Я. Блюмбергъ.

Дополнительныя статьи
АЛГЕБРЫ и ГЕОМЕТРІИ.

Курсъ VII (дополнительнаго) класса реальныхъ училищъ.

10-ое изданіе.

9-ое изданіе разработано примѣнительно къ послѣдней, утвержденной въ 1906 году, программѣ.

Цѣна 1 руб. 20 коп.

Юрьевъ.
Типографія К. Маттисена.
1913.

(См. 4-ую стран. обложки).

Я. Блюмбергъ.

Дополнительныя статьи

АЛГЕБРЫ и ГЕОМЕТРІИ.

Курсъ VII (дополнительнаго) класса реальныхъ училищъ.

10-ое изданіе.

9-ое изданіе разработано примѣнительно къ послѣдней, утвержденной въ 1906 году, программѣ.

Цѣна 1 руб. 20 коп.

ЮРЬЕВЪ.
Типографія К. Маттисена.
1913.

Предисловіе къ 9-му изданію.

Предлагаемое здѣсь 9-ое изданіе Дополнительныхъ Статей представляетъ переработку предыдущаго изданія примѣнительно къ утвержденной 30 іюня 1906 г. программѣ; прежній объемъ учебнаго матеріала сохраненъ и въ настоящемъ изданіи, но, согласно съ приведенною программою, мы ввели въ него еще слѣдующія статьи:

1) Приложеніе теоріи предѣловъ къ опредѣленію длины окружности круга и поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ; 2) изслѣдованіе одного уравненія 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ и двухъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными; 3) рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія 1-ой степени съ двумя неизвѣстными.

Въ началѣ V отдѣла приведенной программы подъ заглавіемъ „Основанія анализа безконечно-малыхъ" есть указанія на нѣкоторыя статьи, которыя уже входили въ составъ предыдущаго изданія Дополнительныхъ Статей; онѣ имѣются и въ настоящемъ изданіи съ нѣкоторыми необходимыми дополненіями, такъ что предлагаемый нами учебникъ, по нашему разумѣнію, вполнѣ отвѣчаетъ программѣ, поскольку она относится къ курсу чистой алгебры въ дополнительномъ классѣ реальныхъ училищъ.

Составитель.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

Опечатки:

Страница:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
75	9 снизу	$\left(+x+\frac{1}{x}\right)$	$+\left(x+\frac{1}{x}\right)$

I. Понятіе о функціяхъ.

§ I. О постоянныхъ и перемѣнныхъ величинахъ, безконечно-малыхъ и безконечно-большихъ. Величины раздѣляются на постоянныя и перемѣнныя. Постоянными называются такія величины, которыя или неспособны измѣняться, или по условіямъ рѣшаемаго математическаго вопроса не должны измѣняться, т. е. должны сохранять одно и то же, постоянное, значеніе. Такъ, прямой уголъ есть постоянная величина, вслѣдствіе чего онъ и служитъ мѣрою угловъ; отношеніе всякой окружности къ своему діаметру, т. е. $\pi = 3{,}141592...$, тоже величина постоянная.

Радіусъ же и діаметръ круга — величины постоянныя только въ данной окружности и измѣняются съ измѣненіемъ самой окружности.

Перемѣнною называется такая величина, которая, не нарушая характера рѣшаемаго математическаго вопроса, способна принимать или всевозможныя значенія, или, по крайней мѣрѣ, разныя значенія между двумя болѣе или менѣе тѣсными границами, за которыми она уже не можетъ измѣняться.

Примѣромъ перемѣнной величины, способной принимать всевозможныя значенія, можетъ служить разстояніе, проходимое равномѣрно движущеюся точкою.

Хорда круга измѣняется съ измѣненіемъ растоянія ея отъ центра: уменьшаясь, она можетъ сдѣлаться какъ угодно малою, стремясь къ нулю, увеличиваясь же, она неограниченно приближается къ длинѣ діаметра; слѣдовательно, хорда — перемѣнная величина, измѣняющаяся между двумя предѣльными значеніями, изъ коихъ низшее есть нуль, высшее — діаметръ.

Выраженіе $2d(n-2)$, опредѣляющее собою сумму внутреннихъ угловъ многоугольника по числу n его сторонъ, измѣняется съ измѣненіемъ n, которое можетъ принимать всевозможныя, но цѣлыя и положительныя значенія, начиная съ $n = 3$; слѣдовательно, пока n остается неопредѣленнымъ, выраженіе $2d(n-2)$ надо считать перемѣнною величиною, способною принимать различныя значенія, изъ коихъ каждое есть четное число прямыхъ угловъ.

Периметръ вписаннаго въ кругъ правильнаго многоугольника есть величина перемѣнная, уменьшающаяся съ уменьшеніемъ числа сторонъ многоугольника, а увеличивающаяся съ увеличеніемъ ихъ числа; притомъ измѣненіе это происходитъ между низшимъ значеніемъ $3r\sqrt{3}$ и $2\pi r$, гдѣ r — радіусъ даннаго круга.

Перемѣнная величина называется безконечно-малою, если, численно уменьшаясь, становится и продолжаетъ быть меньше всякой произвольно малой положительной величины. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что безконечно-малая величина неограниченно приближается къ нулю. Такъ, съ увеличеніемъ числа сторонъ правильнаго вписаннаго въ кругъ многоугольника, сторона его безконечно-малая величина, ибо постоянно уменьшается и можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно малой величины.

Перемѣнная величина называется безконечно-большою, если, численно увеличиваясь, становится и продолжаетъ быть больше всякой произвольно большой положительной величины. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что безконечно-большая величина не имѣетъ предѣла; однако и о ней принято говорить, что предѣлъ ея есть безконечность и употреблять для послѣдней знакъ ∞, разумѣя подъ этимъ безпредѣльное возрастаніе величины. Такъ, напримѣръ, дробь $\frac{1}{x}$ увеличивается съ уменьшеніемъ ея знаменателя x, и когда x станетъ весьма малою величиною, то дробь станетъ весьма большою; затѣмъ, когда знаменатель x, продолжая неограниченно уменьшаться, стремится къ нулю, то дробь $\frac{1}{x}$ одновременно будетъ неограниченно увеличиваться, стремясь къ безконечности, что условились обозначать такъ: пред. $\left(\frac{1}{x}\right)_{x=0} = \infty$ и читать: предѣлъ дроби $\frac{1}{x}$, когда x стремится къ нулю, равенъ ∞.

Перемѣнная величина называется конечною, если ея абсолютное значеніе не способно сдѣлатся больше нѣкоторой постоянной величины. Напримѣръ, периметръ вписаннаго въ данный кругъ многоугольника при неограниченномъ удвоеніи числа его сторонъ — величина конечная.

Безконечно-малыя и безконечно-большія величины могутъ быть, какъ и конечныя, положительными и отрицательными.

§ 2. О функціяхъ и ихъ подраздѣленіяхъ. Математическое выраженіе, содержащее нѣкоторыя перемѣнныя величины $x, y, z \ldots$, есть вообще также перемѣнная величина, значеніе которой зависитъ отъ значеній перемѣнныхъ $x, y, z \ldots$; слѣдовательно, если этотъ результатъ обозначимъ какою-либо буквою, напримѣръ, u, то опредѣленнымъ, хотя бы и произвольнымъ, независимымъ другъ отъ друга значеніямъ перемѣнныхъ x, y, z . . . отвѣчаютъ уже не произвольныя, а опредѣленныя значенія перемѣнной u; поэтому перемѣнныя x, y, z . . . называются перемѣнными независимыми или аргументами, перемѣнная же u — зависимою или функціею первыхъ.

Такъ, напримѣръ, площадь круга, которую обозначимъ чрезъ u, опредѣляется по формулѣ $u = \pi r^2$, показывающей, что площадь u зависитъ отъ значенія радіуса r; слѣдовательно u есть функція одной перемѣнной независимой r.

Точно такъ же, величина u пути, пройденнаго свободно падающимъ тѣломъ въ t единицъ времени, опредѣляется по формулѣ $u = \frac{1}{2} gt^2$, гдѣ g — ускореніе; формула эта показываетъ, что проходимый путь u зависитъ отъ значенія t, т. е. что u есть функція времени t.

