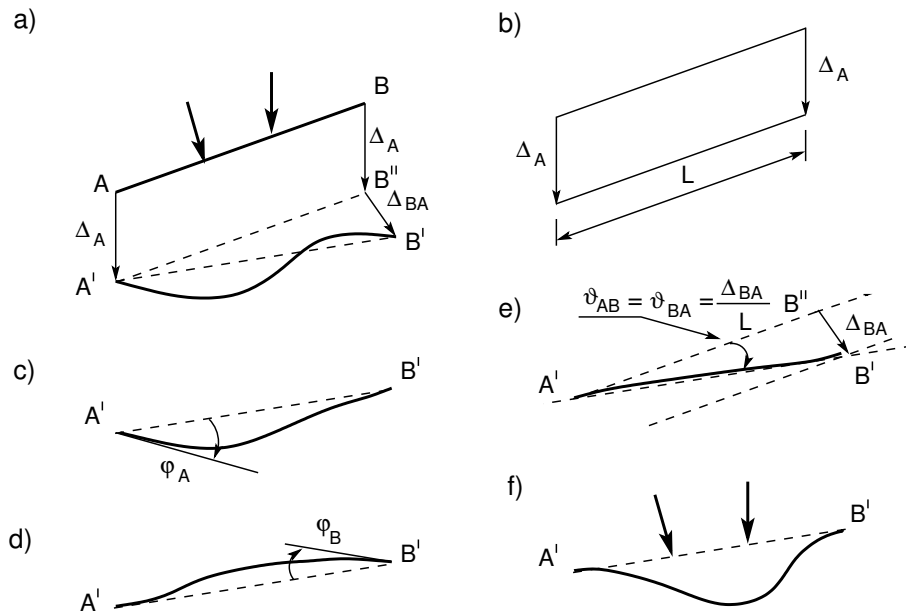
Seoses (11.5) avaldame pöörde $\vartheta_{ab,1}$ pöörde $\vartheta_{ac,1}$ kaudu.

$$\vartheta_{bd,1} = \frac{H}{H^*} \frac{\overline{bO_{ab,1}}}{\overline{bd}} \cdot \vartheta_{ac,1} = \vartheta_{ac,1} \quad (11.6)$$

11.2 Kinnitusmomendid

Vaatleme konstruktsiooni varrast AB (joonis 11.2 a). Temale mõjuvate jõudude mõjul liigub varras uude asendisse $A'B'$. Varda asendi $A'B'$ saame järgmiste sõltumatute liikumiste tulemusena:

- varda mõlemad otsad siirduvad ühe ja sama suuruse võrra Δ_A (joonis 11.2 b);
- ühe varda otsa siire on risti varda teljega, näiteks varda otsa B'' siirdumine punkti B' (joonis 11.2 e). Varda otsa siire on Δ_{BA} ja pööre ϑ_{AB} ;
- varda otsa A' pööre nurga φ_A võrra. Varda elastse joone kuju on joonisel (joonis 11.2 c);
- varda otsa B' pööre nurga φ_B võrra. Varda elastse joone kuju on joonisel (joonis 11.2 d);



Joonis 11.2. Varda deformatsioon

- varda telje punktide siirded. Varda otsad ei siirdu ega pöördu (joonis 11.2 f)).

Paindemomendid M_{jk} ja M_{kj} arvutatakse varda otste ristlõigetes koormusest tekkiva paindemomendi $M_{jk}^{(p)}$, $M_{kj}^{(p)}$ ja sõlmede j , k pöörete φ_j , φ_k ning varda pöördest ϑ_{jk} tekkivate paindemomentide summeerimisega

$$\begin{aligned} M_{jk} &= M_{jk}^{(p)} + 4 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_j + 2 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_k - 6 \cdot i_{jk} \cdot \vartheta_{jk} \\ M_{kj} &= M_{kj}^{(p)} + 2 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_j + 4 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_k - 6 \cdot i_{jk} \cdot \vartheta_{jk} \end{aligned} \quad (11.7)$$

Siin on varda mõlemad otsad jäigalt kinnitatud ega ole summeerimist indeksite j ja k järgi.

Varda ots j on jäigalt kinnitatud. Varda otsas k on liigend

$$\begin{aligned} M_{jk} &= M_{jk}^{(p)} + 3 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_j - 3 \cdot i_{jk} \cdot \vartheta_{jk} \\ M_{kj} &= 0 \end{aligned} \quad (11.8)$$

Siin ei ole summeerimist indeksite j ja k järgi.

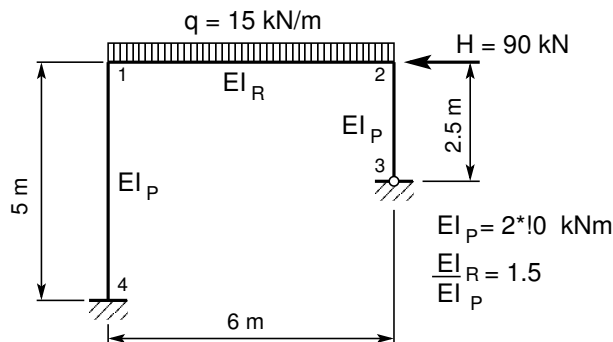
Kinnitusmomendid on toodud tabelis 11.1 leheküljel 150.

Tabel 11.1. Kinnitusmomendid ja põikjõud

<i>Jrk.nr</i>	<i>Skeem</i>	M_{JK}	M_{KJ}	Q_{JK}	Q_{KJ}
A		$4i$	$2i$	$-\frac{6i}{l}$	
B		$2i$	$4i$	$-\frac{6i}{l}$	
1		$-6i\vartheta_1$	$-6i\vartheta_1$	$\frac{12i\vartheta_1}{l}$	
C		$3i$	—	$-\frac{3i}{l}$	
2		$-3i\vartheta_2$	—	$-\frac{3i\vartheta_2}{l}$	
3		$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
4		$-\xi\eta^2 Fl$	$\xi^2\eta Fl$	$(1 + 2\xi)\eta^2 F$	$-\xi^2(1 + 2\eta) F$
5		$\eta(2 - 3\eta) \mathcal{M}$	$\xi(2 - 3\xi) \mathcal{M}$	$-(1 - \xi^2 - \eta^2) \frac{3\mathcal{M}}{l}$	
6		$-\frac{ql^2}{8}$	—	$\frac{5ql}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$
7		$-\eta(1 - \eta^2) \frac{Fl}{2}$	—	$\frac{\eta}{2}(3 - \eta^2) F$	$-\frac{\xi^2}{2}(3 - \xi) F$
8		$(1 - 3\eta^2) \frac{\mathcal{M}}{2}$	—	$-\frac{3}{2}(1 - \eta^2) \frac{\mathcal{M}}{l}$	
9		—	$\frac{ql^2}{8}$	$\frac{3ql}{8}$	$-\frac{5ql}{8}$
10		—	$\xi(1 - \xi^2) \frac{Fl}{2}$	$\frac{\eta^2}{2}(3 - \eta) F$	$-\frac{\xi}{2}(3 - \xi^2) F$
11		—	$(1 - 3\xi^2) \frac{\mathcal{M}}{2}$	$\frac{3}{2}(1 - \xi^2) \frac{\mathcal{M}}{l}$	
$\xi = \frac{a}{l} \quad \eta = \frac{b}{l}$					

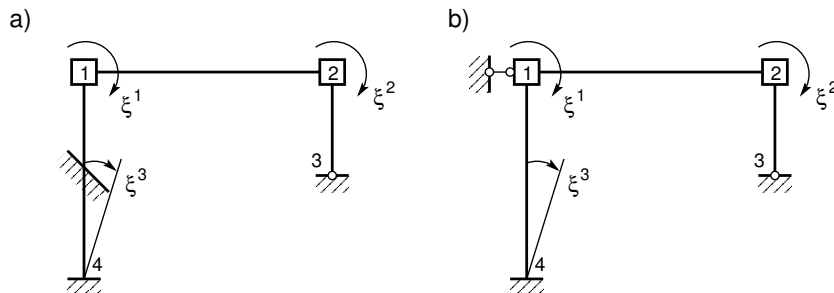
11.3 Deformatsioonimeetodiga arvutamise näited

Näide 11.1 Leiame joonisel 11.3 näidatud raami sisejõudude jaotuse deformatsioonimeetodiga. Raam on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega $q_z = 15 \frac{kN}{m}$ ning horisontaalse jõuga $H = 90 kN$. Raami posti ristlõike jäikus $EI_P = 2 \cdot 10^4 kNm^2$ ja raami riivi ristlõike jäikus $EI_R = 1.5EI_P$. Raami ava on 6 m, postide pikkused 5 m ja 2.5 m. Sarnast raami, kus vaadeldud koormusele on lisaks veel postidele rakendatud kaks vertikaalset jõudu $F = 750 kN$, on vaadeldud deformeerunud olukorra järgi [Bor79a].



Joonis 11.3. Raam

Raami geomeetriliselt määratud põhiskeem ja siirdeolukorda määravad sõlmede pöörded ξ^1 , ξ^2 ja varda pööre ξ^3 (φ_1 , φ_2 ja ψ_1) on näidatud joonisel 11.4 a. Joonisel 11.4 b on takistatud varda pöörde asemel sõlme takistatud siire.



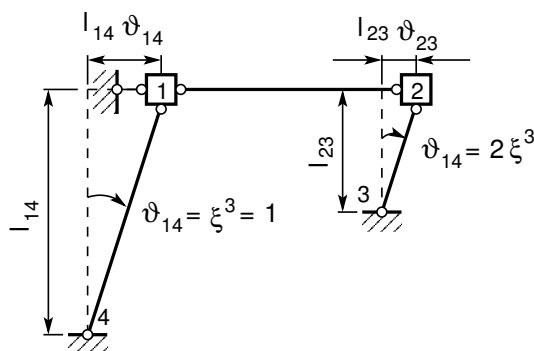
Joonis 11.4. Geomeetriliselt määratud põhiskeem

Raami virtuaalsed siirded (varrasahel) on joonisel 11.5.

Deformatsioonimeetodi koormusliikmete arvutamiseks vaatleme joonist 11.6 ja kasutame tabelit 11.1 lk 150.

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -q_z \frac{l^2}{12} = -15 \frac{6^2}{12} = -45 kNm \quad (11.9)$$

$$M_{14}^0 = -M_{41}^0 = M_{23}^0 = 0 \quad (11.10)$$

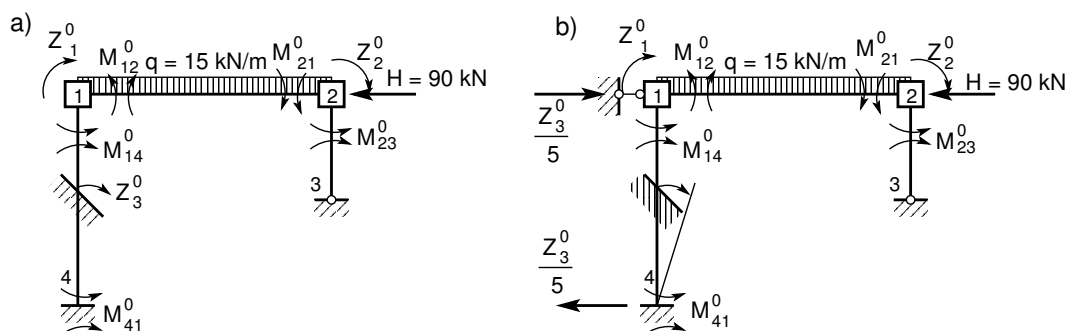


Joonis 11.5. Varrasahel

Esitame varraste kinnitismomendid veeruvektorina

$$M^0 = \begin{bmatrix} M_{12}^0 \\ M_{21}^0 \\ M_{14}^0 \\ M_{41}^0 \\ M_{23}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kNm} \quad (11.11)$$

Veeruvektori sisestamine arvutiprogrammiga Octave on näidatud (B.7) lk 198.



Joonis 11.6. Kinnitismomendid

Koormusliikme Z_1^0 leiame sõlme $\boxed{1}$ tasakaalust

$$Z_1^0 = M_{12}^0 + M_{14}^0 = -45 + 0 = -45 \text{ kNm} \quad (11.12)$$

Koormusliikme Z_2^0 leiame sõlme $\boxed{2}$ tasakaalust

$$Z_2^0 = M_{21}^0 + M_{23}^0 = 45 + 0 = 45 \text{ kNm} \quad (11.13)$$

Koormusliikme Z_3^0 leidmiseks vaatleme jõudude ja momentide võimalikku tööd varrasahela (joonis 11.5) siiretel. Posti pööret ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^0 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment Z_3^0 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 11.6).

Varrasahela võimalik töö

$$Z_3^0 \delta \vartheta_{14} - H \delta (l_{23} \vartheta_{23}) = 0 \quad (11.14)$$

Kinnitusmomentide M_{12}^0 , M_{21}^0 võimalik töö on null, sest varras 1 – 2 ei pöördi. Virtuaalpööre $\delta\vartheta_{14}$ ja siire $\delta(l_{23}\vartheta_{23})$ avalduvad virtuaalpööre $\delta\xi^{23}$ kaudu

$$\delta\vartheta_{14} = \delta\xi^3, \quad \delta(l_{23}\vartheta_{23}) = 2.5*2\delta\xi^3 \quad (11.15)$$

Arvestades virtuaalsiirete avaldisi (11.15), saame varrasahela võimaliku töö

$$\left[Z_3^0 - H*5 \right] \delta\xi^3 = 0 \quad (11.16)$$

millest avaldame koormusliikme Z_3^0

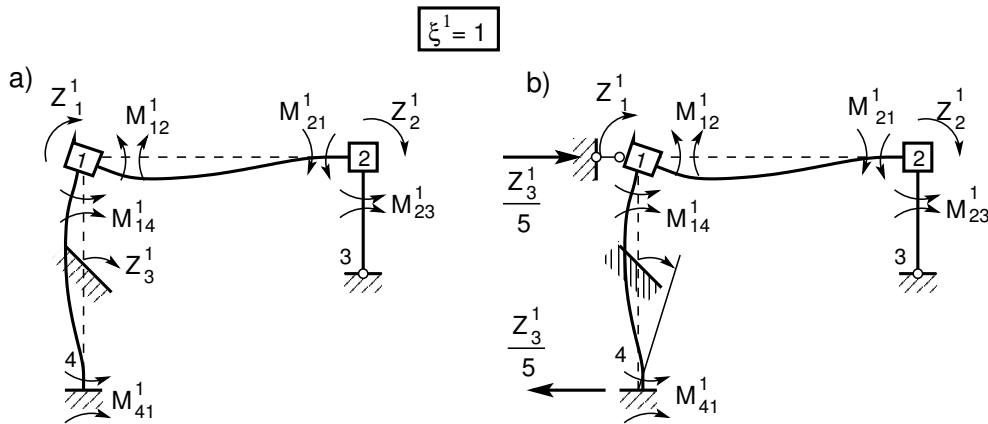
$$Z_3^0 = H*5 = 90*5 = 450 \text{ kNm} \quad (11.17)$$

Koormusliikmed esitame veeruvektorina $-Z^0$. Vastupidiseid märke kasutame eesmärgina viia koormusliikmed võrrandisüsteemi paremale poole.

$$-Z^\ominus = \begin{bmatrix} -Z_1^0 \\ -Z_2^0 \\ -Z_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ -45 \\ -450 \end{bmatrix} \text{ kNm} \quad (11.18)$$

Veeruvektori sisestamist arvutiprogrammiga Octave on näidatud (B.7) lk 198.

Varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ pöördest (joonis 11.7)



Joonis 11.7. Reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ pöördest

$$M_{12}^1 = 4 \frac{EI_R}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_P} M_{12}^1 = 4 \frac{1.50}{6} = 1.0 \quad (11.19)$$

$$M_{21}^1 = 2 \frac{EI_R}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_P} M_{21}^1 = 2 \frac{1.50}{6} = 0.5 \quad (11.20)$$

$$M_{14}^1 = 4 \frac{EI_P}{l_{14}}, \quad \frac{1}{EI_P} M_{14}^1 = 4 \frac{1.0}{5} = 0.8 \quad (11.21)$$

$$M_{41}^1 = 2 \frac{EI_P}{l_{14}}, \quad \frac{1}{EI_P} M_{41}^1 = 2 \frac{1.0}{5} = 0.4 \quad (11.22)$$

$$M_{23}^1 = 0 \quad (11.23)$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ pöördest ξ^1 5×3 maatriksi M^{123} veeruna

$$M^{123} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & . & . \\ M_{21}^1 & . & . \\ M_{14}^1 & . & . \\ M_{41}^1 & . & . \\ M_{23}^1 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} EI_P \begin{bmatrix} 1.0 & . & . \\ 0.5 & . & . \\ 0.8 & . & . \\ 0.4 & . & . \\ 0 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

Maatriksi sisestamist arvutiprogrammis Octave vaatleme pärast pöördest ξ^2 ja ξ^2 varraste reaktsioonimomentide leidmist.

Sõlmede reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ pöördest (joonis 11.7) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme $\boxed{1}$ tasakaalust (joonis 11.7) saame

$$Z_1^1 = M_{12}^1 + M_{14}^1 = EI_P (1.0 + 0.8) = 1.8EI_P \quad (11.25)$$

Sõlme $\boxed{2}$ tasakaalust

$$Z_2^1 = M_{21}^1 + M_{23}^1 = EI_P (0.5 + 0) = 0.5EI_P \quad (11.26)$$

Reaktsioonimomendi Z_3^2 leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide võimalikku tööd varrasahela (joonis 11.5) siiretel. Posti pöört ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^2 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusleks on reaktsioonimoment Z_3^2 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 11.7).

Varraste reaktsioonimomentide võimalik töö sõlme $\boxed{1}$ pöördest

$$Z_3^1 \delta \vartheta_{14} + (M_{14}^1 + M_{41}^1) \delta \vartheta_{14} = [Z_3^1 + (M_{14}^1 + M_{41}^1)] \delta \vartheta_{14} = 0 \quad (11.27)$$

Võrrandist (11.27) saame

$$Z_3^1 = - (M_{14}^1 + M_{41}^1) = -EI_P (0.8 + 0.4) = -1.2EI_P \quad (11.28)$$

Sõlmede ja varraste pöörete leidmiseks alustame võrrandisüsteemi koostamist. Võrrandisüsteemi tundmatute ees olevatest kordajatest moodustame 3×3 maatriksi A , mille esimene veerg on

$$A = \begin{bmatrix} Z_1^1 & . & . \\ Z_2^1 & . & . \\ Z_3^1 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} 1.8 & . & . \\ 0.5 & . & . \\ -1.2 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.29)$$

Varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ pöördest (joonis 11.8)

$$M_{12}^2 = 2 \frac{EI_R}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_P} M_{12}^2 = 2 \frac{1.5}{6} = 0.5 \quad (11.30)$$

$$M_{21}^2 = 4 \frac{EI_R}{l_{12}}, \quad \frac{1}{EI_P} M_{21}^2 = 4 \frac{1.5}{6} = 1.0 \quad (11.31)$$

$$M_{14}^2 = M_{41}^2 = 0 \quad (11.32)$$

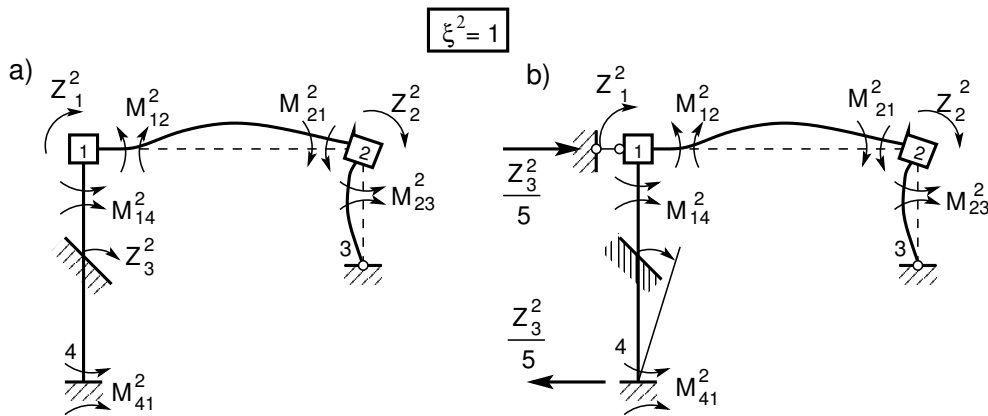
$$M_{23}^2 = 3 \frac{EI_P}{l_{23}}, \quad \frac{1}{EI_P} M_{23}^2 = 3 \frac{1.0}{2.5} = 1.2 \quad (11.33)$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ pöördest ξ^2 5×3 matriksi M^{123} teise veeruna

$$M^{123} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & \cdot \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & \cdot \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & \cdot \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & \cdot \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & \cdot \\ 0.5 & 1 & \cdot \\ 0.8 & 0 & \cdot \\ 0.4 & 0 & \cdot \\ 0 & 1.2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.34)$$

Maatriksi sisestamist arvutiprogrammis Octave vaatleme pärast pöördest ξ^3 varraste reaktsioonimomentide leidmist.

Sõlmede reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ pöördest (joonis 11.8) saame vastava sõlme ta-



Joonis 11.8. Reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ pöördest

sakaalust. Sõlme $\boxed{1}$ tasakaalust (joonis 11.8) saame

$$Z_1^2 = M_{12}^2 + M_{14}^2 = EI_P (0.5 + 0) = 0.5EI_P \quad (11.35)$$

ja sõlme $\boxed{2}$ tasakaalust

$$Z_2^2 = M_{21}^2 + M_{23}^2 = EI_P (1.0 + 1.2) = 2.2EI_P \quad (11.36)$$

Reaktsioonimomendi Z_2^2 leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide võimalikku tööd varrasahela (joonis 11.5) süretel. Posti pöört ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_3^1 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment Z_3^2 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 11.5). Varraste reaktsioonimomentide võimalik töö sõlme $\boxed{2}$ pöördest ($\vartheta_{23} = 2\vartheta_{14}$) (joonis 11.5)

$$Z_3^2 \delta\vartheta_{14} + M_{23}^2 \delta\vartheta_{23} = [Z_3^2 + 2M_{23}^2] \delta\vartheta_{14} = 0 \quad (11.37)$$

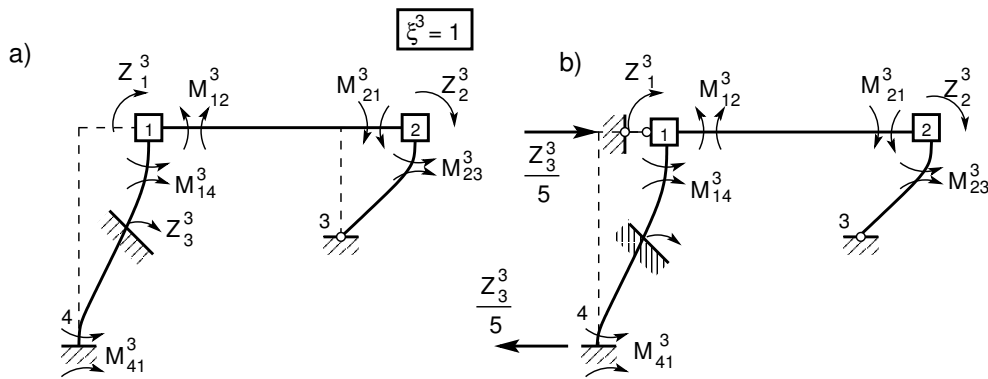
Võrrandist(11.27) saame

$$Z_3^2 = -M_{23}^2 = -EI_P 2 \cdot 1.2 = -2.4EI_P \quad (11.38)$$

Lisame võrrandisüsteemi tundmatute ees olevate kordajate matriksile A (11.29) teise veeru

$$A = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & \cdot \\ Z_2^1 & Z_2^2 & \cdot \\ Z_3^1 & Z_3^2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} 1.8 & 0.5 & \cdot \\ 0.5 & 2.2 & \cdot \\ -1.2 & -2.4 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.39)$$

Varraste reaktsioonimomendid varda 1 – 2 sirdest (joonis 11.9)



Joonis 11.9. Reaktsioonimomendid varda pöördest

$$M_{12}^3 = M_{21}^3 = 0 \quad (11.40)$$

$$M_{14}^3 = -6 \frac{EI_P}{l_{14}}, \quad \frac{1}{EI_P} M_{14}^3 = -6 \frac{1}{5} = -1.2 \quad (11.41)$$

$$M_{41}^3 = M_{14}^3 = -1.2 \quad (11.42)$$

$$M_{23}^3 = -3 \frac{EI_P}{l_{23}}, \quad \frac{1}{EI_P} M_{23}^3 = -3 \frac{1}{2.5} = -2.4 \quad (11.43)$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid varda pöördest ξ^3 5×3 matriksi M^{123} kolmanda veeruna

$$M^{123} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & M_{12}^3 \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & M_{21}^3 \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & M_{14}^3 \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & M_{41}^3 \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & M_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & -1.2 \\ 0.4 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1.2 & -2.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.44)$$

Maatriksi sisestamist arvutiprogrammis Octave on näidatud (B.3) lk 197.

Sõlmede reaktsioonimomendid varda 1 – 2 siirdest (joonis 11.9) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme $\boxed{1}$ tasakaalust (joonis 11.9) saame

$$Z_1^3 = M_{12}^3 + M_{14}^3 = EI_P (0 - 1.2) = -1.2EI_P \quad (11.45)$$

ja sõlme $\boxed{2}$ tasakaalust

$$Z_2^3 = M_{21}^3 + M_{23}^3 = EI_P (0 - 2.4) = -2.4EI_P \quad (11.46)$$

Reaktsioonimomendi Z_2^3 leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide võimalikku tööd varrasahela (joonis 11.5) süretel. Posti pööret ξ^3 takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi Z_2^3 esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suuruseks on reaktsioonimoment Z_2^3 jagatud varda pikkusega 5 (joonis 11.9). Varraste reaktsioonimomentide võimalik töö varda $\boxed{3}$ pöördest ($\vartheta_{23} = 2\vartheta_{14} = \xi^3$) (joonis 11.5)

$$Z_3^3 \delta\vartheta_{14} + (M_{14}^3 + M_{14}^3) \delta\vartheta_{14} + M_{23}^3 \delta\vartheta_{23} = [Z_3^3 + M_{14}^3 + M_{41}^3 + 2M_{23}^3] \delta\vartheta_{14} = 0 \quad (11.47)$$

Võrrandist (11.47) saame

$$Z_3^3 = - (M_{14}^3 + M_{41}^3) - 2M_{23}^3 = -EI_P [-1.2*1 - 1.2*1 - 2*1.2] = 7.2EI_P \quad (11.48)$$

Liseme võrrandisüsteemi tundmatute ees olevate kordajate maatriksile \mathbf{A} (11.27) kolmanda veeru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & Z_1^3 \\ Z_2^1 & Z_2^2 & Z_2^3 \\ Z_3^1 & Z_3^2 & Z_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} 1.8 & 0.5 & -1.2 \\ 0.5 & 2.2 & -2.4 \\ -1.2 & -2.4 & 7.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.49)$$

Maatriksi sisestamist arvutiprogrammiga Octave on näidatud (B.3) lk 197.

Sõlmede ja varraste pöörete leidmiseks koostasime võrrandisüsteemi

$$\mathbf{A}\xi = \mathbf{Z}^\ominus \quad (11.50)$$

kus maatriks \mathbf{A} on leitud avaldisega (11.49) ja vektor \mathbf{Z}^\ominus (11.18) ning vektor ξ

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.51)$$

Võtame kasutusele uue muutuja $\mathbf{A} = EI_P \xi$ ja maatriksi $\mathbf{a} = EI_P \mathbf{A}$ ning esitame võrrandisüsteemi (11.50) järgmisel kujul:

$$\mathbf{aX} = \mathbf{Z}^\ominus \quad (11.52)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 0.5 & -1.2 \\ 0.5 & 2.2 & -2.4 \\ -1.2 & -2.4 & 7.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ -45 \\ -450 \end{bmatrix} \quad (11.53)$$

```

xterm
bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> a=[1.8 0.5 -1.2; 0.5 2.2 -2.4; -1.2 -2.4 7.2]
a =

    1.80000    0.50000   -1.20000
    0.50000    2.20000   -2.40000
   -1.20000   -2.40000    7.20000

octave:2> z=-[-45; 45; 450]
z =

    45
   -45
  -450

octave:3> X=a\z
X =

  -10.090
 -138.565
 -110.370

octave:4>

```

Joonis 11.10. Pöördenurkade arvutamine

Võrrandisüsteemi (11.52) võib lahendada maatriksi \mathbf{a} pöördmaatriksi \mathbf{a}^{-1} abil

$$\mathbf{X} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{Z}^\ominus \quad (11.54)$$

Arvutiprogrammiga Octave lahendame võrrandisüsteemi (11.53) Gaussi elimineerimismeetodiga (vt avaldist (11.55) ja joonist 11.10).

$$X = a \setminus z \quad (11.55)$$

kus $z = \mathbf{Z}^\ominus$.

Võrrandisüsteemi (11.52) lahend

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.090 \\ -138.565 \\ -110.370 \end{bmatrix} \quad (11.56)$$

Momendid varraste otstes leiame avaldisega

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \mathbf{M}^{123}\xi \quad (11.57)$$

ehk

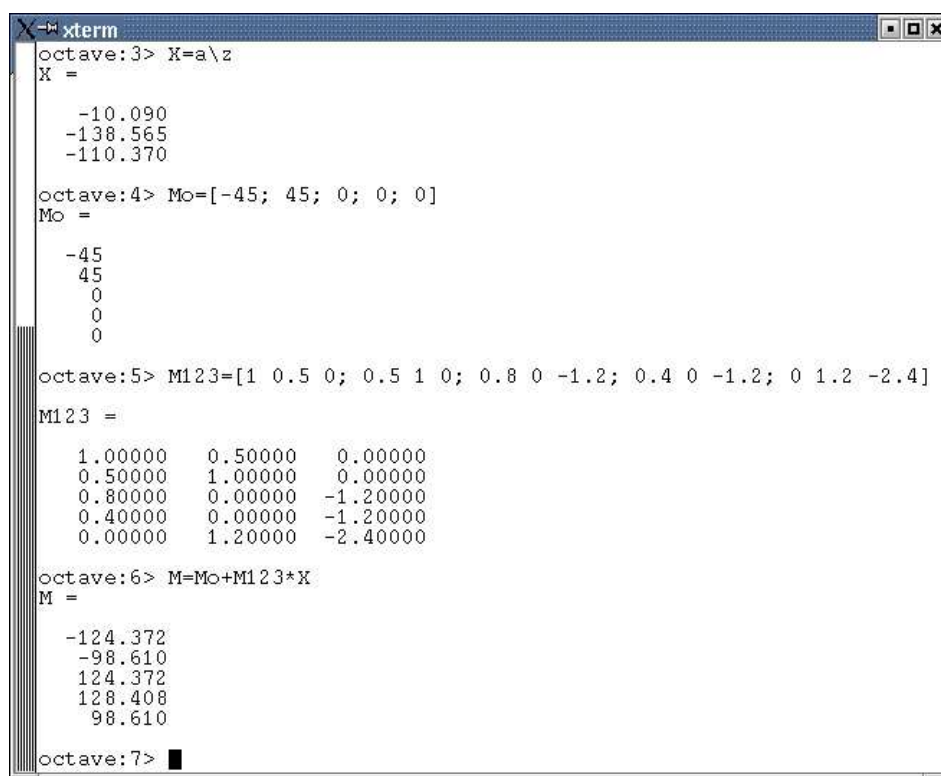
$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12}^0 \\ M_{21}^0 \\ M_{14}^0 \\ M_{41}^0 \\ M_{23}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & M_{12}^3 \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & M_{21}^3 \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & M_{14}^3 \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & M_{41}^3 \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & M_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (11.58)$$

kus maatriks \mathbf{M}^0 on toodud avaldisega (11.11) ja maatriks \mathbf{M}^{123} avaldisega (11.44). Momentide avaldise (11.57), (11.58) esitame leitud \mathbf{X} kaudu

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \frac{1}{EI_P} \mathbf{M}^{123} \mathbf{X} \quad (11.59)$$

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & -1.2 \\ 0.4 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1.2 & -2.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10.090 \\ -138.565 \\ -110.370 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -124.372 \\ -98.610 \\ 124.372 \\ 128.408 \\ 98.610 \end{bmatrix} \quad (11.60)$$

Momentide väärtused varraste otstes arvutame arvutiprogrammiga Octave (joonis 11.11).



```

xterm
octave:3> X=a\z
X =
   -10.090
  -138.565
  -110.370

octave:4> Mo=[-45; 45; 0; 0; 0]
Mo =
   -45
    45
     0
     0
     0

octave:5> M123=[1 0.5 0; 0.5 1 0; 0.8 0 -1.2; 0.4 0 -1.2; 0 1.2 -2.4]
M123 =
   1.00000   0.50000   0.00000
   0.50000   1.00000   0.00000
   0.80000   0.00000  -1.20000
   0.40000   0.00000  -1.20000
   0.00000   1.20000  -2.40000

octave:6> M=Mo+M123*X
M =
  -124.372
   -98.610
   124.372
   128.408
    98.610

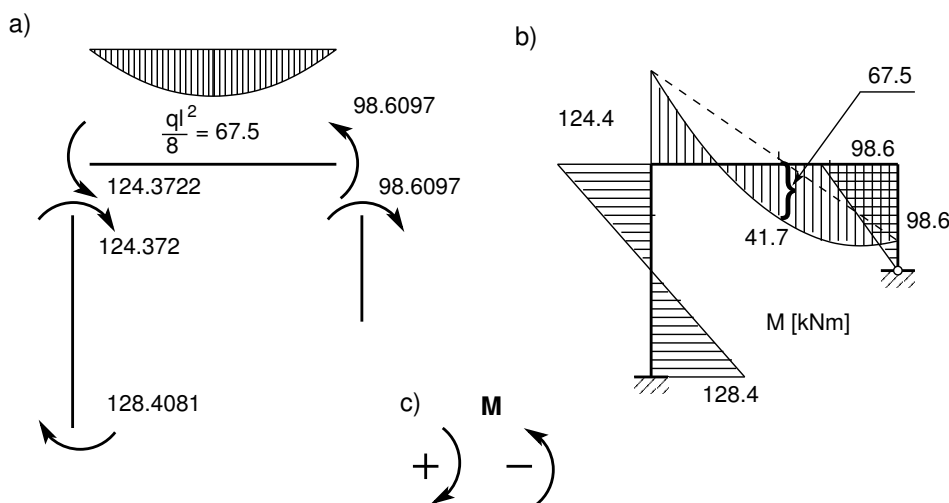
octave:7>

```

Joonis 11.11. Momendid varda otstes

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -124.372 \\ -98.610 \\ 124.372 \\ 128.408 \\ 98.610 \end{bmatrix} \quad (11.61)$$

Leitud momendid varraste otstes (11.61) kanname joonisele 11.12 b. Momendi positiivne ja negatiivne suund on näidatud joonisel 11.12 c. Joonisel 11.12 a on varda 1 – 2 lihttala pain-

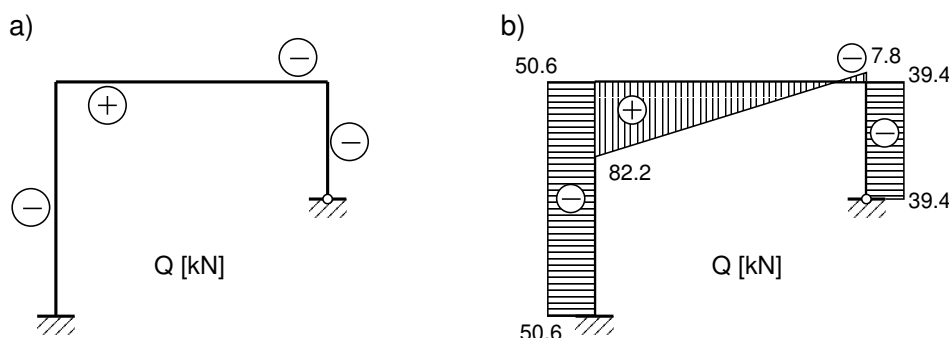


Joonis 11.12. Momendid varda otstes ja paindemomendi epüür

demomendi epüür jaotatud koormusest q_z . Joonisel 11.12 b on raami paindemomendi epüür. Joonisel 11.12 c on paindemomendi positiivne ja negatiivne suund. Raami varraste põikjõu märki määramiseks vaatleme esmalt joonist 1.13 lk 30. Paindemomendi tuletise geomeetriliseks tõlgenduseks punktis on selles punktis paindemomendi epüüri puutuva tõusunurga tangens ($\tan \alpha$). Põikjõu märk oleneb puutuva (joonis 1.13) pööramise suunast (puutujat pöörame nii, et ta ühtiks varda teljega, seejuures $\alpha < \frac{\pi}{2}$): vastupäeva pöörates on põikjõud positiivne ja päripäeva pöörates negatiivne.

Raami varda 1 – 4 paindemomendi epüüri (joonis 11.12) puutuva ühtimiseks varda teljega tuleb teda pöörata päripäeva, s.t põikjõu märk on miinus (joonis 1.13 lk 30). Kanname põikjõu märki joonisele 11.13 a. Raami varda 2 – 3 paindemomendi epüüri (joonis 11.12) puutuva ühtimiseks varda teljega tuleb teda pöörata päripäeva, s.t põikjõu märk on miinus (joonis 1.13). Raami varda 1 – 2 paindemomendi epüüri alguses (joonis 11.12) puutuva ühtimiseks varda teljega tuleb teda pöörata vastupäeva, s.t põikjõu märk on pluss (joonis 1.13).