Объемъ u сферическаго сегмента, радіусъ основанія котораго есть r, а высота h, опредѣляется по формулѣ $u = \frac{1}{2} \pi h \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right)$, показывающей, что объемъ u есть функція двухъ перемѣнныхъ независимыхъ r и h.

При изслѣдованіи общихъ математическихъ вопросовъ приходится, конечно, разсматривать и функціи въ ихъ общемъ видѣ; общій же видъ функціи одной независимой перемѣнной x принято обозначать такъ: $u = f(x)$, гдѣ знакъ f, называемый характеристикою функціи, означаетъ, что надъ независимою перемѣнною x надо совершить нѣкоторый рядъ дѣйствій, чтобы получить ея функцію или зависимую перемѣнную u.

Вообще функція u нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z . . . обозначается: $u = f(x, y, z \ldots)$.

Для отличія одной функціи отъ другой употребляются различныя характеристики: f, F, φ и прочее.

Функціи раздѣляются на явныя и неявныя; функція называется явной, если она непосредственно, явно, выражена чрезъ ея аргументы, неявною же, если уравненіе, связывающее функцію съ ея аргументами, еще не рѣшено относительно той изъ перемѣнныхъ, которая принимается за функцію остальныхъ. Такъ, напримѣръ, въ уравненіи $y = ax^2 + bx + c$, y есть явная функція аргумента x, въ уравненіи же $ax^2 + by^2 = c$ перемѣнная y, принимаемая за функцію аргумента x, неявная функція; рѣшивъ же это уравненіе относительно y, получимъ уже явную функцію $y = \pm \sqrt{\frac{c - ax^2}{b}}$.

Функціи раздѣляются еще на алгебраическія и трансцендентныя: функція называется алгебраическою, если входящія въ ея составъ перемѣнныя независимыя связаны между собою и съ нѣкоторыми постоянными количествами конечнымъ числомъ основныхъ алгебраическихъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень при вещественномъ и постоянномъ показателѣ и извлеченія корней, также при вещественномъ и постоянномъ показателѣ; функція же называется трансцендентною, если она не можетъ быть выражена конечнымъ числомъ указанныхъ основныхъ алгебраическихъ дѣйствій надъ независимыми перемѣнными; таковы функціи, содержащія степени или корни съ перемѣнными показателями, логариѳмы и тригонометрическія величины, т. е. количества вида a^x, $\sqrt[x]{a}$, $\lg x$, $\operatorname{tg} x$ и другія; такія функціи, какъ показываетъ высшій анализъ, могутъ быть выражены лишь безконечнымъ рядомъ вышеуказанныхъ алгебраическихъ дѣйствій.

Сообразно съ приведенными опредѣленіями и уравненіе называется алгебраическимъ или трансцендентнымъ, смотря потому, содержитъ ли оно лишь алгебраическія функціи неизвѣстныхъ, или же трансцендентныя.

Функція называется раціональною, когда перемѣнныя не входятъ въ нее подъ знакомъ корня или, что то же, съ дробнымъ показателемъ; въ противномъ случаѣ она называется ирраціональною.

Такъ, $y = ax^2 - bx + c$ и $z = x - \frac{3y^2}{x}$ суть раціональныя функціи, функціи же $y = \sqrt{a-x} + 2x^2$ и $y = x^3 + bx^{\frac{3}{4}}$ — ирраціональныя.

Функція называется цѣлою, если ни одна изъ независимыхъ перемѣнныхъ не входитъ въ знаменателя или, что то же, съ отрицательнымъ показателемъ, напримѣръ: $y = x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{x^2-3}{a}$; въ противномъ случаѣ она называется дробною, напримѣръ: $z = \frac{3x^2 - y^2}{xy - 1}$.

Перемѣнная величина называется непрерывной въ промежуткѣ между a и b, если она принимаетъ всѣ значенія между a и b, какъ раціональныя, такъ и ирраціональныя. Изъ этого слѣдуетъ, что разность между каждыми двумя смежными значеніями непрерывной величины — произвольно мала. Если же перемѣнная, принимая нѣкоторый рядъ значеній, не можетъ принимать какія-либо промежуточныя значенія, то говорятъ, что она измѣняется прерывно. Такъ, напримѣръ, длина стороны вписаннаго въ кругъ многоугольника можетъ принимать всякія значенія между нулемъ и длиною діаметра и потому она непрерывная перемѣнная, тогда какъ число сторонъ многоугольника можетъ измѣняться только прерывно, ибо оно можетъ принимать лишь цѣлыя и положительныя значенія, начиная съ значенія 3.

Если при непрерывномъ измѣненіи аргумента x между какими-нибудь двумя его значеніями: $x = a$ и $x = b$ функція его $f(x)$ остается вещественной и конечной и каждый разъ получаетъ безконечно-малое приращеніе, положительное или отрицательное, то функція эта называется непрерывною въ указанномъ промежуткѣ; если же при непрерывномъ измѣненіи аргумента x до нѣкотораго значенія $x = a$, функція его измѣняется непрерывно, но при дальнѣйшемъ измѣненіи аргумента въ ту же сторону, хотя бы на безконечно-малую величину, переходитъ вдругъ, такъ-сказать скачкомъ, отъ одного значенія къ другому, разнящемуся отъ перваго на безконечно-большую или даже на конечную величину, то она называется прерывною при $x = a$.

Такъ, въ формулѣ $u = \pi r^2$ для площади круга, u есть непрерывная функція перемѣнной r. Дѣйствительно, дадимъ перемѣнной r безконечно-малое приращеніе α, тогда и u получитъ нѣкоторое приращеніе k и мы получимъ:

$$u + k = \pi(r + \alpha)^2 = \pi r^2 + 2\pi r\alpha + \pi\alpha^2,$$

откуда $k = 2\pi r\alpha + \pi\alpha^2$; но ниже (§ 5) увидимъ, что $2\pi r\alpha + \pi\alpha^2$ при безконечно-маломъ α есть также безконечно-малая величина, значитъ и приращеніе k, полученное функціею u, безконечно-малая величина, а потому функція u — непрерывная.

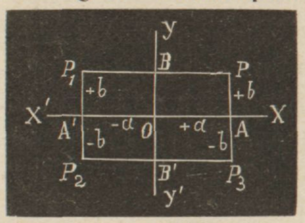
Напротивъ, дробь $y = \frac{1}{1-x}$, измѣняющаяся вообще непрерывно при непрерывномъ измѣненіи аргумента x, становится разрывною при $x = 1$. Дѣйствительно, если x станемъ непрерывно измѣнять отъ $x = 0$ до $x = 1$, то y непрерывно будетъ увеличиваться отъ 1 до $+\infty$; при дальнѣйшемъ же увеличеніи перемѣнной x, хотя бы на безконечно-малую величину, функція ея y переходитъ скачкомъ отъ значенія $+\infty$ къ значенію безконечно-большому отрицательному, потому что при $x = 1 - \alpha$, гдѣ α безконечно-малая положительная величина, имѣемъ: $y = \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha}$, а при $x = 1 + \alpha$ получимъ: $y = \frac{1}{1-(1+\alpha)} = \frac{1}{-\alpha}$.

Отсюда видно, что данная функція y, переходя скачкомъ отъ значенія $+\infty$ къ значенію $-\infty$, есть разрывная функція при переходѣ перемѣнной x отъ значенія меньшаго 1, сколь угодно близкаго къ 1, къ значенію бо̀льшему 1, также сколь угодно близкому къ 1, или, какъ говорятъ, при переходѣ x чрезъ 1.

Точно также функція $y = \text{arc cotg}\, x$ становится разрывною при $x = 0$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, вспомнимъ, что наше уравненіе означаетъ, что y есть дуга, cotg которой равенъ x, и что одному и тому же cotg соотвѣтствуетъ безчисленное множество дугъ. Примемъ же здѣсь во вниманіе лишь абсолютно наименьшую изъ этихъ дугъ, положительную или отрицательную, соотвѣтствующую данному значенію x; тогда при $x = \alpha$, гдѣ α безконечно-малая положительная величина, соотвѣтствующая дуга y безконечно близка къ $+\frac{\pi}{2}$, а при $x = -\alpha$ дуга y безконечно близкакъ $-\frac{\pi}{2}$; слѣдовательно, при переходѣ x чрезъ нуль дуга y переходитъ скачкомъ отъ $+\frac{\pi}{2}$ къ $-\frac{\pi}{2}$, поэтому функція y прерывная при $x = 0$.