Põikjõu arvutamiseks vaatleme joonist 11.12 ja 1.14. Varda 1 – 4 põikjõud, mille märk peab



Joonis 11.13. Raami põikjõu märk ja epüür

tulema miinus

$$Q_{14} = Q_{41} = \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{-124.4 - 128.4}{5} = -50.6 \text{ kN} \quad (11.62)$$

Varda 2 – 3 põikjõud, mille märk peab tulema miinus

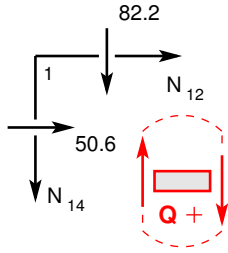
$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{-98.6 - 0}{2.5} = -39.4 \text{ kN} \quad (11.63)$$

Varda 1 – 2 põikjõu arvutamisel leiame vastava lihttala põikjõu Q^o ja põikjõu momentidest $Q^M = \frac{\Delta M}{\Delta x}$

$$Q_{12} = Q^o + \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{15 \cdot 6}{2} + \frac{98.6 + 124.4}{6.0} = 45 + 37.2 = 82.2 \text{ kN} \quad (11.64)$$

$$Q_{21} = Q^o + \frac{\Delta M}{\Delta x} = -\frac{15 \cdot 6}{2} + \frac{98.6 + 124.4}{6.0} = -45 + 37.2 = -7.8 \text{ kN} \quad (11.65)$$

Leitud põikjõud on kantud joonisele 11.13 b.



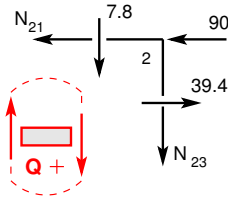
Joonisel 11.14 on näidatud sõlmele 1 mõjuvad jõud

$$\sum X = 0, \quad N_{12} = -50.6 \text{ kN} \quad (11.66)$$

$$\sum Z = 0, \quad N_{14} = -82.2 \text{ kN} \quad (11.67)$$

Joonis 11.14. Sõlme 1 tasakaal

Joonisel 11.15 on näidatud sõlmele 2 mõjuvad jõud

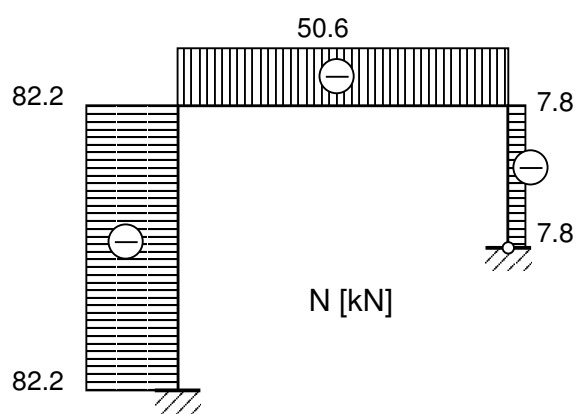


$$\sum X = 0, \quad N_{21} = -90 + 39.4 = -50.6 \text{ kN} \quad (11.68)$$

$$\sum Z = 0, \quad N_{23} = -7.8 \text{ kN} \quad (11.69)$$

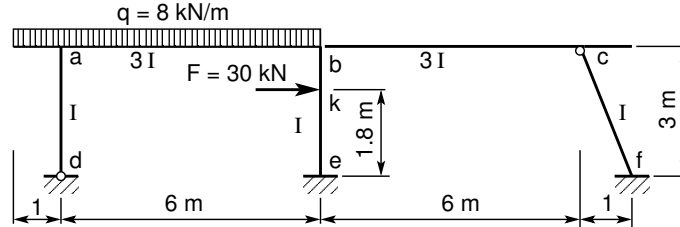
Joonis 11.15. Sõlme 2 tasakaal

Raami varrastes mõjuva normaaljõu leidmiseks lõikame välja sõlmed 1 ja 2 (joonis 11.14 ja 11.15). Kanname joonisele kõik sõlmele mõjuvad jõud. Normaaljõud N_{12} , N_{14} , N_{21} , N_{23} , mida me otsime, näitame positiivses suunas. Põikjõud kanname joonisele nende mõjumise suunas. Positiivne põikjõud pöörab vaadeldavat elementi päripäeva (joonised 11.14 ja 11.15). Leitud normaaljõud kanname joonisele 11.16.

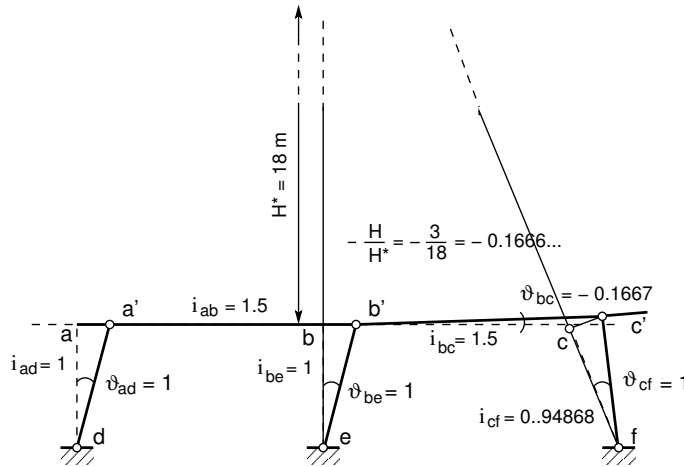


Joonis 11.16. Raami normaaljõu epüür

Näide 11.2 Leiame joonisel 11.17 näidatud raami sisejõudude jaotuse deformatsioonimeetodiga. Raami riivide ristlõike jäikus EI_R on kolm korda suurem kui postidel $EI_P = 3 \cdot EI_P$. Raami vertikaalne koormus $q = 8 \text{ kN/m}$ ja horisontaalne koormus keskmisele postile $F = 30 \text{ kN}$. Joonisel 11.18 on näidatud vaadeldava raami varrasahel. Raami kõigi varraste pöörded ϑ_{ij}



Joonis 11.17. Raam II



Joonis 11.18. Raami varrasahel II

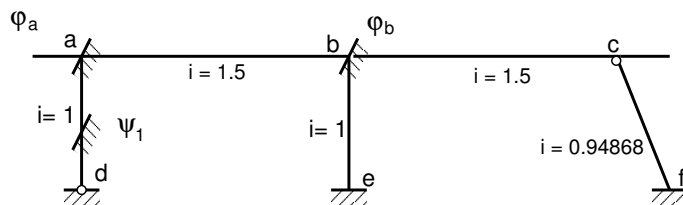
avaldame esimese varda ad pöörde ϑ_{ad} kaudu. Varda bc pöörde leidmisel kasutame avaldist (11.6).

$$\vartheta_{bc} = -\frac{H}{H^*} \cdot \vartheta_{ad} = -\frac{3}{18} \cdot 1 \quad (11.70)$$

Raami varraste jäikuste $i = \frac{EI}{l}$ arvutamisel võtame varda ad jäikuse $i_{ad} = \frac{EI_{ad}}{l_{ad}}$ aluseks, s.t baasjäikuseks.

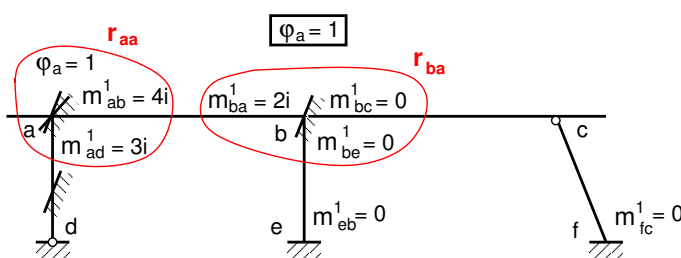
$$\begin{aligned} i_o &= \frac{EI_{ad}}{l_{ad}} = \frac{1}{3} \\ i_{ad} &= \frac{\frac{EI_{ad}}{l_{ad}}}{\frac{EI_{ab}}{l_{ab}}} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 1} = 1 \\ i_{ab} &= \frac{\frac{EI_{ab}}{l_{ab}}}{\frac{EI_{bc}}{l_{bc}}} = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 1} = 1.5 \\ i_{bc} &= \frac{\frac{EI_{bc}}{l_{bc}}}{\frac{EI_{be}}{l_{be}}} = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 1} = 1.5 \\ i_{be} &= \frac{\frac{EI_{be}}{l_{be}}}{\frac{EI_{cf}}{l_{cf}}} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 1} = 1 \\ i_{cf} &= \frac{\frac{EI_{cf}}{l_{cf}}}{i_o} = \frac{1}{3.1623} \cdot \frac{3}{1} = 0.94868 \end{aligned} \quad (11.71)$$

Raami geomeetriselt määratud põhiskeem on joonisel 11.19.



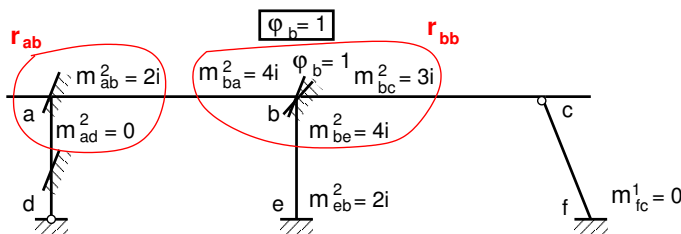
Joonis 11.19. Geomeetriselt määratud põhiskeem II

Raami sõlme a pööramisel ühikulise nurga võrra $\varphi_a = 1$ tekkivad momendid on arvutatud tabelis 11.1 toodud valemite alusel. Tulemused on kantud joonisele 11.20. Joonistel 11.20–11.22 kasutatakse järgmisi tähistusi m_{mn}^k momentide märkimiseks: indeks k kirjeldab deformeerunud olukorda ($k = 1, 2, 3$); m ja n tähistavad varda algust ja lõppu. Raami sõlme b



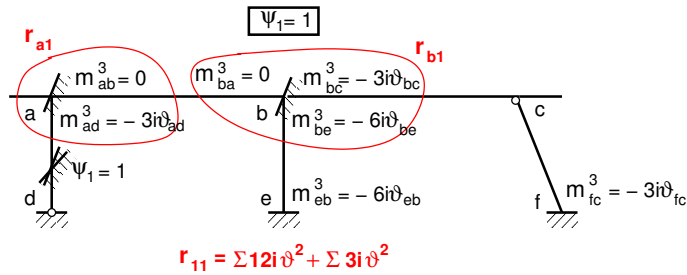
Joonis 11.20. Sõlme a pööre φ_a

pööramisel ühikulise nurga võrra $\varphi_b = 1$ tekkivad momendid on arvutatud tabelis 11.1 toodud valemitega. Tulemused on kantud joonisele 11.21. Raami varda ad pööramisel ühikulise nurga



Joonis 11.21. Sõlme b pööre φ_b

võrra $\psi_1 = 1$ tekkivad momendid on arvutatud tabelis 11.1 toodud valemitega. Tulemused on kantud joonisele 11.22. Momentide m_{mn}^k avaldised, mis on joonistel 11.20–11.22, kanname



Joonis 11.22. Varda ad pööre ψ_1

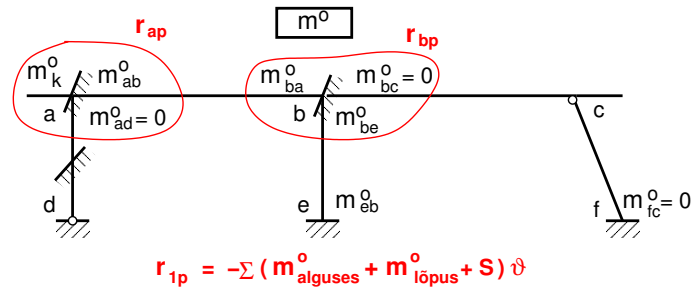
maatriksisse mx.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{da} \\ M_{ad} \\ \dots \\ M_{ab} \\ M_{ba} \\ \dots \\ M_{be} \\ M_{eb} \\ \dots \\ M_{bc} \\ M_{cb} \\ \dots \\ M_{cf} \\ M_{fc} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{mx} = \begin{bmatrix} m_{da}^1 & m_{da}^2 & m_{da}^3 \\ m_{ad}^1 & m_{ad}^2 & m_{ad}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{ab}^1 & m_{ab}^2 & m_{ab}^3 \\ m_{ba}^1 & m_{ba}^2 & m_{ba}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{be}^1 & m_{be}^2 & m_{be}^3 \\ m_{eb}^1 & m_{eb}^2 & m_{eb}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{bc}^1 & m_{bc}^2 & m_{bc}^3 \\ m_{cb}^1 & m_{cb}^2 & m_{cb}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{cf}^1 & m_{cf}^2 & m_{cf}^3 \\ m_{fc}^1 & m_{fc}^2 & m_{fc}^3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{varras 1 post} \\ \dots \\ \text{varras 2 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 3 post} \\ \dots \\ \text{varras 4 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 5 post} \end{array}; \quad \mathbf{mp} = \begin{bmatrix} m_{da}^o \\ m_{ad}^o \\ \dots \\ m_{ab}^o \\ m_{ba}^o \\ \dots \\ m_{be}^o \\ m_{eb}^o \\ \dots \\ m_{bc}^o \\ m_{cb}^o \\ \dots \\ m_{cf}^o \\ m_{fc}^o \end{bmatrix} \quad (11.72)$$

ehk

$$\mathbf{mx} = \begin{bmatrix} 0 * eli(1) & 0 * eli(1) & 0 * eli(1) * deta(1) \\ 3 * eli(1) & 0 * eli(1) & -3 * eli(1) * deta(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 4 * eli(2) & 2 * eli(2) & 0 * eli(2) * deta(2) \\ 2 * eli(2) & 4 * eli(2) & 0 * eli(2) * deta(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 * eli(3) & 4 * eli(3) & -6 * eli(3) * deta(1) \\ 0 * eli(3) & 2 * eli(3) & -6 * eli(3) * deta(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 * eli(4) & 3 * eli(4) & -3 * eli(4) * deta(4) \\ 0 * eli(4) & 0 * eli(4) & 0 * eli(4) * deta(4) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 * eli(5) & 0 * eli(5) & 0 * eli(5) * deta(5); \\ 0 * eli(5) & 0 * eli(5) & -3 * eli(5) * deta(5) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{varras 1 post} \\ \dots \\ \text{varras 2 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 3 post} \\ \dots \\ \text{varras 4 riiv} \\ \dots \\ \text{varras 5 post} \end{array}; \quad \mathbf{mp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ M_{ab} \\ M_{ba} \\ \dots \\ M_{be} \\ M_{eb} \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.73)$$

Jaotatud ja koondatud koormusest tekkivad kinnitusemomendid on arvutatud funktsiooni kinnmom1.m C.19 lk 265 abil tabelis 11.1 toodud valemitega. Tulemused on kantud joonisele 11.23.



Joonis 11.23. Varda kinnitusmomendid koormusest II

Võrrandisüsteemi vasaku poole kordajad arvutame Octave'iga järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 r(1,1) &= 3 * eli(1) + 4 * eli(2) \\
 r(1,2) &= 2 * eli(2) \\
 r(2,1) &= r(1,2) \\
 r(2,2) &= 4 * eli(2) + 4 * eli(3) + 3 * eli(4) \\
 r(1,3) &= -3 * eli(1) * deta(1) \\
 r(3,1) &= r(1,3) \\
 r(2,3) &= -6 * eli(6) * deta(6) - 3 * eli(4) * deta(4) \\
 r(3,2) &= r(2,3) \\
 r(3,3) &= 3 * eli(1) * deta(1)^2 + 12 * eli(3) * deta(3)^2 + 3 * eli(4) * deta(4)^2 + \\
 &\quad + 3 * eli(5) * deta(5)^2
 \end{aligned} \tag{11.74}$$

Võrrandisüsteemi parem pool. Kordajate leidmiseks kasutame Octave'i funktsiooni kinnmom1.m C.19 lk 265, mis on kirjutatud tabeli 11.1 alusel.

$$\begin{aligned}
 r(1p) &= Mab + 4 \\
 r(2p) &= Mba + Mbe \\
 r(3p) &= -(Meb + Mbe + 30 * 1.8) * deta(3)
 \end{aligned} \tag{11.75}$$

Võrrandisüsteemi (11.76)

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1p} \\ r_{2p} \\ r_{3p} \end{bmatrix} \tag{11.76}$$

ehk

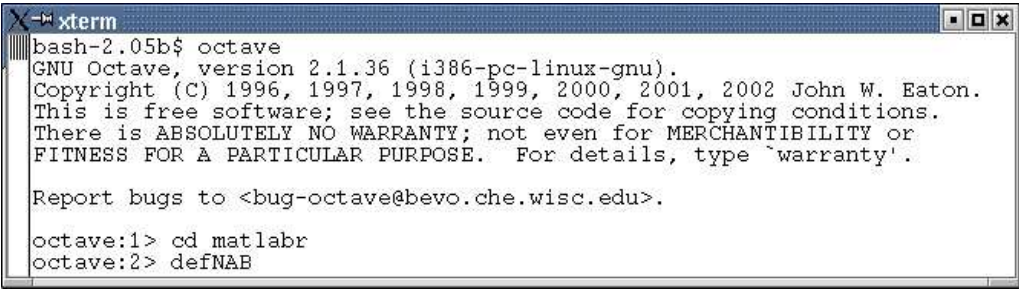
$$\mathbf{r} * \mathbf{x} = \mathbf{r}_p \tag{11.77}$$

koostamiseks ja lahendamiseks kasutame Octave'i (vt joonis 11.24 ja programm C.18 lk 263). Lahendamisel saadud tulemuste salvestamiseks avame päeviku "diary defNAB.out" (vt Päevik 11.1).

```

Päevik 11.1 %defNAB.out
octave:2> diary defNAB.out
octave:3> diary on
octave:4> defNAB

```



```

bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> cd matlabr
octave:2> defNAB

```

Joonis 11.24. Deformatsioonimeetod *Octave*'iga

```

varraste_pikkused_1 =

    3.0000    6.0000    3.0000    6.0000    3.1623

varraste_ristloigete_jaikused_EI =

    1    3    1    3    1

varraste_poordenurdad_deta =

    1.0000    0.0000    1.0000   -0.1667    1.0000

varraste_jaikused_i =

    1.0000    1.5000    1.0000    1.5000    0.94868

mx =

    0.00000    0.00000    0.00000
    3.00000    0.00000   -3.00000
    6.00000    3.00000    0.00000
    3.00000    6.00000    0.00000
    0.00000    4.00000   -6.00000
    0.00000    2.00000   -6.00000
    0.00000    4.50000    0.75015
    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    0.00000   -2.84605

Vb = 24
Va = 24
Vb = 18
Va = 12
mp =

    0.00000
    0.00000
   -24.00000
    24.00000

```

```

12.96000
-8.64000
0.00000
0.00000
0.00000
0.00000

```

r =

```

9.0000 3.0000 -3.0000
3.0000 14.5000 -5.2499
-3.0000 -5.2499 17.9711

```

rp =

```

-20.000
36.960
-58.320

```

x =

```

4.0482
-2.1995
3.2785

```

M =

```

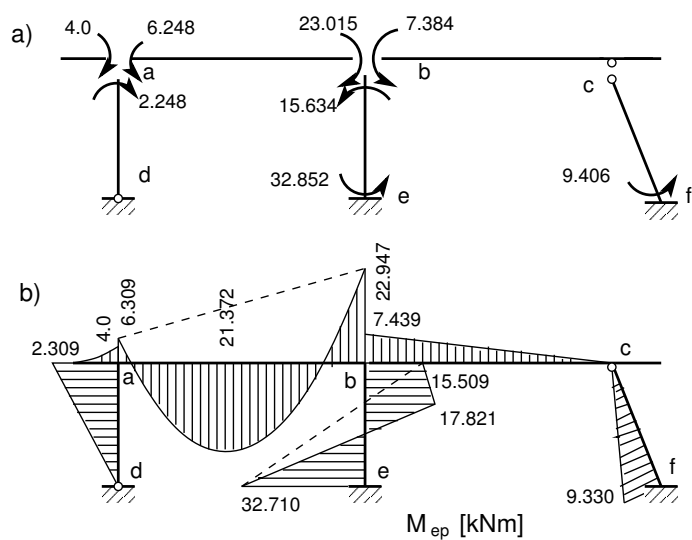
0.00000
2.30929
-6.30929
22.94744
-15.50887
-32.70980
-7.43858
0.00000
0.00000
-9.33064

```

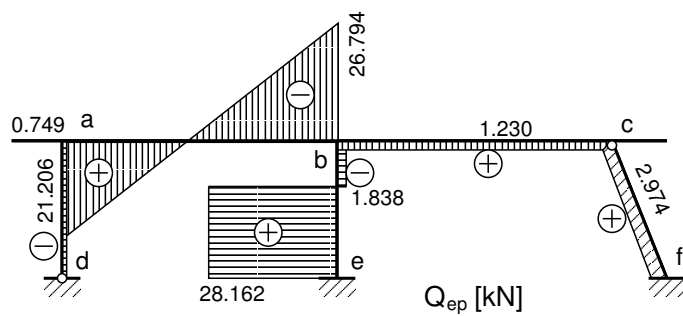
octave:5> diary off

```
%%%%%%%%%
```

Arvutusega saadud momendid varraste otstes (vt Päevik 11.1) kanname joonisele 11.25 a. Joonise 11.25 a põhjal joonestame momendi epüüri 11.25 b. Põikjõu epüür on joonisel 11.26.



Joonis 11.25. Momendid varraste otstes



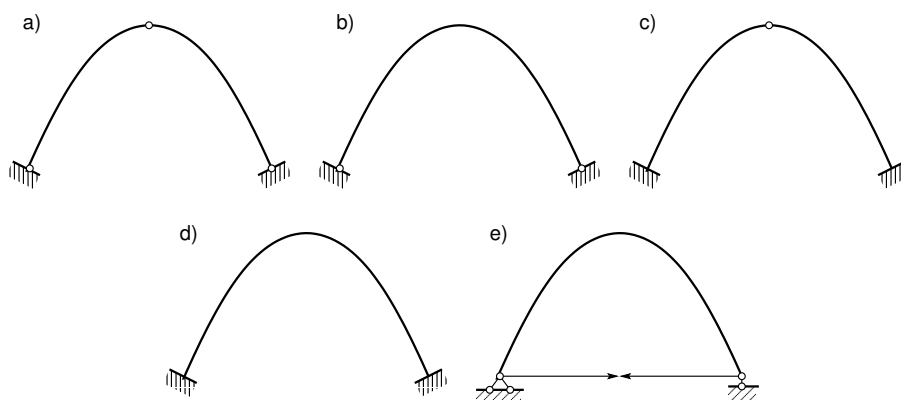
Joonis 11.26. Põikjõu epüür

Peatükk 12

Kaared ja võlvid

12.1 Kaarkonstruktsioonid

Olenevalt liigendite arvust nimetatakse neid kolme, kahe, ühe liigendiga või liigenditeta kaarteks (joonis 12.1). Kolme liigendiga kaar on staatikaga määratav, teised kaared on staatikaga määramatud. Staatiliselt määramatu kaare sisejõud olenevad kaare telje



Joonis 12.1. Kaared

kujust ja ka ristlõike mõõtmetest. Kaare ristlõike esialgsed mõõtmed valitakse ligikaudsete valemitega või kogemuste põhjal. Lõplikud ristlõike mõõtmed ja telje kuju peavad vastama arvutuslike sisejõudude jaotusele (insener valib ja siis kontrollib arvutustega). Sümmeetriliste kaarte puhul võib ristlõike inertsimomendi muutuse piki kaare telge avaldada järgmistega [Rää75]:

- liigenditeta kaare jaoks

$$\frac{I_c}{I} = 1 - (1 - n) \left(\frac{x}{l_1} \right)^r \quad (12.1)$$

- kahe liigendiga kaare jaoks

$$\frac{I_c}{I} = 1 + (1 - n) \left(\frac{x}{l_1} \right)^r \quad (12.2)$$

$$I = I_c \cos \varphi \quad (12.3)$$

$$n = \frac{I_c}{I_k \cos \varphi_k} \quad (12.4)$$

kus x – kaare telje abstsiss (koordinaatide alguspunkt lukuristlõike raskuskeskmes);

φ – nurk kaare telje puutuja ja horisontaali vahel;

I_c – lukuristlõike inertsimoment;

I – ristlõike, mille abstsiss on x , inertsimoment;

l_1 – pool sillet;

l_k – kaare kannaristlõike inertsimoment;

φ_k – nurk telje puutuja ja horisontaali vahel kaare kannas;

Enamikul juhtudel võetakse valemities (12.1), (12.2), $r = 1$ ja valemis (12.2) sageli ka $n = 1$.

Väikese kõverusega kaarkonstruktsioonides ($\frac{\rho}{h} > 5$, milles ρ on kõverusraadius ja h kaare ristlõike kõrgus) arvutatakse siirded järgmise avaldisega:

$$\Delta_{ip} = \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p}{EI} + \frac{n_i N_p}{EA} - \frac{m_i N_p}{EA \rho} - \frac{n_i M_p}{EA \rho} + k_j \frac{q_i Q_p}{EA} \right) ds \quad (12.5)$$

Avaldises (12.5) on kolmanda ja neljanda liikme ees miinus, sest *kaarskeemis võetakse tõmbejõud negatiivsena*.

12.2 Kahe liigendiga kaar

Kahe liigendiga kaar (joonis 12.2 a) on staatikaga ühekordselt määramatu. Põhiskeemiks võetakse kõver tala (joonis 12.2 b). Lisatundmatuks võetakse toe b toereaktsiooni horisontaalne komponent $X_1 = H$.

Ühiktundmatust X_1 tekivad sisejõud

$$m_1 = -y \quad (12.6)$$

$$q_1 = -\sin \varphi \quad (12.7)$$

$$n_1 = \cos \varphi \quad (12.8)$$

mille epüürid on joonistel 12.2 c, 12.2 d, 12.2 e.

Vertikaalsest koormusest põhjustatud sisejõud põhiskeemis arvutatakse valemitega

$$M_p^0 = M^0 \quad (12.9)$$

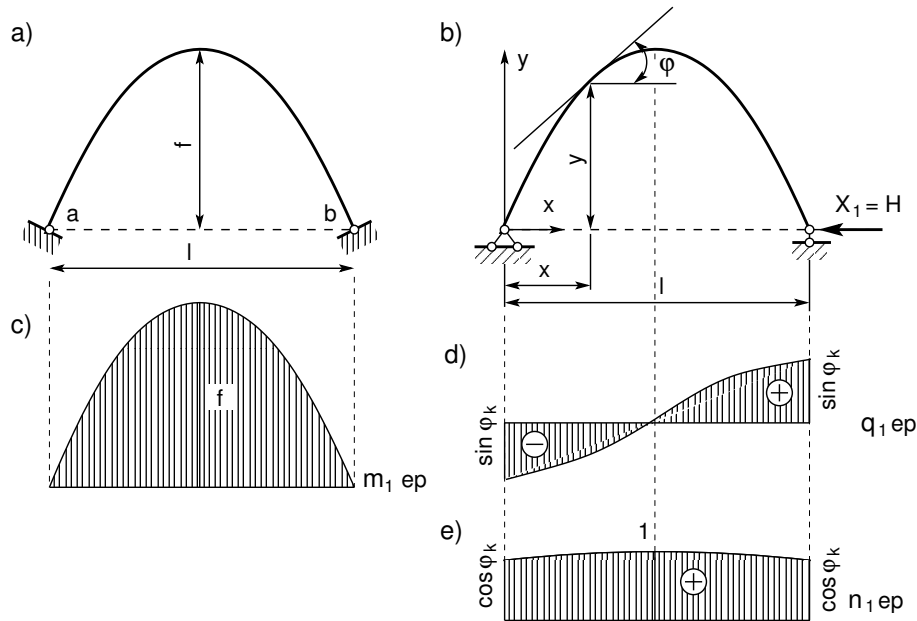
$$Q_p^0 = Q^0 \cos \varphi \quad (12.10)$$

$$N_p^0 = Q^0 \sin \varphi \quad (12.11)$$

kus M^0 ja Q^0 on paindemoment ja põikjõud kaarele vastavas lihttalas.

Jõumeetodi kanooniline võrrand

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0 \quad (12.12)$$



Joonis 12.2. Kahe liigendiga kaar

kus δ_{11} ja Δ_{1p} leidmisel arvestatakse pikijõu mõju.

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{m_1 \cdot m_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{n_1 \cdot n_1}{EA} ds + k \int_0^l \frac{q_1 \cdot q_1}{GA} ds \quad (12.13)$$

$$\Delta_{1p} = \int_0^l \frac{m_1 \cdot M_p^0}{EI} ds + \int_0^l \frac{n_1 \cdot N_p^0}{EA} ds + k \int_0^l \frac{q_1 \cdot Q_p^0}{GA} ds \quad (12.14)$$

Avaldistes (12.13) ja (12.14) ei ole arvestatud kõveruse $\frac{1}{\rho}$ mõju.

Kui avaldiste (12.13), (12.14) analüütiline integreerimine osutub tülikaks, kasutatakse numbrilist integreerimist.

Pärast lisatundmatu X_1 leidmist arvutatakse sisejõud järgmiste avaldistega:

- koormusest

$$M_p = M_p^0 - y \cdot X_{1p} \quad (12.15)$$

$$Q_p = Q_p^0 - \sin \varphi \cdot X_{1p} \quad (12.16)$$

$$N_p = Q_p^0 + \cos \varphi \cdot X_{1p} \quad (12.17)$$

- temperatuuri muutusest

$$M_t = -y \cdot X_{1t} \quad (12.18)$$

$$Q_t = -\sin \varphi \cdot X_{1t} \quad (12.19)$$

$$N_t = \cos \varphi \cdot X_{1t} \quad (12.20)$$

- tugede siiretest

$$M_r = -y \cdot X_{1r} \quad (12.21)$$

$$Q_r = -\sin \varphi \cdot X_{1r} \quad (12.22)$$

$$N_r = \cos \varphi \cdot X_{1r} \quad (12.23)$$

Tõmbiga kahe liigendiga kaare (vt joonis 12.2 e) arvutamisel võib võtta tundmatuks tõmbis tekkiva tõmbejõu X_1 . Võrreldes kahe liigendiga kaare arvutamisega on erinevus siirete δ_{11} ja Δ_{1t} arvutamisel. Arvesse tuleb võtta temperatuuri muutus.

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{m_1 \cdot m_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{n_1 \cdot n_1}{EA} ds + k \int_0^l \frac{q_1 \cdot q_1}{GA} ds + \frac{1 \cdot l}{E_t A_t} \quad (12.24)$$

$$\Delta_{1t} = -(\alpha - \alpha_t) t_0 l - \alpha \Delta_t \int_0^l \left(\frac{y}{h \cos \varphi} \right) dx \quad (12.25)$$

Avaldistes (12.24) ja (12.25) ei ole arvestatud kõveruse $\frac{1}{\rho}$ mõju.

12.3 Kahe liigendiga kaare arvutamise näited

Näide 12.1 Arvutada kahe liigendiga kaare (joonis 12.3), mille pool sillet on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega p , horisontaalreaktsioon H ja sisejõudude M , Q ja N ordinaadid. Andmed: $l = 32 \text{ m}$; $l_1 = 16 \text{ m}$; $f = 4 \text{ m}$; $A_c = 0.845 \text{ m}^2$ ($h_c = 1.3 \text{ m}$; $b_c = 0.65 \text{ m}$); $I_c = 0.12 \text{ m}^4$; $\frac{I_c}{I \cos \varphi} = 1$; $y = 4f\xi\xi'$; $\xi = \frac{x}{l}$; $p = 80 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ (näide on võetud raamatust [Rää75] lk 521 ja 524).

Kaare ristlõike muutus

$$\frac{I_c}{I} = \cos \varphi ; \quad \frac{A_c}{A} = \sqrt[3]{\cos \varphi} \quad (12.26)$$

Jõumeetodi kanoonilise võrrandi kordajad $EI_c \delta_{11}$ ja $EI_c \Delta_{1p}$ arvutatakse järmiste integraalidega

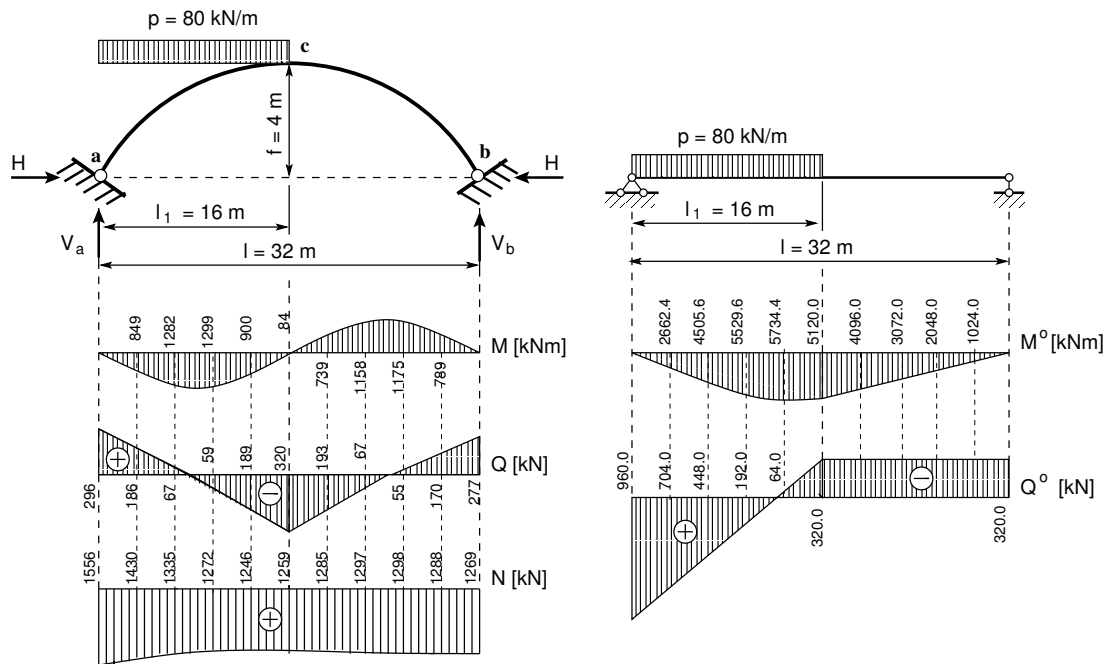
$$\begin{aligned} EI_c \delta_{11} &= \int_0^s y^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{I} \int_0^l \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds = \\ &= \int_0^s y^2 \frac{I_c}{I} dx + \frac{I_c}{I} \int_0^l \cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \end{aligned} \quad (12.27)$$

$$EI_c \Delta_{1p} = - \int_0^s y M_p^0 \frac{I_c}{I} ds = - \int_0^s y M_p^0 \cos \varphi ds = - \int_0^l y M_p^0 dx \quad (12.28)$$

Simpsoni valemiga (7.40 lk 103) numbriliseks integreerimiseks vajalikud suurused on näidatud Octave'iga lahendamise päevikus 12.1, kus $EI_c \delta_{11} = 277.39$ ja $EI_c \Delta_{1p} = -3.4953e + 05$.

$$H = X_1 = - \frac{EI_c \Delta_{1p}}{EI_c \delta_{11}} = \frac{3.4953e + 05}{277.39} = 1260.1 \text{ kN} \quad (12.29)$$

Numbriliselt leitud lahend $H = 1260.1 \text{ kN}$ (vt programm C.25 lk 275) langeb kokku analüütiliselt leitud toereaktsiooniga $H = 1259 \text{ kN}$ (vt õpik [Rää75] lk 521). Joonisel 12.3 toodud



Joonis 12.3. Kahe liigendiga kaar

analüütiliselt leitud sisejõudude epüüre on võimalik võrrelda numbriliselt leitudtega (vt Päevik 12.1).

Lahendamisel saadud tulemused on toodud päevikus "diary kaarSjPr1.out" (vt Päevik 12.1).