Функція $f(x)$ называется прерывною еще тогда, когда при нѣкоторыхъ двухъ вещественныхъ значеніяхъ аргумента x, напримѣръ, при $x = a$ и $x = b$ принимаетъ вещественныя же значенія, но при всякомъ значеніи x, заключающемся между a и b, принимаетъ все мнимыя значенія. Такъ, напримѣръ, функція $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, которая можетъ быть представлена подъ видомъ $y = \sqrt{(x-1)\,(x-3)}$, имѣетъ вещественныя значенія при всякомъ x, меньшемъ 1, и при всякомъ x, бо̀льшемъ 3, а при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между 1 и 3, подкоренной трехчленъ отрицательная величина, слѣдовательно функція y мнимая на промежуткѣ между $x = 1$ и $x = 3$.

§ 3. Геометрическое представленіе функцій. Для нагляднаго обзора хода измѣненій функціи удобно представить этотъ ходъ графически, т. е. помощью чертежа, на основаніи слѣдующаго построенія.



Черт. 1.

Положеніе точки P (черт. 1) на плоскости опредѣляется между прочимъ ея разстояніями $PB = a$ и $PA = b$ отъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ XX' и YY', называемыхъ осями координатъ, причемъ XX' называется осью абсциссъ или осью x-овъ, YY' — осью ординатъ или осью y-овъ, точка ихъ пересѣченія O — началомъ координатъ, разстояніе OA — абсциссою, разстояніе PA — ординатою точки P; оба эти разстоянія выражаются отвлеченными числами и называются вмѣстѣ координатами точки P. Вмѣсто AB за абсциссу этой точки можно, конечно, считать равный ей отрѣзокъ PB. Абсцисса обозначается вообще чрезъ x, ордината чрезъ y, такъ что координаты точки P суть: $x = OA = a$, $y = PA = b$.

Предполагая, что PP_1 и P_2P_3 параллельны оси x-овъ, PP_3 и P_1P_2 параллельны оси y-овъ, мы, кромѣ точки P, будемъ имѣть еще три: P_1, P_2 и P_3, имѣющія тѣ же координаты, какъ и P. Во избѣжаніе неопредѣленности, какая именно изъ этихъ 4 точекъ въ каждомъ частномъ случаѣ имѣется въ виду, направленіе оси x-овъ вправо отъ начала O и всякій отрѣзокъ, отложенный на ней въ эту сторону, условились считать положительными, а противоположное направленіе отъ того же начала O — отрицательнымъ. Точно такъ же направленіе оси y-овъ и всякой прямой, ей параллельной, вверхъ отъ оси x-овъ считается положительнымъ, а внизъ отъ этой оси — отрицательнымъ.

Такимъ образомъ

координаты точки P суть $x = +a$, $y = +b$,
„ „ P_1 „ $x = -a$, $y = +b$,
„ „ P_2 „ $x = -a$, $y = -b$,
„ „ P_3 „ $x = +a$, $y = -b$.

Обратно, зная координаты точки, заданныя по величинѣ и направленію (т. е. по знакамъ), можно построить самую точку. Такъ, если координаты суть $x = a$, $y = -b$, то, принявъ нѣкоторый отрѣзокъ за единицу, откладываемъ на оси x-овъ вправо отъ начала O (черт. 1) отрѣзокъ $OA = a$ единицамъ, въ конечной его точкѣ A возставляемъ перпендикуляръ, на которомъ откладываемъ внизъ отъ оси x-овъ отрѣзокъ AP_3, равный b единицамъ; тогда точка P_3 — искомая.

Послѣ этихъ предварительныхъ понятій нетрудно представить геометрически ходъ измѣненій какой-либо функціи, какъ это показано на слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ. Построить кривую, соотвѣтствующую функціи $y = \frac{5-x^2}{2}$.

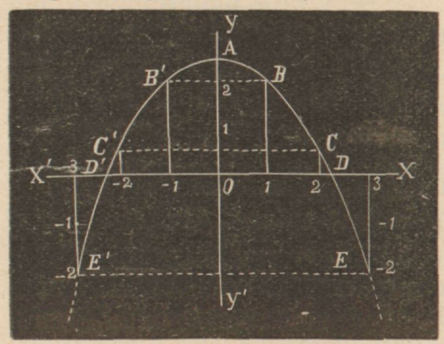
Принимая аргументъ x за абсциссу, функцію ея y за ординату, дадимъ x какой-либо рядъ положительныхъ значеній, напримѣръ, 0, 1, 2, 3,... и вычислимъ соотвѣтственныя имъ значенія ординаты y; тогда найдемъ, что

при $x = 0$ будетъ $y = 2^1/_2$ — это координаты нѣкоторой точки A;
„ $x = 1$ „ $y = 2$ „ „ „ „ B;
„ $x = 2$ „ $y = ^1/_2$ „ „ „ „ C;
„ $x = \sqrt{5}$ „ $y = 0$ „ „ „ „ D;
„ $x = 3$ „ $y = -2$ „ „ „ „ E;
. . . .
„ $x = +\infty$ „ $y = -\infty$ — точки на безконечности.

Придавая x рядъ отрицательныхъ значеній, напримѣръ, -1, -2, -3, . . . и вычисливъ соотвѣтствующія имъ значенія функціи y, получимъ:

при $x = -1$ будетъ $y = 2$ — это координаты нѣкоторой точки B';
„ $x = -2$ „ $y = ^1/_2$ „ „ „ „ C';
„ $x = -\sqrt{5}$ „ $y = 0$ „ „ „ „ D';
„ $x = -3$ „ $y = -2$ „ „ „ „ E';
. . . .
„ $x = -\infty$ „ $y = -\infty$ — точки на безконечности.

Соединивъ между собою одну за другою построенныя нами точки, мы этимъ построимъ искомую кривую $E'D'C'B'ABCDE$ (черт. 2), указывающую на ходъ измѣненій функціи y. Изъ сравненія координатъ каждой изъ паръ точекъ B и B', C и C', E и E',... усматриваемъ, что кривая раздѣляется осью y-овъ на двѣ симметричныя части $E'D'C'B'A$ и $ABCDE$ и распространяется этими своими двумя вѣтвями въ безконечность ниже оси x-овъ. По этой кривой нетрудно судить, въ какихъ границахъ значеній аргумента x функція y быстрѣе измѣняется, въ какихъ медленнѣе, въ какихъ она возрастаетъ, въ какихъ убываетъ, когда она обращается въ нуль или достигаетъ наибольшаго или наименьшаго своего значенія.



Черт. 2.

II. Теорія предѣловъ.

§ 4. Опредѣленія. Если перемѣнная величина x приближается къ нѣкоторой постоянной величинѣ a такъ, что численная разность $x-a$ становится и продолжаетъ быть меньше всякой произвольно-малой положительной величины, то постоянная величина a называется **предѣломъ** перемѣнной x, т. е. тогда пред. $x = a$ или $\lim x = a$*).

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что при безконечно-маломъ ε, положительномъ или отрицательномъ, равенства:

$$x - a = \varepsilon \text{ и } \lim x = a$$

тождественныя или эквивалентныя.

Изъ равенства $x - a = \varepsilon$ слѣдуетъ, что $x = a + \varepsilon$, т. е. перемѣнная величина, стремящаяся къ своему предѣлу, можетъ быть выражена алгебраическою суммою изъ ея предѣла и безконечно-малой величины.

Перемѣнная величина, приближаясь къ своему предѣлу, можетъ оставаться или постоянно меньшею своего предѣла, или постоянно бо̀льшею его, или, наконецъ, можетъ быть то больше, то меньше своего предѣла. Примѣромъ послѣдняго измѣненія могутъ служить послѣдовательныя приближенія безконечной непрерывной дроби, въ которую можетъ быть обращенъ ирраціональный корень 2-ой степени, напримѣръ, $\sqrt{3}$; эти приближенія, подходя все ближе и ближе къ $\sqrt{3}$, который, какъ увидимъ ниже, слѣдуетъ считать предѣломъ этихъ приближеній, поперемѣнно то меньше $\sqrt{3}$, то больше его**).