Päevik 12.1 %kaarSjPr1.out

```
octave:27> diary kaarSjPr1.out
```

```
octave:28> diary on
```

```
octave:29> kaarSjPr1
```

```
l = 32
```

```
f = 4
```

```
F1 = 0
```

```
F2 = 0
```

```
qz = 80
```

```
aF1 = 32
```

```
aF2 = 32
```

```
aqA = 0
```

```
aqL = 16
```

```
NT = 20
```

```
NN = 22
```

```
Ic = 0.12000
```

```
Ac = 0.84500
```

```
Vb = 320
```

```
Va = 960
```

```
EIcDelta = -3.4953e+05
```

```
EIcdelta = 277.39
```

```
H = 1260.1
```

```
-----
```

```
    Kahe liigendiga kaar
```

x	y	y ²	cosFi	cosFi ^(1/3)	cosFi*cosFi ^(1/3)
0.00000	0.00000	0.00000	0.89443	0.96349	0.86177
1.60000	0.76000	0.57760	0.91192	0.96973	0.88432
3.20000	1.44000	2.07360	0.92848	0.97557	0.90579
4.80000	2.04000	4.16160	0.94386	0.98092	0.92585
6.40000	2.56000	6.55360	0.95783	0.98574	0.94417
8.00000	3.00000	9.00000	0.97014	0.98995	0.96039
9.60000	3.36000	11.28960	0.98058	0.99348	0.97419
11.20000	3.64000	13.24960	0.98894	0.99630	0.98528
12.80000	3.84000	14.74560	0.99504	0.99834	0.99339
14.40000	3.96000	15.68160	0.99875	0.99958	0.99834
16.00000	4.00000	16.00000	1.00000	1.00000	1.00000
17.60000	3.96000	15.68160	0.99875	0.99958	0.99834
19.20000	3.84000	14.74560	0.99504	0.99834	0.99339
20.80000	3.64000	13.24960	0.98894	0.99630	0.98528
22.40000	3.36000	11.28960	0.98058	0.99348	0.97419
24.00000	3.00000	9.00000	0.97014	0.98995	0.96039
25.60000	2.56000	6.55360	0.95783	0.98574	0.94417
27.20000	2.04000	4.16160	0.94386	0.98092	0.92585
28.80000	1.44000	2.07360	0.92848	0.97557	0.90579
30.40000	0.76000	0.57760	0.91192	0.96973	0.88432
32.00000	-0.00000	0.00000	0.89443	0.96349	0.86177
32.00000	-0.00000	0.00000	0.89443	0.96349	0.86177

Lihttala sisejõud ja kahe liigendiga kaar

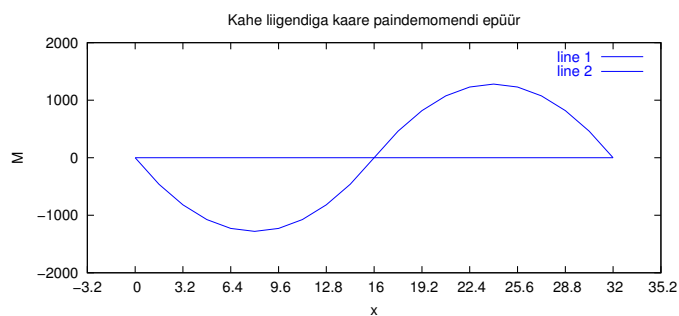
x	y	Q ₀	M ₀	y*M ₀
0.0000e+00	0.0000e+00	9.6000e+02	0.0000e+00	0.0000e+00
1.6000e+00	7.6000e-01	8.3200e+02	1.4336e+03	1.0895e+03
3.2000e+00	1.4400e+00	7.0400e+02	2.6624e+03	3.8339e+03
4.8000e+00	2.0400e+00	5.7600e+02	3.6864e+03	7.5203e+03
6.4000e+00	2.5600e+00	4.4800e+02	4.5056e+03	1.1534e+04
8.0000e+00	3.0000e+00	3.2000e+02	5.1200e+03	1.5360e+04
9.6000e+00	3.3600e+00	1.9200e+02	5.5296e+03	1.8579e+04
1.1200e+01	3.6400e+00	6.4000e+01	5.7344e+03	2.0873e+04
1.2800e+01	3.8400e+00	-6.4000e+01	5.7344e+03	2.2020e+04
1.4400e+01	3.9600e+00	-1.9200e+02	5.5296e+03	2.1897e+04
1.6000e+01	4.0000e+00	-3.2000e+02	5.1200e+03	2.0480e+04
1.7600e+01	3.9600e+00	-3.2000e+02	4.6080e+03	1.8248e+04
1.9200e+01	3.8400e+00	-3.2000e+02	4.0960e+03	1.5729e+04
2.0800e+01	3.6400e+00	-3.2000e+02	3.5840e+03	1.3046e+04
2.2400e+01	3.3600e+00	-3.2000e+02	3.0720e+03	1.0322e+04
2.4000e+01	3.0000e+00	-3.2000e+02	2.5600e+03	7.6800e+03
2.5600e+01	2.5600e+00	-3.2000e+02	2.0480e+03	5.2429e+03
2.7200e+01	2.0400e+00	-3.2000e+02	1.5360e+03	3.1334e+03
2.8800e+01	1.4400e+00	-3.2000e+02	1.0240e+03	1.4746e+03
3.0400e+01	7.6000e-01	-3.2000e+02	5.1200e+02	3.8912e+02
3.2000e+01	-3.5527e-15	-3.2000e+02	0.0000e+00	0.0000e+00
3.2000e+01	-3.5527e-15	-3.2000e+02	0.0000e+00	0.0000e+00

 Kaare sisejõud

N	Q	M	x
1.5564e+03	2.9513e+02	0.0000e+00	0.0000e+00
1.4905e+03	2.4163e+02	4.7595e+02	1.6000e+00
1.4314e+03	1.8567e+02	8.4790e+02	3.2000e+00
1.3796e+03	1.2740e+02	1.1159e+03	4.8000e+00
1.3357e+03	6.7028e+01	1.2798e+03	6.4000e+00
1.3001e+03	4.8339e+00	1.3398e+03	8.0000e+00
1.2733e+03	-5.8848e+01	1.2958e+03	9.6000e+00
1.2556e+03	-1.2363e+02	1.1477e+03	1.1200e+01
1.2474e+03	-1.8906e+02	8.9573e+02	1.2800e+01
1.2489e+03	-2.5469e+02	5.3973e+02	1.4400e+01
1.2601e+03	-3.2000e+02	7.9722e+01	1.6000e+01
1.2745e+03	-2.5668e+02	-3.8187e+02	1.7600e+01
1.2857e+03	-1.9303e+02	-7.4267e+02	1.9200e+01
1.2936e+03	-1.2954e+02	-1.0027e+03	2.0800e+01
1.2984e+03	-6.6666e+01	-1.1618e+03	2.2400e+01
1.3001e+03	-4.8339e+00	-1.2202e+03	2.4000e+01
1.2989e+03	5.5574e+01	-1.1778e+03	2.5600e+01
1.2950e+03	1.1423e+02	-1.0345e+03	2.7200e+01
1.2888e+03	1.7087e+02	-7.9050e+02	2.8800e+01
1.2804e+03	2.2527e+02	-4.4565e+02	3.0400e+01
1.2701e+03	2.7730e+02	4.4767e-12	3.2000e+01
1.2701e+03	2.7730e+02	4.4767e-12	3.2000e+01

 ans = 1
 ans = 2
 ans = 3
 ans = 4
 ans = 5
 octave:30> diary off
 %%%%%%%%%%

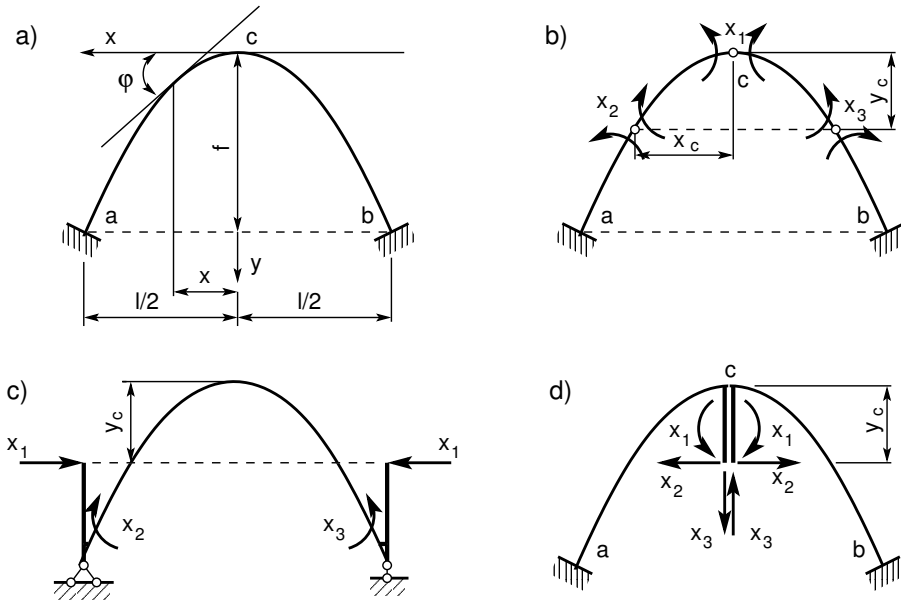
Programm C.25 joonistab ka kaare sisejõudude epüürid. Joonisel 12.4 on kahe liigendiga kaare paindemomendi epüür.



Joonis 12.4. Kahe liigendiga kaare paindemomendi epüür

12.4 Liigendita sümmeetriline kaar

Liigendita sümmeetriline kaar on kolmekordselt staatikaga määratu (joonis 12.5). Lisatundmatu valikul on soovitatav, et võrrandisüsteemis (12.30)



Joonis 12.5. Liigendita sümmeetriline kaar

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = 0 \quad (12.30)$$

võrduksid kõik kõrvalpaigutised $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ ja $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ nulliga. Kui põhiskeemis on jäikade konsoolide otsad kaare elastsuskeskmes, siis kõrvalpaigutis $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$.

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \delta_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = 0 \quad (12.31)$$

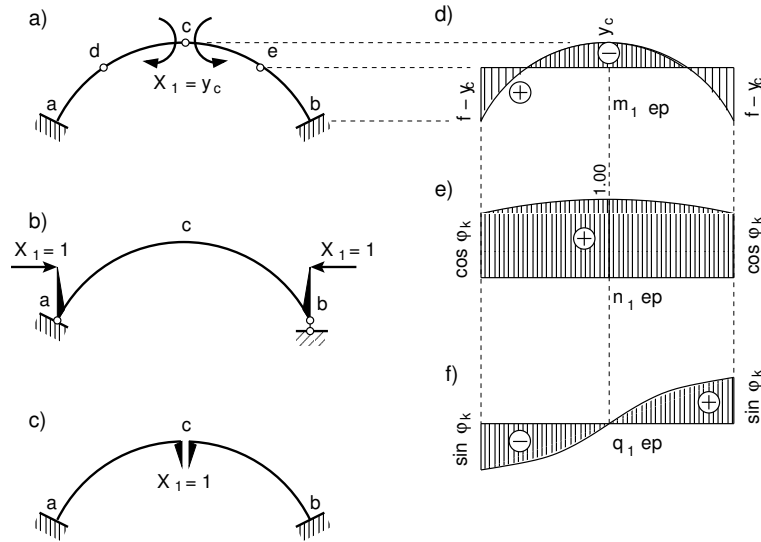
võrrandisüsteemi lahendid on

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \\ X_2 &= -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} \\ X_3 &= -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} \end{aligned} \quad (12.32)$$

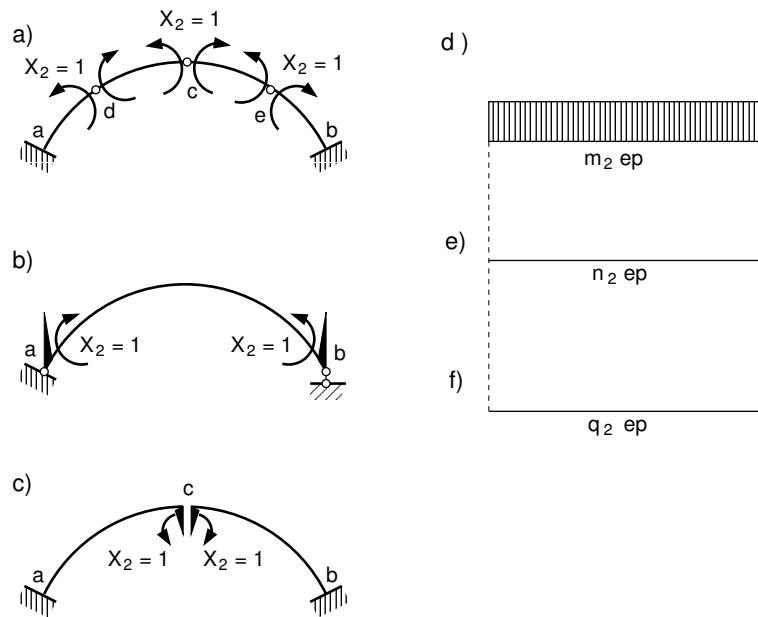
Võtame kasutusele järgmised tundmatud:

- kolme liigendiga kaares sümmeetriline tundmatu $X_1 = y_c$ (vt joonis 12.6 a), sümmeetriline grupptundmatu $X_2 = 1$ (vaata joonis 12.7 a)) ja antisümmeetriline grupptundmatu $X_3 = x_c$ (vaata joonis 12.8 a));

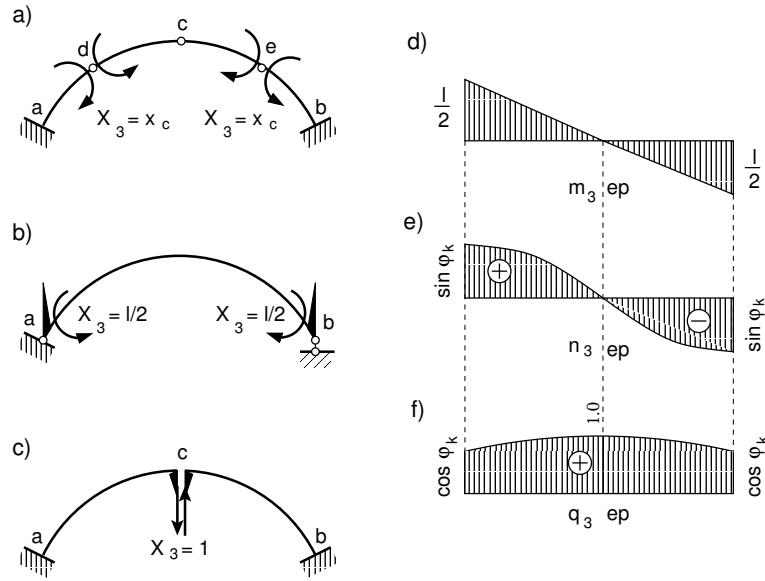
- kõvera tala puhul sümmeetrilised grupptundmatud $X_1 = 1$ (vt joonis 12.6 b), $X_2 = 1$ (vt joonis 12.7 b) ja antisümmeetriline grupptundmatu $X_3 = \frac{l}{2}$ (vt joonis 12.8 b);
- kahe konsooliga põhiskeemis $X_1 = 1$ (vt joonis 12.6 c), $X_2 = 1$ (vt joonis 12.7 c)), $X_3 = 1$ (vaata joonis 12.8 c).



Joonis 12.6. Liigendita kaar. Tundmatu X_1



Joonis 12.7. Liigendita kaar. Tundmatu X_2

Joonis 12.8. Liigendita kaar. Tundmatu X_3

Kõigi kolme põhiskeemi jaoks on nendest tundmatutest põhjustatud sisejõudude avaldised ühesugused [Rää75]:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= y - y_c; & n_1 &= \cos \varphi; & q_1 &= -\sin \varphi \\
 m_2 &= 1; & n_2 &= 0; & q_2 &= 0 \\
 m_3 &= -x; & n_3 &= \sin \varphi; & q_3 &= \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{12.33}$$

Kaare elastsuskeskme ordinaat y_c määratakse tingimusest $EI_c \delta_{12} = 0$. Avaldise (12.5) abil saame

$$\begin{aligned}
 EI_c \delta_{12} &= \int m_1 m_2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_1 n_2 \frac{A_c}{A} ds - \\
 &\quad - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_1 n_2}{\varrho} \frac{A_c}{A_c} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{n_1 m_2}{\varrho} \frac{A_c}{A_c} ds + \\
 &\quad + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int q_1 q_2 \frac{A_c}{A} ds = 0
 \end{aligned} \tag{12.34}$$

Arvestades avaldise (12.33), kirjutame valemi (12.34) ringi

$$EI_c \delta_{12} = \int (y - y_c) \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{I} \int \frac{\cos \varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A_c} ds = 0 \tag{12.35}$$

Võrrandist (12.35) avaldame elastsuskeskme ordinaadi y_c

$$y_c = \frac{\int y \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{\cos \varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A_c} ds}{\int \frac{I_c}{I} ds} \tag{12.36}$$

Koormusest põhjustatud siirete Δ_{1p} , Δ_{2p} ja Δ_{3p} arvutamiseks on soovitatav lahutada koormus sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks. Sümmeetrilisest koormusest saame

siirded Δ_{1p} ja Δ_{2p} ning antisümmeetrilisest koormusest siirde Δ_{3p} .

$$EI_c \delta_{ij} = \int m_i m_j \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_i n_j \frac{A_c}{A} ds - 2 \frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_i n_j}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int q_i q_j \frac{A_c}{A} ds = 0 \quad (12.37)$$

siin $i = j$, ($j = 1, 2, 3$) ja joone $y = y(x)$ kõverusraadius $\varrho = \frac{1}{\psi}$ (joone kõverus ψ_j – avaldis (1.16))

$$\varrho = \frac{1}{\psi} = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad (12.38)$$

$$EI_c \Delta_{ip} = \int m_i M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_i N_p^0 \frac{A_c}{A} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_i N_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{n_i M_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int q_i Q_p^0 \frac{A_c}{A} ds \quad (12.39)$$

kus M_p^0 , Q_p^0 , N_p^0 on paindemoment, põik- ja pikijõud staatikaga määratavas põhiskeemis, mis saadakse liigendita kaarest kolme sideme eemaldamisega.

Kui valemities (12.37) ja (12.39) kasutada sisejõudude avaldise (12.33), saame

$$EI_c \delta_{11} = \int (y - y_c)^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds - 2 \frac{I_c}{A_c} \int \frac{(y - y_c) \cos \varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int \sin^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds \quad (12.40)$$

$$EI_c \delta_{22} = \int \frac{I_c}{I} ds \quad (12.41)$$

$$EI_c \delta_{33} = \int x^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \sin^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds + 2 \frac{I_c}{A_c} \int \frac{x \sin \varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds \quad (12.42)$$

$$EI_c \Delta_{1p} = \int (y - y_c) M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int N_p^0 \cos \varphi \frac{A_c}{A} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{(y - y_c) N_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{I_c}{A_c} \int \frac{M_p^0 \cos \varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds - \\
& -k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int Q_p^0 \sin \varphi \frac{A_c}{A} ds
\end{aligned} \tag{12.43}$$

$$EI_c \Delta_{2p} = \int M_p^0 \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{N_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds \tag{12.44}$$

$$\begin{aligned}
EI_c \Delta_{3p} = & - \int x M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int N_p^0 \sin \varphi \frac{A_c}{A} ds + \\
& + \frac{I_c}{A_c} \int \frac{x N_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{M_p^0 \sin \varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds + \\
& + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int Q_p^0 \cos \varphi \frac{A_c}{A} ds
\end{aligned} \tag{12.45}$$

Pärast tundmatute leidmist (vt avaldised (12.32)) arvutatakse sisejõud

$$\begin{aligned}
M_p &= M_p^0 + (y - y_c) X_1 + X_2 - x X_3 \\
N_p &= N_p^0 + X_1 \cos \varphi + X_3 \sin \varphi \\
Q_p &= Q_p^0 - X_1 \sin \varphi + X_3 \cos \varphi
\end{aligned} \tag{12.46}$$

12.5 Liigendita kaare arvutamise näited

Näide 12.2 Arvutada liigendita kaare (joonis 12.9), mis on koormatud jaotatud koormusega q ($q_c = 10 \frac{kN}{m}$, $q_k = 50 \frac{kN}{m}$) sisejõudude M , Q ja N ordinaadid. Andmed: $l = 32 m$; $l_1 = 16 m$; $f = 4 m$; $A_c = 0.845 m^2$ ($h_c = 1.3 m$; $b_c = 0.65 m$); $I_c = 0.12 m^4$; $G = 0.425E$; $\frac{I_c}{A_c} = 0.142 m^2$. Kaare telgjooneks on ruutparabool

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} \tag{12.47}$$

Näide on võetud raamatust [Rää75] lk 536. Kaare ristlõige on jääva laiusega ja kõrgus muutub selliselt, et

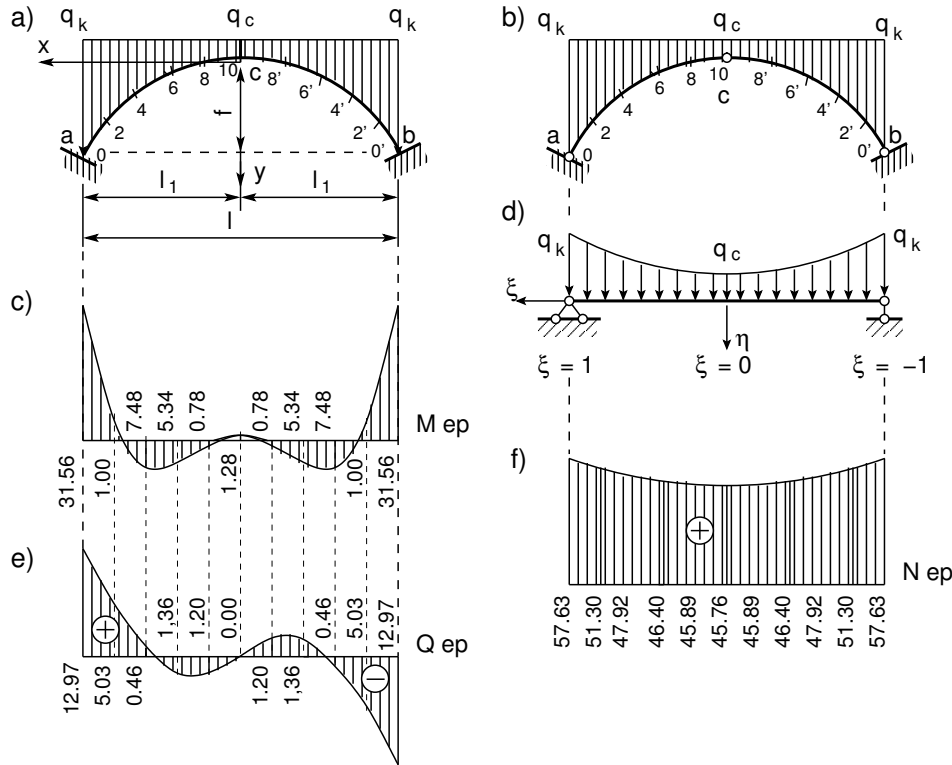
$$I = \frac{I_c}{\cos \varphi} \tag{12.48}$$

$$A = \frac{A_c}{\sqrt[3]{\cos \varphi}} \tag{12.49}$$

Kaare elastsuskeskme ordinaat y_c arvutatakse avaldisega (12.36) kus

$$\frac{I_c}{I} = \cos \varphi, \quad \frac{A_c}{A} = \sqrt[3]{\cos \varphi}, \quad ds = \frac{dx}{\cos \varphi} \tag{12.50}$$

$$y_c = \frac{\int_0^{l/2} y dx - \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \frac{1}{\varrho} \sqrt[3]{\cos \varphi} dx}{\int_0^{l/2} dx} \tag{12.51}$$



Joonis 12.9. Liigenditeta kaar

Kaare kõveruse ϱ leiame valemiga (12.38)

$$\varrho = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{64f^2x^2}{l^4}\right)^3}}{\frac{8f}{l^2}} \quad (12.52)$$

Vastava lihttala paraboolse jaotusega koormuse saame kirjeldada avaldisega

$$\begin{aligned} q(\xi) &= N_1 \cdot q_k + N_2 \cdot q_c + N_1 \cdot q_k = \\ &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \cdot q_k + (1 - \xi^2) \cdot q_c + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \cdot q_k = \\ &= q_c + (q_k - q_c)\xi^2 \end{aligned} \quad (12.53)$$

siin on $\xi = \frac{x}{l/2}$ mõõdeteta koordinaat, mille null on tala keskel, N_i on kujufunktsioonid (Lagrange'i interpolatsioonipoliinoomi kordajad).

Lihttala (joonis 12.9 d) paindemomendi ja põikjõu epüüri ordinaadid paraboolsest koormusest

$$\begin{aligned} M^0(\xi_k) &= V_a \cdot \left(\frac{l}{2} - x_k\right) - \int_{x_k}^{l/2} (x - x_k) \cdot q \, dx = \\ &= V_a \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\xi_k\right) - \int_{\xi_k}^1 q(\xi) \cdot (1 - \xi_k) \frac{l^2}{4} \, d\xi = \\ &= V_a \cdot \frac{l}{2}(1 - \xi_k) - q_c \cdot \left(\frac{1}{2} - \xi_k + \frac{\xi_k^2}{2}\right) \frac{l^2}{4} - (q_k - q_c) \left(\frac{1}{4} - \frac{\xi_k}{3} + \frac{\xi_k^4}{12}\right) \frac{l^2}{4} \end{aligned} \quad (12.54)$$

$$\begin{aligned}
Q^0(\xi_k) &= V_a - \int_{x_k}^{l/2} q dx = V_a - \int_{\xi_k}^1 q \frac{l}{2} d\xi = \\
&= V_a - q_c \cdot (1 - \xi_k) \frac{l}{2} - (q_k - q_c) \left(\frac{1}{3} - \frac{\xi_k^3}{3} \right) \frac{l}{2}
\end{aligned} \tag{12.55}$$

kus V_a on lihttala toereaktsioon antud koormusest

$$V_a = q_c \frac{l}{2} + (q_k - q_c) \frac{l^2}{6} \tag{12.56}$$

Lihttala paindemomendi ja põikjõu epüüri ordinaatide arvutamiseks paraboolsest koormusest saame kasutada funktsiooni lihttalaPrbKSj.m (C.4 vt lk 212) ja programmi lihttalaPrbKSjPr.m (C.2 vt lk 207).

Koormusest põhjustatud siirete leidmiseks arvutatakse sisejõudude M_p^0 , N_p^0 , Q_p^0 epüüride ordinaadid kolme liigendiga kaare (joonis 12.9 b) jaoks, mille kaks liigendit on kannaristlõigetes. Nende sisejõudude leidmiseks kaares (paraboolse telgjoone kujuga) kasutame Octave'i funktsiooni kaarPrbSTMSj.m (C.28 vt lk 290) ja programmi kaarPrbSTMSjPr.m (C.26 vt lk 280). Viimasel programm arvutab ka elastsuskeskme ordinaadi (vt avaldist(12.36)), kus

$$\int y \frac{I_c}{I} ds \approx 21.33333 m^2 \tag{12.57}$$

$$\frac{I_c}{A_c} \int \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{A_c}{A_c} ds \approx 0.62765 m^2 \tag{12.58}$$

$$\int \frac{I_c}{I} ds = 16 m \tag{12.59}$$

ja

$$y_c = \frac{21,33333 - 0.62765}{16} = 1.3294 m \tag{12.60}$$

Programmiga kaarPrbSTMSjPr.m C.26 saab arvutada õpikus [Rää75] lk 538 toodud valemitega. Toereaktsioonid:

$$V_{ap}^0 = q_c \frac{l}{2} + \frac{1}{3} (q_k - q_c) \frac{l}{2} = 1 \cdot 16 + \frac{16}{3} \cdot 4 = \frac{1120}{3} kN \tag{12.61}$$

$$H_p^0 = \left[1120 \cdot \frac{16}{3} - 16 \cdot 8.0 - \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \frac{16}{3} \right] / 4 = \frac{1600}{3} kN \tag{12.62}$$

Pikijõud lukuliigendis on $N_{cp}^0 = H_p^0$.

Sisejõud staatikaga määratavas põhiskeemis:

$$\begin{aligned}
M_{xp}^0 &= N_{cp}^0 y - q_c \frac{x^2}{2} - 4(q_x - q_c) \frac{x^4}{12 \cdot l^2} = \\
&= \frac{1600}{3} y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{768}
\end{aligned} \tag{12.63}$$

$$\begin{aligned}
N_{xp}^0 &= N_{cp}^0 \cos \varphi + \left[q_c x + 4(q_x - q_c) \frac{x^3}{3 \cdot l^2} \right] \sin \varphi = \\
&= \frac{1600}{3} \cos \varphi + \left(x + \frac{x^3}{192} \right) \sin \varphi
\end{aligned} \tag{12.64}$$

$$Q_{xp}^0 = -\frac{1600}{3} \sin \varphi + \left(x + \frac{x^3}{192} \right) \cos \varphi \tag{12.65}$$

Süirete $EI_c\delta_{11}$ ja $EI_c\delta_{22}$ arvutamisel avaldistega (12.40), (12.41) ja (12.43), (12.44) kasutame seoseid (12.50)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}EI_c\delta_{11} &= \int_0^{l/2} (y - y_c)^2 dx + \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx + \\ &+ k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \end{aligned} \quad (12.66)$$

$$\frac{1}{2}EI_c\delta_{22} = \int_0^{l/2} dx = 16 m \quad (12.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}EI_c\Delta_{1p} &= \int_0^{l/2} (y - y_c) M_p^0 dx + \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} N_p^0 \sqrt[3]{\cos \varphi} dx - \\ &- k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} Q_p^0 \operatorname{tg} \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \end{aligned} \quad (12.68)$$

$$\frac{1}{2}EI_c\Delta_{2p} = \int_0^{l/2} M_p^0 dx \quad (12.69)$$

Avaldistes (12.66)–(12.69) ei ole arvestatud kõveruse $\frac{1}{\rho}$ mõju.

Programmiga *kaarPrbSTMSjPr.m* C.26 arvatud võrrandisüsteemi kordajad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}EI_c\delta_{11} &= 25.407 m \\ \frac{1}{2}EI_c\delta_{22} &= 16 m \\ \frac{1}{2}EI_c\Delta_{1p} &= 1929.9 kNm^2 \\ \frac{1}{2}EI_c\Delta_{2p} &= 1820.3 kNm^2 \end{aligned} \quad (12.70)$$

Võrrandisüsteemi lahend

$$X_1 = -75.959 kNm; \quad X_2 = -113.77 kNm; \quad X_3 = 0 \quad (12.71)$$

Liigenditeta kaare paindemomendi M_p , normaaljõu N_p ja põikjõu Q_p epüüri ordinaadid arvutame järgmiste valemite abil:

$$\begin{aligned} M_p &= M_p^0 + (y - y_c) X_1 + X_2 - x X_3 \\ N_p &= N_p^0 + X_1 \cos \varphi + X_3 \sin \varphi \\ Q_p &= Q_p^0 - X_1 \sin \varphi + X_3 \cos \varphi \end{aligned} \quad (12.72)$$

programmiga C.26. Programm C.26 joonestab ka nende sisejõudude epüürid.

Osa III

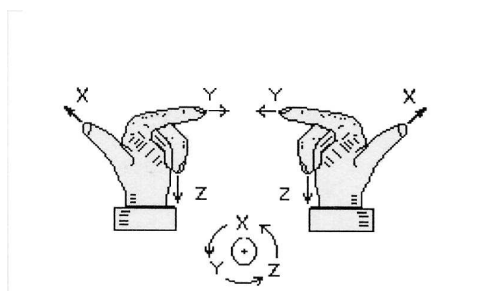
Lisad

Lisa A

Mõisteid vardateooriast

A.1 Kohalik ja üldteljestik

Varraskonstruksiooni iga vardaga seostatakse teljestik nii, et x-telg ühtib varda teljega (vt joonis 7.1, teljed x^* ja z^*). Nimetame neid kohalikeks teljestikeks. Konstruksiooni varraste asukoha ja nende suuna kirjeldamiseks kasutame üldteljestikku (teljed x ja z). Kasutame ainult parema käe teljestikku (joonis A.1). Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pööret positiivseks z-teljest x-telje suunas, x-teljest y-telje suunas ja y-teljest z-telje suunas. Joonisel A.1 on näidatud nii parema käe kui ka vasaku käe teljestik. Tasapinnaliste konstruksioonide kirjeldamisel vaatame y-telje positiivsest otsast, nii näeme x- ja z-telge. Positiivne pöördenurk on z-teljest x-telje suunas. Parema käe teljestiku puhul on positiivne pööre vastupäeva. Vasaku käe teljestiku korral on positiivne pööre päripäeva. Siirete ja jõuvektorite kirjeldamiseks kohalikes ja üldkoordinaatides on vajalikud koordinaatide teisendused.



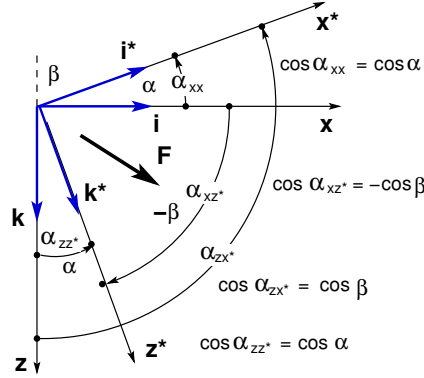
Joonisel A.1 on näidatud positiivse pöördenurga suund. Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pööret positiivseks z-teljest x-telje suunas, x-teljest y-telje suunas ja y-teljest z-telje suunas.

Joonis A.1. Vasaku ja parema käe teljestik

A.2 Koordinaatide teisendus

Koordinaatide teisendusvalemite tuletamiseks vaatleme joonist A.2. Olgu koordinaadid xyz üldkoordinaadid ja $x^*y^*z^*$ kohalikud koordinaadid. Vaatleme veel parema käe

kolmikuid $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ja $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$. Need on ühikvektorite kolmikud, mis määravad ära koordinaattelgede suunad. Joonisel A.2 on ühikvektorid \mathbf{j} ja \mathbf{j}^* suunatud vaataja poole.



Joonis A.2. Koordinaatide teisendus

Vektori \vec{F} projektsioonid telgedele xz on F_x, F_z ja telgedele x^*z^* on F_x^*, F_z^* . Seega

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_z \cdot \vec{k} = F_x^* \vec{i}^* + F_z^* \vec{k}^*, \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{i}^* \\ \vec{k}^* \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{k} \end{array} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Korrutame avaldise (A.1) vektoriga \vec{i}^* ja vektoriga \vec{k}^* . Võtame arvesse, et risti olevate vektorite skalaarkorrutis (*sisekorrutis*) on null. Saame

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{i}^* &= F_x^* = F_x \cdot \vec{i} \cdot \vec{i}^* + F_z \cdot \vec{k} \cdot \vec{i}^* \\ \vec{F} \cdot \vec{k}^* &= F_z^* = F_x \cdot \vec{i} \cdot \vec{k}^* + F_z \cdot \vec{k} \cdot \vec{k}^* \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Pöördseoste leidmiseks korrutame avaldist (A.1) vektoriga \vec{i} ja vektoriga \vec{k} . Pöördseostel on

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{i} &= F_x = F_x^* \cdot \vec{i}^* \cdot \vec{i} + F_z^* \cdot \vec{k}^* \cdot \vec{i} \\ \vec{F} \cdot \vec{k} &= F_z = F_x^* \cdot \vec{i}^* \cdot \vec{k} + F_z^* \cdot \vec{k}^* \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Ühikvektorite skalaarkorrutis võrdub nende positiivsete suundade vahelise nurga koosinusega

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i}^* &= \vec{i}^* \cdot \vec{i} = \cos \alpha_{xx^*}, & \vec{i} \cdot \vec{k}^* &= \cos \alpha_{xz^*} \\ \vec{k} \cdot \vec{k}^* &= \vec{k}^* \cdot \vec{k} = \cos \alpha_{zz^*}, & \vec{i}^* \cdot \vec{k} &= \cos \alpha_{zx^*} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Telje x^* suunakoosinused tähistame järgmiselt $\cos \alpha_{xx^*} = \cos \alpha$ ja $\cos \alpha_{zx^*} = \cos \beta$ ($\cos \beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$). Jooniselt A.2 näeme, et

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{xx^*} &= \cos \alpha, & \cos \alpha_{zx^*} &= \cos \beta \\ \cos \alpha_{zz^*} &= \cos \alpha, & \cos \alpha_{xz^*} &= -\cos \beta \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Varda lõpu ja alguse koordinaatide (joonis 7.1) x_L, z_L, x_A, z_A järgi saab need suuna-koosinused arvutada

$$\cos \alpha = \frac{x_L - x_A}{l} \quad (\text{A.6})$$

$$\cos \beta = \frac{z_L - z_A}{l} \quad (\text{A.7})$$

kus l on varda pikkus

$$l = \sqrt{(z_L - z_A)^2 + (x_L - x_A)^2} \quad (\text{A.8})$$

Nüüd avaldame koordinaatteisendused järgmiselt:

$$\begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Võrreldes avaldistes (A.9) ja (A.10) koordinaatide teisendusmaatrikseid, näeme, et nendes on read ja veerud ära vahetatud, s.t ühe saab teisest *transposeerimisel*. Asendades võrrandis (A.9) F_x ja F_z nende avaldistega võrrandis (A.10), saame maatrikskorrutise

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Siin annab maatriksi korrutamine tema transposeeritud kujuga ühikmaatriksi. Selliseid maatrikseid nimetatakse *ortogonaalseteks maatriksiteks*. Nendel on hea omadus, et pöördmaatriks võrdub tema transposeeritud kujuga (mõlemal juhul on korrutiseks ühikmaatriks).

A.3 Varda tööd

Varda tööde leidmiseks kasutame ositi integreerimise valemit (A.12)

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du} \quad (\text{A.12})$$

A.3.1 Varda töö pikkel

Kirjutame pikijõu diferentsiaalseose

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x) \quad (\text{A.13})$$

ehk

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = -q_x(x) \quad (\text{A.14})$$

kus $N_x = EA \frac{du}{dx}$.

Korrutame avaldise (A.14) suvalise siirdega \hat{u} ja integreerime üle tala pikkuse l

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \hat{u} dx = - \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx \quad (\text{A.15})$$

Võrrandi (A.15) parempoolne liige väljendab väliskoormuse q_x tööd W_v siirdel \hat{u} . On võimalik näidata, et koondkoormuse F_{xi} töö varda telje punkti i siirdel \hat{u}_i on $F_{xi}\hat{u}_i$. Seega

$$W_v = \int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi}\hat{u}_i \quad (\text{A.16})$$

Võrrandi (A.15) vasakpoolset avaldist integreerime ositi valemi (A.12) järgi, võttes u ja dv järgmiselt:

$$\int_a^b \underbrace{\hat{u}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx}_{dv}$$

saame avaldise

$$\int_a^b \hat{u} d \left(EA \frac{du}{dx} \right) = \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx} \right) \hat{u}}_{N_x} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx} \right)}_{N_x} \underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{\lambda}} dx \quad (\text{A.17})$$

Võrrandi (A.17) parema poole esimene liige väljendab rajajõudude \overleftrightarrow{N}_x tööd W_r rajasiiretel \hat{u} . Võrrandi (A.17) parema poole teine liige kirjeldab sisejõudude tööd W_s . Võttes arvesse välisjõudude töö avaldise (A.16) ja rajajõudude töö avaldise (A.17), võib integraali (A.15) kirjutada kujul

$$\underbrace{\overleftrightarrow{N}_x \hat{u}}_{W_r} \Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b N_x \hat{\lambda} dx}_{W_s} = - \underbrace{\left(\int_a^b q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi}\hat{u}_i \right)}_{W_v} \quad (\text{A.18})$$

Kui vaadelda avaldises (A.18) \hat{u} -d kui virtuaalsiiret, siis väljendab see avaldis virtuaalsiirete printsiipi.

Jätkame võrrandi (A.17) viimase liikme ositi integreerimist

$$-\int_0^l \underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_u \underbrace{\frac{du}{dx}}_{dv} dx = -\underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_{\hat{N}_x} u \Big|_0^l + \int_0^l \frac{d}{dx} \underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_{\hat{N}_x} u dx \quad (\text{A.19})$$

Võttes arvesse saadud avaldise (A.19), võime avaldise (A.18) kirjutada kujul

$$\underbrace{\overleftarrow{\hat{N}_x} \hat{u}}_{W_r} \Big|_0^l - \underbrace{\overleftarrow{\hat{N}_x} u}_{\hat{W}_r} \Big|_0^l + \int_0^l \frac{d}{dx} \underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_{\hat{N}_x} u dx = -\underbrace{\int_0^l q_x(x) \hat{u} dx - F_{xi} \hat{u}_i}_{W_v} \quad (\text{A.20})$$

Võrrandi (A.20) vasaku poole viimase liikme sisu selgitamiseks võtame vaatluse alla teise (II) koormusolukorra. Võrrandi (A.15), (A.16) eeskujul saame järgmise võrrandi:

$$\int_0^l \frac{d}{dx} \left(EA \frac{d\hat{u}}{dx}\right) u dx = -\int_0^l \hat{q}_x(x) u dx - \hat{F}_{xi} u_i \quad (\text{A.21})$$

Võrranditest (A.20) ja (A.21) saab

$$\underbrace{\overleftarrow{\hat{N}_x} \hat{u}}_{W_r^I} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l q_x(x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i}_{W_v^I} = \underbrace{\overleftarrow{\hat{N}_x} u}_{\hat{W}_r^{II}} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_x(x) u dx + \hat{F}_{xi} u_i}_{\hat{W}_v^{II}} \quad (\text{A.22})$$

tööde vastastikkuse teoreemi tõestuse välis- ja rajajõudude kohta pikkel. Sisejõudude tööde vastastikkuse teoreemi tõestamiseks kirjutame virtuaalsiirete printsiibi (A.18) ringi järgmisele kujule

$$-W_s^{(p)} = W_r^{(p)} + W_v^{(p)} \quad (\text{A.23})$$

Kuna avaldise (A.22) põhjal on esimese (I) ja teise (II) koormusolukorra tööd ($W_r^I + W_v^I = \hat{W}_r^{II} + \hat{W}_v^{II}$) võrdsed, siis on avaldise (A.23) põhjal ka sisejõudude tööd võrdsed

$$W_s^{(I)} = W_s^{(II)} \quad (\text{A.24})$$

ehk

$$\int_0^l \underbrace{\left(EA \frac{du}{dx}\right)}_{N_x} \underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{\lambda}} dx = \int_0^l \underbrace{\left(EA \frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_{\hat{N}_x} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\lambda} dx \quad (\text{A.25})$$

Seega tööde vastastikkuse teoreem pikkel on

$$\int_0^l N_x \frac{\hat{N}_x}{EA} dx = \int_0^l \hat{N}_x \frac{N_x}{EA} dx \quad (\text{A.26})$$

A.3.2 Varda töö paindel

Paindemomendi ja põikjõu tööde avaldise saamisel lähtume diferentsiaalseostest

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = \frac{dQ_z}{dx} = -q_z(x) \quad (\text{A.27})$$

ja Bernoulli hüpoteesist

$$\varphi_y = -\frac{dw}{dx} \quad (\text{A.28})$$

$$\psi_y = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (\text{A.29})$$

$$\gamma = 0 \quad (\text{A.30})$$

ning seostest

$$M_y = \frac{EI_y d\varphi}{dx}, \quad Q_z = \frac{dM_y}{dx} \quad (\text{A.31})$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -q_z(x) \quad (\text{A.32})$$

Nii nagu pikkejõu puhul korrutame võrrandi (A.32) siirdega \hat{w} ja integreerime üle varda l

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \hat{w} dx = -\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx \quad (\text{A.33})$$

Võrrandi (A.33) parempoolne liige väljendab väliskoormuse tööd W_v siirdel \hat{w} . Koondkoormuse F_{zi} töö varda telje punkti i siirdel \hat{w}_i on $F_{zi}\hat{w}_i$. Seega

$$W_v = \int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi}\hat{w}_i \quad (\text{A.34})$$

Võrrandi (A.33) vasakpoolset liiget integreerime ositi

$$\begin{aligned} -\int_0^l \underbrace{\hat{w}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{dv} dx &= -\underbrace{\left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{Q_z} \hat{w} \Big|_0^l + \\ &+ \int_0^l \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y} dx \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Avaldise (A.35) viimast liiget integreerime veel üks kord

$$\int_0^l \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{dv} dx = \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y} \Big|_0^l - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}}_{-\hat{\psi}_y} dx \quad (\text{A.36})$$

Arvestades saadud avaldise (A.35) ja (A.36) võime võrrandi (A.33) esitada võimalike tööde (passiivtööde) summana (virtuaalsirete printsiip paindel)

$$\underbrace{[Q_z \hat{w} + M_y \hat{\varphi}_y]}_{W_r^{(p)}} \Big|_0^l - \underbrace{\int_0^l M_y \hat{\psi}_y dx}_{W_s^{(p)}} = - \underbrace{\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{-W_v^{(p)}} \quad (\text{A.37})$$

Paindel tööde vastastikkuse teoreemi tõestamiseks jätkame avaldise (A.37) teise liikme ositi integreerimist

$$\begin{aligned} - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} \right)}_{-\hat{M}_y} \underbrace{\frac{d^2 w}{dx^2}}_{-\psi_y} dx &= - \underbrace{\frac{dw}{dx}}_{-\varphi_y} \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} \right)}_{-\hat{M}_y} \Big|_0^l + \int_0^l \underbrace{\frac{d}{dx}}_{-\hat{Q}_z} \left(EI_y \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} \right) \frac{dw}{dx} = \\ &= w \underbrace{\left(EI_y \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} \right)}_{-\hat{Q}_z} \Big|_0^l - \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} \right)}_{-\hat{M}_y} \underbrace{\frac{dw}{dx}}_{-\varphi_y} \Big|_0^l - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^4 \hat{w}}{dx^4} \right)}_{\hat{p}_z} w dx \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Saadud seosed (A.38) asetame avaldise (A.37), kust saab tööde vastastikkuse teoreemi paindel

$$\begin{aligned} \underbrace{\left[\vec{Q}_z \hat{w} + \vec{M}_y \hat{\varphi}_y \right]}_{W_r^I} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^I} &= \\ &= \underbrace{\left[\vec{\hat{Q}}_z w + \vec{\hat{M}}_y \varphi_y \right]}_{W_r^{II}} \Big|_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_z(x) w dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^{II}} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

siin Q_z , M_y , p_z , w ja φ_y on esimese koormusolukorra jõud ja siirded ning \hat{Q}_z , \hat{M}_y , \hat{p}_z , \hat{w} ja $\hat{\varphi}_y$ teise koormusolukorra jõud ja siirded.

Arvestades saadud avaldise (A.37), (A.39), saame sisejõudude vastastikkuse töö paindel

$$\underbrace{\int_0^l M_y \hat{\psi}_y dx}_{W_s^I} = \underbrace{\int_0^l \hat{M}_y \psi_y dx}_{W_s^{II}} \quad (\text{A.40})$$

ehk

$$\underbrace{\int_0^l M_y \frac{\hat{M}_y}{EI_y} dx}_{W_s^I} = \underbrace{\int_0^l \hat{M}_y \frac{M_y}{EI_y} dx}_{W_s^{II}} \quad (\text{A.41})$$

Lisa B

Maatriksid

B.1 Maatriksi mõiste

Maatriksiks nimetatakse ridadesse ja veergudesse korrastatud arvude (või nende sümbole) massiivi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m3} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

ehk lühidalt

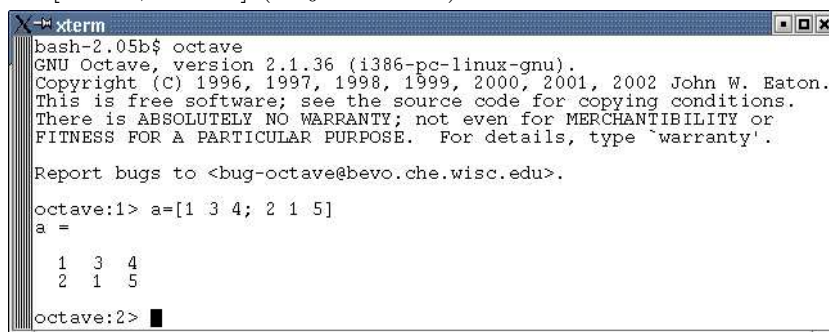
$$\mathbf{A} = [a_{ij}], \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{B.2})$$

kus a_{ij} on maatriksi \mathbf{A} i -nda rea ja j -nda veeru element.

Arvutiprogrammis [Octave](http://staff.ttu.ee/~alahe/aOctave.html)¹ (vt ka [Matlab](http://staff.ttu.ee/~alahe/aMatlab.html)²) sisestatakse maatriks

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

järgmiselt $a = [1 \ 3 \ 4; 2 \ 1 \ 5]$ (vt joonis B.1).



```
xterm
bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> a=[1 3 4; 2 1 5]
a =
  1  3  4
  2  1  5
octave:2>
```

Joonis B.1. Maatriksi sisestamine *Octave*'iga

¹<http://staff.ttu.ee/~alahe/aOctave.html>

²<http://staff.ttu.ee/~alahe/aMatlab.html>

B.2 Rea- ja veeruvektor

Maatriksit, mis koosneb ainult ühest reast, nimetatakse reavektoriks

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] \quad (\text{B.4})$$

Maatriksit, mis koosneb ainult ühest veerust, nimetatakse veeruvektoriks

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Arvutiprogrammis *Octave (Matlab)* sisestatakse reavektor b

$$b = [4 \quad 3 \quad 5] \quad (\text{B.6})$$

järgmiselt
 $b=[4 \ 3 \ 5]$

Arvutiprogrammis *Octave (Matlab)* sisestatakse veeruvektor c

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

järgmiselt
 $c=[3; 8; 2]$

Üleminek reavektorilt veeruvektorile ja vastupidi teostatakse *Octave*'is (*Matlab*'is) ülakomaga. Näiteks

$d=b'$

ja reavektor b (B.6) muudetakse veeruvektoriks d

$$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

B.3 Maatriksite liitmine ja lahutamine

Maatriksite liitmine (lahutamine) on võimalik siis ja ainult siis, kui nad on üht ja sama järku, s.t kui neil on ühesugune arv veergusid ja ühesugune arv ridu. Näiteks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Järgmise näite

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

puhul tähistame avaldise (B.10) vasakul pool olevad maatriksid a , b ja sisestame nad *Octave*'is (*Matlab*'is) järgmiselt:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4; \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3; \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ning seejärel sisestame järgmise avaldise
 $c = a + b$
 Tulemuseks saame

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

B.4 Vektorite ja maatriksite korrutamine

Reavektori \mathbf{b} (B.4) ja veeruvektori \mathbf{c} (B.5) korrutis on vektorite \mathbf{b} ja \mathbf{c} vastavate elementide korrutiste summa. Sellist korrutist nimetatakse *vektorite skalaarkorrutiseks*

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots + b_n c_n \quad (\text{B.12})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{bc} = b_i c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{B.13})$$

Veeruvektori \mathbf{c} (B.5) ja reavektori \mathbf{b} (B.4) korrutis on maatriks, mille elementideks on vektori-elementide korrutis. Sellist korrutist nimetatakse *vektorite diaad- ehk otsekorrutiseks*

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 b_1 & c_1 b_2 & \dots & c_1 b_n \\ c_2 b_1 & c_2 b_2 & \dots & c_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m b_1 & c_m b_2 & \dots & c_m b_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{c} \otimes \mathbf{b} = b_i c_j \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{B.15})$$

Maatriksi \mathbf{A} korrutiseks veeruvektoriga \mathbf{c} nimetatakse veeruvektorit \mathbf{d} , mille elemendid on maatriksi \mathbf{A} ridade elementide ja veeruvektori \mathbf{c} vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n) \\ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n) \\ \vdots \\ (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n) \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = a_{ij}c_j \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{B.17})$$

Analoogiliselt leitakse reavektori \mathbf{b} korrutis maatriksiga \mathbf{A} , mis kujutab endast reavektorit \mathbf{r}

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_m \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

kus

$$\begin{aligned} r_1 &= (b_1a_{11} + b_2a_{21} + \dots + b_na_{n1}) \\ r_2 &= (b_1a_{12} + b_2a_{22} + \dots + b_na_{n2}) \\ \vdots &= \vdots \\ r_m &= (b_1a_{1m} + b_2a_{2m} + \dots + b_na_{nm}) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{bA} = b_ia_{ij} \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{B.20})$$

Maatriksite omavahelist korrutamist võime vaadelda kui ühe maatriksi mitmekordset korrutamist vektoritega, milleks on jaotatud teine maatriks. Maatriksite \mathbf{A} ja \mathbf{B} korrutiseks \mathbf{C} nimetatakse maatriksit, mille elemendid on maatriksi \mathbf{A} i-nda rea ja maatriksi \mathbf{B} j-nda veeru vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{matrix} \mathbf{A}; \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} ; \begin{matrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{3j} & \dots & b_{31k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1j} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2j} & \dots & c_{2k} \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mj} & \dots & c_{mk} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \end{matrix}$$

kus maatriksi element c_{ij} on järgmine:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (\text{B.21})$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{AB} = a_{il}b_{lj} \quad , \quad (l = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{B.22})$$

Oluline on, et maatriksite veergude ja ridade arvud oleksid omavahel kooskõlas. Sisestame *Octave*'is (*Matlab*'is) järgmised maatriksid a ja b

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 3; \\ 2 & 0; \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0; \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ning seejärel teostame korrutamise
 $c = a * b$
 Tulemuseks saame

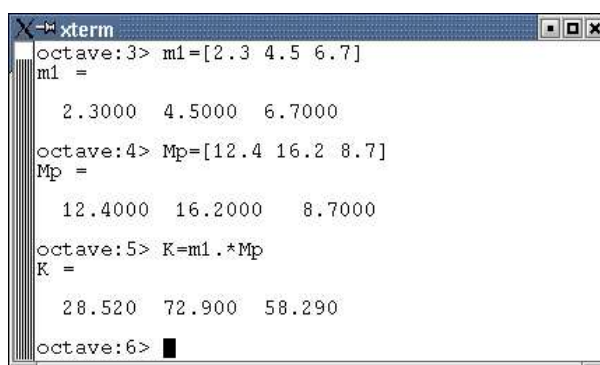
$$c = \begin{bmatrix} 11 & 13 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

B.5 Maatriksite element-element korrutamine

Maatriksite [element-element](#)^{3 4 5} kaupa korrutamine (*ingl – element-by-element multiplication*).

$$\mathbf{A}.*\mathbf{B} = a_{ij}b_{ij} \quad (\text{siin ei ole summeerimist } i \text{ ja } j \text{ järgi}) \quad (\text{B.24})$$

Vektorite $m1 = [2.3 \ 4.5 \ 6.7]$, $M_p = [2.3 \ 4.5 \ 6.7]$ element-elementi kaupa korrutamine $K = m1.*M_p$ annab tulemuseks $K = [28.52 \ 72.90 \ 58.29]$ (vt joonis B.2). Seda korruta-



```

xterm
octave:3> m1=[2.3 4.5 6.7]
m1 =
    2.3000    4.5000    6.7000
octave:4> Mp=[12.4 16.2 8.7]
Mp =
   12.4000   16.2000    8.7000
octave:5> K=m1.*Mp
K =
   28.520   72.900   58.290
octave:6>
  
```

Joonis B.2. Maatriksite ja vektorite element-element korrutamine

mist saab kasutada Simpsoni valemiga numbrilisel integreerimisel.

³http://www-math.unice.fr/laboratoire/help/info/octave/octave_27.html

⁴http://www-math.unice.fr/laboratoire/help/info/octave/octave_toc.html

⁵<http://www-ccs.ucsd.edu/matlab/techdoc/basics/getting8.html>

B.6 Osamaatriksid

Üldjuhul võime $(m \times n)$ -maatriksi \mathbf{A} jaotada osamaatriksiteks \mathbf{A}_{ij}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

B.7 Maatriksite transponeerimine

Maatriksi \mathbf{A} transponeeritud maatriksiks on \mathbf{A}^T (*Octave*'is (*Matlab*'is) \mathbf{A}' , mis saadakse maatriksist \mathbf{A} ridade ümbervahetamisel veergudeks, s.t maatriksi \mathbf{A} read ja veerud on ümber vahetatud.

Kui näiteks \mathbf{A} on $(m \times n)$ -maatriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad (\text{B.26})$$

$(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$

siis \mathbf{A} transponeeritud maatriks \mathbf{A}^T on $(n \times m)$ -maatriks

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ji}] \quad (\text{B.27})$$

$(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$

Maatriksite transponeerimisel kehtivad seaduspärasused.

- Maatriksite transponeerimine on reflektiivne, s.t transponeeritud maatriksi \mathbf{A}^T transponeerimisel saame maatriksi \mathbf{A}

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \quad (\text{B.28})$$

- Maatriksite transponeeritud summa on võrdne transponeeritud maatriksite summaga

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (\text{B.29})$$

- Maatriksite korrutise transponeerimine on samane transponeeritud maatriksite korrutisega võetud vastupidises järjekorras

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{B.30})$$

B.8 Pöördmaatriksid

Pöördmaatriksiks nimetatakse maatriksit \mathbf{A} korrutamisel neutraliseerivat maatriksit \mathbf{A}^{-1}

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (\text{B.31})$$

s.t pöördmaatriks \mathbf{A}^{-1} on maatriks, millega maatriksi \mathbf{A} korrutamisel saame ühikmaatriksi \mathbf{I} .

Ühikmaatriksiks nimetatakse $(n \times n)$ -ruutmaatriksit, mille peadiagonaalil asetsevate elementide väärtus on 1, mujal asetsevate elementide väärtus aga 0. Näiteks

$$\mathbf{I}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.32})$$

Maatriksi \mathbf{A} pöördmaatriks \mathbf{A}^{-1} eksisteerib üksnes siis, kui on täidetud tingimused:

- maatriks \mathbf{A} peab olema ruutmaatriks
- maatriksi \mathbf{A} determinant ei tohi olla null.

Ruutmaatriksit, mille determinant on null, nimetatakse *singulaarseks maatriksiks*.

Pöördmaatriksite omadused.

- Maatriksi \mathbf{A} pöördmaatriksi \mathbf{A}^{-1} pöördmaatriks on võrdne maatriksiga \mathbf{A} , s.t

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A} \quad (\text{B.33})$$

- Kahe üht ja sama järku ruutmaatriksi korrutise pöördmaatriks on võrdne nende pöördmaatriksite korrutisega vastupidises järjekorras, s.t

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{B.34})$$

- Transponeeritud maatriksi \mathbf{A}^T pöördmaatriks on võrdne pöördmaatriksi \mathbf{A}^{-1} transponeeritud maatriksiga, s.t

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \quad (\text{B.35})$$

Arvutiprogrammiga *Octave*'is (*Matlab*'is) leitakse maatriksi a

$$a = \begin{bmatrix} 11/3 & -3 & 1/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

pöördmaatriks $a1$ funktsiooni $inv(\dots)$ abil
 $a1=inv(a)$
Tulemuseks on

$$a1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

Kontrolliks korrutame maatriksi a maatriksiga $a1$. Tulemuseks peab olema ühikmaatriks.

Lisa C

Arvutiprogrammid

C.1 Programmist Octave

Arvutiprogrammiga *Octave*¹ on lihtne teha maatriksarvutusi. Arvutiprogrammi [käske](#)² võib leida Internetist. Arvutiprogrammi *Octave* kohta saab viiteid [lehekülgedelt](#)^{3 4}. Kasutatavad failid on *.m* laiendiga. Need *.m* laiendiga failid töötavad ka *Matlab*'iga. Eri-nevused ilmnevad graafika kasutamisel. *Octave* on tasuta tarkvara, mis on *Windows*'i jaoks, vt *Installing Octave in Windows*⁵ ja Linux'ile.

Kui oled instaleerinud *Octave*, siis tee oma failide hoidmiseks kataloog (minul on Linux'is kataloog 'matlabr': /home/andres/matlabr/) *Octave* instaleerimisega tekkis sinu kodukataloogis fail '.octaverc'. Selles failis on:

```
LOADPATH = ["/usr/local/share/octave/sitem/", LOADPATH ];  
## Sellele lisan enda tehtud kataloogid: matlabr, matlem, matrem  
## mis asuvad samas kataloogis kus .octaverc (/home/andres/  
LOADPATH = ["/matlabr/", LOADPATH ];  
LOADPATH = ["/matlem/", LOADPATH ];  
LOADPATH = ["/matrem/", LOADPATH ];
```

Nendest kataloogidest leiab *Octave* kõik '*.m' laiendiga failid.

UNIX failide *Windows*'i (DOS) failideks salvestamiseks kõlbab pfe editor (pfe101i.zip), mida aitab leida FileWatcher: <http://filewatcher.org/>

Windows'is fail 'octaverc' asub kataloogis:

```
/GNU/octave/usr/local/share/octave/2.1.31/m/startup/
```

Seal ridadele:

```
gnuplot_binary = 'pipe-gnuplot...'
```

```
putenv('TMPDIR', '....')
```

lisan rea, mis viitab kataloogile D:\Matlabr:

```
path('/:cygdrive/d/Matlabr') või annan Octave'is käsu:
```

¹http://www.octave.org/doc/octave_toc.html

²<http://webber.physik.uni-freiburg.de/~frpe/Vorlesungen/SS2002/refcard-a4.pdf>

³<http://staff.ttu.ee/~alahe/aOctave.html>

⁴<http://staff.ttu.ee/~alahe/aMatlab.html>

⁵<http://web.hhs.se/personal/psoderlind/Software/Software.htm>

cd /cydrive/d/Matlabr

Täpsemalt vaata *Running Octave in Windows*⁶.

Kui kasutate UNIX'is kirjutatud .m faili (näiteks <http://staff.ttu.ee/~alahe/tudeng/eesarvud.m>) ja tahate, et ta töotaks Windows'is, siis avage ta PFE editoriga ja salvestage DOS-failina (näiteks D:\Matlabr\eesarvud.m).

C.2 Arvutiprogramme tala arvutamiseks

Programm C.1 *lihttalaSjPr.m*⁷

```
%lihttalaSjPr.m
%Arvutiprogramm tala sisejõudude leidmiseks
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
%           e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%           http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%           Mehaanikainstituut
%           http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
l=16 % Lihttala ava
F1=4; % Esimese koondatud jõu väärtus
F2=0; % Teise koondatud jõu väärtus
qz=2.0 % Ühtlaselt jaotatud koormus
aF1=12.8; % Esimese koondatud jõu asukoht
aF2=16.0; % Teise koondatud jõu asukoht
aqA=1.6 % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
aqL=9.6 % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
NT=10 % Tala jaotuste arv
NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%
```

⁶<http://web.hhs.se/personal/psoderlind/Software/Software.htm>

⁷<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/lihttalaSjPr.m>

```

SP=lihttalaSj(NT,NN,1,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL);
%
disp('-----')
disp('      Q      M      x      ')
disp('-----')
SP'
disp('-----')
%%%%%%%%%%
Y0=zeros(1,NN);
plot(SP(3,:),-SP(2:,:),"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Paidemomendi epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('M')
%
replot    % octave

pause (5) % octave

plot(SP(3,:),SP(1:,:),"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Põikjõu epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('Q')
%
replot    % octave
%
%%%%%%%%%
%
```

Programm C.2 *lihttalaPrbKSjPr.m*⁸

```

%lihttalaPrbKSjPr.m
%%%%%%%%%
%lihttalaPrbKSjPr.m
%Arvutiprogramm tala sisejõudude leidmiseks
% paraboolse jaotusega koormusest
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
%
%          e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%          http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%          Mehaanikainstituut
%          http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
```

⁸<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/lihttalaPrbKSjPr.m>

```

% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
l=32 % Lihttala ava
qk=50.0 % Jaotatud koormus alguses
qc=10.0 % Jaotatud koormus keskel
NN=20 % Tala jaotuste arv
%
SP=lihttalaPrbKSj(NN,l,qk,qc);
%%%%%%%%%%
disp(' Lihttala sisejõud ')
disp('-----')
disp('          Q          M          x          ')
disp('-----')
SP'
disp('-----')
%pause
%
%%%%%%%%%%
Y0=zeros(1,NN+1);
%%%%%%%%%%
figure(1)
gset encoding iso_8859_1
%%%%%%%%%%
plot(SP(3,:),-SP(2,:),"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Lihttala paindemomendi epüür (epüür on tõmmatud kiu poolel)')
    gset border 31
    gset xtics 3.2
    gset ytics 500.0
    gset nolabel
        xlabel('x')
        ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "LihtTalaM.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
```



```

%%%%%%%%%%
figure(2)
%%%%%%%%%%
NXP=size(SP);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SP(3,1) SP(3,1)];
AgZ=[0 SP(1,1)];
LgX=[SP(3,NX) SP(3,NX)];
LgZ=[0 SP(1,NX)];
%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SP(3,:),SP(1,:), "3",LgX,LgZ,"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Lihttala pöikjõu epüür')
    gset border 31
    gset xtics 3.2
    gset ytics 100.0
    gset nolabel
        xlabel('x')
        ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "LihtTalaQ.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%

```

C.2.1 Arvutifunktsioonid tala arvutamiseks

Programm C.3 *lihttalaSj.m*⁹

```

%lihttalaSj.m
function Sj=lihttalaSj(NT,NN,l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL)
%lihttalaSj.m
% Lihttala sisejõudude Q ja M arvutamise programm
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
%          e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%          http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%          Mehaanikainstituut
%          http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt

```

⁹<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/lihttalaSj.m>

```

% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%
%           % Lihttala ava
%           % Esimese koondatud jõu väärtus
%           % Teise koondatud jõu väärtus
%qz        % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aF1       % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2       % Teise koondatud jõu asukoht
%aqA       % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL       % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
%NT        % Tala jaotuste arv
%NN=NT+2  % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%Va --    % Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb --    % Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%x1 --    % Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%S1 --    % Sisejõud: S(1,:) -- põikjõud; S(2,:) -- paindemoment
%%%%%%%%%
samm=1/NT;
eps1=0.000001;
x=0;
xi=0;
j=0;
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*(aqL-aqA)*(aqL+aqA)/2)/1;
Vb
Va=(F1*(1-aF1)+F2*(1-aF2)+qz*(aqL-aqA)*(1-(aqL+aqA)/2))/1;
Va
%%%%%%%%%
for j=1:NN
Y0(1,j)=0;
end
%
for j=1:NN
for i=1:2
S1(i,j)=0;
end
end
%%

```

```

for i=1:NN
%
if (x-aF1) < eps1
    delta1=0;
    aF1kord=0;
    xaF1=0;
else
    if aF1kord < eps1
        delta1=1;
        x=x-samm;
        xaF1=(x-aF1);
        aF1kord=1;
    else
        delta1=1;
        xaF1=(x-aF1);
    end
end
if (x-aF2) < eps1
    delta2=0;
    aF2kord=0;
    xaF2=0;
else
    if aF2kord < eps1
        delta1=1;
        x=x-samm;
        xaF2=(x-aF2);
        aF2kord=1;
    else
        delta2=1;
        xaF2=(x-aF2);
    end
end
%
if (x-aqA) < eps1
    xaqA=0;
else
    xaqA=(x-aqA);
end
if (x-aqL) < eps1
    xaqL=0;
else
    xaqL=(x-aqL);
end
%
Y=[1 0; x 1];
FA=[Va 0]';
FK=[F1*delta1 F1*xaF1*delta1]'+[F2*delta2 F2*xaF2]';
Fq=[qz*xaqA qz*(1/2)*xaqA^2]'-[qz*xaqL qz*(1/2)*xaqL^2]';
%
S=Y*FA-FK-Fq;
S1(:,i)=S;
x1(1,i)=x;

```

```

x=x+samm;
end
%%%%%%%%%
%Sj(1,:)=S1(1,:); % Põikjõud
%Sj(2,:)=S1(2,:); % Paindemoment
%Sj(3,:)=x1(2,:); % koordinaat x
Sj=[S1(1,:);S1(2,:);x1(1,:)];

endfunction
%
```

Programm C.4 *lihttalaPrbKSj.m*¹⁰

```

%lihttalaPrbKSj.m
function Sj=lihttalaPrbKSj(NN,l,qk,qc)
%lihttalaPrbKSj.m
% Lihttala sisejõudude Q ja M arvutamise programm
% paraboolse jaotusega koormusest
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
%
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%l      % Lihttala ava
%q      % Jaotatud koormus
%qk     % Jaotatud koormus tala alguses
%qc     % Jaotatud koormus tala keskel
%NN     % Tala jaotuste arv (peab olema paarisarv)
%Va --  Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb --  Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid.
```

¹⁰<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/lihttalaPrbKSj.m>

```

%S1 -- Sisejõud: S(1,:) -- põikjõud; S(2,:) -- paindemoment
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Npool=NN/2+1;
l1=1/2
samm=1/NN
eps1=0.000001;
x(1,1)=0.0;
xi=0;
j=0;
Va=qc*l1+(1/3)*(qk-qc)*l1
Vb=Va
%Vb=(qc*l1+l1+(2*(1/3)*(qk-qc)*l1)*l1)/l1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Mk=Va*(l1-xi*l1)-qc*l1*l1/2-(1/3)*(qk-qc)*l1*(3*l1/4)
M(1,1)=Va*(l1-xi*l1)-l1^2*(qc*(1/2-xi+xi^2/2)+(qk-qc)*(1/4-xi/3+xi^4/12));
Q(1,1)=0;
for j=2:Npool
xi=xi+samm/l1;
x(1,j)=x(1,j-1)+samm;
%M(1,j)=Va*(l1-xi*l1)-l1^2*(qc*(1/2-xi^2/2)+(qk-qc)*(1/4-xi^4/4));
M(1,j)=Va*(l1-xi*l1)-l1^2*(qc*(1/2-xi+xi^2/2)+(qk-qc)*(1/4-xi/3+xi^4/12));
Q(1,j)=Va-l1*(qc*(1-xi)+(qk-qc)*(1/3-xi^3/3));
end
%
for j=1:Npool
MT(1,j)=M(1,Npool-j+1);
QT(1,j)=Q(1,Npool-j+1);
end
%
for i=1:Npool-1
MT(1,Npool+i)=M(1,i+1);
QT(1,Npool+i)=-Q(1,i+1);
x(1,Npool+i)=x(1,Npool+i-1)+samm;
end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Sj(1,:1)=S1(1,:); % Põikjõud
%Sj(2,:)=S1(2,:); % Paindemoment
%Sj(3,:)=x1(2,:); % koordinaat x
Sj=[QT; MT; x];
endfunction
%

```

C.3 Arvutiprogramme kaare arvutamiseks

Programm C.5 *KaarA1.m*¹¹

```

%KaarA1.m
% Kaare tabelarvutusega saadud andmed plottimiseks

```

¹¹<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/KaarA1.m>

```

%clc;
% L= f= H= Kaare telgjoon on parabool
% 16.00 4.00 2.40
%siin Q-s on hüpe
xi=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.7 0.8 0.9 1];
xip=[1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.3 0.2 0.1 0];
x=[0 1.6 3.2 4.8 6.4 8 9.6 11.2 11.2 12.8 14.4 16];
y=[0 1.44 2.56 3.36 3.84 4 3.84 3.36 3.36 2.56 1.44 0];
sinFi=[0.7071 0.6247 0.5145 0.3714 0.1961 0.0000 -0.1961 -0.3714 -0.3714 -0.5145
-0.6247 -0.7071];
cosFi=[0.7071 0.7809 0.8575 0.9285 0.9806 1.0000 0.9806 0.9285 0.9285 0.8575 0.7809
0.7071];
Mo=[0.000 1.920 3.840 5.760 7.680 9.600 11.520 13.440 13.440 8.960 4.480 0.000];
Qo=[1.200 1.200 1.200 1.200 1.200 1.200 1.200 1.200 -2.800 -2.800 -2.800 -2.800];
H_y=[0.000 3.456 6.144 8.064 9.216 9.600 9.216 8.064 8.064 6.144 3.456 0.000];
M=[0.000 -1.536 -2.304 -2.304 -1.536 0.000 2.304 5.376 5.376 2.816 1.024 0.000];
Qo_cosFi=[0.849 0.937 1.029 1.114 1.177 1.200 1.177 1.114 -2.600 -2.401 -2.186
-1.980];
H_sinFi=[1.697 1.499 1.235 0.891 0.471 0.000 -0.471 -0.891 -0.891 -1.235 -1.499
-1.697];
Q=[-0.849 -0.562 -0.206 0.223 0.706 1.200 1.647 2.006 -1.708 -1.166 -0.687 -0.283];
Qo_sinFi=[0.849 0.750 0.617 0.446 0.235 0.000 -0.235 -0.446 1.040 1.441 1.749 1.980];
H_cosFi=[1.697 1.874 2.058 2.228 2.353 2.400 2.353 2.228 2.228 2.058 1.874 1.697];
N=[2.546 2.624 2.675 2.674 2.589 2.400 2.118 1.783 3.268 3.499 3.623 3.677];
%
%                siin Q-s on hüpe

xM=[11.2 11.2];
yM=[0 5.38];
% figure(1), axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlab
plot(x,y0,"3",x,-M,"3",xM,-yM,"3")
title('Paidemomendi epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('M')
%     text(2.0,0.3,'ALFA')
%     text(2.6,0.1,'BETA')
replot % octave
pause (3) % octave

xM=[11.2 11.2];
yQ=[0 -1.71];
% figure(2), axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlab
plot(x,y0,"4",x,Q,"4",xM,yQ,"4")
title('Põikjõu epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('Q')
replot % octave
pause (3) % octave

xM=[11.2 11.2];
yN=[0 1.78];
% figure(3), axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlab
plot(x,y0,"3",x,N,"3",xM,yN,"3")

```

```

title('Normaaljõu epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('N')
replot % octave
pause (5) % octave

%clear
clc; % octave

```

Programm C.6 *KaarB1.m*¹²

```

%KaarB1.m
% L= f= H= Kaare telgjoon on ring R=
%      16.00  4.00  12.16
%                               10
%siin Q-s on hüpe
xi=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.8 0.9 1];
xip=[1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.2 0.1 0];
x=[0 1.6 3.2 4.8 6.4 8 9.6 11.2 12.8 12.8 14.4 16];
y=[0.000 1.684 2.773 3.474 3.871 4.000 3.871 3.474 2.773 2.773 1.684 0.000];
sinFi=[ 0.8000 0.6400 0.4800 0.3200 0.1600 0.0000 -0.1600 -0.3200 -0.4800 -0.4800
-0.6400 -0.8000];
cosFi=[0.6000 0.7684 0.8773 0.9474 0.9871 1.0000 0.9871 0.9474 0.8773 0.8773 0.7684
0.6000];
Mo=[0.000 17.920 33.280 43.540 48.640 48.640 43.520 35.840 28.160 28.160 14.080
0.000];
Qo=[11.200 11.200 8.000 4.800 1.600 -1.600 -4.800 -4.800 -4.800 -8.800-8.800 -8.800];
H_y=[0.000 20.474 33.716 42.246 47.073 48.640 47.073 42.246 33.716 33.716 20.474
0.000];
M=[0.000 -2.554 -0.436 1.294 1.567 0.000 -3.553 -6.406 -5.556 -5.556 -6.394 0.000];
Qo_cosFi=[6.720 8.606 7.018 4.548 1.579 -1.600 -4.738 -4.548 -4.211 -7.720 -6.762
-5.280];
H_sinFi =[9.728 7.782 5.837 3.891 1.946 0.000 -1.946 -3.891 -5.837 -5.837 -7.782
-9.728];
Q=[-3.008 0.823 1.181 0.656 -0.366 -1.600 -2.793 -0.656 1.626 -1.883 1.021 4.448];
Qo_sinFi=[8.960 7.168 3.840 1.536 0.256 0.000 0.768 1.536 2.304 4.224 5.632 7.040];
H_cosFi=[7.296 9.343 10.668 11.521 12.003 12.160 12.003 11.521 10.668 10.668 9.343
7.296];
N=[16.256 16.511 14.508 13.057 12.259 12.160 12.771 13.057 12.972 14.892 14.975
14.336];
% siin Q-s on hüpe

xM=[12.8 12.8];
yM=[0 5.556];
% figure(1), axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlab
plot(x,y0,"3",x,-M,"3",xM,yM,"3")
title('Paindemomendi epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('M')
%      text(2.0,0.3,'ALFA')
%      text(2.6,0.1,'BETA')

```

¹²<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/KaarB1.m>

```

replot    % octave
pause (3) % octave

xM=[12.8 12.8];
yQ=[0 -1.883];
% figure(2), axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlab
plot(x,y0,"4",x,Q,"4",xM,yQ,"4")
title('Põikjõu epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('Q')
replot    % octave
pause (3) % octave

xM=[12.8 12.8];
yN=[0 12.972];
% figure(3), axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlabis
plot(x,y0,"3",x,N,"3",xM,yN,"3")
title('Normaaljõu epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('N')
replot    % octave
pause (5) % octave
%clear
clc;      % octave

```

Programm C.7 *kaarRngSjPr.m*¹³

```

%kaarRngSjPr.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on ringi osa
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
%           e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%           http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%           Mehaanikainstituut
%           http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.