Изъ вышеприведеннаго опредѣленія предѣла видно, что одно только приближеніе перемѣнной величины x къ постоянной a еще недостаточно для того, чтобы a была предѣломъ перемѣнной x; надо, кромѣ того, чтобъ численная разность $a - x$ могла быть сдѣлана безконечно-малою. Такъ, напримѣръ, періодическая дробь 0,9898 . . . съ увеличеніемъ числа періодовъ увеличивается и приближается къ 1; но 1 не есть предѣлъ ея, такъ какъ разность $1 - 0{,}9898\ldots$, стремясь съ неограниченнымъ увеличеніемъ числа періодовъ къ значенію $1 - \frac{98}{99}$***), т. е. къ $\frac{1}{99}$, не можетъ быть сдѣлана безконечно-малою.

Напротивъ, періодическая дробь 0,99 . . . . съ неограниченнымъ увеличеніемъ числа ея періодовъ, увеличивается, стремясь къ $\frac{9}{9}$, т. е. къ 1, каковое число и есть предѣлъ данной періодической дроби.

---

*) *Пред.* есть сокращеніе слова *предѣлъ*, *lim.* есть сокращеніе слова *limite*, означающаго *предѣлъ*.

**) См. элементарную алгебру Я. Блюмберга. 3-ье изданіе 1893 г., § 161.

***) См. элементарную алгебру Я. Блюмберга, 3-ье изданіе 1893 г., § 135.

§ 5. Главнѣйшія теоремы о предѣлахъ. Разсмотримъ теперь главнѣйшія предложенія, на которыхъ основанъ способъ нахожденія предѣла перемѣнной.

Теорема I. Сумма конечнаго числа безконечно-малыхъ величинъ есть безконечно-малая величина.

Положимъ, что имѣемъ сумму:

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots . + \mu,$$

состоящую изъ конечнаго числа n безконечно-малыхъ положительныхъ слагаемыхъ α, β, γ, ... μ. По опредѣленію безконечно-малыхъ величинъ частныя значенія α, β, γ, ... могутъ быть выбраны столь малыми, чтобы каждое изъ нихъ стало меньше n-ой доли нѣкоторой другой произвольно-малой величины ε, т. е. чтобы было

$$\alpha < \frac{\varepsilon}{n},\ \beta < \frac{\varepsilon}{n},\ \gamma < \frac{\varepsilon}{n}, \ldots, \mu < \frac{\varepsilon}{n};$$

по сложеніи же этихъ n неравенствъ почленно получимъ:

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots .. + \mu < n\frac{\varepsilon}{n} \text{ или } \alpha + \beta + \gamma + \ldots .. + \mu < \varepsilon,$$

т. е. данная сумма меньше произвольно-малой величины ε, а потому она сама безконечно-мала.

Если у нѣкоторыхъ членовъ данной суммы перемѣнимъ знакъ $+$ на знакъ —, то сумма эта уменьшится, а потому она подавно будетъ безконечно-мала; слѣдовательно теорема наша справедлива и для алгебраической суммы.

Примѣчаніе. Въ этой теоремѣ мы поставили условіемъ, что число безконечно-малыхъ α, β, γ, ..., μ — конечное, ибо если число ихъ безконечно велико, то ихъ сумма можетъ и не быть безконечно-малою. Такъ, напримѣръ, если a величина конечная, то каждое изъ слагаемыхъ суммы

$$\frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \ldots + \frac{a}{m} \text{ (всего } m \text{ слагаемыхъ)}$$

при неограниченномъ возрастаніи m безконечно-малая величина, между тѣмъ какъ ихъ сумма, равная $\frac{a}{m}.\ m$ или a, есть конечная величина.

Слѣдствіе. Разность двухъ безконечно-малыхъ величинъ есть величина безконечно-малая, ибо разность есть алгебраическая сумма.

Теорема 2. Произведеніе безконечно-малой величины на конечную есть безконечно-малая величина.

Пусть будетъ α безконечно-малая величина, n — число конечное; надо доказать, что $n\alpha$ безконечно-малая величина.

Если n число цѣлое, то произведенiе $n\alpha$ можетъ быть замѣнено суммою изъ n слагаемыхъ, равныхъ α; слѣдовательно $n\alpha$ по теоремѣ 1 безконечно-малая величина; если же n число дробное, то, полагая, что n' есть цѣлое число, непосредственно бо̀льшее, чѣмъ n, найдемъ, что численно будетъ $n\alpha < n'\alpha$; а какъ по только что доказанному $n'\alpha$ безконечно-малая величина, то $n\alpha$ подавно безконечно-малая величина.

Теорема 3. Частное отъ дѣленiя безконечно-малой величины α на конечную n есть безконечно-малая величина.

Въ самомъ дѣлѣ, если n число конечное, то и $\frac{1}{n}$ конечное, а потому, по теоремѣ 2, $\alpha \cdot \frac{1}{n}$ или $\frac{\alpha}{n}$ безконечно-малая величина.

Теорема 4. Предѣлъ суммы конечнаго числа перемѣнныхъ равенъ суммѣ ихъ предѣловъ.

Дѣйствительно, если $\lim f = a$*), $\lim f' = b$, $\lim f'' = c, \ldots$, то $f - a = \alpha$, $f' - b = \beta$, $f'' - c = \gamma, \ldots$, гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ безконечно-малы; слѣдовательно $(f + f' + f'' + \ldots) - (a + b + c + \ldots) = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$, т. е. численная разность между перемѣнною величиною $(f + f' + f'' + \ldots)$ и постоянною $(a + b + c + \ldots)$ можетъ быть сдѣлана безконечно-малою; слѣдовательно

$$\lim(f + f' + f'' + \ldots) = a + b + c + \ldots$$

Примѣчанiе. Въ этой теоремѣ предполагалось, что число перемѣнныхъ, а слѣдовательно и число безконечио-малыхъ слагаемыхъ суммы $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ конечное, потому что при безконечно-большомъ числѣ этихъ слагаемыхъ сумма $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ по теоремѣ 1 можетъ и не стремиться къ нулю.

Теорема 5. Предѣлъ разности двухъ перемѣнныхъ равенъ разности ихъ предѣловъ.

Дѣйствительно, если $\lim f = a$, $\lim f' = b$, то

$f = a + \alpha$, $f' = b + \beta$, гдѣ α и β безконечно-малы;

слѣдовательно $(f - f') - (a - b) = \alpha - \beta$, а потому $\lim(f - f') = a - b = \lim f - \lim f'$.

Теорема 6. Предѣлъ произведенiя конечнаго числа перемѣнныхъ равенъ произведенiю ихъ предѣловъ.

---

*) Въ этой теоремѣ, равно какъ и въ нижеслѣдующихъ, мы подъ f, f', f'', ... понимаемъ вообще нѣкоторыя функцiи одной или нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Дѣйствительно, если $\lim f = a$, $\lim f' = a'$, то

$f = a + \alpha$, $f' = a' + \beta$, гдѣ α и β безконечно-малы; слѣдовательно
$ff' - aa' = (a + \alpha)\ (a' + \beta) - aa' = \alpha a' + \beta a + \alpha\beta$,
что по теоремѣ 1 и 2 безконечно-малая величина, а потому

$$\lim ff' = aa' = \lim f \cdot \lim f'.$$

Легко распространить доказанную теорему на произвольное, но конечное, число перемѣнныхъ множителей. Въ самомъ дѣлѣ, если $\lim f = a$, $\lim f' = a'$, $\lim f'' = a''$, $\lim f''' = a'''$, ..., то по доказанному:

$\lim ff' = aa'$, а слѣдовательно по доказанному же:
$\lim(ff' \cdot f'') = aa' \cdot a''$, а потому также:
$\lim(ff' f'' \cdot f''') = aa' a'' \cdot a'''$ и т. д.