```

¹³<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarRngSjPr.m>


```

% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%
% Vastava lihttala sisejõud leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
  NT=30 % Tala jaotuste arv
  NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
  l=16 % Kaare ava
  f=4 % Kaare kõrgus
  l=16 % Lihttala ava
  F1=4 % Esimese koondatud jõu väärtus
  F2=0; % Teise koondatud jõu väärtus
  qz=2.0 % Ühtlaselt jaotatud koormus
  aF1=12.8 % Esimese koondatud jõu asukoht
  aF2=16.0; % Teise koondatud jõu asukoht
  aqA=1.6 % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
  aqL=9.6 % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
  %H -- Kaare horisontaalne reaktsioon
  %x1 -- Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
  %SR(1,:) -- normaaljõud SR(2,:) -- põikjõud; SR(3,:) -- paindemoment
  %Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
  %Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
  %%%%%%%%%%%
  Y0=zeros(1,NN);
  %
  SP=lihttalaSj(NT,NN,l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL);
  %
  SR=kaarRngSj(NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,SP);
  %%%%%%%%%%%
  disp('-----')
  disp('      N      Q      M      x      y      y* ')
  disp('-----')
  SR'
  disp('-----')
  %pause
  %
  %%%%%%%%%%%
  figure(1)

plot(SR(4,:),-SR(3,:), "3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Paindemomendi epüür')
  xlabel('x')
  ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarRngM.pdf"
replot % octave

```

```

pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%
figure(2)

plot(SR(4,:),SR(2,:), "3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Põikjõu epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarRngQ.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%
figure(3)

plot(SR(4,:),SR(1,:), "3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Normaaljõu epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('N')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarRngN.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%
figure(4)

```

```

%
plot(SR(4,:),SR(5,:), "3",SR(4,:),SR(6,:), "4")
title('Survejoon')
    xlabel('x')
    ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
gset linestyle 1 linewidth 8.0 % See ei tööta postscript eps puhul
gset output "Survejoon.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
clear
%%%%%kõik

```

Programm C.8 *kaarPrbSjPr.m*¹⁴

```

%kaarPrbSjPr.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on parabool
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
%          e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%          http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%          Mehaanikainstituut
%          http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%

```

¹⁴<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSjPr.m>

```

% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
% Vastava lihttala sisejõud leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
  NT=10 % Tala jaotuste arv
  NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
  l=16 % Kaare ava
  f=4 % Kaare kõrgus
  l=16 % Lihttala ava
  F1=4 % Esimese koondatud jõu väärtus
  F2=0; % Teise koondatud jõu väärtus
  qz=0.0 % Ühtlaselt jaotatud koormus
  aF1=11.2 % Esimese koondatud jõu asukoht
  aF2=16.0; % Teise koondatud jõu asukoht
  aqA=16.0 % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
  aqL=16.0 % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
%H -- Kaare horisontaalne reaktsioon
%x1 -- Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%SR(1,:) -- normaaljõud SR(2,:) -- põikjõud; SR(3,:) -- paindemoment
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%
Y0=zeros(1,NN);
%
SP=lihttalaSj(NT,NN,l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL);
%%%%%%%%%%
disp(' Lihttala sisejõud ')
disp('-----')
disp('      Q      M      x      ')
disp('-----')
SP'
disp('-----')
%pause
%
%%%%%%%%%%
%
SR=kaarPrbSj(NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,SP);
%%%%%%%%%%
disp(' Kaare sisejõud ')
disp('-----')
disp('      N      Q      M      x      y      y* ')
disp('-----')
SR'
disp('-----')
%pause
%
%%%%%%%%%%
figure(1)

plot(SR(4,:),-SR(3:,:), "3",SR(4,:),Y0,"3")

```

```

title('Paindemomendi epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbM.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%%
figure(2)

```

```

plot(SR(4,:),SR(2,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Põikjõu epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbQ.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%%%
figure(3)

```

```

plot(SR(4,:),SR(1,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Normaaljõu epüür')
    xlabel('x')
    ylabel('N')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbN.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%

```

```

%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%
figure(4)

%
plot(SR(4,:),SR(5,:), "3",SR(4,:),SR(6,:), "4")
title('Survejoon')
    xlabel('x')
    ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
gset linestyle 1 linewidth 6.0 % See ei tööta postscript eps puhul
gset output "SurvejoonPrb.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
clear
%%%%%%%%%%

```

C.3.1 Arvutifunktsioonid kaare arvutamiseks

Programm C.9 *kaarRngSj.m*¹⁵

```

function Sr=kaarRngSj (NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,Sj)
%kaarRngSj.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on ringi osa
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-03-26
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%

```

¹⁵<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarRngSj.m>

```

% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
% Vastava lihttala sisejõud leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
% NT      % Tala jaotuste arv
% NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%l      % Kaare ava
%f      % Kaare kõrgus
%H      % Kaare horisontaalne reaktsioon
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%x1 --   Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%
%Sj --   Lihttala sisejõud:
% Sj(1,:) -- põikjõud; Sr(2,:) -- paindemoment;
% Sj(3,:) -- x koordinaat;
%Sr --   Kaare sisejõud:
% Sr(1,:) -- normaaljõud; Sr(2,:) -- põikjõud;
% Sr(3,:) -- paindemoment; Sr(4,:) -- x koordinaat;
% Sr(5,:) -- y koordinaat; Sr(6,:) -- y* survejoon
%%%%%%%%%%
eps1=0.000001;
eps2=0.0001;
aKord=0;
Mk=0;
lk=1/2;
for i=1:NN
  if aKord < eps1
    if (Sj(3,i)-lk) <= eps2
      aKord=0;
    else
      aKord=1;
      Mk=Sj(2,i-1);
      xKsk=Sj(3,i-1);
    end
  else
    Tyhi=0;
  end
end

```

```

end
end
%
H=Mk/f
%
samm=1/NT;
x=0;
j=0;
%%%%%%%%%%

for i=1:NN
%
if (x-aF1) < eps1
    delta1=0;
    aF1kord=0;
    xaF1=0;
    xv(1,i)=x;
else
    if aF1kord < eps1
        delta1=1;
        x=x-samm;
        xv(1,i)=x;
        xaF1=(x-aF1);
        aF1kord=1;
    else
        delta1=1;
        xv(1,i)=x;
        xaF1=(x-aF1);
    end
end
if (x-aF2) < eps1
    delta2=0;
    aF2kord=0;
    xv(1,i)=x;
    xaF2=0;
else
    if aF2kord < eps1
        delta1=1;
        x=x-samm;
        xv(1,i)=x;
        xaF2=(x-aF2);
        aF2kord=1;
    else
        delta2=1;
        xv(1,i)=x;
        xaF2=(x-aF2);
    end
end
end
%
xi(i)=xv(1,i)/l;
xip(i)=(1-xv(1,i))/l;
Rr=(l^2+4*f^2)/(8*f);

```



```

y(1,i)=sqrt(Rr^2-(1/2-xv(1,i))^2)-(Rr-f);
sinFi(i)=(1/Rr)*(1/2-xv(1,i)/l);
cosFi(i)=sqrt(1-(1/Rr)^2*(1/2-xv(1,i)/l)^2);
M(1,i)=Sj(2,i)-H*y(1,i);
Q(1,i)=Sj(1,i)*cosFi(i)-H*sinFi(i);
N(1,i)=Sj(1,i)*sinFi(i)+H*cosFi(i);
ys(1,i)=Sj(2,i)/H;
%
x=x+samm;
end
%
%%%%%%%%%%
%Sr(1,:)=N(1,:); % Normaaljõud
%Sr(2,:)=Q(1,:); % Põikjõud
%Sr(3,:)=M(1,:); % Paindemoment
%Sr(4,:)=xv(1,:); % x koordinaat
%Sr(5,:)=y(1,:); % y koordinaat
%Sr(6,:)=ys(1,:); % Y* survejoone koordinaat
%
Sr=[N(1,:); Q(1,:); M(1,:); xv(1,:);y(1,:);ys(1,:)];
%
endfunction
%
```

Programm C.10 *kaarPrbSj.m*¹⁶

```

function Sr=kaarPrbSj(NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,Sj)
%kaarPrbSj.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on parabool
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-02-25
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
```

¹⁶<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSj.m>

```

%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
% Vastava lihttala sisejõud Sj leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
% NT    % Tala jaotuste arv
% NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%l    % Kaare ava
%f    % Kaare kõrgus
%H    % Kaare horisontaalne reaktsioon
%aF1  % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2  % Teise koondatud jõu asukoht
%x1 -- Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%
%Sj -- Lihttala sisejõud:
% Sj(1,:) -- põikjõud; Sr(2,:) -- paindemoment;
% Sj(3,:) -- x koordinaat;
%Sj -- Kaare sisejõud:
% Sr(1,:) -- normaaljõud; Sr(2,:) -- põikjõud;
% Sr(3,:) -- paindemoment; Sr(4,:) -- x koordinaat;
% Sr(5,:) -- y koordinaat; Sr(6,:) -- y* survejoon
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
eps1=0.000001;
eps2=0.0001;
aKord=0;
Mk=0;
lk=l/2;
for i=1:NN
  if aKord < eps1
    if (Sj(3,i)-lk) <= eps2
      aKord=0;
    else
      aKord=1;
      Mk=Sj(2,i-1);
      xKsk=Sj(3,i-1);
    end
  end
else
  Tyhi=0;
end
end
%
H=Mk/f
%
samm=l/NT;
x=0;
j=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:NN
%
  if (x-aF1) < eps1

```



```

%
%%%%%%%%%%
%Sr(1,:)=N(1,:); % Normaaljõud
%Sr(2,:)=Q(1,:); % Põikjõud
%Sr(3,:)=M(1,:); % Paindemoment
%Sr(4,:)=xv(1,:); % x koordinaat
%Sr(5,:)=y(1,:); % y koordinaat
%Sr(6,:)=ys(1,:); % Y* survejoone koordinaat
%
Sr=[N(1,:); Q(1,:); M(1,:); xv(1,:);y(1,:);ys(1,:)];
%
endfunction

```

C.4 Arvutiprogramme sõrestiku arvutamiseks

Programm C.11 *srstkN1.m*¹⁷

```

%srstkN1.m
% Sõrestiskeemi varraste sisejõudude ja mõjujoonte
% leidmine
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-03-03
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopiat koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
eps1=0.000001;
%=====

```

¹⁷<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/srstkN1.m>

```

% Varda ristlõike jäikus
EA=10000;
%=====
% Sõlmede koordinaadid
%=====
krdn=[ 0 1.732; % sõlm 1
1 0; % sõlm 2
2 1.732; % sõlm 3
3 0; % sõlm 4
4 1.732; % sõlm 5
5 0; % sõlm 6
6 1.732]; % sõlm 7
%=====
SARV=size(krdn);
NSARV=SARV(1,1);
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Sõlmede koordinaadid ')
disp('      X      Z ')
disp('-----')
disp([krdn])
disp('-----')
%%
%=====
% Elemendid ja liigendid
%=====
selemjl=[1 2 1 1 0 1 1 0 ... % jõudude liigendid
0 0 1 0 0 1; % varras 1
2 3 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 2
1 3 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 3
2 4 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 4
3 4 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 5
4 5 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 6
3 5 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 7
4 6 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 8
5 6 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 9
6 7 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 10
5 7 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1]; % varras 11
%=====
selem=[selemjl(:,1) selemjl(:,2)];
jliigend=[selemjl(:,3) selemjl(:,4) selemjl(:,5) selemjl(:,6) selemjl(:,7) selemjl(:,8)];
%disp('-----')

```

```

%disp('-----')
disp('=====')
disp('Elementide topoloogia ')
disp('Algus Lõpp ')
disp('-----')
disp([selem])
disp('-----')
%%%%%%%%
%=====
% Toesõlmed x ja z suunas
%=====
tsolm=[ 1 1 % sõlm 1
0 0; % sõlm 2
0 0; % sõlm 3
0 0; % sõlm 4
0 0; % sõlm 5
0 0; % sõlm 6
0 1]; % sõlm 7
%=====
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Toesõlmed ')
disp(' X-suunas Z-suunas ')
disp('-----')
disp([tsolm])
disp('-----')
%%
% Vabadusastmete nummerdamine
%vabastmnr
%NSARV
Nloe=0;
for i=1:NSARV
    if tsolm(i,1) <= eps1
        Nloe=Nloe+1;
        vabastmnr(i,1)=Nloe;
    end
    if tsolm(i,2) <= eps1
        Nloe=Nloe+1;
        vabastmnr(i,2)=Nloe;
    end
    eimidagi=1;
end
%
for i=1:NSARV
    if tsolm(i,1) >= eps1
        Nloe=Nloe+1;
        vabastmnr(i,1)=Nloe;
    end
    if tsolm(i,2) >= eps1
        Nloe=Nloe+1;
        vabastmnr(i,2)=Nloe;
    end
end

```

```

    eimidagi=1;
end
%
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Sõlmede vabadusastmete numbrid ')
disp(' X-suunas Z-suunas ')
disp('-----')
disp([vabastmnr])
disp('-----')
%%%%%%%%%%
%pause
%
% Varda suunakoosinused
EARV=size(selem);
NEARV=EARV(1,1);
for i=1:NEARV
LkoordN=selem(i,2);
AkoordN=selem(i,1);
DeltaX(i)=krdn(LkoordN,1)-krdn(AkoordN,1);
DeltaZ(i)=krdn(LkoordN,2)-krdn(AkoordN,2);
VGRx(i,1)=krdn(AkoordN,1);
VGRx(i,2)=krdn(LkoordN,1);
VGRz(i,1)=krdn(AkoordN,2);
VGRz(i,2)=krdn(LkoordN,2);
end
%
%Varda pikkus
%lvarras
for i=1:NEARV
lvarras(i,1)=sqrt(DeltaX(i)^2+DeltaZ(i)^2);
end
%
for i=1:NEARV
cosAlpha(i,1)=DeltaX(i)/lvarras(i,1);
cosBeta(i,1)=DeltaZ(i)/lvarras(i,1);
end
%
%disp('-----')
disp('=====')
disp('Elementide suunakoosinused ')
disp('cosAlpha cosBeta ')
disp('-----')
disp([cosAlpha cosBeta])
disp('-----')
%
%%%%
%Võrrandisüsteemi vasak pool
VVask=zeros(NEARV,NEARV);
NvvYhik=NEARV+3;
YhikVVask=-eye(3);
VVask(NEARV+1:NvvYhik,NEARV+1:NvvYhik)=YhikVVask;

```

```

%
for i=1:NEARV
SsolmA=selem(i,1);
SsolmL=selem(i,2);
XAsolm=vabastmnr(SsolmA,1);
ZAsolm=vabastmnr(SsolmA,2);
Xlsolm=vabastmnr(SsolmL,1);
Zlsolm=vabastmnr(SsolmL,2);
VVask(XAsolm,i)=-cosAlpha(i,1);
VVask(ZAsolm,i)=-cosBeta(i,1);
VVask(Xlsolm,i)=cosAlpha(i,1);
VVask(Zlsolm,i)=cosBeta(i,1);
end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Võrrandisüsteemi parempool
%VParem
%=====
% Jõud sõlmedes
%=====
VJoud=[ 0 0; % sõlm 1
0 15; % sõlm 2
0 0; % sõlm 3
0 15; % sõlm 4
0 0; % sõlm 5
0 15; % sõlm 6
0 0]; % sõlm 7
%=====
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Jõud sõlmedes ')
disp(' X-suunas Z-suunas')
disp('-----')
disp([VJoud])
disp('-----')
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
VParem=zeros(NEARV+3,1);
for i=1:NSARV
Xsuunas=vabastmnr(i,1);
Zsuunas=vabastmnr(i,2);
VParem(Xsuunas,1)=VJoud(i,1);
VParem(Zsuunas,1)=VJoud(i,2);
end
%
%VVask
%pause
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%XX=inv(VVask)*VParem;
XX=VVask\VParem;
%
disp('=====')

```



```

disp(' Varraste sisejõud ')
disp('      N')
disp('-----')
disp([XX])
disp('-----')
%
%%%%%%%%%
%Mõjujoonte leidmiseks
VVaskP=inv(VVask);
%%%%%%%%%
%VVaskP
%
%=====
% Ühikjõud sõlmedes
%=====
YJoudS=[0 1; % sõlm 1
0 0; % sõlm 2
0 1; % sõlm 3
0 0; % sõlm 4
0 1; % sõlm 5
0 0; % sõlm 6
0 1]; % sõlm 7
%=====
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Ühikjõud sõlmedes ')
disp(' X-suunas  Z-suunas')
disp('-----')
disp([YJoudS])
disp('-----')
%
%%%%%%%%%
% Leian mõjujoone koordinaadid
jx=0;
jz=0;
Xsuunas=zeros(1,1);
Zsuunas=zeros(1,1);
for i=1:NSARV
if YJoudS(i,1) >= eps1
    jx=jx+1;
    Xsns=vabastmnr(i,1);
Xsuunas(jx,1)=Xsns;
end
if YJoudS(i,2) >= eps1
    jz=jz+1;
    Zsns=vabastmnr(i,2);
Zsuunas(jz,1)=Zsns;
end
    eimidagi=1;
end
%%%%%%%%%
%
```

```

MjNsi=size(VVaskP);
MjN=MjNsi(1,1);
MjARVz=size(Zsuunas);
NMjARVz=MjARVz(1,1);
%
MjARVx=size(Xsuunas);
NMjARVx=MjARVx(1,1);
%
%
% Mõjujoonte maatriks MjZ (kõigile varrastele ja tugelele)
if NMjARVz > 1
    for i=1:NMjARVz
        NzS=Zsuunas(i,1);
        for j=1:MjN
            MjZ(j,i)=VVaskP(j,NzS);
        end
    end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Mõjujoonte maatriks MjX (kõigile varrastele ja tugelele)
if NMjARVx > 1
    for i=1:NMjARVx
        NxS=Xsuunas(i,1);
        for j=1:MjN
            MjX(j,i)=VVaskP(j,NxS);
        end
    end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Koordinaadid mõjujoontele
NKO=0;
for i=1:NSARV
    for j=1:NMjARVz
        absvahe=abs(vabastmnr(i,2)-Zsuunas(j,1));
        if absvahe <= eps1
            NKO=NKO+1;
            Xmjk(NKO,1)=krdn(i,1);
        end
        eimidagi=1;
    end
end
end
%
%NKO=0;
%for i=1:NSARV
% for j=1:NMjARVz
%     absvahe=abs(vabastmnr(i,2)-Zsuunas(j,1));
%     if absvahe <= eps1
%         NKO=NKO+1;
%         Zmjk(NKO,1)=krdn(i,2);
%     end
%     eimidagi=1;
% end
% end

```

```

%end
%
disp('=====')
disp(' Mõjujooned N(i)-le sõlmedes. Viimased kaks on ')
disp(' toereaktsioonide mõjujooned')
disp('-----')
disp([MjZ])
disp('-----')
%MjZ
%
disp('=====')
disp(' Mõjujoone x koordinaadid ')
disp('-----')
disp([Xmjk'])
disp('-----')
%
MX0=size(Xmjk);
NMX=MX0(1,1);
Y00=zeros(NMX,1);
%
%%%%%%%%%%
figure(1)
  gset border 3
% gset key outside top
  gset nokey
plot(VGRx(1,:),-VGRz(1:,:), "3",VGRx(2,:),-VGRz(2:,:), "3",...
VGRx(3,:),-VGRz(3:,:), "3",VGRx(4,:),-VGRz(4:,:), "3",VGRx(5,:),...
-VGRz(5:,:), "3",VGRx(6:,:),-VGRz(6:,:), "3",VGRx(7:,:),-VGRz(7:,:), "3",...
VGRx(8:,:),-VGRz(8:,:), "3",VGRx(9:,:),-VGRz(9:,:), "3",VGRx(10:,:),...
-VGRz(10:,:), "3",VGRx(11:,:),-VGRz(11:,:), "3")
title('Sõrestikskeem')
  gset xtics 1
  gset ytics 1
% gset nolabel
  xlabel('x')
  ylabel('z')
%%Sõlmede numbrid
eval(sprintf('gset label "1" at %f,%f',krdn(1,1),-(krdn(1,2)+0.17)))
eval(sprintf('gset label "2" at %f,%f',krdn(2,1),-(krdn(2,2)+0.17)))
eval(sprintf('gset label "3" at %f,%f',krdn(3,1),-(krdn(3,2)+0.17)))
eval(sprintf('gset label "4" at %f,%f',krdn(4,1),-(krdn(4,2)+0.17)))
eval(sprintf('gset label "5" at %f,%f',krdn(5,1),-(krdn(5,2)+0.17)))
eval(sprintf('gset label "6" at %f,%f',krdn(6,1),-(krdn(6,2)+0.17)))
eval(sprintf('gset label "7" at %f,%f',krdn(7,1),-(krdn(7,2)+0.17)))
%Jne
%% Varraste numbrid
eval(sprintf('gset label "1" at %f,%f',(VGRx(1,1)+VGRx(1,2))/2+0.1,...
-(VGRz(1,1)+VGRz(1,2))/2))
eval(sprintf('gset label "2" at %f,%f',(VGRx(2,1)+VGRx(2,2))/2+0.1,...
-(VGRz(2,1)+VGRz(2,2))/2))
eval(sprintf('gset label "3" at %f,%f',(VGRx(3,1)+VGRx(3,2))/2+0.1,...
-(VGRz(3,1)+VGRz(3,2))/2))

```

```

eval(sprintf('gset label "4" at %f,%f', (VGRx(4,1)+VGRx(4,2))/2+0.1,...
-(VGRz(4,1)+VGRz(4,2))/2))
eval(sprintf('gset label "5" at %f,%f', (VGRx(5,1)+VGRx(5,2))/2+0.1,...
-(VGRz(5,1)+VGRz(5,2))/2))
eval(sprintf('gset label "6" at %f,%f', (VGRx(6,1)+VGRx(6,2))/2+0.1,...
-(VGRz(6,1)+VGRz(6,2))/2))
eval(sprintf('gset label "7" at %f,%f', (VGRx(7,1)+VGRx(7,2))/2+0.1,...
-(VGRz(7,1)+VGRz(7,2))/2))
eval(sprintf('gset label "8" at %f,%f', (VGRx(8,1)+VGRx(8,2))/2+0.1,...
-(VGRz(8,1)+VGRz(8,2))/2))
eval(sprintf('gset label "9" at %f,%f', (VGRx(9,1)+VGRx(9,2))/2+0.1,...
-(VGRz(9,1)+VGRz(9,2))/2))
eval(sprintf('gset label "10" at %f,%f', (VGRx(10,1)+VGRx(10,2))/2+0.1,...
-(VGRz(10,1)+VGRz(10,2))/2))
eval(sprintf('gset label "11" at %f,%f', (VGRx(11,1)+VGRx(11,2))/2+0.1,...
-(VGRz(11,1)+VGRz(11,2))/2))
%
%JNE
%
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "SrstkSkeem.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
gset border 31
% gset key outside top
gset nokey
plot(Xmjk(:,1),MjZ(5,:), "3", Xmjk(:,1), Y00, "3")
title('Varda N5 mōjujon')
gset border 31
gset xtics 1
gset ytics 0.1
gset nolabel
xlabel('x')
ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N5mj.pdf"

```

```

replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%
figure(3)

plot(Xmjk(:,1),MjZ(2,:), "3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N2 mõjujoon')
    xlabel('x')
    ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N2mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%
figure(4)

plot(Xmjk(:,1),MjZ(4,:), "3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N4 mõjujoon')
    xlabel('x')
    ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N4mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%
figure(5)

```

```

%
plot(Xmjk(:,1),MjZ(7,:),"3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N7 mõjujoon')
    xlabel('x')
    ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
gset linestyle 1 linewidth 8.0 % See ei toota postscript eps puhul
gset output "N7mj.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
clear
%%%%%%%%%%

```

Programm C.12 *srstkN2.m*¹⁸

```

%srstkN2.m
% Sõrestiskeemi varraste sisejõudude ja mõjujoonte
% leidmine
%
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-03-03
%          e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%          http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%          Mehaanikainstituut
%          http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopiat koos selle

```

¹⁸<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/srstkN2.m>

```

% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
eps1=0.000001;
%=====
% Varda ristlõike jäikus
EA=10000;
%=====
% Sõlmede koordinaadid
%=====
krdn=[ 0 0.0; % sõlm 1
3 -2.4; % sõlm 2
3 0.0; % sõlm 3
6 -3.6; % sõlm 4
6 0.0; % sõlm 5
9 -4.0; % sõlm 6
9 0.0; % sõlm 7
12 -4.0; % sõlm 8
12 0.0; % sõlm 9
15 -4; % sõlm 10
15 0; % sõlm 11
18 -3.6; % sõlm 12
18 0.0; % sõlm 13
21 -2.4; % sõlm 14
21 0.0; % sõlm 15
24 0]; % sõlm 16
%=====
SARV=size(krdn);
NSARV=SARV(1,1);
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Sõlmede koordinaadid ')
disp('      X      Z ')
disp('-----')
disp([krdn])
disp('-----')
%%%
%=====
% Elemendid ja liigendid
%=====
selemjl=[1 2 1 1 0 1 1 0 ... % jõudude liigendid
0 0 1 0 0 1; % varras 1
2 3 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 2
1 3 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 3
2 4 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 4
2 5 1 1 0 1 1 0 ...

```

```

0 0 1 0 0 1; % varras 5
3 5 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 6
4 5 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 7
4 6 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 8
5 6 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 9
5 7 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 10
6 7 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 11
6 8 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 12
6 9 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 13
7 9 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 14
8 9 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 15
8 10 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 16
9 10 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 17
10 13 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 18
9 11 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 19
10 12 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 20
10 11 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 21
11 13 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 22
12 13 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 23
12 14 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 24
13 14 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 25
13 15 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 26
14 15 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 27
14 16 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 28
15 16 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1]; % varras 29
%
%=====
selem=[selemj1(:,1) selemj1(:,2)];

```



```

jliigend=[selemjl(:,3) selemjl(:,4) selemjl(:,5) selemjl(:,6) selemjl(:,7) selemjl(:,8)];
%disp('-----')
%disp('-----')
disp('=====')
disp('Elementide topoloogia ')
disp('Algus Lõpp ')
disp('-----')
disp([selem])
disp('-----')
%%%%%%%%%%
%======
% Toesõlmed x ja z suunas
%======
tsolm=[ 1 1 % sõlm 1
0 0; % sõlm 2
0 0; % sõlm 3
0 0; % sõlm 4
0 0; % sõlm 5
0 0; % sõlm 6
0 0; % sõlm 7
0 0; % sõlm 8
0 0; % sõlm 9
0 0; % sõlm 10
0 0; % sõlm 11
0 0; % sõlm 12
0 0; % sõlm 13
0 0; % sõlm 14
0 0; % sõlm 15
0 1]; % sõlm 16
%======
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Toesõlmed ')
disp(' X-suunas Z-suunas ')
disp('-----')
disp([tsolm])
disp('-----')
%%
% Vabadusastmete nummerdamine
%vabastmnr
%NSARV
Nloe=0;
for i=1:NSARV
    if tsolm(i,1) <= eps1
        Nloe=Nloe+1;
        vabastmnr(i,1)=Nloe;
    end
    if tsolm(i,2) <= eps1
        Nloe=Nloe+1;
        vabastmnr(i,2)=Nloe;
    end
    eimidagi=1;

```

```

end
%
for i=1:NSARV
  if tsolm(i,1) >= eps1
    Nloe=Nloe+1;
    vabastmnr(i,1)=Nloe;
  end
  if tsolm(i,2) >= eps1
    Nloe=Nloe+1;
    vabastmnr(i,2)=Nloe;
  end
  eimidagi=1;
end
%
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Sõlmede vabadusastmete numbrid ')
disp(' X-suunas   Z-suunas ')
disp('-----')
disp([vabastmnr])
disp('-----')
%%%%%%%%%%%%%%
%pause
%
% Varda suunakoosinused
EARV=size(selem);
NEARV=EARV(1,1);
for i=1:NEARV
  LkoordN=selem(i,2);
  AkoordN=selem(i,1);
  DeltaX(i)=krdn(LkoordN,1)-krdn(AkoordN,1);
  DeltaZ(i)=krdn(LkoordN,2)-krdn(AkoordN,2);
  VGRx(i,1)=krdn(AkoordN,1);
  VGRx(i,2)=krdn(LkoordN,1);
  VGRz(i,1)=krdn(AkoordN,2);
  VGRz(i,2)=krdn(LkoordN,2);
end
%
%Varda pikkus
%lvarras
for i=1:NEARV
  lvarras(i,1)=sqrt(DeltaX(i)^2+DeltaZ(i)^2);
end
%
for i=1:NEARV
  cosAlpha(i,1)=DeltaX(i)/lvarras(i,1);
  cosBeta(i,1)=DeltaZ(i)/lvarras(i,1);
end
%
%disp('-----')
disp('=====')
disp('Elementide suunakoosinused ')

```

```

disp('cosAlpha cosBeta ')
disp('-----')
disp([cosAlpha cosBeta])
disp('-----')
%
%%%%
%Võrrandisüsteemi vasak pool
VVask=zeros(NEARV,NEARV);
NvvYhik=NEARV+3;
YhikVVask=-eye(3);
VVask(NEARV+1:NvvYhik,NEARV+1:NvvYhik)=YhikVVask;
%
for i=1:NEARV
SsolmA=selem(i,1);
SsolmL=selem(i,2);
XAsolm=vabastmnr(SsolmA,1);
ZAsolm=vabastmnr(SsolmA,2);
Xsolm=vabastmnr(SsolmL,1);
Zsolm=vabastmnr(SsolmL,2);
VVask(XAsolm,i)=-cosAlpha(i,1);
VVask(ZAsolm,i)=-cosBeta(i,1);
VVask(Xsolm,i)=cosAlpha(i,1);
VVask(Zsolm,i)=cosBeta(i,1);
end
%
%%%%%%%%
%Võrrandisüsteemi parem pool
%VParem
%=====
% Jõud sõlmedes
%=====
VJoud=[ 0 0; % sõlm 1
0 0; % sõlm 2
0 5; % sõlm 3
0 0; % sõlm 4
0 10; % sõlm 5
0 0; % sõlm 6
0 4; % sõlm 7
0 0; % sõlm 8
0 8; % sõlm 9
0 0; % sõlm 10
0 0; % sõlm 11
0 0; % sõlm 12
0 4; % sõlm 13
0 0; % sõlm 14
0 8; % sõlm 15
0 0]; % sõlm 16
%=====
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Jõud sõlmedes ')
disp(' X-suunas Z-suunas')

```

```

disp('-----')
disp([VJoud])
disp('-----')
%
%%%%%%%%%
VParem=zeros(NEARV+3,1);
for i=1:NSARV
Xsuunas=vabastmnr(i,1);
Zsuunas=vabastmnr(i,2);
VParem(Xsuunas,1)=VJoud(i,1);
VParem(Zsuunas,1)=VJoud(i,2);
end
%
%%%%%%%%%
%XX=inv(VVask)*VParem;
XX=VVask\VParem;
%
disp('=====')
disp(' Varraste sisejoud ')
disp('   N')
disp('-----')
disp([XX])
disp('-----')
%
%%%%%%%%%
%Mõjujoonte leidmiseks
VVaskP=inv(VVask);
%%%%%%%%%
%
%=====
% Ühikjoud sõlmedes
%=====
YJoudS=[0 1; % sõlm 1
        0 0; % sõlm 2
        0 1; % sõlm 3
        0 0; % sõlm 4
        0 1; % sõlm 5
        0 0; % sõlm 6
        0 1; % sõlm 7
        0 0; % sõlm 8
        0 1; % sõlm 9
        0 0; % sõlm 10
        0 1; % sõlm 11
        0 0; % sõlm 12
        0 1; % sõlm 13
        0 0; % sõlm 14
        0 1; % sõlm 15
        0 1]; % sõlm 16
%=====
%disp('-----')
disp('=====')
disp(' Ühikjoud sõlmedes ')

```

```

disp(' X-suunas  Z-suunas')
disp('-----')
disp([YJoudS])
disp('-----')
%
%%%%%%%%%%
% Leian mõjujoone koordinaadid
jx=0;
jz=0;
Xsuunas=zeros(1,1);
Zsuunas=zeros(1,1);
for i=1:NSARV
if YJoudS(i,1) >= eps1
    jx=jx+1;
    Xsns=vabastmnr(i,1);
Xsuunas(jx,1)=Xsns;
end
if YJoudS(i,2) >= eps1
    jz=jz+1;
    Zsns=vabastmnr(i,2);
Zsuunas(jz,1)=Zsns;
end
    eimidagi=1;
end
%%%%%%%%%%
%
MjNsi=size(VVaskP);
MjN=MjNsi(1,1);
MjARVz=size(Zsuunas);
NMjARVz=MjARVz(1,1);
%
MjARVx=size(Xsuunas);
NMjARVx=MjARVx(1,1);
%
%
% Mõjujoonte maatriks MjZ (kõigile varrastele ja tugele)
if NMjARVz > 1
    for i=1:NMjARVz
        NzS=Zsuunas(i,1);
        for j=1:MjN
            MjZ(j,i)=VVaskP(j,NzS);
        end
    end
end
%%%%%%%%%%
% Mõjujoonte maatriks MjX (kõigile varrastele ja tugele)
if NMjARVx > 1
    for i=1:NMjARVx
        NxS=Xsuunas(i,1);
        for j=1:MjN
            MjX(j,i)=VVaskP(j,NxS);
        end
    end
end

```

```

    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Koordinaadid mõjujonteale
NKo=0;
for i=1:NSARV
    for j=1:NMjARVz
        absvahe=abs(vabastmnr(i,2)-Zsuunas(j,1));
        if absvahe <= eps1
            NKo=NKo+1;
            Xmjk(NKo,1)=krdn(i,1);
        end
        eimidagi=1;
    end
end
end
%
%NKo=0;
%for i=1:NSARV
% for j=1:NMjARVz
%     absvahe=abs(vabastmnr(i,2)-Zsuunas(j,1));
%     if absvahe <= eps1
%         NKo=NKo+1;
%         Zmjk(NKo,1)=krdn(i,2);
%     end
%     eimidagi=1;
% end
%end
%
disp('=====')
disp(' Mõjujooned N(i)-le sõlmedes. Viimased kaks on ')
disp(' toereaktsioonide mõjujooned')
disp('-----')
disp([MjZ])
disp('-----')
%MjZ
%
disp('=====')
disp(' Mõjujoone x koordinaadid ')
disp('-----')
disp([Xmjk'])
disp('-----')
%
MXO=size(Xmjk);
NMX=MXO(1,1);
YOO=zeros(NMX,1);
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(1)
    gset border 3
% gset key outside top
    gset nokey
plot(VGRx(1,:),-VGRz(1,:),"3",VGRx(2,:),-VGRz(2,:),"3",VGRx(3,:),-VGRz(3,:),"3",...