Теорема 7. Предѣлъ частнаго двухъ перемѣнныхъ f и f' равенъ частному ихъ предѣловъ.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $\frac{f}{f'} = u$, откуда $f = uf'$, мы по теоремѣ 6 будемъ имѣть:

$$\lim f = \lim u \cdot \lim f' \text{ и слѣдовательно}$$
$$\lim u = \frac{\lim f}{\lim f'}, \text{ т. е. } \lim \frac{f}{f'} = \frac{\lim f}{\lim f'}.$$

Примѣчаніе. Теоремы 4, 5, 6 и 7 справедливы, очевидно, и тогда, когда нѣкоторыя изъ величинъ $f, f', f'', \ldots$ постоянны, ибо всякая постоянная величина сама себѣ служитъ предѣломъ; поэтому при постоянномъ a и перемѣнномъ f будетъ имѣть:

$$\lim(a \pm f) = \lim a \pm \lim f = a \pm \lim f,$$
$$\lim af = \lim a \cdot \lim f = a \cdot \lim f,$$
$$\lim \frac{f}{a} = \frac{\lim f}{\lim a} = \frac{\lim f}{a},$$
$$\lim \frac{a}{f} = \frac{\lim a}{\lim f} = \frac{a}{\lim f}.$$

Теорема 8. Если постоянная величина a заключается между двумя перемѣнными f и f', разность которыхъ можетъ быть сдѣлана безконечно-малою, то a есть общій предѣлъ этихъ перемѣнныхъ, т. е. $\lim f = \lim f' = a$.

Дѣйствительно, по условію имѣемъ: $f - f' = \alpha$, гдѣ α безконечно-малая величина; слѣдовательно для числа a, заключающагося между f и f', будетъ численно: $f - a < \alpha$ и $a - f' < \alpha$, а потому, по § 4, $\lim(f) = a$ и $\lim f' = a$.

Теорема 9. Перемѣнная величина f', заключающаяся между перемѣнною f и ея предѣломъ a, имѣетъ тотъ же предѣлъ a, т. е. $\lim f' = a$.

Въ самомъ дѣлѣ, по условію имѣемъ: $\lim f = a$; слѣдовательно $f - a = \alpha$, гдѣ α безконечно-малая величина; а такъ какъ f' заключается между f и a, то численно $f' - a < \alpha$; слѣдовательно, по § 4, $\lim f' = a$.

Такъ, напримѣръ, извѣстно, что для всякой дуги x, меньшей четверти окружности, имѣемъ:

$$(t) \ldots \operatorname{tg}x > x > \sin x,$$

откуда по раздѣленіи этихъ трехъ количествъ на $\sin x$ получимъ:

$$\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x} > \frac{x}{\sin x} > 1 \text{ или } \sec x > \frac{x}{\sin x} > 1.$$

Съ приближеніемъ x къ нулю $\lim(\sec x)_{x=0} = 1$ *); слѣдовательно перемѣнная величина $\frac{x}{\sin x}$, заключающаяся между $\sec x$ и 1, т. е. между $\sec x$ и его предѣломъ 1, имѣетъ тотъ же предѣлъ, а потому $\lim\left(\frac{x}{\sin x}\right)_{x=0} = 1$.

Такъ же легко доказать, что съ приближеніемъ x къ нулю $\lim\left(\frac{x}{\operatorname{tg}x}\right)_{x=0} = 1$. Дѣйствительно, раздѣливъ всѣ члены неравенства (t) на $\operatorname{tg}x$, получимъ:

$$1 > \frac{x}{\operatorname{tg}x} > \cos x;$$

а какъ, при $x = 0$, $\lim \cos x = 1$, то по доказанной теоремѣ $\lim\left(\frac{x}{\operatorname{tg}x}\right)_{x=0} = 1$.

Теорема 10. Если двѣ перемѣнныя величины f и f' при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ остаются равными между собою или же разность ихъ можетъ быть сдѣлана безконечно-малою, то ихъ предѣлы равны.

Дѣйствительно, полагая, что $\lim f = a$, будемъ имѣть: $f - a = \alpha$, гдѣ α безконечно-малая величина; но такъ какъ по условію $f - f' = \beta$, гдѣ β безконечно-малая величина или же равно нулю, то $f' - a = \alpha - \beta$, гдѣ $\alpha - \beta$ безконечно-малая величина; значитъ $\lim f' = a$, т. е. $\lim f = \lim f'$.

Теорема 11. Если двѣ перемѣнныя f и f' имѣютъ общій предѣлъ a, то всякая перемѣнная f'', заключающаяся между ними, имѣетъ тотъ же предѣлъ.

---

*) Знакоположеніе $\lim(\sec x)_{x=0} = 1$ означаетъ, что предѣлъ количества $\sec x$ равенъ 1, когда уголъ x стремится къ нулю. Вообще знакоположеніе $\lim(f)_{x=0} = b$ означаетъ, что предѣлъ функціи f равенъ b, когда перемѣнная независимая x стремится къ o.

Въ самомъ дѣлѣ, если $\lim f = a$ и $\lim f' = a$, то $f - a = \alpha$, $f' - a = \beta$, гдѣ α и β безконечно-малы; слѣдовательно $f - f' = \alpha - \beta$; а если f'' заключается между f и f', то численно $f'' - f' < \alpha - \beta$; слѣдовательно

$$\lim f'' = \lim f' = \lim f = a.$$

Такъ, напримѣръ, средняя ариѳметическая и средняя геометрическая двухъ положительныхъ величинъ x и x', т. е. каждая изъ величинъ $\frac{x+x'}{2}$ и $\sqrt{xx'}$, заключается между x и x' *); слѣдовательно, если x и x' имѣютъ общій предѣлъ a, то и $\lim \frac{x+x'}{2} = \lim \sqrt{xx'} = a$.

Теорема 12. Если двѣ перемѣнныя f и f', стремящіяся къ своимъ предѣламъ a и b, всегда сохраняютъ постоянное отношеніе c, то ихъ предѣлы имѣютъ то же отношеніе, т. е. если $\frac{f}{f'} = c$, то и $\frac{a}{b} = c$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ условія, что $\frac{f}{f'} = c$, слѣдуетъ, что $\lim \frac{f}{f'} = \lim c = c$; по теоремѣ же 7 имѣемъ

$$\lim \frac{f}{f'} = \frac{\lim f}{\lim f'} = \frac{a}{b}; \text{ слѣдовательно } \frac{a}{b} = c.$$

Теорема 13. При постоянномъ и конечномъ N и безконечно-маломъ α, $\lim N^{\alpha} = 1$.

Положимъ сперва, что $N > 1$ и что α принимаетъ положительныя значенія вида $\frac{1}{n}$, гдѣ n неопредѣленно возрастающее цѣлое и положительное число; тогда $N^{\alpha} = N^{\frac{1}{n}}$. Возьмемъ сумму членовъ такой геометрической прогрессіи:

$$1 + N^{\frac{1}{n}} + N^{\frac{2}{n}} + N^{\frac{3}{n}} + \ldots + N^{\frac{n-1}{n}} = \frac{\left(N^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{N^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{N-1}{N^{\frac{1}{n}} - 1};$$

въ ней каждый членъ первой части, начиная со 2-го, больше 1, ибо $N > 1$; слѣдовательно, замѣнивъ эти члены единицами, получимъ:

$$n < \frac{N-1}{N^{\frac{1}{n}} - 1}, \text{ откуда } N^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{N-1}{n};$$

а какъ $N^{\frac{1}{n}} > 1$, то $N^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, значитъ

$$\frac{N-1}{n} > N^{\frac{1}{n}} - 1 > 0,$$

---

*) Полагая, что $x > x'$, получимъ:

$$\frac{x+x'}{2} < \frac{x+x}{2}, \text{ т. е. } \frac{x+x'}{2} < x; \text{ но } \frac{x+x'}{2} > \frac{x'+x'}{2}, \text{ т. е. } \frac{x+x'}{2} > x'.$$

Подобнымъ образомъ доказывается, что $\sqrt{xx'}$ заключается между x и x'.

причемъ 0 есть пред. $\left(\frac{N-1}{n}\right)_{n=\infty}$, т. е. $N^{\frac{1}{n}}-1$ заключается между перемѣнною $\frac{N-1}{n}$ и ея предѣломъ, а потому по теоремѣ 9 имѣемъ:

$\lim(N^{\frac{1}{n}}-1)=0$, или $\lim(N^{\alpha}-1)=0$, или по теоремѣ 5: $\lim N^{\alpha}-1=0$, т. е. $\lim N^{\alpha}=1$.