```

```

VGRx(4,:),-VGRz(4,:),"3",VGRx(5,:),-VGRz(5,:),"3",VGRx(6,:),-VGRz(6,:),"3",...
VGRx(7,:),-VGRz(7,:),"3",VGRx(8,:),-VGRz(8,:),"3",VGRx(9,:),-VGRz(9,:),"3",...
VGRx(10,:),-VGRz(10,:),"3",VGRx(11,:),-VGRz(11,:),"3",VGRx(12,:),...
-VGRz(12,:),"3",VGRx(13,:),-VGRz(13,:),"3",VGRx(14,:),-VGRz(14,:),"3",...
VGRx(15,:),-VGRz(15,:),"3",VGRx(16,:),-VGRz(16,:),"3",VGRx(17,:),...
-VGRz(17,:),"3",VGRx(18,:),-VGRz(18,:),"3",VGRx(19,:),-VGRz(19,:),"3",...
VGRx(20,:),-VGRz(20,:),"3",VGRx(21,:),-VGRz(21,:),"3",VGRx(22,:),...
-VGRz(22,:),"3",VGRx(23,:),-VGRz(23,:),"3",VGRx(24,:),-VGRz(24,:),"3",...
VGRx(25,:),-VGRz(25,:),"3",VGRx(26,:),-VGRz(26,:),"3",VGRx(27,:),...
-VGRz(27,:),"3",VGRx(28,:),-VGRz(28,:),"3",VGRx(29,:),-VGRz(29,:),"3"
%
title('Sõrestikskeem')
  gset xtics 3
  gset ytics 1
% gset nolabel
  xlabel('x')
  ylabel('z')
%%Sõlmede numbrid
  eval(sprintf('gset label "1" at %f,%f',krdn(1,1),...
-(krdn(1,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "2" at %f,%f',krdn(2,1),...
-(krdn(2,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "3" at %f,%f',krdn(3,1),...
-(krdn(3,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "4" at %f,%f',krdn(4,1),...
-(krdn(4,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "5" at %f,%f',krdn(5,1),...
-(krdn(5,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "6" at %f,%f',krdn(6,1),...
-(krdn(6,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "7" at %f,%f',krdn(7,1),...
-(krdn(7,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "8" at %f,%f',krdn(8,1),...
-(krdn(8,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "9" at %f,%f',krdn(9,1),...
-(krdn(9,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "10" at %f,%f',krdn(10,1),...
-(krdn(10,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "11" at %f,%f',krdn(11,1),...
-(krdn(11,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "12" at %f,%f',krdn(12,1),...
-(krdn(12,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "13" at %f,%f',...
krdn(13,1),-(krdn(13,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "14" at %f,%f',...
krdn(14,1),-(krdn(14,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "15" at %f,%f',...
krdn(15,1),-(krdn(15,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "16" at %f,%f',...
krdn(16,1),-(krdn(16,2)+0.17)))
%Jne
%% Varraste numbrid

```

```

eval(sprintf('gset label "1" at %f,%f', (VGRx(1,1)+VGRx(1,2))/2+0.1,...
-(VGRz(1,1)+VGRz(1,2))/2))
eval(sprintf('gset label "2" at %f,%f', (VGRx(2,1)+VGRx(2,2))/2+0.1...
,-(VGRz(2,1)+VGRz(2,2))/2))
eval(sprintf('gset label "3" at %f,%f', (VGRx(3,1)+VGRx(3,2))/2+0.1,...
-(VGRz(3,1)+VGRz(3,2))/2))
eval(sprintf('gset label "4" at %f,%f', (VGRx(4,1)+VGRx(4,2))/2+0.1,...
-(VGRz(4,1)+VGRz(4,2))/2))
eval(sprintf('gset label "5" at %f,%f', (VGRx(5,1)+VGRx(5,2))/2+0.1,...
-(VGRz(5,1)+VGRz(5,2))/2))
eval(sprintf('gset label "6" at %f,%f', (VGRx(6,1)+VGRx(6,2))/2+0.1,...
-(VGRz(6,1)+VGRz(6,2))/2))
eval(sprintf('gset label "7" at %f,%f', (VGRx(7,1)+VGRx(7,2))/2+0.1,...
-(VGRz(7,1)+VGRz(7,2))/2))
eval(sprintf('gset label "8" at %f,%f', (VGRx(8,1)+VGRx(8,2))/2+0.1,...
-(VGRz(8,1)+VGRz(8,2))/2+0.17))
eval(sprintf('gset label "9" at %f,%f', (VGRx(9,1)+VGRx(9,2))/2+0.1,...
-(VGRz(9,1)+VGRz(9,2))/2))
eval(sprintf('gset label "10" at %f,%f', (VGRx(10,1)+VGRx(10,2))/2+0.1,...
-(VGRz(10,1)+VGRz(10,2))/2))
eval(sprintf('gset label "11" at %f,%f', (VGRx(11,1)+VGRx(11,2))/2+0.1,...
-(VGRz(11,1)+VGRz(11,2))/2))
eval(sprintf('gset label "12" at %f,%f', (VGRx(12,1)+VGRx(12,2))/2+0.1,...
-(VGRz(12,1)+VGRz(12,2))/2))
eval(sprintf('gset label "13" at %f,%f', (VGRx(13,1)+VGRx(13,2))/2+0.1,...
-(VGRz(13,1)+VGRz(13,2))/2))
eval(sprintf('gset label "14" at %f,%f', (VGRx(14,1)+VGRx(14,2))/2+0.1,...
-(VGRz(14,1)+VGRz(14,2))/2))
eval(sprintf('gset label "15" at %f,%f', (VGRx(15,1)+VGRx(15,2))/2+0.1,...
-(VGRz(15,1)+VGRz(15,2))/2))
eval(sprintf('gset label "16" at %f,%f', (VGRx(16,1)+VGRx(16,2))/2+0.1,...
-(VGRz(16,1)+VGRz(16,2))/2))
eval(sprintf('gset label "17" at %f,%f', (VGRx(17,1)+VGRx(17,2))/2+0.1,...
-(VGRz(17,1)+VGRz(17,2))/2))
eval(sprintf('gset label "18" at %f,%f', (VGRx(18,1)+VGRx(18,2))/2+0.1,...
-(VGRz(18,1)+VGRz(18,2))/2))
eval(sprintf('gset label "19" at %f,%f', (VGRx(19,1)+VGRx(19,2))/2+0.1,...
-(VGRz(19,1)+VGRz(19,2))/2))
eval(sprintf('gset label "20" at %f,%f', (VGRx(20,1)+VGRx(20,2))/2+0.1,...
-(VGRz(20,1)+VGRz(20,2))/2))
eval(sprintf('gset label "21" at %f,%f', (VGRx(21,1)+VGRx(21,2))/2+0.1,...
-(VGRz(21,1)+VGRz(21,2))/2))
eval(sprintf('gset label "22" at %f,%f', (VGRx(22,1)+VGRx(22,2))/2+0.1,...
-(VGRz(22,1)+VGRz(22,2))/2))
eval(sprintf('gset label "23" at %f,%f', (VGRx(23,1)+VGRx(23,2))/2+0.1,...
-(VGRz(23,1)+VGRz(23,2))/2))
eval(sprintf('gset label "24" at %f,%f', (VGRx(24,1)+VGRx(24,2))/2+0.1,...
-(VGRz(24,1)+VGRz(24,2))/2))
eval(sprintf('gset label "25" at %f,%f', (VGRx(25,1)+VGRx(25,2))/2+0.1,...
-(VGRz(25,1)+VGRz(25,2))/2))
eval(sprintf('gset label "26" at %f,%f', (VGRx(26,1)+VGRx(26,2))/2+0.1,...
-(VGRz(26,1)+VGRz(26,2))/2))

```



```

eval(sprintf('gset label "27" at %f,%f', (VGRx(27,1)+VGRx(27,2))/2+0.1, ...
-(VGRz(27,1)+VGRz(27,2))/2))
eval(sprintf('gset label "28" at %f,%f', (VGRx(28,1)+VGRx(28,2))/2+0.1, ...
-(VGRz(28,1)+VGRz(28,2))/2))
eval(sprintf('gset label "29" at %f,%f', (VGRx(29,1)+VGRx(29,2))/2+0.1, ...
-(VGRz(29,1)+VGRz(29,2))/2))
%
%JNE
%
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "SrstkSkeem.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%
figure(2)
gset border 31
% gset key outside top
gset nokey
plot(Xmjk(:,1),MjZ(5,:), "3", Xmjk(:,1), Y00, "3")
title('Varda N5 mõjujoon')
gset border 31
gset xtics 3
gset ytics 0.2
gset nolabel
xlabel('x')
ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N5mj.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%

```

```
figure(3)
```

```
plot(Xmjk(:,1),MjZ(2,:), "3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N2 mõjujuoon')
    xlabel('x')
    ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N2mj.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%%%%%
figure(4)
```

```
plot(Xmjk(:,1),MjZ(4,:), "3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N4 mõjujuoon')
    xlabel('x')
    ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N4mj.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%%%%%
figure(5)
```

```
%
plot(Xmjk(:,1),MjZ(7,:), "3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N7 mõjujuoon')
    xlabel('x')
    ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
```

```

gset linestyle 1 linewidth 8.0 % See ei toota postscript eps puhul
gset output "N7mj.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
%%%%%%%%%%
figure(6)

%
plot(Xmjk(:,1),MjZ(9,:), "3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N9 mõjujoon')
    xlabel('x')
    ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
gset linestyle 1 linewidth 8.0 % See ei toota postscript eps puhul
gset output "N9mj.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
clear
%%%%%%%%%%

%%

```

C.5 Arvutiprogramme siirete arvutamiseks

Programm C.13 *siireNA.m*¹⁹

```

%siireNA.m
%
% Siirete arvutus. Ühikepüüride abil ja koormusepüüri abil siirete
% arvutamine. Temperatuurist siirete arvutamine.

```

¹⁹<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/siireNA.m>

```

%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-03-27
%           e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%           http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%           Mehaanikainstituut
%           http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopiat koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
% Raami varras, millel on koondatud jõud, on jagatud kaheks. Pool riivist
% on koormatud lauskoormusega. Riiv tuleb jagada kaheks osaks. Simpsoni
% valemi järgi integreerimisel on 5 integreerimispiirkonda. Igal
% integreerimispiirkonnal on kirjeldatud 3 ordinaati (alguses, keskel, lõpus).
% Kokku 3X5=15 väärtust igalt epüürilt.
% (ühikepüüridelt=>Mx-i ja Mp epüürilt =>Mp-isse).
%=====
alpha=1.2*0.00001
%=====
h=4
h2=h/2
L=6
L05=L/2
I1=2
I2=1
%=====
Hpost=0.5
Hriiv=0.6
%=====
% Momendi ühikepüüride ordinaadid
%=====
Mx=[0.0  0.0  0.0; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    0.0 -1.0  0.0;
    0.0 -2.0  0.0;
    0.0 -2.0  0.0; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    0.0 -3.0  0.0;
    0.0 -4.0  0.0;

```

```

0.0  -4.0  0.0; % varras 2 (pool riivist)
0.75 -4.0 -0.25;
1.5  -4.0 -0.5;
1.5  -4.0 -0.5; % varras 2 (pool riivist)
0.75 -4.0 -0.75;
0.0  -4.0 -1.0;
0.0  -4.0 -1.0; % varras 3 (post)
0.0  -2.0 -1.0;
0.0  0.0  -1.0]
%=====
MxT=Mx';
%=====
% Normaaljõu ühikepüüride ordinaadid
%=====
Nx=[-0.5  0.0  1/6; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    -0.5  0.0  1/6;
    -0.5  0.0  1/6;
    -0.5  0.0  1/6; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    -0.5  0.0  1/6;
    -0.5  0.0  1/6;
    0.0  -1.0  0.0; % varras 2 (pool riivist)
    0.0  -1.0  0.0;
    0.0  -1.0  0.0;
    0.0  -1.0  0.0; % varras 2 (pool riivist)
    0.0  -1.0  0.0;
    0.0  -1.0  0.0;
    -0.5  0.0  -1/6; % varras 3 (post)
    -0.5  0.0  -1/6;
    -0.5  0.0  -1/6]
%=====
NxT=Nx';
%=====
% Koormuse epüüri ordinaadid
%=====
Mp=[0; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    0;
    0;
    0; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    -10;
    -20;
    -20; % varras 2 (pool riivist)
    20;
    15;
    15; % varras 2 (pool riivist)
    -12.5;
    -40;
    -40; % varras 3 (post)
    -20;
    0]
%=====
MpT=Mp';
%=====

```

```

% Simpsoni valemi kordajad (paine EI)
%=====
smpls=1/6*[h2/I2; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    4*h2/I2;
    h2/I2;
    h2/I2; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    4*h2/I2;
    h2/I2;
    L05/I1; % varras 2 (pool riivist)
    4*L05/I1;
    L05/I1;
    L05/I1; % varras 2 (pool riivist)
    4*L05/I1;
    L05/I1;
    h/I2; % varras 3 (post)
    4*h/I2;
    h/I2];
%=====
smpls0=1/6*[h2; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    4*h2;
    h2;
    h2; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    4*h2;
    h2;
    L05; % varras 2 (pool riivist)
    4*L05;
    L05;
    L05; % varras 2 (pool riivist)
    4*L05;
    L05;
    h; % varras 3 (post)
    4*h;
    h];
%=====
% Siirded koormusest
%=====
W=MxT.*[MpT; MpT; MpT]*smpls
%=====
% Temperatuuri erinevus
%=====
Tp=talpha*[-10/Hpost; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    -10/Hpost;
    -10/Hpost;
    -10/Hpost; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    -10/Hpost;
    -10/Hpost;
    -10/Hpost;
    -10/Hriiv; % varras 2 (pool riivist)
    -10/Hriiv;
    -10/Hriiv;
    -10/Hriiv; % varras 2 (pool riivist)
    -10/Hriiv;
    -10/Hriiv;
    -10/Hriiv;

```

```

    0/Hpost; % varras 3 (post)
    0/Hpost;
    0/Hpost];
%=====
% Temperatuur teljel
%=====
To=talpha*[15; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    15;
    15;
    15; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    15;
    15;
    15; % varras 2 (pool riivist)
    15;
    15;
    15; % varras 2 (pool riivist)
    15;
    15;
    10; % varras 3 (post)
    10;
    10];
%=====
TpT=Tp';
ToT=To';
MxTTP=MxT.*[TpT; TpT; TpT];
NxTTo=NxT.*[ToT; ToT; ToT];
%
%=====
WT=MxTTP*smps0+NxTTo*smps0
%=====
%
%%%%%%%%%%

```

C.6 Arvutiprogramme raami arvutamiseks. Jõumeetod

Programm C.14 *joumNA.m*²⁰

```

%joumNA.m
%
% Jõumeetod. Ühikepüüride abil võrrandisüsteemi kordajate ja
% vabaliikmete leidmine. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamine.
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-03-26
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/

```

²⁰<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/joumNA.m>

```

%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
% Raami varras, millel on koondatud jõud, on jagatud kaheks. Nii tuleb 6 varrast.
% Igal vardal on kirjeldatud 3 ordinaati (alguses, keskel, lõpus). Kokku 3X6=18
% väärtust igalt epüürilt (ühikepüüridelt=>a-sse ja Mp0 epüürilt==>f-i).
%=====
% Ühikepüüride ordinaadid
%=====
Mx=[0.0  0.0  0.0; % varras 1 (post)
    0.0  0.0  0.0;
    0.0  0.0  0.0;
    0.0  0.0  0.0; % varras 2 (riiv)
    0.5  0.0  0.0;
    1.0  0.0  0.0;
    1.0  0.0 -1.0; % varras 3 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    1.0 -0.25 -1.0;
    1.0 -0.5  -1.0;
    1.0 -0.5  -1.0; % varras 4 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    1.0 -0.75 -1.0;
    1.0 -1.0  -1.0;
    0.0  0.0  1.0; % varras 5 (riiv)
    0.0  0.0  0.5;
    0.0  0.0  0.0;
    0.0  0.0  0.0; % varras 6 (post)
    0.0  0.5  0.0;
    0.0  1.0  0.0]
%=====
MxT=Mx';
%=====
% Koormuse epüüri ordinaadid
%=====
Mp=[ 0; % varras 1 (post)
    0;
    0;
    0; % varras 2 (riiv)
    36;

```



```

0;
0; % varras 3 (pool postist, kus on koondatud jõud)
0;
0;
0; % varras 4 (pool postist, kus on koondatud jõud)
10;
20;
0; % varras 5 (riiv)
0;
0;
0; % varras 6 (post)
0;
0]
%=====
MpT=Mp';
%=====
% Simpsoni valemi kordajad
%=====
h=4;
h2=h/2;
L=6;
L05=L/2;
I1=2;
I2=1;
%=====
smptsT=1/6*[h;      % varras 1 (post)
            4*h;
            h;
            L/I1; % varras 2 (riiv)
            4*L/I1;
            L/I1;
            h2; % varras 3 (pool postist, kus on koondatud jõud)
            4*h2;
            h2;
            h2; % varras 4 (pool postist, kus on koondatud jõud)
            4*h2;
            h2;
            L/I1; % varras 5 (riiv)
            4*L/I1;
            L/I1;
            h; % varras 6 (post)
            4*h;
            h ]
%=====
smpts=smptsT';
%=====
%
% Võrrandisüsteemi kordajate maatriksi 'a' leidmine

b1=MxT.*[MxT(1,:); MxT(1,:); MxT(1,:)]*smptsT;

b2=MxT.*[MxT(2,:); MxT(2,:); MxT(2,:)]*smptsT;

```

```

b3=MxT.*[MxT(3,:); MxT(3,:); MxT(3,:)]*smpsT;
%=====
a=[b1 b2 b3]
%=====
% Võrrandisüsteemi vabaliikmed
%=====
b=MxT.*[MpT; MpT; MpT]*smpsT
%=====
% Võrrandisüsteemi tundmatute leidmine
%=====
%x=-inv(a)*b % inv(a)- leiab 'a' pöördmatriksi
x=-a\b % lahend on leitud Gaussi eliminatsiooniga võrrandisüsteemist a*x=b
% % võrrandisüsteemist a*x=b
%=====
% Momendiepüüri arvutamine
%=====
M=Mx*x+Mp
%=====
MT=M' ;
% Kinemaatiline kontroll
delta1=MxT(1,:).*MT*smpsT
delta2=MxT(2,:).*MT*smpsT
delta3=MxT(3,:).*MT*smpsT
% Suhtelise vea arvutamine
%pros1=delta1/( abs(MxT(1,:)).*abs(MT)*smpsT)*100
%pros2=delta2/( abs(MxT(2,:)).*abs(MT)*smpsT)*100
%pros3=delta3/( abs(MxT(3,:)).*abs(MT)*smpsT)*100

%%%%%%%%%%

```

C.7 Arvutiprogramme jätkuvtala arvutamiseks

C.7.1 Arvutifunktsioonid jätkuvtala arvutamiseks

Programm C.15 *afbfikt1.m*²¹

```

%afbfikt1.m
function ABf=afbfikt1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL,EI,EIo)
%afbfikt1.m
% Jätkuvtala fiktiivsete toereaktsioonide
% 6*Af ja 6*Bf arvutamise programm
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-02-25
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool

```

²¹<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/afbfikt1.m>

```

%                               Mehaanikainstituut
%                               http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%N      % Tala sillete arv
%l      % Lihttala ava
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
%
%ABf -- Fiktiivsed toereaktsioonid:
%      ABf(1,1) -- 6*Af;
%      ABf(1,2) -- 6*Bf
%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%
% eps1=0.000001;
li=1*EIo/EI;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
xqa=aqA/l;
xql=aqL/l;
%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*(aqL-aqA)*(aqL+aqA)/2)/l;
Vb
Va=(F1*(1-aF1)+F2*(1-aF2)+qz*(aqL-aqA)*(1-(aqL+aqA)/2))/l;
Va
%
%Af=qz*l^2*li/4;

```

```

%Bf=Af;
Af(1,1)=0;
Bf(1,1)=0;
Af(1,1)=Af(1,1)+qz*l^2*li*xql^2*(2-xql^2)/4;
Bf(1,1)=Bf(1,1)+qz*l^2*li*xql^2*(2-xql)^2/4;
%%%%%%%%%%
Af(1,1)=Af(1,1)+F1*l*li*xi1*xip1*(1+xip1);
Af(1,1)=Af(1,1)+F2*l*li*xi2*xip2*(1+xip2);
Bf(1,1)=Bf(1,1)+F1*l*li*xi1*xip1*(1+xi1);
Bf(1,1)=Bf(1,1)+F2*l*li*xi2*xip2*(1+xi2);
%%
ABf=[Af(1,1) Bf(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%%%

```

Programm C.16 *fooksuhe.m*²²

```

%fooksuhe.m
function kvp=fooksuhe(N,lv,kvs,kps,EI,EIo)
%fooksuhe.m
% Fookussuhete arvutamise programm
% kvp(i,1) % vasakpoolsed fookussuhted
% kvp(i,2) % parempoolsed fookussuhted
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-02-25
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%N % Tala sillete arv

```

²²<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/fooksuhe.m>

```

%l(i) % Lihttala avade vektor l(i,1)
%kv(1) % Esimese silde vasakpoolne fookussuhe
%kp(N) % Viimase silde parempoolne fookussuhe
%EI(i) % Tala sillete ristlõigete jäikused
%EIo % Tala silde ristlõike baasjäikus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
eps1=0.000000000001;
lopatus1=1/eps1;
kv(1)=kvs;
kp(N)=kps;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:N
    li(i)=lv(i)*EIo/EI(i);
end
%%
for j=2:N
    kv(j)=2+(li(j-1)/li(j))*(2-1/kv(j-1));
end
%%
    N1=N-1;
for j=1:N1
    jp=N-j;
    kp(jp)=2+(li(jp+1)/li(jp))*(2-1/kp(jp+1));
end
%
kvp=[kv kp];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

endfunction

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Programm C.17 *toemom1.m*²³

```

%toemom1.m
function TM=toemom1(l,kv,kp,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL,EI,EIo)
%toemom1.m
% Jätkuvtala toemomentide arvutus
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse qz
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-05-21
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt

```

²³<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/toemom1.m>

```

% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%N      % Tala sillete arv
%l      % Lihttala sille
%kv     % Vasakpoolne fookussuhe
%kp     % Parempoolne fookussuhe
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
%
%TM -- Toemomendid:
%      TM(1,1) -- vasakpoolne toemoment;
%      TM(1,2) -- parempoolne toemoment;
%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%
ABf=abfikt1(1,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL,EI,EIo);
eps1=0.000000001;
KA=1/eps1;
A6f=ABf(1,1);
B6f=ABf(1,2);
if kv > KA
    Mv(1,1)=0;
    Mp(1,1)=-B6f/(1*kp);
else
    if kp > KA
        Mp(1,1)=0;
        Mv(1,1)=-A6f/(1*kv);
    else
        Mv(1,1)=- (A6f*kp-B6f)/(1*(kv*kp-1));
        Mp(1,1)=- (B6f*kv-A6f)/(1*(kv*kp-1));
    end
end

```

```

end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
TM=[Mv(1,1) Mp(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

C.8 Arvutiprogramme deformatsioonimeetodiga arvutamiseks

Programm C.18 *defNAB.m*²⁴

```

%defNAB.m
%
% Deformatsioonimeetod.
% Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamine.
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
%           e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%           http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%           Mehaanikainstituut
%           http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%ne - varraste arv
%nr1 - baasvarda number (varras mille jääkuse võtame üheks)
%l(i) - varraste pikkused
%EI(i)- varraste ristlõigete jääkused
%deta(i)- varraste pöördenuvad
%
%

```

²⁴<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/defNAB.m>

```

ne=5;
l=[3 6.0 3.0 6 3.16227766];
varraste_pikkused_l=l
EI=[1 3 1 3 1];
varraste_riistloigete_jaikused_EI=EI
deta=[1 0 1 -0.1667 1.0];
varraste_poordenurdad_deta=deta
eli0=EI(1)/l(1);          % valin baasjäikuseks 1. varda jäikuse
%
% Arvutan varraste jäikused EI(i)/l(i)
for i=1:ne
    eli(i)=EI(i)/l(i);
end
%
% Arvutan varraste redutseeritud jäikused (EI(i)/l(i))/eli0
for i=1:ne
    eli(i)=eli(i)/eli0;
end
%
varraste_jaikused_i=eli'   % trükin 'eli' välja
%=====
% varraste kinnitusmomendid sõlmede pööretest
%
%=====
mx=[0*eli(1) 0*eli(1)    0*eli(1)*deta(1); % varras 1 (post)
    3*eli(1) 0*eli(1)   -3*eli(1)*deta(1); % sõlme pööre "a"
    4*eli(2) 2*eli(2)   0*eli(2)*deta(2); % varras 2 (riiv) sõlme pööre "a"
    2*eli(2) 4*eli(2)   0*eli(2)*deta(2); % sõlme pööre "b"
    0*eli(3) 4*eli(3)  -6*eli(3)*deta(3); % varras 3 (post) sõlme pööre "b"
    0*eli(3) 2*eli(3)  -6*eli(3)*deta(3); %
    0*eli(4) 3*eli(4)  -3*eli(4)*deta(4); % varras 4 (riiv) sõlme pööre "b"
    0*eli(4) 0*eli(4)   0*eli(4)*deta(4); %
    0*eli(5) 0*eli(5)   0*eli(5)*deta(5); % varras 5 (post)
    0*eli(5) 0*eli(5)  -3*eli(5)*deta(5)] %
%=====
% Aab=kinmmom1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz) %kinni vaskul ja paremal
% Aao=kinmmom2(l,F1,aF1,F2,aF2,qz) %kinni vaskul
% Aob=kinmmom3(l,F1,aF1,F2,aF2,qz) %kinni paremal
Aab=kinmmom1(l(2),0,l(2),0,l(2),8); %kinni vaskul
Aeb=kinmmom1(l(3),30,1.8,0,l(3),0);
%=====
Mab=Aab(1,1);
Mba=Aab(1,2);
Meb=Aeb(1,1);
Mbe=Aeb(1,2);
%=====
% Koormuse epüüri ordinaadid
%=====
mp=[0; % varras 1 (post)
    0;
    Mab; % varras 2 (riiv)
    Mba;

```


C.8. ARVUTIPROGRAMME DEFORMATSIOONIMEETODIGA ARVUTAMISEKS²⁶⁵

```
Mbe; % varras 3 (poost)
Meb;
  0; % varras 4 (riiv)
  0;
  0; % varras 6 (post)
  0]
%=====
r(1,1)=3*eli(1)+4*eli(2);
r(1,2)=2*eli(2);
r(2,1)=r(1,2);
r(2,2)=4*eli(2)+4*eli(3)+3*eli(4);
r(1,3)=-3*eli(1)*deta(1);
r(3,1)=r(1,3);
r(2,3)=-6*eli(3)*deta(3)-3*eli(4)*deta(4);
r(3,2)=r(2,3);
r(3,3)=3*eli(1)*deta(1)^2+12*eli(3)*deta(3)^2 ...
      +3*eli(4)*deta(4)^2+3*eli(5)*deta(5)^2;
%=====
r
%=====
r1p=-(Meb+Mbe+30*1.8)*deta(3);
rp=[Mab+4; Mba+Mbe; r1p] % siin Mab'le on lisatud konsooli moment
%x=-inv(r)*rp
x=-r\rp
M=mx*x+mp
%kõik
%

%%%%%%%%%
```

C.8.1 Arvutifunktsioonid deformatsioonimeetodiga arvutamiseks

Programm C.19 *kinmmom1.m*²⁵

```
%kinmmom1.m
function AB=kinmmom1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)
%kinmmom1.m
% deformatsioonimeetodi kinnitusemomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse silde ulatuses
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
```

²⁵<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinmmom1.m>

```

% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusmomendid koormusest:
%      AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%      AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%%%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%%%%%%%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*l^2/2)/l;
Va=(F1*(1-aF1)+F2*(1-aF2)+qz*l^2/2)/l;
Va
Vb
%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=Am(1,1)-qz*l^2/12;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+qz*l^2/12;
%%%%%%%%%
Am(1,1)=Am(1,1)-F1*l*xi1*xip1^2;
Am(1,1)=Am(1,1)-F2*l*xi2*xip2^2;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F1*l*xi1^2*xip1;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F2*l*xi2^2*xip2;
%%

```

C.8. ARVUTIPROGRAMME DEFORMATSIOONIMEETODIGA ARVUTAMISEKS²⁶⁷

```
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];
```

```
endfunction
```

```
%%%%%%%%%
```

Programm C.20 *kinmmom2.m*²⁶

```
%kinmmom2.m
function AB=kinmmom2(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)
%kinmmom2.m (vasakul jäik tugi, paremal 0)
% deformatsioonimeetodi kinnitismomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse silde ulatuses
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
%           e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%           http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%           Mehaanikainstituut
%           http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopiat koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%%%%%%%%%
%AB -- Kinnitismomendid koormusest:
%      AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%      AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%%%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
```

²⁶<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinmmom2.m>

```

%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*l^2/2)/l;
Va=(F1*(1-aF1)+F2*(1-aF2)+qz*l^2/2)/l;
Va
Vb
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=Am(1,1)-qz*l^2/8;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Am(1,1)=Am(1,1)-F1*l*xip1*(1-xip1^2)/2;
Am(1,1)=Am(1,1)-F2*l*xip2*(1-xip2^2)/2;
Bm(1,1)=0;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Programm C.21 *kinmmom3.m*²⁷

```

%kinmmom3.m
function AB=kinmmom3(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)
%kinmmom3.m (vaskul 0, paremal jäik tugi)
% deformatsioonimeetodi kinnitusemomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse silde ulatuses
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA

```

²⁷<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinmmom3.m>

C.8. ARVUTIPROGRAMME DEFORMATSIOONIMEETODIGA ARVUTAMISEKS269

```

% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusmomendid koormusest:
%      AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%      AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*l^2/2)/l;
Va=(F1*(1-aF1)+F2*(1-aF2)+qz*l^2/2)/l;
Va
Vb
%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+qz*l^2/8;
%%%%%%%%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F1*l*xi1*(1-xi1^2)/2;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F2*l*xi2*(1-xi2^2)/2;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%

```

Programm C.22 *kinmmom4.m*²⁸

```

%kinmmom4.m
function AB=kinmmom4(l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL)
%kinmmom4.m
% deformatsioonimeetodi kinnitusemomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse qz
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
%           e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%           http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%           Mehaanikainstituut
%           http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopiat koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
%
%AB -- Kinnitusemomendid koormusest:
%      AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%      AB(1,2) -- parempoolne moment;
%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%
% Valem on võetud õpikust Wilfried B. Krätzig, Tragwerke 2,
% Springer_Verlag 1990, leheküljelt 170 ja on võetud

```

²⁸<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinmmom4.m>

C.8. ARVUTIPROGRAMME DEFORMATSIOONIMEETODIGA ARVUTAMISEKS271

```

% I märgikokkulepe märgid.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%
a=(aqA+aqL)/2;
b=(1-a);
c=aqL-aqA;
alf=a/l;
bet=b/l;
gam=c/l;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*(aqL-aqA)*(aqL+aqA)/2)/l;
Va=(F1*(1-aF1)+F2*(1-aF2)+qz*(aqL-aqA)*(1-(aqL+aqA)/2))/l;
Va
Vb
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=Am(1,1)-qz*c*(a*bet^2+(1-3*b)*gam^2/12);
Bm(1,1)=Bm(1,1)+qz*c*(b*alf^2+(1-3*a)*gam^2/12);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Am(1,1)=Am(1,1)-F1*l*xi1*xip1^2;
Am(1,1)=Am(1,1)-F2*l*xi2*xip2^2;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F1*l*xi1^2*xip1;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F2*l*xi2^2*xip2;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Programm C.23 *kinmmom5.m*²⁹

```

%kinmmom5.m
function AB=kinmmom5(l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL)
%kinmmom5.m (vasakul jäik tugi, paremal liigend 0)
% deformatsioonimeetodi kinnitismomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse qz
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut

```

²⁹<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinmmom5.m>

```

%          http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
%       %%%%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusemomendid koormusest:
%       AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%       AB(1,2) -- parempoolne moment;
%       %%%%%%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%       %%%%%%%%%%%
% Valem on võetud õpikust Wilfried B. Krätzig, Tragwerke 2,
% Springer-Verlag 1990, leheküljelt 170 ja on võetud
% I märgikokkulepe märgid.
%       %%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%
a=(aqA+aqL)/2;
b=(1-a);
c=aqL-aqA;
alf=a/l;
bet=b/l;
gam=c/l;
%       %%%%%%%%%

```


C.8. ARVUTIPROGRAMME DEFORMATSIOONIMEETODIGA ARVUTAMISEKS273

```
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*1^2/2)/1;
Va=(F1*(1-aF1)+F2*(1-aF2)+qz*1^2/2)/1;
Va
Vb
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=Am(1,1)-qz*(alf*(1+bet)-gam^2/4)*b*c/2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Am(1,1)=Am(1,1)-F1*l*xip1*(1-xip1^2)/2;
Am(1,1)=Am(1,1)-F2*l*xip2*(1-xip2^2)/2;
Bm(1,1)=0;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];
```

```
endfunction
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Programm C.24 *kinmmom6.m*³⁰

```
%kinmmom6.m
function AB=kinmmom6(l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL)
%kinmmom6.m (vasakul liigend 0, paremal jäik tugi)
% deformatsioonimeetodi kinnitusemomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse qz
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-04-29
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
```

³⁰<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinmmom6.m>

```

%=====
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusmomendid koormusest:
%      AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%      AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%
% Valem on võetud õpikust Wilfried B. Krätzig, Tragwerke 2,
% Springer-Verlag 1990, leheküljelt 170 ja on võetud
% I märgikokkulepe märgid.
%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%
a=(aqA+aqL)/2;
b=(l-a);
c=aqL-aqA;
alf=a/l;
bet=b/l;
gam=c/l;
%%%%%%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*l^2/2)/l;
Va=(F1*(1-aF1)+F2*(1-aF2)+qz*l^2/2)/l;
Va
Vb
%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+qz*(bet*(1+alf)-gam^2/4)*a*c/2;
%%%%%%%%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F1*l*xi1*(1-xi1^2)/2;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F2*l*xi2*(1-xi2^2)/2;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction

```

```
%%%%%%%%%
```

C.9 Arvutiprogramme staatiliselt määramatu kaare arvutamiseks

Programm C.25 *kaarSjPr1.m*³¹

```
%kaarSjPr1.m
%
%kaarSjPr1.m
%Arvutiprogramm kahe liigendiga kaare sisejõudude leidmiseks
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-05-16
%           e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%           http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%           Mehaanikainstituut
%           http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopiat koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
l=32 % Kaare sille
f=4  % Kaare tõus
F1=0 % Esimese koondatud jõu väärtus
F2=0 % Teise koondatud jõu väärtus
qz=80.0 % Ühtlaselt jaotatud koormus
aF1=32.0 % Esimese koondatud jõu asukoht
aF2=32.0 % Teise koondatud jõu asukoht
aqA=0.0 % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
aqL=16.0 % Ühtlaselt jaotatud koormus lõpp
NT=20 % Kaare jaotuste arv peab olema paaris arv
NN=NT+2 % Kaare jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
Ic=0.12 % Ristlõike inertsimoment lukuliigendis
```

³¹<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarSjPr1.m>

C.9. ARVUTIPROGRAMME STAATILISELT MÄÄRAMATU KAARE ARVUTAMISEKS277

```

%SR2=SR(5:8,:);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SPry=[xv' y' y2' cosFi' j3cosFi' cj3csFi'];
SPry1=[xv' y' Qo' Mo' yMo'];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp(' Kahe liigendiga kaar ')
disp('-----')
disp('      x      y      y^2      cosFi  cosFi^(1/3) cosFi*cosFi^(1/3)')
disp('-----')
SPry
disp('-----')
%pause
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp(' Lihttala sisejõud ja kahe liigendiga kaar ')
disp('-----')
disp('      x      y      Qo      Mo      y*Mo')
disp('-----')
SPry1
disp('-----')
%pause
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SRoo1=SR2Li(1:4,:);
%SRoo2=SR2Li(5:8,:);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp(' Kaare sisejõud ')
disp('-----')
disp('      N      Q      M      x      ')
disp('-----')
SRoo1'
disp('-----')
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Y0=zeros(1,NN);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(1)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
plot(SP(3,:),-SP(2,:),"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Lihttala paindemomendi epüür')
    gset border 31
    gset xtics 3.2
    gset ytics 1000.0
    gset nolaabel
        xlabel('x')
        ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "LihtTalaM.pdf"
replot % octave
%
gset terminal x11

```

```

gshow terminal
%
replot    % octave
%pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%
figure(2)
%%%%%%%%%
NXP=size(SP);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SP(3,1) SP(3,1)];
AgZ=[0 SP(1,1)];
LgX=[SP(3,NX) SP(3,NX)];
LgZ=[0 SP(1,NX)];
%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SP(3,:),SP(1,:),"3",LgX,LgZ,"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Lihttala pöikjõu epüür')
    gset border 31
    gset xtics 3.2
    gset ytics 500.0
    gset nolabel
        xlabel('x')
        ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "LihtTalaQ.pdf"
replot    % octave
%pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%
replot    % octave
%pause (2) % octave

%%%%%%%%%
%Kahe liigendiga kaar
%%%%%%%%%
figure(3)
%%%%%%%%%
    gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
plot(SR(4,:),-SR(3,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Kahe liigendiga kaare paindemomendi epüür')
    gset border 31
    gset xtics 3.2
    gset ytics 1000.0
    gset nolabel
        xlabel('x')
        ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6

```

C.9. ARVUTIPROGRAMME STAATILISELT MÄÄRAMATU KAARE ARVUTAMISEKS279

```
gset output "KaarPrbM.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%pause
%%%%%%%%%%
figure(4)
%%%%%%%%%%
gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 SR(2,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 SR(2,NX)];
%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),SR(2,:), "3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%plot(SR(4,:),SR(2,:), "3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Kahe liigendiga kaare pöikjõu epüür')
gset border 31
gset xtics 3.2
gset ytics 500.0
gset nolabel
xlabel('x')
ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbQ.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
%%%%%%%%%%
figure(5)
%%%%%%%%%%
gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 SR(1,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 SR(1,NX)];
```