Положимъ теперь, что показатель α, оставаясь положительнымъ, приближается къ нулю, принимая значенія, отличныя отъ вида $\frac{1}{n}$; тогда для всякаго значенія α можно найти такія двѣ дроби $\frac{1}{p+1}$ и $\frac{1}{p}$, гдѣ p числое цѣлое и положительное, чтобы между ними заключалось α, т. е. чтобы было $\frac{1}{p+1}<\alpha<\frac{1}{p}$; въ такомъ случаѣ при $N>1$ будетъ также

$$N^{\frac{1}{p+1}}<N^{\alpha}<N^{\frac{1}{p}},$$

а какъ при $p=\infty$ количества $N^{\frac{1}{p+1}}$ и $N^{\frac{1}{p}}$ по только что доказанному имѣютъ общимъ своимъ предѣломъ 1, то, по теоремѣ 11, $\lim N^{\alpha}=1$.

Если $N<1$, то $\frac{1}{N}>1$ и слѣдовательно по доказанному имѣемъ:

$$\lim\left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha}=1 \text{ или, по теоремѣ 7, } \frac{1}{\lim N^{\alpha}}=1,$$

откуда опять слѣдуетъ, что $\lim N^{\alpha}=1$.

Наконецъ, если показатель α величина отрицательная, напримѣръ, $\alpha=-\beta$, то $N^{\alpha}=\frac{1}{N^{\beta}}$; а такъ какъ $\lim\frac{1}{N^{\beta}}=\frac{1}{\lim N^{\beta}}=\frac{1}{1}=1$, то $\lim N^{\alpha}=1$.

Теорема 14. Предѣлъ степени постояннаго количества съ перемѣннымъ показателемъ равенъ степени даннаго количества, показатель которой есть предѣлъ даннаго показателя, т. е. если N — постоянное количество, x — перемѣнное, имѣющее предѣлъ a, то $\lim N^{x}=N^{a}$.

Дѣйствительно, по условію имѣемъ: $x=a+\alpha$, гдѣ α безконечно-малая величина; слѣдовательно

$$N^{x}=N^{a+\alpha}=N^{a}\,.\,N^{\alpha}, \text{ значитъ}$$

$\lim N^{x}=\lim N^{a}\,.\,\lim N^{\alpha}=N^{a}\,.\,\lim N^{\alpha}=N^{a}$, ибо $\lim N^{\alpha}=1$ по теоремѣ 13.

Теорема 15. Предѣлъ степени перемѣннаго основанія x при постоянномъ показателѣ m равенъ той же степени предѣла даннаго основанія, т. е. если $\lim x=a$, то $\lim x^{m}=a^{m}$.

Здѣсь надо разсматривать 4 случая:

1) Показатель m есть цѣлое и положительное число. Въ этомъ случаѣ

$$x^m = x \,.\, x \,.\, x \ldots,\ \text{всего } m \text{ множителей};$$

слѣдовательно, по теоремѣ 10, $\lim (x \,.\, x \,.\, x \ldots) = a \,.\, a \,.\, a \ldots$, т. е. $\lim x^m = a^m$.

2) Показатель m есть дробь вида $\frac{1}{n}$, гдѣ n число цѣлое и положительное, а слѣдовательно $x^m = \sqrt[n]{x}$.

По условію имѣемъ:

$$\lim x = a \text{ или, что то же, } \lim \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = a;$$

а какъ по предыдущему случаю (1)

$$\lim \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\lim x^{\frac{1}{n}}\right)^n, \text{ то и } \left(\lim x^{\frac{1}{n}}\right)^n = a, \text{ откуда}$$

$$\lim x^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}, \text{ т. е. } \lim x^m = a^m \text{ и при } m = \frac{1}{n}.$$

3) Показатель m — положительное соизмѣримое число вида $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q числа цѣлыя и положительныя; тогда по 1-му случаю:

$$\lim x^p = a^p,$$

а слѣдовательно по 2-му случаю:

$$\lim (x^p)^{\frac{1}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} \text{ или } \lim x^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}, \text{ т. е. } \lim x^m = a^m \text{ и при } m = \frac{p}{q}.$$

4) Показатель m — соизмѣримое отрицательное число, напримѣръ, $m = -n$, гдѣ, слѣдовательно, n положительное соизмѣримое число; тогда

$$\lim x^{-n} = \lim \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\lim x^n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

т. е. $\lim x^m = a^m$ и при отрицательномъ показателѣ m.

Теорема 16. Предѣлъ логариѳма перемѣнной равенъ логариѳму предѣла этой перемѣнной, т. е. $\lim(\lg x) = \lg(\lim x)$.

Положимъ, что $\lg x = y$ при основаніи a; тогда $a^y = x$, слѣдовательно

$\lim a^y = \lim x$, или, по теоремѣ 14, $a^{\lim y} = \lim x$, откуда
$\lim y = \lg(\lim x)$, т. е. $\lim(\lg x) = \lg(\lim x)$.

Теорема 17. Предѣлъ степени перемѣннаго основанія при перемѣнномъ показателѣ получимъ, замѣнивъ основаніе и показателя степени ихъ предѣлами, т. е. $\lim x^y = a^m$, если $\lim x = a$, $\lim y = m$.

Въ самомъ дѣлѣ, $\lg x^y = y \lg x$, слѣдовательно

$$\lim (\lg x^y) = \lim (y \lg x) = \lim y.\ \lim (\lg x) = m.\ \lim (\lg x);$$

а какъ, по теоремѣ 16, $\lim (\lg x^y) = \lg (\lim x^y)$, $\lim (\lg x) = \lg (\lim x) = \lg a$, то предыдущее равенство можетъ быть написано такъ:

$$\lg (\lim x^y) = m \ \lg (\lim x) = m \ \lg a = \lg a^m,$$ откуда слѣдуетъ, что

$$\lim x^y = a^m.$$

Теорема 18. Предѣлъ радикала получимъ, замѣнивъ подкоренное количество и показателя корня ихъ предѣлами, ибо радикалъ можетъ быть преобразованъ въ степень.

§ 6. Предѣлъ сложной функціи. Въ элементарной алгебрѣ разсматриваются выраженія, въ составъ которыхъ могутъ входить суммы, разности, произведенія, частныя, степени и корни, а также логариѳмы; но мы въ § 4 видѣли, что мы получимъ предѣлъ каждаго изъ этихъ выраженій, если входящія въ нихъ перемѣнныя замѣнимъ ихъ предѣлами; отсюда заключаемъ, что предѣлъ всякой функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ равенъ такой же функціи отъ предѣловъ этихъ перемѣнныхъ, т. е. предѣлъ данной функціи составляется изъ предѣловъ перемѣнныхъ такимъ же образомъ, какъ данная функція составлена изъ перемѣнныхъ; слѣдовательно

$$\lim f(x,\ y,\ z, \ldots) = f(a,\ b,\ c, \ldots),$$

гдѣ a, b, $c, \ldots$ предѣлы соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ x, y, $z, \ldots$

Слѣдствіе. Если имѣемъ равенство

$$f(x,\ y,\ z, \ldots) = F(x,\ y,\ z, \ldots),$$

гдѣ x, y, $z, \ldots$ перемѣнныя величины, коихъ предѣлы соотвѣтственно суть a, b, $c, \ldots$, то на основаніи теоремы 6 должно быть также:

$$\lim f(x, y, z, \ldots) = \lim F(x, y, z, \ldots) \text{ или } f(a, b, c, \ldots) = F(a, b, c, \ldots);$$

это значитъ, что если между перемѣнными существуетъ нѣкоторая зависимость, выраженная уравненіемъ, то и между ихъ предѣлами существуетъ та же зависимость.

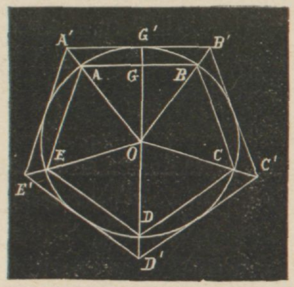
§ 7. Примѣненіе теоріи предѣловъ къ нѣкоторымъ геометрическимъ вопросамъ.

а) Къ кругу.

Согласно съ опредѣленіемъ кривой линіи никакая часть ея не можетъ быть совмѣщена съ прямою, а потому длина окружности круга или ея дуги не можетъ быть измѣрена линейною единицею непосредственнымъ наложеніемъ. Поэтому приходится установить, что надо понимать подъ длиною окружности круга, т. е. дать этому понятію опредѣленіе. Для этого докажемъ предварительно слѣдующую теорему.

Теорема I. Периметры правильныхъ многоугольниковъ, описанныхъ около круга и вписанныхъ въ него, стремятся къ общему предѣлу, когда число ихъ сторонъ неограниченно увеличивается.