```

%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),SR(1:), "3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%plot(SR(4,:),SR(1:), "3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Kahe liigendiga kaare normaaljõu epüür')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 500.0
  gset nolabel
    xlabel('x')
    ylabel('N')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbN.pdf"
replot % octave
%
gset terminal x11
%
replot % octave
%pause (2) % octave
%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%kõik

%%%%%%%%%%

```

Programm C.26 *kaarPrbSTMSjPr.m*³²

```

%kaarPrbSTMSjPr.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on parabool
% Kaar on koormatud paraboolse koormusega
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-05-22
%           e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%           http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%           Mehaanikainstituut
%           http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopiat koos selle

```

³²<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSTMSjPr.m>

C.9. ARVUTIPROGRAMME STAATILISELT MÄÄRAMATU KAARE ARVUTAMISEKS281

```
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
% Vastava lihttala sisejõud leiame programmi
% lihttalaPrbKSj.m abil.
%
%
%
l=32 % Kaare ava
l1=l/2;
f=4.0 % Kaare kõrgus
%
%l=32 % Lihttala ava
qk=50.0 % Jaotatud koormus alguses ja lõpus
qc=10.0 % Jaotatud koormus keskel
NN=20 % Tala jaotuste arv
Ic=0.12
Ac=0.845
G=0.425
krist=1.2
%
%H -- Kaare horisontaalne reaktsioon
%x1 -- Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%SR(1,:) -- normaaljõud SR(2,:) -- põikjõud; SR(3,:) -- paindemoment
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Y0=zeros(1,NN+1);
%
SP=lihttalaPrbKSj(NN,l,qk,qc);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp(' Lihttala sisejõud; x-koordinaat vasakult toelt ')
disp('-----')
disp('          Q          M          x          ')
disp('-----')
SP'
disp('-----')
%pause
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
SR=kaarPrbSTMSj(NN,l,f,SP);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SR1=SR(1:4,:);
SR2=SR(5:8,:);
%
NN1=NN+1;
NNpool=NN/2;
NNpool1=NNpool+1;
NNpool2=NNpool+2;
```

```

%
for j=1:NNpool1
x(1,j)=SR(4,j);
roo1(1,j)=((1+64*f^2*x(1,j)^2/l^4)^(3/2))/(8*f/l^2);
end
%
for j=1:NNpool1
roo(1,j)=roo1(1,NNpool2-j); % ümberpaigutus nii, et
% x-koordinaat vasakult toelt
end
%
for j=NNpool2:NN1
roo(1,j)=roo1(1,j-NNpool); % ümberpaigutus nii, et
% x-koordinaat vasakult toelt
end
%
for j=1:NN+1
x(1,j)=SR(4,j);
y(1,j)=f-SR(5,j); %y-kordinaadi algus lukuliigendisse
sinFi(1,j)=SR(7,j);
cosFi(1,j)=SR(8,j);
end
%
SR3=[y; sinFi; cosFi; roo];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('Staatiliselt määratud kaare sisejõud; x-koordinaat vasakust kannast')
disp('-----')
disp('          N          Q          M          x          ')
disp('-----')
SR1'
disp('-----')
%
disp('y-kordinaadi algus lukuliigendis ')
disp('-----')
disp('          y          sinFi          cosFi          roo          ')
disp('-----')
SR3'
disp('-----')
%pause
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%xv=SR(4,:);
%y=SR(5,:);
NNX=size(cosFi);
NNM=NNX(1,2);
%
for j=1:NNM
j3cosFi(1,j)=cosFi(1,j)^(1/3);
cj3csFi(1,j)=cosFi(1,j)*j3cosFi(1,j);
roocosFi(1,j)=j3cosFi(1,j)/roo(1,j);
y2(1,j)=y(1,j)^2;

```

C.9. ARVUTIPROGRAMME STAATILISELT MÄÄRAMATU KAARE ARVUTAMISEKS283

```

tanFi(1,j)=sinFi(1,j)/cosFi(1,j);
sintg3juur(1,j)=sinFi(1,j)*tanFi(1,j)*j3cosFi(1,j);
Mo(1,j)=SR(3,j);
Qo(1,j)=SR(2,j);
No(1,j)=SR(1,j);
end
%
samm=SR(4,2)-SR(4,1);
%
NS=0; NS2=1; y4=0; y2=0; NNL=NNM/2-1; NNL1=NNM/2-2;
dy14=0; dI4=0; dI2=0; dy22=0;
%
for j=1:NNL/2+1
NS=NS+2;
y4=y4+y(1,NS); % Simpsoni valemis 4*y4
dI4=dI4+roocosFi(1,NS);
end
%
for j=1:NNL1/2
NS2=NS2+2;
y2=y2+y(1,NS2); % Simpsoni valemis 2*y2
dI2=dI2+roocosFi(1,NS2);
end
%
NNLk=NNL/2+NNL1/2+2;
% Simpsoni valemi järgi integreerimine
Yul1=(samm/3)*(y(1,1)+4*y4+2*y2+y(1,NNLk));
Yul2=(Ic/Ac)*(samm/3)*(roocosFi(1,1)+4*dI4+2*dI2+roocosFi(1,NNLk));
disp('Elastsuskeskme ordinaat Yc: ')
Yc=(Yul1-Yul2)/11
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
yMyc(1,1)=0;
No3juurcos(1,1)=0;
Qotg3juurcos(1,1)=0;
%
for j=1:NNM
yMyc(1,j)=y(1,j)-Yc;
yMyc2(1,j)=yMyc(1,j)^2;
yMycMo(1,j)=yMyc(1,j)* Mo(1,j);
No3juurcos(1,j)=No(1,j)*j3cosFi(1,j);
Qotg3juurcos(1,j)=Qo(1,j)*tanFi(1,j)*j3cosFi(1,j);
end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
NS=0; NS2=1;
%NNL=NNM/2-1; NNL1=NNM/2-2;
yruut4=0; yruut2=0;
cskuupjuur4=0; cskuupjuur2=0;
sntg4=0; sntg2=0;
%

```

```

yM4=0; yM2=0;
No3juur4=0; No3juur2=0;
Qotg3jr4=0; Qotg3jr2=0;
MoI4=0; MoI2=0;
%
for j=1:NNL/2+1
NS=NS+2;
yruut4=yruut4+yMyc2(1,NS); % Simpsoni valemis 4*y4
cskuupjuur4=cskuupjuur4+cj3csFi(1,NS);
sntg4=sntg4+sintg3juur(1,NS);
%
yM4=yM4+yMycMo(1,NS);
No3juur4=No3juur4+No3juurcos(1,NS);
Qotg3jr4=Qotg3jr4+Qotg3juurcos(1,NS);
MoI4=MoI4+ Mo(1,NS);
end
%
for j=1:NNL1/2
NS2=NS2+2;
yruut2=yruut2+yMyc2(1,NS2); % Simpsoni valemis 2*y2
cskuupjuur2=cskuupjuur2+cj3csFi(1,NS2);
sntg2=sntg2+sintg3juur(1,NS2);
%
yM2=yM2+yMycMo(1,NS2);
No3juur2=No3juur2+No3juurcos(1,NS2);
Qotg3jr2=Qotg3jr2+Qotg3juurcos(1,NS2);
MoI2=MoI2+ Mo(1,NS2);
end
%
% Simpsoni valemi järgi integreerimine
EIDelta1p=(samm/3)*((yMyc2(1,1)+4*yruut4+2*yruut2+yMyc2(1,NNLk))+...
(Ic/Ac)*(cj3csFi(1,1)+4*cskuupjuur4+2*cskuupjuur2+cj3csFi(1,NNLk))+...
(krist/G)*(Ic/Ac)*(sintg3juur(1,1)+4*sntg4+2*sntg2+sintg3juur(1,NNLk)));
EIDelta1p=(samm/3)*((yMycMo(1,1)+4*yM4+2*yM2+yMycMo(1,NNLk))+...
(Ic/Ac)*(No3juurcos(1,1)+4*No3juur4+2*No3juur2+No3juurcos(1,NNLk))-...
(krist/G)*(Ic/Ac)*(Qotg3juurcos(1,1)+4*Qotg3jr4+2*Qotg3jr2+Qotg3juurcos(1,NNLk)) );
EIDelta2p=(samm/3)*(Mo(1,1)+4*MoI4+2*MoI2+Mo(1,NNLk));
disp('Võrrandisüsteemi kordajad: ')
EIDelta1p
EIDelta2p=11
EIDelta1p
EIDelta2p
disp('Võrrandisüsteemi lahend: ')
X1=-EIDelta1p/EIDelta1p
X2=-EIDelta2p/EIDelta2p
X3=0
%Sisejõudude epüürid
%
for j=1:NNM
Mep(1,j)=Mo(1,j)+yMyc(1,j)*X1+X2;
Nep(1,j)=No(1,j)+X1*cosFi(1,j);
Qep(1,j)=Qo(1,j)-X1*sinFi(1,j);

```

C.9. ARVUTIPROGRAMME STAATILISELT MÄÄRAMATU KAARE ARVUTAMISEKS285

```

end
%
disp('Liigenditeta kaare epüüride ordinaadid ')
disp('      Mep      Qep      Nep  ')
[Mep' Qep' Nep' ]
%pause
%%%%%%%%%%%%%%
figure(1)
%%%%%%%%%%%%%%
    gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 -Mep(1,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 -Mep(1,NX)];
%%%%%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),-Mep,"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),YO,"3")
%%Põhiskeem
%plot(SR(4,:),-SR(3,:),"3",SR(4,:),YO,"3")
title('Paidemomendi epüür Mep')
    gset border 31
    gset xtics 3.2
    gset ytics 100.0
    gset nolabel
        xlabel('x')
        ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbMep.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%
%pause
%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
%%%%%%%%%%%%%%
    gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 Qep(1,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 Qep(1,NX)];

```

```

%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),Qep,"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%%Põhiskeem
%plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),SR(2:),"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%plot(SR(4,:),SR(2:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Põikjõu epüür Qep')
    gset border 31
    gset xtics 3.2
    gset ytics 100.0
    gset nolabel
        xlabel('x')
        ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbQep.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%pause
%%%%%%%%%%
figure(3)
%%%%%%%%%%
    gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 Nep(1,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 Nep(1,NX)];
%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),Nep,"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%%Põhiskeem
%plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),SR(1:),"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%plot(SR(4,:),SR(1:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Normaaljõu epüür Nep')
    gset border 31
    gset xtics 3.2
    gset ytics 100.0
    gset nolabel
        xlabel('x')
        ylabel('N')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6

```

```

gset output "KaarPrbNep.pdf"
replot % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%%%
%clear
%%%%%%%%%%%%
%
```

C.9.1 Arvutifunktsioonid staatiliselt määramatu kaare arvutamiseks

Programm C.27 *kaarPrbSj1.m*³³

```

% kaarPrbSj1.m
function Sr=kaarPrbSj1(H,NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,Sj)
%kaarPrbSj1.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% H kaare horisontaalne reaktsioon on arvutatud varem
% Kaare telgjooneks on parabool
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-05-16
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
```

³³<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSj1.m>

```

% Vastava lihttala sisejõud Sj leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
% NT % Tala jaotuste arv
% NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%l % Kaare ava
%f % Kaare kõrgus
%H % Kaare horisontaalne reaktsioon
%aF1 % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2 % Teise koondatud jõu asukoht
%x1 -- Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%
%Sj -- Lihttala sisejõud:
% Sj(1,:) -- põikjõud; Sr(2,:) -- paindemoment;
% Sj(3,:) -- x koordinaat;
%Sj -- Kaare sisejõud:
% Sr(1,:) -- normaaljõud; Sr(2,:) -- põikjõud;
% Sr(3,:) -- paindemoment; Sr(4,:) -- x koordinaat;
% Sr(5,:) -- y koordinaat; Sr(6,:) -- y* survejoon
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
eps1=0.000001;
eps2=0.0001;
aKord=0;
Mk=0;
lk=1/2;
for i=1:NN
  if aKord < eps1
    if (Sj(3,i)-lk) <= eps2
      aKord=0;
    else
      aKord=1;
      Mk=Sj(2,i-1);
      xKsk=Sj(3,i-1);
    end
  else
    Tyhi=0;
  end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% H=Mk/f
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
samm=1/NT;
x=0;
j=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:NN
%
  if (x-aF1) < eps1
    delta1=0;
    aF1kord=0;
    xaF1=0;
    xv(1,i)=x;

```


C.9. ARVUTIPROGRAMME STAATILISELT MÄÄRAMATU KAARE ARVUTAMISEKS289

```

else
    if aF1kord < eps1
        delta1=1;
        x=x-samm;
        xv(1,i)=x;
        xaF1=(x-aF1);
        aF1kord=1;
    else
        delta1=1;
        xv(1,i)=x;
        xaF1=(x-aF1);
    end
end
if (x-aF2) < eps1
    delta2=0;
    aF2kord=0;
    xv(1,i)=x;
    xaF2=0;
else
    if aF2kord < eps1
        delta1=1;
        x=x-samm;
        xv(1,i)=x;
        xaF2=(x-aF2);
        aF2kord=1;
    else
        delta2=1;
        xv(1,i)=x;
        xaF2=(x-aF2);
    end
end
end
%
%
%
xi(i)=xv(1,i)/l;
xip(i)=(1-xv(1,i))/l;
y(1,i)=4*f*xi(i)*xip(i);
sinFi(1,i)=(1-2*xi(i))/sqrt((1/(4*f))^2+(1-2*xi(i))^2);
cosFi(1,i)=1/sqrt(1+((4*f)/l)^2*(1-2*xi(i))^2);
M(1,i)=Sj(2,i)-H*y(1,i);
Q(1,i)=Sj(1,i)*cosFi(1,i)-H*sinFi(1,i);
N(1,i)=Sj(1,i)*sinFi(1,i)+H*cosFi(1,i);
ys(1,i)=Sj(2,i)/H;
%
%
%
x=x+samm;
end
%
%
%
%Sr(1,:)=N(1,:); % Normaaljõud
%Sr(2,:)=Q(1,:); % Põikjõud

```

```

%Sr(3,:)=M(1,:); % Paindemoment
%Sr(4,:)=xv(1,:); % x koordinaat
%Sr(5,:)=y(1,:); % y koordinaat
%Sr(6,:)=ys(1,:); % Y* survejoone koordinaat
%Sr(7,:)=sinF(1,:);
%Sr(8,:)=cosFi(1,:);
%
Sr=[N(1,:); Q(1,:); M(1,:); xv(1,:); y(1,:); ys(1,:); sinFi(1,:); cosFi(1,:)];
%
endfunction

```

```

%%

```

Programm C.28 *kaarPrbSTMSj.m*³⁴

```

%kaarPrbSTMSj.m
function Sr=kaarPrbSTMSj(NN,l,f,Sj)
%kaarPrbSj.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on parabool
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2003-05-22
% e-mail: alahe@staff.ttu.ee
% http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
% Mehaanikainstituut
% http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
% Vastava lihttala sisejõud Sj leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
% NN % Tala jaotuste arv
% l % Kaare ava
% f % Kaare kõrgus
% H % Kaare horisontaalne reaktsioon

```

³⁴<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSTMSj.m>

C.9. ARVUTIPROGRAMME STAATILISELT MÄÄRAMATU KAARE ARVUTAMISEKS291

```

%x1 -- Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%
%Sj -- Lihttala sisejõud:
% Sj(1,:) -- põikjõud; Sr(2,:) -- paindemoment;
% Sj(3,:) -- x koordinaat;
%Sj -- Kaare sisejõud:
% Sr(1,:) -- normaaljõud; Sr(2,:) -- põikjõud;
% Sr(3,:) -- paindemoment; Sr(4,:) -- x koordinaat;
% Sr(5,:) -- y koordinaat; Sr(6,:) -- y* survejoon
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
eps1=0.000001;
eps2=0.0001;
aKord=0;
Mk=0;
lk=1/2;
samm=1/NN;
Npool=NN/2;
NN2=Npool+1;
x=0;
j=0;
Mk=Sj(2,NN2)
%
H=Mk/f
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:NN+1
%
xv(1,i)=x;
xi(i)=xv(1,i)/l;
xip(i)=(1-xv(1,i))/l;
y(1,i)=4*f*xi(i)*xip(i);
sinFi(1,i)=(1-2*xi(i))/sqrt((1/(4*f))^2+(1-2*xi(i))^2);
cosFi(1,i)=1/sqrt(1+((4*f)/l)^2*(1-2*xi(i))^2);
M(1,i)=Sj(2,i)-H*y(1,i);
Q(1,i)=Sj(1,i)*cosFi(1,i)-H*sinFi(1,i);
N(1,i)=Sj(1,i)*sinFi(1,i)+H*cosFi(1,i);
ys(1,i)=Sj(2,i)/H;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
x=x+samm;
end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Sr(1,:)=N(1,:); % Normaaljõud
%Sr(2,:)=Q(1,:); % Põikjõud
%Sr(3,:)=M(1,:); % Paindemoment
%Sr(4,:)=xv(1,:); % x koordinaat
%Sr(5,:)=y(1,:); % y koordinaat
%Sr(6,:)=ys(1,:); % Y* survejoone koordinaat
%Sr(7,:)=sinF(1,:);
%Sr(8,:)=cosFi(1,:);

```

```
%
Sr=[N(1,:); Q(1,:); M(1,:); xv(1,:); y(1,:); ys(1,:); sinFi(1,:); cosFi(1,:)];
%
endfunction

%%%%%%%%%
```

C.10 Arvutiprogramme kriitilise koormuse arvutamiseks

Eesarvude leidmiseks kasutame *Octave*'i või *Matlab*'i programmi *eesarvud.m*.
Eesarvude graafikuid näitab programm *eesagraf.m*.

Programm C.29 *eesarvud.m*³⁵

```
%eesarvud.m
%EESARVUD A, B, C, V, A+B, A-B
% varda piki-põikpainedel
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2001-01-22
%          e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%          http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%          Mehaanikainstituut
%          http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopiat koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
l1='';mark='';S1='';EJ1='';xx='';xx1='';xxx='';xxxx='';yy='';x11x='';
xyyx='';xyL='';xyLy='';x11='';
l=0; S=0; EJ=0;
eps1=0.000001;
lukk='lahti';
```

³⁵<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/eesarvud.m>

```

    lahti='lahti';
%%%Lehekülg nr.2 %%%%%%%%%%
    if strcmp(lukk,lahti)
%disp('  VARDA TUNNUSARV PIKIPÕIKPAINDEL  ')
% nu=input('Sisesta varda pikkus l=');
disp('      EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL  ')
    l=input('Sisesta varda pikkus l=');
        l1=sprintf('%g',l);
    end
    lukk='lahti';
%   märgi tingimus
    mlukk='lahti' ;
        mlahti='lahti';
    if strcmp(mlukk,mlahti)
%   märgi tingimus, edasi on end
        mark='x';
        mark1='-';
        mark2='+';
        niinaa = ((strcmp(mark,mark2))|(strcmp(mark,mark1))) ;
%
        while ( niinaa - 1) ~= 0
            mark='x';
%disp('')
%disp('      EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL  ')
disp('Sisejõud S  ')
disp('Survel:märk - ( S<=0, N<=0 );  Tõmbel:märk + ( S>=0, N>=0 )  ')
    mark=input('Ütle kas + või - märk= ', 's');
        niinaa = ((strcmp(mark,mark2))|(strcmp(mark,mark1))) ;
    end
        mlukk='lahti';
    end
%   märgi end
S=input('Ütle S-i väärtus. S=');
S1=sprintf('%g',S);
EJ=input('Ütle varda paindejäikus EJ=');
EJ1=sprintf('%g',EJ);
    if S==0
        nu=0;
    else
        nu=1*sqrt(S/EJ);
    end
%   Surve
%%%Lehekülg nr.3 %%%%%%%%%%
    if strcmp(mark1,mark) == 1
        if nu <=eps1
nu=nu+eps1; A=4.0+eps1; B=2.0+eps1; C=3.0+eps1; V=1.0+eps1;
AB=A+B; BA=A-B; ALFA=1/C; BETA=B/(A*C); S=0.0;
xx='  Pikijõud puudub : S= ';
%   '   mõõt      S      ';
sdim=size(xx);
sdim1=sdim(2);
xx1(1,1:sdim1)=xx;

```

```

sdim2=sdim1+1;
mdim=size(mark);
mdim1=mdim(2);
markb1(1,1:mdim1)=mark;
mdim2=sdim1+mdim1;
xxx(1,1:sdim1)=xx1(1,1:sdim1);
xxx(1,sdim2:mdim2)=markb1(1,1:mdim1);
    else
        cs=cos(nu); ss=sin(nu);
        alumineA=2*(1-cs)-nu*ss;
        ulemineA=nu*(ss-nu*cs);
        A=ulemineA/alumineA;
        ulemineB=nu*(nu-ss);
        B=ulemineB/alumineA;
        ulemineC=nu*nu*ss;
        C=ulemineC/(ss-nu*cs);
        V=12*(2*(1-cs)-nu*ss)/(nu*ulemineC);
        AB=A+B; BA=A-B;
        ALFA=1/C; BETA=B/(A*C);
xx='    Pikijõud survel : S= ';
% '    mõõt        S        ';
sdim=size(xx);
sdim1=sdim(2);
xx1(1,1:sdim1)=xx;
sdim2=sdim1+1;
mdim=size(mark);
mdim1=mdim(2);
markb1(1,1:mdim1)=mark;
mdim2=sdim1+mdim1;
xxx(1,1:sdim1)=xx1(1,1:sdim1);
xxx(1,sdim2:mdim2)=markb1(1,1:mdim1);
%%Lehekülg nr.4 %%%
%
    end
end
%%
%    Tõmme
%    else
        if strcmp(mark2,mark) == 1
            if nu <=eps1
nu=nu+eps1; A=4.0+eps1; B=2.0+eps1; C=3.0+eps1; V=1.0+eps1;
AB=A+B; BA=A-B; ALFA=1/C; BETA=B/(A*C); S=0.0;
xx='    Pikijõud puudub : S= ';
% '    mõõt        S        ';
sdim=size(xx);
sdim1=sdim(2);
xx1(1,1:sdim1)=xx;
sdim2=sdim1+1;
mdim=size(mark);
mdim1=mdim(2);
markb1(1,1:mdim1)=mark;
mdim2=sdim1+mdim1;

```

```

xxx(1,1:sdim1)=xx1(1,1:sdim1);
xxx(1,sdim2:mdim2)=markb1(1,1:mdim1);
    else
        cs=cosh(nu); ss=sinh(nu);
        alumineA=-2*(1-cs)-nu*ss;
        ulemineA=nu*(ss-nu*cs);
        A=ulemineA/alumineA;
        ulemineB=nu*(nu-ss);
        B=ulemineB/alumineA;
        ulemineC=nu*nu*ss;
        C=ulemineC/(-(ss-nu*cs));
        V=12*(2*(1-cs)+nu*ss)/(nu*ulemineC);
        AB=A+B; BA=A-B;
        ALFA=1/C; BETA=B/(A*C);
xx='    Pikijõud tõmbel : S= ';
% '    mõõt      S      ';
sdim=size(xx);
sdim1=sdim(2);
xx1(1,1:sdim1)=xx;
sdim2=sdim1+1;
%%%Lehekülg nr.5 %%%
mdim=size(mark);
mdim1=mdim(2);
markb1(1,1:mdim1)=mark;
mdim2=sdim1+mdim1;
xxx(1,1:sdim1)=xx1(1,1:sdim1);
xxx(1,sdim2:mdim2)=markb1(1,1:mdim1);
%
    end
    end
    %%%
%välja trükkimiseks
sdim=size(xxx);
sdim1=sdim(2);
xxx(1,1:sdim1)=xxx;
sdim2=sdim1+1;
mdim=size(S1);
mdim1=mdim(2);
xS1(1,1:mdim1)=S1;
mdim2=sdim1+mdim1;
xxxx(1,1:sdim1)=xxx(1,1:sdim1);
xxxx(1,sdim2:mdim2)=xS1(1,1:mdim1);
xxxx=xxxx;
%
yy='';
yy=' Varda ristlõike paindejäikus EJ= ';
Edim=size(yy);
Edim1=Edim(2);
xyx(1,1:Edim1)=yy;
Edim2=Edim1+1;
Jdim=size(EJ1);
Jdim1=Jdim(2);

```

```

xEJ1(1,1:Jdim1)=EJ1;
Jdim2=Edim1+Jdim1;
xyyx(1,1:Edim1)=xyx(1,1:Edim1);
xyyx(1,Edim2:Jdim2)=xEJ1(1,1:Jdim1);
%
sdim=size(xxxx);
sdim1=sdim(2);
xxxx(1,1:sdim1)=xxxx;
sdim2=sdim1+1;
%%%Lehekülg nr.6 %%%%%%%%%%
mdim=size(xyyx);
mdim1=mdim(2);
mdim2=sdim1+mdim1;
xllx(1,1:sdim1)=xxxx(1,1:sdim1);
xllx(1,sdim2:mdim2)=xyyx(1,1:mdim1);
%
    abcv=[nu A B AB C BA V];
    abca=[ALFA BETA];
disp(' ')
    Y1='    nu | A | B | A+B | C | A-B | V ';
disp('-----')
disp('-----')
    disp(xllx)
disp('-----')
    disp(Y1)
disp('-----')
disp(abcv)
%
yy='';
yy='    Varda pikkus l=';
Edim=size(yy);
Edim1=Edim(2);
xyL(1,1:Edim1)=yy;
Edim2=Edim1+1;
Jdim=size(l1);
Jdim1=Jdim(2);
xl1(1,1:Jdim1)=l1;
Jdim2=Edim1+Jdim1;
xyLx(1,1:Edim1)=xyL(1,1:Edim1);
xyLx(1,Edim2:Jdim2)=xl1(1,1:Jdim1);
%
    Y2='    ALFA | BETA | ';
disp('-----')
disp('-----')
    disp(xyLx)
disp('-----')
    disp(Y2)
disp('-----')
    disp(abca)
%
%%%%%%%%kõik

```


Programm C.30 *eesagraf.m*³⁶

```

%eesagraf.m
% Eesarvude (sks Vorzahlen) graafikud
% (piki-põikpaine, stabiilsus)
%=====
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe, 2000-03-21
%           e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%           http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c) 2003 Tallinna Tehnikaülikool
%           Mehaanikainstituut
%           http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopiat koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====
%
disp(' Eesarvud survel ')
clear
    igr=1;
    eps1=0.000001;
disp(' Oota! Arvutan!! ')
for nu=0.0:0.02:10.0
    if nu <=eps1
        A=4.0+eps1; B=2.0+eps1; C=3.0+eps1; V=1.0+eps1; AB=A+B; BA=A-B;
        ALFA=1/C; BETA=B/(A*C);
    else
        cs=cos(nu); ss=sin(nu);
        alumineA=2*(1-cs)-nu*ss;
        ulemineA=nu*(ss-nu*cs);
        A=ulemineA/alumineA;
        ulemineB=nu*(nu-ss);
        B=ulemineB/alumineA;
        ulemineC=nu*nu*ss;
        C=ulemineC/(ss-nu*cs);
        V=12*(2*(1-cs)-nu*ss)/(nu*ulemineC);
        AB=A+B; BA=A-B;
        ALFA=1/C;

```

³⁶<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/eesarvud.m>

```

        BETA=B/(A*C);
    end
%%%%
    if A >= 15.0
        A = 15.0;
    end
    if A <= -15.0
        A = -15.0;
    end
%%%
        ygr(igr,1)=A;
        ygr1(igr,1)=A;
    if B >= 15.0
        B = 15.0;
    end
    if B <= -15.0
        B = -15.0;
    end
        ygr(igr,2)=B;
        ygr2(igr,2)=B;
    if AB >= 15.0
        AB = 15.0;
    end
    if AB <= -15.0
        AB = -15.0;
    end
        ygr(igr,3)=AB;
        ygr3(igr,3)=AB;
    if C >= 15.0
        C = 15.0;
    end
    if C <= -15.0
        C = -15.0;
    end
        ygr(igr,4)=C;
        ygr4(igr,4)=C;

    if BA >= 15.0
        BA = 15.0;
    end
    if BA <= -15.0
        BA = -15.0;
    end
        ygr(igr,5)=BA;
        ygr5(igr,5)=BA;
    if V >= 50.0
        V = 50.0;
    end
    if V <= -50.0
        V = -50.0;
    end
        ygrV(igr)=V;

```

```

                xgr(igr)=nu;
if ALFA >= 15.0
    ALFA = 15.0;
end
if ALFA <= -15.0
    ALFA = -15.0;
end
                ygrALB(igr,1)=ALFA;
if BETA >= 15.0
    BETA = 15.0;
end
if BETA <= -15.0
    BETA = -15.0;
end
                ygrALB(igr,2)=BETA;
                xgr(igr)=nu;
                igr=igr+1;
end
%%%
    ygrY=[0.0 0.0];
    ygrX=[0.0 10];
%
%clearplot
    axis([0.0 10.0 -20.0 20.0])
    axis('on')
%
% figure(1), axis([0.0 10.0 -20.0 20.0]), axis on;
figure(1)
    axis([0.0 10.0 -15.0 15.0])
    plot(xgr,ygr,ygrX,ygrY,'k')
%plot( xgr,ygr1,'k -',xgr,ygr2,'k --',xgr,ygr3,'k -.',...
xgr,ygr4,'k :',xgr,ygr5,'k -.', ygrX,ygrY,'k')
%
title('Eesarvud A, B, A+B, C, A-B surveel st. S>0, N<0 ')
    gset border 31
    gset xtics 2
    gset ytics 2.0
    gset nolabel
    xlabel('nu')
    text(5.9,2.7,'C')
% set label "C*" at graph 5.9, graph 2.7
% vaata: http://t16web.lanl.gov/Kawano/gnuplot/label2-e.html#4.4
% http://octave.sourceforge.net/index/plotcontrol.html
    text(2.0,3.8,'A')
    text(7.0,3.5,'A')
    text(8.0,3.0,'A-B')
    text(1.5,2.9,'C')
    text(2.6,5.8,'A+B')
    text(4.8,5.3,'B')
    text(7.2,-8.1,'B')
    text(3.7,-8.1,'C')
    text(1.5,0.5,'A-B')

```

```

        text(8.4,7.4,'C')
%       text(0.5,-3.0,' A=4*fi2(nu)')
%       text(0.5,-6.0,' B=2*fi3(nu)')
%       text(0.5,-9.0,'A+B=6*fi4(nu)')
%       text(0.5,-12.0,' C=3*fi1(nu)')
%print -depsc figur1v
%print -deps figure1m
%
replot
pause (1) % octave
%
clearplot
%
axis('off')
        axis([0.0 10.0 -35.0 35.0])
axis('on')
%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
        axis([0.0 10.0 -35.0 35.0])
        plot(xgr,ygrV,ygrX,ygrY,'k')
title('Eesarv V survel st. S>0, N<0 ')
        gset border 31
        gset xtics 2
        gset ytics 5.0
        gset nolabel
        xlabel('nu')
        text(2.0,5.0,'V')
        text(4.0,-5.2,'V')
%
% legend('A')
        ygrY=[0.0 0.0];
        ygrX=[0.0 10];
%
replot
pause (1) % octave
%
clearplot
axis('off')
        axis([0.0 10.0 -15.0 15.0])
axis('on')
%%%%%%%%%%%%%%
figure(3)
        axis([0.0 10.0 -15.0 15.0])
        plot(xgr,ygrALB(:,1),xgr,ygrALB(:,2),ygrX,ygrY,'k')
title('Eesarvud ALFA, BETA survel st. S>0, N<0 ')
        gset border 31
        gset xtics 2
        gset ytics 5.0
        gset nolabel
        xlabel('nu')
        text(5.1,1.2,'ALFA')
        text(2.0,-0.8,'BETA')

```

```

    text(3.8,-1.4,'BETA')
    text(1.6,1.2,'ALFA')
%
%   ygrY=[0.0 0.0];
%   ygrX=[0.0 10];
%
replot
pause (1) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp(' Eesarvud tõmbel ')
clear
    igr=1;
    eps1=0.000001;
disp(' Oota! Arvutan!! ')
    for nu=0.0:0.02:14.95
        if nu <=eps1
            A=4.0+eps1; B=2.0+eps1; C=3.0+eps1; V=1.0+eps1; AB=A+B; BA=A-B;
            ALFA=1/C; BETA=B/(A*C);
        else
            cs=cosh(nu); ss=sinh(nu);
            alumineA=-2*(1-cs)-nu*ss;
            ulemineA=nu*(ss-nu*cs);
            A=ulemineA/alumineA;
            ulemineB=nu*(nu-ss);
            B=ulemineB/alumineA;
            ulemineC=nu*nu*ss;
            C=ulemineC/(-(ss-nu*cs));
            V=12*(2*(1-cs)+nu*ss)/(nu*ulemineC);
            AB=A+B; BA=A-B;
            ALFA=1/C;
            BETA=B/(A*C);
        end
    end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if A >= 20.0
        A = 20.0;
    end
%   if A <= -20.0
%       A = -20.0;
%   end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        ygr(igr,1)=A;
%       ygr1(igr,1)=A;
    if B >= 20.0
        B = 20.0;
    end
%   if B <= -20.0
%       B = -20.0;
%   end
        ygr(igr,2)=B;
%       ygr2(igr,2)=B;
    if AB >= 20.0

```

```

        AB = 20.0;
    end
%   if AB <= -20.0
%       AB = -20.0;
%   end
        ygr(igr,3)=AB;
%       ygr3(igr,3)=AB;
    if C >= 20.0
        C = 20.0;
    end
%   if C <= -20.0
%       C = -20.0;
%   end
        ygr(igr,4)=C;
%       ygr4(igr,4)=C;

    if BA >= 20.0
        BA = 20.0;
    end
%   if BA <= -20.0
%       BA = -20.0;
%   end
        ygr(igr,5)=BA;
%       ygr5(igr,5)=BA;
    if V >= 20.0
        V = 20.0;
    end
    if V <= -10.0
        V = -10.0;
    end
        ygrV(igr)=V;
        xgr(igr)=nu;
    if ALFA >= 20.0
        ALFA = 20.0;
    end
%   if ALFA <= -20.0
%       ALFA = -20.0;
%   end
        ygrALB(igr,1)=ALFA;
    if BETA >= 20.0
        BETA = 20.0;
    end
%   if BETA <= -20.0
%       BETA = -20.0;
%   end
        ygrALB(igr,2)=BETA;
        xgr(igr)=nu;
        igr=igr+1;
    end
%%%
    ygrY=[0.0 0.0];
    ygrX=[0.0 15.0];

```

```

%
  axis('off')
  axis('on')
%   xyaxis=[0.0 10.0 -15.0 15.0];
  axis([0.0 10.0 -15.0 15.0])
%
clearplot
  axis('off')
  axis([0.0 10.0 -5.0 15.0])
  axis('on')
%%%%%%%%%%%%%%
figure(4)
  axis([0.0 10.0 -5.0 15.0])
  plot(xgr,ygr,ygrX,ygrY,'k')
%plot( xgr,ygr1,'k -',xgr,ygr2,'k --',xgr,ygr3,'k -.',...
xgr,ygr4,'k :',xgr,ygr5,'k -.', ygrX,ygrY,'k')
%print -depsc figure5
%print -deps figure5m
title('Eesarvud A, B, A+B, C, A-B tõmbel st. S<0, N>0 ')
  gset border 31
  gset xtics 2
  gset ytics 1.0
  gset nolabel
  xlabel('nu')
  text(4.7,2.0,'B')
  text(2.6,5.6,'A')
  text(2.6,7.5,'A+B')
  text(4.8,4.3,'C')
  text(2.3,3.5,'A-B')
%
%
replot
pause (1) % octave
%
clearplot
%
  axis('off')
  axis([0.0 10.0 -0.5 1.5])
  axis('on')
%%%%%%%%%%%%%%
figure(5)
  axis([0.0 15.0 -0.5 1.5])
  plot(xgr,ygrV,ygrX,ygrY,'k')
title('Eesarv V tõmbel st. S<0, N>0 ')
  gset border 31
  gset xtics 2
  gset ytics 0.2
  gset nolabel
  xlabel('nu')
  text(2.4,0.7,'V')
%
  ygrY=[0.0 0.0];

```