Доказательство. Пусть будутъ P и p периметры двухъ одноименныхъ правильныхъ многоугольниковъ, изъ коихъ первый описанъ около круга радіуса r, а другой въ него вписанъ и обозначимъ апоѳему OG вписаннаго многоугольника чрезъ a (черт. 3); тогда $\frac{P}{p}=\frac{r}{a}$, откуда, по извѣстному свойству пропорціи,



Черт. 3.

$$\frac{P-p}{P}=\frac{r-a}{r} \text{ и слѣдовательно}$$

$$(1) \ldots\ldots P-p=\frac{P}{r}(r-a).$$

При неограниченномъ удваиваніи числа сторонъ обоихъ многоугольниковъ разность $r-a$ между радіусомъ даннаго круга и апоѳемою вписаннаго многоугольника стремится къ нулю, ибо $AO-OG<AG$, т. е. $r-a<\frac{AB}{2}$, и сторона AB можетъ быть сдѣлана произвольно малою; а какъ $\frac{P}{r}$ величина конечная, то правая часть равенства (1), а значитъ и лѣвая $P-p$, стремится къ нулю, откуда заключаемъ, что P и p стремятся къ общему предѣлу (§ 4, теорема 10). Этотъ предѣлъ принимается за длину окружности круга.

Опредѣленіе. Длиною окружности круга называется предѣлъ, къ которому стремится периметръ правильнаго вписаннаго или описаннаго многоугольника, когда число его сторонъ неограниченно увеличивается.

Теорема 2. Окружности круговъ относятся между собою, какъ ихъ радіусы.

Доказательство. Опишемъ около двухъ круговъ по правильному многоугольнику одинаковаго числа сторонъ и пусть будутъ P и P' ихъ периметры, C и C' — окружности данныхъ круговъ r и r' ихъ радіусы; тогда имѣемъ пропорцію

$$\frac{P}{P'}=\frac{r}{r'},$$

справедливую при всякомъ числѣ сторонъ данныхъ одноименныхъ многоугольниковъ; слѣдовательно, удваивая послѣдовательно число сторонъ каждаго, мы можемъ разсматривать P и P' какъ перемѣнныя величины, отношеніе которыхъ есть постоянная величина $\frac{r}{r'}$, а потому по § 4 теоремы 12 отношеніе $\frac{C}{C'}$ ихъ предѣловъ также равно $\frac{r}{r'}$, т. е.

$$\frac{C}{C'}=\frac{r}{r'}.$$

Теорема 3. Площадь круга есть общій предѣлъ, къ которому стремятся площади правильныхъ описанныхъ или вписанныхъ многоугольниковъ, когда число ихъ сторонъ неограниченно увеличивается.

Доказательство. Обозначимъ чрезъ M и M' площади двухъ правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, изъ коихъ первый описанъ около круга радіуса r, а второй въ него вписанъ, чрезъ P и P' ихъ периметры, чрезъ a апоѳему вписаннаго многоугольника, тогда

$$\frac{M}{M'}=\frac{r^2}{a^2}, \text{ откуда } \frac{M-M'}{M'}=\frac{r^2-a^2}{a^2}; \text{ слѣдовательно}$$

$$(2)\ldots.\ M-M'=\frac{M'(r+a)}{a^2}(r-a).$$

При неограниченномъ удваиваніи числа сторонъ данныхъ многоугольниковъ разность $r-a$ стремится къ нулю, множитель же $\frac{M'(r+a)}{a^2}$ величина конечная; слѣдовательно вторая часть равенства (2), а значитъ и первая $M-M'$ можетъ быть сдѣлана безконечно-малою; а какъ площадь S круга есть постоянная величина и всегда заключается между M и M', т. е. $M>S>M'$, то каждая изъ разностей $M-S$ и $S-M'$ подавно можетъ быть сдѣлана безконечно малою, а потому по данному въ § 4 опредѣленію предѣла заключаемъ, что

$$S=\lim M=\lim M'.$$

Теорема 4. Площадь круга равняется произведенію длины его окружности на радіусъ.

Доказательство. Если P есть периметръ правильнаго многоугольника, описаннаго около круга радіуса r, то его площадь есть $\frac{P\,.\,r}{2}$; слѣдовательно площадь S круга по теоремѣ 3 есть

$$S=\lim\frac{P\,.\,r}{2}=\frac{r}{2}\,.\,\lim P=\frac{r}{2}.\,C=\frac{r}{2}\,.\,2\pi r=\pi r^2,$$

гдѣ C — окружность круга.

b) Къ цилиндру.

Такъ какъ никакая часть кривой поверхности не можетъ совмѣщаться съ плоскостью, то величина поверхности какого-либо изъ круглыхъ тѣлъ (цилиндра, конуса, шара и прочее) не можетъ быть непосредственно измѣрена квадратною единицею. Поэтому приходится установить, что́ слѣдуетъ понимать подъ боковою поверхностью цилиндра или конуса, подъ поверхностью шара и прочее, т. е. надо дать этимъ понятіямъ определенія. Мы ихъ приведемъ ниже въ надлежащемъ мѣстѣ.

Теорема 5. Боковыя поверхности правильныхъ призмъ, описанныхъ около цилиндра и вписанныхъ въ него, стремятся къ общему предѣлу, когда число боковыхъ ихъ граней неограниченно увеличивается.

Доказательство. Пусть будутъ P и P' периметры основаній двухъ одноименныхъ правильныхъ призмъ, изъ коихъ первая описана около цилиндра, а вторая въ него вписана, h — общая ихъ высота, K и K' ихъ боковыя поверхности; тогда $K=Ph$, $K'=P'.h$, откуда

(3).... $K-K'=(P-P')h.$

Такъ какъ h величина конечная, разность же $P-P'$ при неограниченномъ увеличеніи числа сторонъ основаній призмъ стремится къ нулю (теорема 1), то и разность $K-K'$ стремится къ нулю; значитъ K и K' имѣютъ общій предѣлъ (§ 4, теорема 10). Этотъ общій предѣлъ принимается за величину боковой поверхности цилиндра.

Опредѣленіе. За величину боковой поверхности цилиндра принимается предѣлъ, къ которому стремится боковая поверхность правильной описанной около него или вписанной въ него призмы, когда число ея боковыхъ граней неограниченно увеличивается.

Теорема 6. Боковая поверхность цилиндра равняется произведенію окружности его основанія на высоту.

Доказательство. Если P есть периметръ основанія правильной призмы, описанной около цилиндра, h — ея высота, то боковая ея поверхность равна $P.h$, а потому боковая поверхность цилиндра по теоремѣ 5 есть

$$S=\lim(P.h)=h.\ \lim P=h.\ C=2\pi rh,$$

гдѣ C — окружность основанія цилиндра, r — ея радіусъ.

Теорема 7. Объемъ цилиндра есть общій предѣлъ объемовъ описанныхъ около него или вписанныхъ въ него правильныхъ призмъ, когда число боковыхъ граней призмъ неограниченно увеличивается.

Доказательство. Пусть будутъ M и M' площади основаній двухъ одноименныхъ правильныхъ призмъ, изъ которыхъ первая описана около цилиндра, а вторая въ него вписана, h — общая ихъ высота, W и W' ихъ объемы; тогда $W = M . h$, $W' = M'h$, откуда

(4).... $W - W' = (M - M')h$.

Такъ какъ здѣсь h конечная величина, а разность $M - M'$ при неограниченномъ увеличеніи числа боковыхъ граней призмъ стремится къ нулю (теорема 3), то и разность $W - W'$ стремится къ нулю; а какъ объемъ V цилиндра постоянная величина и всегда заключается между объемами W и W', т. е. $W > V > W'$, то каждая изъ разностей $W - V$ и $V - W'$ можетъ быть сдѣлана безконечно-малою, откуда на основаніи опредѣленія предѣла (§ 4) заключаемъ, что

$$V = \lim W = \lim W'.$$

Теорема 8. Объемъ цилиндра равняется произведенію площади его основанія на высоту.