```
        ygrX=[0.0 15.0];
%
replot
pause (1) % octave
%
clearplot
%
figure(6)
axis([0.0 15.0 -0.1 0.4])
    plot(xgr,ygrALB(:,1),xgr,ygrALB(:,2),ygrX,ygrY,'k')
title('Eesarvud ALFA, BETA tõmbel st. S<0, N>0 ')
    gset border 31
    gset xtics 2
    gset ytics 0.05
    gset nolabel
        xlabel('nu')
        text(2.0,0.3,'ALFA')
        text(2.6,0.1,'BETA')
%
replot
pause (1) % octave
%
%clearplot
disp('Eesarvude graafikutest on kõik. ')

clearplot
clear
clc
%%%%%

%%%%%
```


Lisa D

GNU Üldine Avalik Litsents

GNU Üldine Avalik Litsents

Versioon number 2, juuni 1991

Autoriõigus (c) 1989, 1991 Free Software Foundation, Inc. 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA

Igaüks võib käesolevast dokumendist valmistada koopiaid ning valmistatud koopiaid levitada tingimusel, et need koopiaid vastavad originaaldokumendile sõnasõnalt.

EESSÕNA

Enamik tarkvara litsentse on loodud selleks, et võtta Teilt õigus tarkvara jagada ja muuta. Vastukaaluks on GNU Üldine Avalik Litsents mõeldud selleks, et tagada Teile vabadus jagada ja muuta vaba tarkvara - kindlustada, et tarkvara oleks vaba kõigile selle kasutajatele. Käesolev Üldine Avalik Litsents kehtib enamiku Free Software Foundation'i tarkvara ja mistahes programmide kohta, mille autorid lubavad seda litsentsi kasutada. (Mõni Free Software Foundation'i tarkvara on vastavalt kaitsitud GNU Üldise Avaliku Teegilitsentsiga). Ka Teie võite oma programmi suhtes käesoleva litsentsi tingimusi kehtestada.

Rääkides vabast tarkvarast peame silmas vabadust, mitte hinda. Üldised Avalikud Litsentsid on loodud selleks, et tagada Teile järgnevat: õigust levitada koopiaid vabast tarkvarast (soovi korral ka levitamise eest tasu võttes), tarkvara lähtetekstide kättesaadavust, õigust tarkvara muuta ning kasutada tarkvara osi uute vaba tarkvaratoodete loomisel ning kindlustada, et Te olete teadlik eelpoolnimetatud õigustest.

Teie õiguste tagamiseks on vaja rakendada mõningaid piiranguid, et keegi ei saaks Teilt neid õigusi ära võtta või nõuda Teie loobumist neist õigustest. Tarkvara muutmisel või selle koopiade levitamisel kätkevad need piirangud Teie jaoks teatud kohustusi. Näiteks levitades taolise programmi koopiaid, kas tasuta või levitamise eest tasu võttes, peate Te saajatele andma kõik need õigused, mis on ka Teil endal. Te peate kindlustama, et ka nemad saavad või võivad soovi korral saada lähteteksti. Et programmi saajad teaksid oma õigusi, peate neid teavitama käesoleva Litsentsi tingimustest.

Meie kaitseme Teie õigusi kaheastmeliselt:

1. anname tarkvarale autoriõiguse ja
2. pakume Teile käesolevat litsentsi, mis annab Teile seadusliku õiguse kopeerida, levitada ja/või muuta tarkvara.

Samuti tahame nii iga autori kui ka meie endi kaitseks kindlustada, et igati mõistab, et vabal tarkvaral pole garantiid. Kui keegi tarkvara muudab ja edasi annab, peavad selle saajad teadma, et nende omanduses pole originaal vältimaks teiste poolt põhjustatud probleemide mõju originaali autori mai-nele.

Lõpuks, iga vaba programmi ähvardab pidevalt tarkvara patenteerimine. Me soovime vältida ohtu, kus vaba programmi levitajad omandavad individuaalse patendi litsentsi, muutes selle enda omandiõiguse objektiks. Sellise olukorra vältimiseks oleme selgitanud, et iga taoline patent tuleb litsenseerida kõigile vabaks kasutamiseks või üldse mitte litsenseerida.

Järgnevad kopeerimise, levitamise ja muutmise täpsed terminid ning tingimused.

Kopeerimise, levitamise ja muutmise terminid ja tingimused.

0. Käesolev litsents kehtib iga programmi või muu teose puhul, mis sisaldab autoriõiguse omaniku märgel selle kohta, et antud programmi võib levitada vastavalt käesoleva Üldise Avaliku Litsentsi tingimustele. "Programm" on edaspidi ükskõik milline eelnevale tingimusele vastav programm või teos, "Programmil põhinev teos" tähendab kas Programmi või ükskõik millist autorikaitse all olevat programmil põhinevat teost; lahti seletatuna teost, mis sisaldab Programmi või selle osa, kas sõnasõnaliselt või muudetult ja/või tõlgituna teise keelde. (Siin ja edaspidi on tõlkimine kaasatud piiranguteta termini "muutmine" alla). Iga litsensiaat on edaspidi "Teie".

Litsents ei laiene muudele tegevustele kui kopeerimine, levitamine ja muutmine; need ei ole Litsentsiga kaetud. Programmi töötamise protsessil pole kitsendusi ja Programmi väljund on kaitstud vaid siis, kui selles sisaldub teos, mis põhineb Programmil (sõltumatuna sellest, et see on Programmi tööprotsessi poolt valmistatud). Kas see on tõene, sõltub sellest mida Programm teeb.

1. Teie võite kopeerida ja levitada sõnasõnaliselt koopiaid Programmi lähtetekstist nii, nagu olete selle saanud, igas vormis, eeldusel, et Teie avaldate arusaadavalt ja sobivalt igal koopiaal vastava autoriõiguse märged ja garantii välistamise märged: hoiate puutumatusena kõik märged, mis viitavad käesolevale Litsentsile ja igasugusele garantii puudumisele ning annate kõigile Programmi saajatele käesoleva Litsentsi koopia Programmiga kaasa. Te võite võtta tasu koopia füüsilise kättetoimetamise akti eest ja võite oma valiku kohaselt pakkuda tasu eest omapoolset garantiikaitset.

2. Teie võite muuta Programmi koopiaid või ükskõik millist selle osa, luues nii Programmil põhineva teose ning kopeerida ja levitada selliseid muudatusi või teoseid vastavalt punkti 1 tingimustele, eeldades, et Te täidate kõik järgnevad tingimused:

a) Te peate kaasama muudetud failile silmatorkavad märged, mis teatavad Teie poolt tehtud muudatused failides ja iga muudatuse kuupäeva.

b) Te peate andma kõigile kolmandatele osapooltele selle Litsentsi tingimuste kohaselt Litsentsi tervikuna igasugusele teosele, mida Te levitate või avalikustate, mis tervikuna või osaliselt sisaldab Programmi või põhineb Programmil või selle osal.

c) Kui muudetud Programm loeb normaalse tööprotsessi käigus käskude interaktiivselt, peate Te tagama, et tavaliseks interaktiivseks kasutamiseks käivitamisel kõige tavapärasemal viisil kas trükitakse või kuvatakse märged, mis sisaldab vastatavat märgel autoriõigusest ja märgel garantii puudumise kohta (või märgel Teie poolt pakutava garantii kohta) ning et kasutajad võivad Programmi käesolevate tingimuste kohaselt edasi levitada, teatades kasutajale, kuidas näha koopiaid käesolevast Litsentsist. (Erand: Kui Programmi ise on interaktiivne, kuid tavapärase kasutamise protsessi käigus ei trüki sellist teadaannet, siis ei pea Teie Programmil põhinev teos vastavat teadaannet trükkima).

Need nõuded kehtivad muudetud teosele kui tervikule. Kui selgelt eristatavad osad teosest ei põhine Programmil ja neid võib põhjendatult lugeda iseseisvateks ja eraldiseisvateks teosteks, siis käesoleva Litsentsi ja selle tingimused ei laiene nimetatud osadele, kui Te levitate neid iseseisvate teostena. Kui Te levitate nimetatud osi kui osa tervikust, milleks on Programmil põhinev teos, siis terviku levitamine peab järgima käesoleva Litsentsi tingimusi, mille teistele litsensiaatidele antud õigused laienevad ülejäänud tervikule, seega igale üksikule osale, olenemata sellest, kes autor oli.

Seega pole käesoleva punkti eesmärk nõuda õigusi või vaidlustada Teie õigusi teosele, mille Te oled tervikuna loonud; pigem on eesmärk kasutada õigust suunata Programmil põhinevate teoste või ühisteoste levitamist.

Lisaks, ainuüksi asjaolu, et teise teose, mis ei põhine Programmil, Programmiga (või Programmil põhineva teosega) ühtsesse levitamise- või säilitusvormi liitmine ei muuda nimetatud teost Litsentsi alla kuuluvaks.

3. Teie võite Programmi (või punkt 2 kohaselt Programmil põhinevat teost) kopeerida ja levitada objektikoodina või käivitataval kujul vastavalt punktide 1 ja 2 kohaselt eeldusel, et Te täidate vähemalt

ühe järgnevatest nõuetest:

a) Lisate sellele täieliku vastava masinloetava lähteteksti, mida peab levitama vastavalt punktides 1 ja 2 toodud tingimustele, vormis, mida kasutatakse valdavalt tarkvara vahendustegevuses; või

b) Lisate sellele kirjaliku vormi, kehtivusega vähemalt kolm aastat, millega annad mistahes kolmandatele osapooltele tasu eest, mis ei ületa Teie poolt lähteteksti füüsilisel kujul levitamise hinda, täieliku masinloetava koopiat vastavast lähtetekstist, mida levitatakse vastavalt punktides 1 ja 2 toodud tingimustele, vormis, mida kasutatakse valdavalt tarkvara vahendustegevuses; või

c) Lisate sellele informatsiooni, mille Teie saate ja mis puudutab vastava lähteteksti levitamise pakkumist. (See alternatiiv on lubatud vaid mitteärilisel levitamisel, kui Te oled saanud Programmi koos vastava pakkumisega objektikoodina või käivitatavas vormis vastavalt käesoleva punkti alapunktile b).

Teose lähteteksti all mõeldakse muudatuste tegemiseks eelistatumat teose vormi. Käivitatava teose täielik lähtetekst tähendab kogu lähteteksti tervikuna koos kõigi selles sisalduvate moodulitega, lisades ükskõik millised sellega seotud liidese definitsioonifailid ning skriptid, mida kasutatakse käivitatava teose kompileerimise ja paigaldamise kontrollimiseks. Erandina ei pea levitav lähtetekst sisaldama midagi, mida tavaliselt levitatakse kas lähteteksti või masinkoodi vormis) koos põhiliste operatsioonisüsteemi komponentidega (kompilaator, kernel ja nii edasi), millel käivitatava töö protsess toimub, välja arvatud kui nimetatud komponent ise lisandub käivitatavale.

Kui käivitatava vormi või objektikoodi levitamine toimub ligipääsu pakkumisega määratud kohas, siis ligipääsu pakkumine lähteteksti kopeerimiseks samast kohast loetakse võrdseks lähteteksti levitamise, kuigi kolmandad osapooled pole kohustatud kopeerima lähteteksti koos objektikoodiga.

4. Te ei tohi kopeerida, muuta, edasi litsenseerida või levitada Programmi välja arvatud juhul, kui seda lubab käesolev Litsents. Igasugune muu katse kopeerida, muuta, sublitsenseerida või levitada Programmi on õigustühine ja peatab automaatselt Teile käesoleva Litsentsiga antud õigused. Siiski, osapoolte, kes on saanud Teilt koopiad või õigused käesoleva Litsentsi alusel, litsentsid ei kaota kehtivust nii kaua, kuni taolised osapooled täidavad täielikult kehtestatud tingimusi.

5. Teilt ei nõuta Litsentsi aktsepteerimist, kuna Te pole sellele alla kirjutanud. Kuid miski muu peale käesoleva Litsentsi ei anna Teile õigust muuta või levitada Programmi või Programmil põhinevat teost. Need tegevused on seadusega keelatud, kui Te ei aktsepteeri käesoleva Litsentsi tingimusi. Sellest tulenevalt Programmi (või igasugust Programmil põhinevat teost) muutes või levitades annate Teie märku nõustumisest Litsentsi terminite ja tingimustega Programmi või Programmil põhineva teose kopeerimisel, levitamisel või muutmisel.

6. Iga kord kui Te levitate Programmi (või ükskõik millist Programmil põhinevat teost), saab saaja automaatselt originaallitsensiaarilt litsentsi kopeerida, levitada ja muuta Programmi vastavalt käesoleva Litsentsi terminitele ja tingimustele. Teie ei või kehtestada lisapiiranguid vastuvõtjale antud õiguste kasutamisele. Teie ei vastuta käesoleva Litsentsi täitmise eest kolmandate osapoolte poolt.

7. Kui kohtulahendi või väidetava patendiõiguse rikkumise tagajärjel või mõnel muul põhjusel (mis ei piirdu patendiga seotud küsimustega) on Teile pandud kohustus, mis on vastuolus käesoleva Litsentsi tingimustega, siis ei vabasta need Teid käesoleva Litsentsi tingimuste täitmisest. Kui Te ei suuda levitada, samaaegselt täites käesoleva Litsentsi tingimusi ja teisi kohustusi, siis ei tohi Te Programmi üldse levitada. Näiteks kui patendilitsents ei luba Teil litsentsitasuta Programmi edasi levitada neile, kes on saanud Teilt või Teie kaudu Programmi koopiat, siis ainus võimalus täita nimetatud patendilitsentsi ja käesoleva Litsentsi tingimusi on loobuda Programmi levitamisest.

Kui käesoleva punkti mõni osa osutub mingil asjaolul kehtetuks või mitterakendatavaks, siis käesoleva punkti ülejäänud osa loetakse rakendatavaks ja punkt tervikuna loetakse rakendatavaks ülejäänud tingimustel.

Käesoleva punkti eesmärk ei ole kellegi ajendamine patendi- või muude õiguste rikkumiseks või nende kehtivuse vaidlustamiseks; käesoleva punkti ainus eesmärk on vaba tarkvara levitamise süsteemi terviklikkuse kaitsmine, mida kasutavad avalike litsentside kasutajad. Paljud isikud on andnud suure panuse tarkvara laiale sektorile, mida levitatakse läbi nimetatud süsteemi usaldades järjekindlat süsteemi rakendumist; autor/annetaja on otsustaja, kas ta soovib tarkvara levitada mõne teise süsteemi kaudu ja litsensiaat ei saa seda valikut mõjutada.

Selle punkti eesmärk on täpselt selgitada, mida soovitakse käesoleva Litsentsi ülejäänud osaga saavutada.

8. Kui Programmi levitamist ja/või kasutamist piiratakse mõnedes riikides kas patentide või autoriõigusega, võib autoriõiguse omanik, kes on Programmi litsenseerinud, lisada kindla geograafilise piirangu, jättes nimekirjast välja mainitud riigid, et levitamine oleks lubatud vaid nimekirjas toodud riikides või riikide vahel. Nimetatud juhul Litsents liitub piiranguga, nagu see on ära toodud käesoleva Litsentsi põhiosas.

9. Free Software Foundation võib aegajalt välja anda ümbertöötatud ja/või uusi versioone Üldisest Avalikust Litsentsist. Need uued versioonid on käesoleva Litsentsi versiooniga sarnase sisuga, kuid võivad erineda detailides, osundades uusi probleeme või huviobjekte.

Igale versioonile antakse unikaalne versiooninumber. Kui programmis tuuakse ära selle kohta keh-tiva käesoleva litsentsi versiooninumber ja lisatakse märged "kõik hilisemad versioonid", siis on teil võimalik valida, kas järgida selle või ükskõik millise hilisema Free Software Foundation'i poolt avaldatava versiooni tingimusi. Kui Programm ei täpsusta käesoleva litsentsi versiooninumbrit, on Teil võimalus valida ükskõik milline Free Software Foundation'i poolt avaldatud käesoleva Litsentsi versioon.

10. Kui Te soovite Programmi osi liita teiste vabade programmidega, mille levitamise tingimused on erinevad, siis kirjutage loa saamiseks autorile. Tarkvara puhul, mis on autoriõigusega kaitstud Free Software Foundation'i poolt, kontakteeruge Free Software Foundation'iga, mõnikord me teeme erandeid. Meie otsuse määravad kaks eesmärki: säilitada vaba staatus meie vaba tarkvara igasugustele derivaatidele ja edendada tarkvara jagamist ning taaskasutamist üldiselt.

GARANTII PUUDUMINE

11. KUNA PROGRAMM ON LITSENSEERITUD TASUTA, PUUDUB PROGRAMMIL IGASUGUNE GARANTII ULATUSENI, MIDA LUBAB RAKENDATAV SEADUS. KUI KIRJALIKULT POLE TEISITI SÄTESTATUD, SIIS AUTORIÕIGUSE OMANIKUD JA/VÕI MUUD OSAPOOLED PAKUVAD PROGRAMMI "NII, NAGU TA ON" ILMA IGASUGUSE VÄLJENDATUD VÕI OLETATAVA GARANTIITA, KAASA ARVATUD, KUID MITTE AINULT, KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI JA MINGILE KINDLALE EESMÄRGILE SOBIVUSE GARANTIITA. KOGU PROGRAMMI KVALITEEDI JA TOIMIMISE RISK LANGEB TEILE. KUI PROGRAMM ON PUUDULIK, KANNATE TEIE KÕIK TEENINDUSE, PARANDUSE VÕI TAASTAMISE KULUD.

12. MITTE MINGIL JUHUL, VÄLJA ARVATUD SIIS, KUI SEDA NÕUAB RAKENDATAV SEADUS VÕI KIRJALIKULT ON TEISITI KOKKU LEPITUD, POLE ÜKSKI AUTORIÕIGUSE OMANIK VÕI KOLMAS OSAPPOOL, KES VÕIB MUUTA JA/VÕI LEVITADA PROGRAMMI VASTAVALT ÜLALPOOL TOODUD TINGIMUSTELE, TEIE EES VASTUTAV KAHJUSTUSTE EEST, KAASA ARVATUD IGASUGUSED ÜLDISED, SPETSIIFILISED, JUHUSLIKUD VÕI TAGAJÄRJEL TEKKINUD KAHJUD, MIS TULENEVAD KAS PROGRAMMI KASUTAMISEST VÕI VÕIMATUSEST PROGRAMMI KASUTADA (KAASA ARVATUD, KUID MITTE AINULT, TEIE VÕI KOLMANDATE OSAPPOOLTE ANDMETE KADUMINE VÕI ANDMETE MUUTMINE VÕI PROGRAMMI VÕIMETUS TÖÖTADA KOOS MISTAHES TEISTE PROGRAMMIDEGA), ISEGI SIIS, KUI VALDAJAT VÕI MUUD OSAPPOOLT ON TEAVITATUD SELLISTE KAHJUDE VÕIMALIKKUSEST.

Terminite ja tingimuste lõpp.

Kuidas rakendada oma uutele programmidele neid termineid ja tingimusi?

Kui Te loote uue programmi ja soovite, et sellest oleks võimalikult laiale üldsusele kasu, on parim võimalus selleks muuta oma tarkvara vabaks, mida igäüks saaks edasi levitada ja muuta vastavalt käesolevatele tingimustele.

Et seda teha, lisage oma programmile järgnevad märkused. Kindlaim on lisada need märked iga lähtefaili algusse, et võimalikult efektiivselt teatada garantii puudumisest: igal failil peaks olema vähemalt üks autoriõiguse" rida ja viide kohale, kust võib leida tervikliku märkuse.

Üks rida, mis sisaldab programmi nime ja otstarbe lühikirjeldust.

Copyright (C) YYYY autori nimi

Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda edasi levitada ja/või muuta vastavalt GNU Üldise Avaliku Litsentsi tingimustele, nagu need on Vaba Tarkvara Fondi poolt avaldatud; kas Litsentsi versioon number 2 või (vastavalt Teie valikule) ükskõik milline hilisem versioon.

Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid **ILMA IGASUGUSE GARANTII-TA**; isegi **KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA** või **SOBIVUSELE TEATUD KIND-LAKS EESMÄRGIKS**. Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.

Te peaks olema saanud GNU Üldise Avaliku Litsentsi koopia koos selle programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga, 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA

Samuti lisa informatsioon, kuidas Teiega kontakteeruda kas posti või meili teel.

Kui programm on interaktiivne, siis lisage väljundisse käivitamisel kuvatav märkus:

Gnomovision versioon 69, Copyright (C) aastaarv, autori nimi

Gnomovision on ILMA IGASUGUSE GARANTIITA; detailidega tutvumiseks trüki "show w". See on vaba tarkvara ja sa oled teretunud seda edasi levitama teatud kindlate tingimuste alusel; detailidega tutvumiseks trüki "show c".

Hüpoteetilised käsud "show w" ja "show c" peaksid olema vastavad osad GNU Üldisest Avali-kust Litsentsist. Muidugi võivad Teie poolt kasutatavad käsud olla teise nimetusega kui "show w" või "show c"; need võivad olla isegi hiireklõpsud või menüü osad - ükskõik, mis sobib Teie programmiga.

Kui Te töötate programmeerijana, peaksite Te laskma oma tööandjal või koolil alla kirjutada autoriõiguslike pretensioonide loobumise kohta käivale dokumendile. Siin on näidis, muutke ise nimed:

Yoyodyne, Inc., loobub kõigist autoriõigustest programmile Gnomovision, mille on kirjutanud James Hacker.

See Üldine Avalik Litsents ei anna õigust liita Teie programmi omandiõiguslike programmidega. Kui Teie programm on alamfunktsioonide teek, on Teil kasulikum lubada linkimist teegiga. Kui Te tahate seda teha, siis kasutage GNU Üldist Avalikku Teegilitsentsi käesoleva Litsentsi asemel.

GNU Üldine Avalik Litsents on leheküljelt <http://linux.ee/materjalid/gpl/>

GNU Üldine Avalik Litsentsi kohta saab lugeda

- <http://www.dsl.org/>
- <http://www.gnu.ai.mit.edu/philosophy/philosophy.html>
- <http://www.gnu.org/philosophy/license-list.html#SoftwareLicenses>
- <http://www.dsl.org/copyleft/non-software-copyleft.shtml#what>
- <http://www.dsl.org/copyleft/non-software-copyleft.shtml>

- <http://www.dsl.org/copyleft/>
- <http://opencontent.org/opl.shtml>
- <http://kuutorvaja.eenet.ee/tutvustus/gnulinix.html>

Kirjandus

- [Bor79a] F. W. Bornscheuer. Berechnungsverfahren nach Theorie II. Ordnung. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1979. 151
- [Bor79b] F. W. Bornscheuer. Übertragungsverfahren. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1979.
- [Bor79c] F. W. Bornscheuer. Schnittkräfte Statisch Bestimmter Tragwerke. Teil B. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1979.
- [DK62] А. В. Дарков и В. И. Кузнецов. *Строительная механика*. Москва: Высшая Школа, 1962. 38
- [EP67] R. Eek, L. Poverus. *Ehitusmehaanika II*. Tallinn: Valgus, 1967.
- [ER83] R. Eek, R. Räämet. Ehitusmehaanika näidis ülesanded I. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1983, 99 lk. 66
- [ERL85] R. Eek, R. Räämet, A. Lahe. Ehitusmehaanika näidis ülesanded II. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1985, 100 lk. 129
- [ER77] R. Eek, R. Räämet. Ehitusmehaanika näidis ülesanded III. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1977, 51 lk.
- [Har85] F. Hartmann. *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics*. Berlin Heidelberg New York Tokyo, Springer-Verlag, 1985. 20, 98
- [Har87] F. Hartmann. *Methode der Randelemente*. Berlin Heidelberg New York Tokyo, Springer-Verlag, 1987. 116
- [Jür85] A. Jürgenson. *Tugevusõpetus*. Tallinn: Valgus, 1985. 18, 19, 21
- [Krä91a] W. B. Krätzig. Statik der Tragwerke, 4.Finite Berechnungsmethoden (4.a Grundlagen; Stabtragwerke). Bochum, Ruhr - Universität Bochum, Fakultät für Bauingenieurwesen, 1991. 25
- [KW90] W. B. Krätzig and U. Wittek. *Tragwerke 1. Theorie und Berechnungsmethoden statisch bestimmter Stabtragwerke*. Berlin Heidelberg New York, Springer - Verlag, 1990. 20, 21, 26, 48, 49, 79, 96, 101

- [Krä91b] W. B. Krätzig. *Tragwerke 2. Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Stabtragwerke*. Berlin Heidelberg NewYork, Springer - Verlag, 1991.
- [Lah97a] A. Lahe. *The transfer matrix and the boundary element method*, Proc. Estonian Acad. Sci. Engng., 1997, 3, 1. p. 3–12. 116
- [Lah97b] A. Lahe. *The EST method for the frame analysis*. Proc. Tenth Nordic Seminar on Computational Mechanics, October 24-25, 1997, Tallinn, Tallinn Technical University, 1997, p. 202–205. 116
- [Lah98a] A. Lahe. *The EST method for the frame analysis in second order theory.*, Proc. of the NSCM-11: Nordic Seminar on Computational Mechanics, October 16-17, 1997, Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, Stockholm, TRITA-BKN. Bulletin 39, Stockholm, 1998, p.167–170. 116
- [Lah98b] A. Lahe. *Computer Aided Learning of Structural Mechanics with EHMEH.*, Proc. 4th International Conference on Computer Aided Learning and Instruction in Science and Engineering, (CALISE'98), June 15-17, 1998, Chalmers University of Technology Göteborg, Göteborg, 1998, p.72–79. 116
- [Lah98c] A. Lahe. *CAL program for Truss*. Proc. 4th International Conference on Computer Aided Learning and Instruction in Science and Engineering, (CALISE'98), June 15-17, 1998, Chalmers University of Technology Göteborg, Göteborg, 1998, p. 483–484.
- [MR95] J. Metsaveer, U. Raukas. *Varda deformatsioonid ja siirded*. Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, Mehaanikainstituut, 1995. 21, 22, 26
- [MR96] J. Metsaveer, U. Raukas. *Varda sisejõud ja pinged*. Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, Mehaanikainstituut, 1996. 18, 19, 20, 21, 22, 95
- [PW94] W. D. Pilkey, W. Wunderlich. *Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods*. CRC Press, Boca Raton Ann Arbor London Tokyo, 1994.
- [Rää75] R. Räämet. *Ehitusmehaanika*. Tallinn: Valgus, 1975. 3, 18, 19, 51, 100, 106, 116, 129, 171, 174, 180, 182, 184
- [RT83] R. Räämet, Ü. Tärno. *Ehitusmehaanika. Programm ja kontrolltööde ülesanded*. Tallinn: TPI Ehitusmehaanika kateeder, 1983, 72 lk.
- [ERL88] P. Ряэмет, P. Еек, А. Лахе. *Строительная механика. Программа и задачи*. Таллинн: ТПИ Кафедра строительной механики, 1988, 70 стр.
- [Ter86] Terasprofiilide tabelid. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1986, 12 lk.

Aineregister

- aktiivtöö, 96
- aproksimeerimine, 24
- arvuti lõpmatus, 139, 140
- arvuti null, 139, 140
- arvutiprogramm
 - afbikt1.m, 258
 - defNAB.m, 263
 - eesagraf.m, 297
 - eesarvud.m, 292
 - fooksuhe.m, 260
 - joumNA.m, 255
 - KaarA1.m, 213
 - KaarB1.m, 215
 - kaarPrbSj.m, 225
 - kaarPrbSj1.m, 287
 - kaarPrbSjPr.m, 219
 - kaarPrbSTMSj.m, 290
 - kaarPrbSTMSjPr.m, 280
 - kaarRngSj.m, 222
 - kaarRngSjPr.m, 216
 - kaarSjPr1.m, 275
 - kaarSjPr1.out, 175
 - kinnmom1.m, 265
 - kinnmom2.m, 267
 - kinnmom3.m, 268
 - kinnmom4.m, 270
 - kinnmom5.m, 271
 - kinnmom6.m, 273
 - lihttalaPrbKSj.m, 212
 - lihttalaPrbKSjPr.m, 207
 - lihttalaSj.m, 209
 - lihttalaSjPr.m, 206
 - octave, 205
 - siireNA.m, 251
 - srstkN1.m, 228
 - srstkN2.m, 238
 - toemom1.m, 261
- arvutusskeem, 45, 48
- arvutustabel, 49
- baasjäikus, 163
- Betti teoreem, 98, 99
- dünaamiline koormus, 22
- deformatsioonienergia, 97, 98
- deformatsioonimeetod, 116
- Deformatsioonimeetodiga arvutamise näide 2, 163
- deltafunktsioon, 24
- diferentsiaalgeomeetria, 27
- eelpinged, 117
- elastsuskeskme ordinaat, 180
- energiateoreem, 96, 98
 - pikkel, 96
- esimest järku teooria, 28
- EST meetod, 116
- fenomenoloogiline mudel, 25
- fiktiivsed koormused, 129
- fiktiivsed toereaktsioonid, 134
- fookus, 134
- fookussuhted, 136
- funktsionaal, 98
- geomeetrilise määramatuse aste, 147
- geomeetrilised pidevustingimused, 116
- geomeetriliselt määratud põhiskeem, 151
- geomeetriliselt mittelineaarne teooria, 26
- geomeetriliselt muutuv skeem, 121
- Green'i funktsioon, 33
- grupptundmatu, 178

- hetkmuutuv skeem, 121
 hetkpoolus, 147
 Hooke seadus, 26
 I järku teooria, 28
 I märgikokkulepe, 95, 100
 II järku teooria, 29
 II märgikokkulepe, 95, 100
 III järku teooria, 29
 iseärane ristlõige, 24
 jäik tugi, 47
 jätkuvtala arvutus fookussuhetega, 138
 jätkuvtala fookussuhted, 134
 jätkuvtala staatilise määramatuse aste, 51, 127
 jõumeetod, 116
 jõumeetodi kanooniline võrrandisüsteem, 122
 jõupaar, 152, 155
 joone kõverus, 27, 181
 joone kõverusraadius, 27, 181
 joonkoormus, 22
 joonpaisumistegur, 106, 111
 kaar, 57
 elastsuskese, 178, 180
 elastsuskeskme ordinaat, 180
 kõrgus, 58
 kannaliigend, 57
 lukuliigend, 57
 sille, 58
 tõus, 58
 telgjoon, 58
 kaare elastsuskese, 180, 182
 kaare elastsuskeskme ordinaat, 184
 kaarskeem, 45
 kinemaatilised lisatundmatud, 116
 kinemaatilised rajatingimused, 116
 kinemaatilised tundmatud, 116
 kinnitusemomendid, 150
 kolme momendi võrrand, 129
 komandat järku teooria, 29
 kontaktjõud, 70
 kontaktjõud, 21, 26, 47
 kontaktpind, 21, 47
 koondkoormus, 23
 koormus
 joon, 22
 pind, 22
 ruum, 22
 koormusliikmed, 151
 kujufunktsioon, 183
 löök, 23
 lõige, 22
 lõikemeetod, 18, 70
 Lagrange interpolatsioonipolünoomi kordaja, 183
 lauskoormus, 22
 lausmoment, 23
 lihe, 21
 lihtliigend, 120
 lihtliigendid, 51
 liigendid
 jäik ühendus, 48
 normaaljõu liigend, 48
 põikjõu liigend, 48
 paindemomendi liigend, 48
 vabad otsad, 48
 liigside, 116
 liikuv liigendtugi, 47
 liikuv pöördumatu tugi, 47
 lisaosa, 51
 lisatundmatud, 116, 121
 lisatundmatute arv, 120
 märgikokkulepe, 95
 esimene märgikokkulepe, 70
 I märgikokkulepe, 95
 II märgikokkulepe, 95
 teine märgikokkulepe, 70
 mõõduta koordinaat, 183
 mõjufunktsioon, 33
 mõjujoon, 33
 maatriks, 197
 ühikmaatriks, 203
 element-element korrutis, 104, 124, 201

- korutus, 200
- lahutamine, 198
- liitmine, 198
- ortogonaalne maatriks, 191
- osamaatriks, 202
- pöördmaatriks, 203
- singulaarne maatriks, 203
- transponeeritud, 202
- Maxwelli-Cremona diagramm, 77
- momentpunkti võte, 70
- udel, 25
- Näide
 - Deformatsioonimeetod, 151
 - Deformatsioonimeetodiga arvutamise näited, 151
 - Jätkuvtala, 129
 - Jätkuvtala arvutamine fookussuhetega, 138
 - Jätkuvtala arvutamine kolme momenti võrrandiga, 129
 - jätkuvtala fookussuhetega, 138
 - Jõu meetod, 122
 - kaheliigendiga kaar, 174
 - liigendita kaar, 182
 - Raami arvutamine, 122
- Näide2
 - Deformatsioonimeetod, 163
- normaaljõud, 161
- olekuparameeter, 25
- olekuvõrrand, 26
- Päevik
 - defNAB.out, 166
 - srstkN2.out, 80
- pööratud tasakaalumaatriks, 80
- põhideformatsioonid, 21
- põhiosa, 51
- põhiskeem, 121
- põikjõu märgi määramine, 29, 160
- põikjõud, 161
- paigalseisev liigendtugi, 47
- paindenurk, 21
- paine, 22
- paine temperatuurist, 111
- paraboolse jaotusega koormus, 183
- parema käe kolmikud, 190
- parema käe teljestik, 100
- parempoolne fookussuhe, 135
- parempoolsed fookused, 134
- peapoolus, 147
- pike, 22
- pikkuse muut, 21
- pindkoormus, 22
- pinnanormaal, 47
- poolusplaan, 147
- potentsiaalne energia, 97
- prinkus, 22
 - lõikeprinkus, 22
 - paindeprinkus, 22
 - pikkeprinkus, 22
- projektsioonide võte, 70
- raam
 - põhiskeem, 121, 122
 - varrasahel, 163
- raami vabadusaste, 147
- raamskeem, 45
- rajaelementide meetod, 116
- rajajõud, 20, 21, 26, 46, 192
- rajajõudude töö, 20, 96, 192
- rajasiirded, 46
- rajasiire, 21, 26
- rajatingimus, 26, 46
- reaktsioonide vastastikkuse teoreem, 100
- reaktsioonimoment, 152
- ristlõike jäikus, 22
 - lõikejäikus, 22
 - paindejäikus, 22
 - pikkejäikus, 22
 - väändjäikus, 22
- Ritteri lõikemeetod, 76
- ruumkoormus, 22
- sümbol \forall , 98
- sõlme reaktsioonimomendid, 154

- sõlmede eraldamise võte, 70
sõlmpunkt, 47
sõrestik
 ülemine vöö, 69
 alumine vöö, 69
 diagonaalid, 69
 koormusvektor, 74
 liigitus, 69
 mõjujooned, 89
 Maxwelli-Cremona diagramm, 77
 momendipunkti võte, 76
 paneeli pikkus, 69
 postid, 69
 projektsioonide võte, 77
 Ritteri lõikemeetod, 76
 Ritteri punkt, 76
 sõlmede eraldamise võte, 70
 sõrestikuvõrk, 69
 sisejõudude diagramm, 77
 talasõrestiku mõjujooned, 79
sõrestike liigitus, 69
sõrestikkonstruksioon, 45
sõrestikskeem, 69
segameetod, 116
siirdemeetod, 116
siirete pidevusvõrrand, 26
siirete vastastikkuse teoreem, 99
Simpsoni 3/8 valem, 104
singulaarne ristlõige, 24
sisejõud, 22, 26, 47, 70
 märgireegel, 95
 põikjõud, 22
 paindemoment, 22
 pikkejõud, 22
 väändmoment, 22
sisejõudude potentsiaalne energia, 98
sisejõudude töö, 20, 96, 192
sisepind, 47
sisesiire, 21, 26
 lihe, 21
 paindenurk, 21
 pikkuse muut, 21
 väändenurk, 21
staatikalise määramatuse aste, 120
staatikalised rajatingimused, 116
staatikalised tundmatud, 116
staatiline koormus, 22
staatilise määramatuse aste, 120
suunakoosinus, 71, 190
töö
 aktiivtöö, 97, 98
 passiivtöö, 97, 98
 täiendtöö, 97, 98
tööde vastastikkuse teoreem, 98, 99
 paindel, 195
 pikkel, 193
 sisejõudude töö paindel, 195
 sisejõudude töö pikkel, 193
tööseisund, 22
 lõige, 22
 paine, 22
 pike, 22
 vääne, 22
tõmbiga kaheliigendiga kaar, 174
tala põikjõu mõjujooned, 38
tala paindemomendi mõjujooned, 38
tala toereaktsioonide mõjujooned, 35
talaskeem, 45
tasakaalumatriks, 79
tasakaaluvõrrand, 26
teist järku teooria, 29
teljestik
 kohalik teljestik, 70
temperatuuri-joonpaisumistegur, 122
tervikmeetod, 116
tingimata vajalik side, 117
toed, 46
 jäik tugi, 46
 liikuv liigendtugi, 46
 liikuv pöördumatu tugi, 46
 paigalseisev liigendtugi, 46
 vaba ots, 46
toemomendid, 138
toereaktsioonid, 46
topoloogia, 80

- väändenurk, 21
- vääne, 22
- välis- ja sisejõudude võimalik töö
 - paindel, 195
 - pikkel, 192
- välisjõud, 26
- välisjõudude töö, 96, 98
- välispind, 21
- välissiire, 26
- võrrandisüsteemid
 - hõredad mittesümmeetrilised, 116
- vaba ots, 47
- vabadusastmete arv, 47
- vantskeem, 45
- varda pööre, 148
- varda reaktsioonimomendid, 153, 156
- varda reaktsioonimoment, 154
- variatsioon, 98
- varrasahel, 147, 151
- varrassüsteem, 45
 - liigitus, 45
- vasakpoolne fookussuhe, 134
- vasakpoolsed fookused, 134
- vedru esimene samasus, 98
- vedru teine samasus, 98
- vektor
 - diaadkorrutis, 199
 - element-element korrutis, 104, 111, 124, 201
 - otsekorrutis, 199
 - reavektor, 198, 199
 - skalaarkorrutis, 104, 125, 190, 199
 - veeruvektor, 198
- Vereštšagini võte, 105, 129
- virtuaalsed siirded, 151
- virtuaalsiirete printsiip, 96, 193
 - paindel, 195
 - pikkel, 192
- ühikvektorite kolmikud, 190
- üldistatud ühikjõud, 100