Доказательство. Опишемъ около цилиндра правильную призму и обозначимъ площадь ея основанія черезъ M, а высоту чрезъ h, тогда ея объемъ будетъ $M . h$; слѣдовательно, при неограниченномъ увеличеніи числа ея боковыхъ граней мы по теоремѣ 7 будемъ имѣть:

объемъ цилиндра $= \lim(M . h) = h . \lim M = h . \pi r^2 = \pi r^2 h$,

гдѣ r радіусъ основанія цилиндра.

c) Къ конусу.

Теорема 9. Боковыя поверхности правильныхъ пирамидъ, описанныхъ около конуса и вписанныхъ въ него, стремятся къ общему предѣлу, когда число ихъ боковыхъ граней неограниченно увеличивается.

Доказательство. Пусть будутъ P и P' периметры основаній двухъ одноименныхъ правильныхъ пирамидъ, изъ коихъ первая описана около конуса, а вторая въ него вписана, причемъ стороны обоихъ основаній попарно паралелльны, l и l' ихъ апоѳемы, K и K' ихъ боковыя поверхности; тогда $K = \frac{1}{2} P . l$, $K' = \frac{1}{2} P' . l'$, откуда $K - K' = \frac{1}{2}(P . l - P' . l')$ или же

(5).... $K - K' = \frac{1}{2}(P . l - P'l' + P'l - P'l) = \frac{1}{2} l(P - P') + \frac{1}{2} P'(l - l')$,

ибо $P'l - P'l = 0$.

Такъ какъ при неограниченномъ увеличеніи числа боковыхъ граней обѣихъ пирамидъ каждая изъ разностей $P-P'$ и $l-l'$ стремится къ нулю (первая на основаніи теоремы 1, вторая потому, что разность $l-l'$ меньше разности между радіусомъ основанія цилиндра и апоѳемою основанія вписанной пирамиды), то вторая часть равенства (5), а значитъ и первая $K-K'$ стремится къ нулю, а потому K и K' имѣютъ общій предѣлъ (§ 5, теорема 10). Этотъ предѣлъ принимается за величину боковой поверхности конуса.

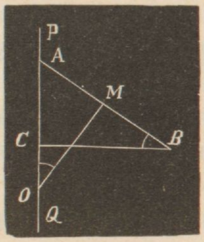
Опредѣленіе. За величину боковой поверхности конуса принимается предѣлъ къ которому стремится боковая поверхность правильной пирамиды, описанной около конуса или вписанной въ него, когда число ея боковыхъ граней неограниченно увеличивается.

Теорема 10. Объемъ конуса есть общій предѣлъ объемовъ описанныхъ около него и вписанныхъ въ него правильныхъ пирамидъ, когда число ихъ боковыхъ граней неограниченно увеличивается.

Доказательство этой теоремы, равно какъ и теоремъ, относящихся къ вычисленію боковой поверхности и объема конуса, вполнѣ аналогичны съ доказательствами теоремъ 6, 7 и 8, относящихся къ цилиндру, а потому мы ихъ не приводимъ.

d) Къ шару.

Прежде чѣмъ приступить къ опредѣленію поверхности и объема шара докажемъ слѣдующія два предложенія.



Черт. 4.

Предложеніе I. Боковая поверхность каждаго изъ тѣлъ: конуса, усѣченнаго конуса и цилиндра равняется произведенію высоты этого тѣла на окружность круга, радіусъ которой есть перпендикуляръ, возстановленный къ производящей тѣла въ ея серединѣ до точки его встрѣчи съ осью вращенія.

Доказательство. Положимъ для перваго случая, что имѣемъ конусъ, происходящій отъ вращенія прямоугольнаго $\triangle$-ка ABC около оси PQ, совмѣщенной съ катетомъ AC (чертежъ 4); тогда его боковая поверхность S есть

(6) .... $S = \pi \cdot BC \cdot AB$.

Проведя изъ средины M производящей AB перпендикуляръ MO до встрѣчи его съ осью мы изъ подобія $\triangle$-ковъ ABC и AMO получимъ:

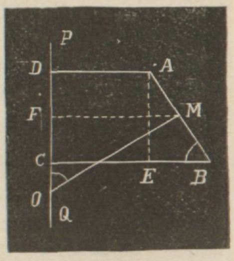
$$\frac{BC}{AC} = \frac{MO}{AM} = \frac{MO}{\frac{1}{2}AB}, \text{ откуда } BC \,.\, AB = 2MO \,.\, AC,$$

а потому равенство (6) можно написать такъ:

$$S = 2\pi \,.\, MO.AC,$$

гдѣ $2\pi \,.\, MO$ есть окружность круга радіуса MO.

Положимъ для второго случая, что имѣемъ усѣченный конусъ, происшедшій отъ вращенія прямоугольной трапеціи $ABCD$ около оси PQ, совмѣщенной со стороною CD трапеціи (чертежъ 5); тогда, опустивъ изъ средины M производящей AB на PQ перпендикуляръ FM, мы для боковой поверхности S усѣченнаго конуса будемъ имѣть:



Черт. 5.

$$S = 2\pi \,.\, MF \,.\, AB;$$

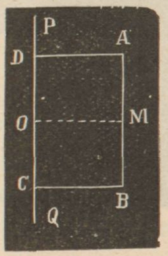
проведя затѣмъ $AE \perp BC$ и $MO \perp AB$, мы изъ подобія $\triangle$-овъ ABE и MOF получимъ:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{MO}{MF} \text{ или } \frac{AB}{CD} = \frac{MO}{MF},$$

откуда $MF \,.\, AB = MO \,.\, CD$, а потому

$$S = 2\pi \,.\, MO \,.\, CD.$$

Наконецъ, боковая поверхность S цилиндра, происшедшаго отъ вращенія прямоугольника $ABCD$ около стороны CD (чертежъ 6), есть

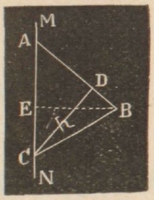


Черт. 6.

$$S = 2\pi \,.\, BC \,.\, AB = 2\pi \,.\, MO \,.\, CD,$$

гдѣ MO перпендикуляръ къ производящей AB въ ея срединѣ M.

Предложеніе II. При вращеніи треугольника около оси, лежащей съ нимъ въ той же плоскости и проходящей чрезъ его вершину, но не пересѣкающей противолежащей стороны, происходитъ тѣло, объемъ котораго равенъ поверхности, описываемой этою стороною треугольника, умноженной на треть высоты треугольника, проведенной, къ той же сторонѣ изъ противолежащей вершины.



Черт. 7.

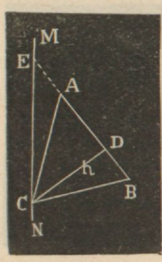
Доказательство. Положимъ для перваго случая, что ось вращенія MN проходитъ чрезъ вершину C $\triangle$-ка ABC и совпадаетъ со стороною CA (чертежъ 7). Полагая, что $CD = h$ есть высота треугольника, и опустивъ изъ B на ось MN перпендикуляръ BE, мы для объема V тѣла, произведеннаго вращеніемъ $\triangle$-ка ABC около оси MN, получимъ:

$$V = \frac{1}{3}\pi . BE^2 . AE + \frac{1}{3}\pi . BE^2 . EC = \frac{1}{3}\pi . BE^2 . AC;$$

а какъ площадь $\triangle$-ка ABC равна какъ $\frac{1}{2} AC . BE$, такъ и $\frac{1}{2} AB . CD$, то $BE . AC = AB . CD$, а потому

$$V = \pi . BE . AB \frac{CD}{3} = (\text{пов. } AB) . \frac{h}{3},$$

гдѣ знакоположеніе пов. AB означаетъ поверхность, описываемую стороною AB при ея вращеніи около оси MN.



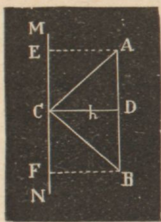
Черт. 8

Если ось MN, проходя чрезъ вершину C, не совпадаетъ со стороною CA и не паралелльна основанію AB (чертежъ 8), то, продолживъ BA до пересѣченія съ осью въ E и приведя $CD \perp AB$, мы на основаніи предыдущаго случая будемъ имѣть:

Объемъ, описываемый $\triangle$-комъ EBC, $=$ (пов. BE) $. \frac{h}{3}$,

„ „ „ EAC, $=$ (пов. EA) $. \frac{h}{3}$;

слѣдовательно объемъ, описываемый $\triangle$-омъ ABC, $=$ (пов. AB) $. \frac{h}{3}$.



Черт. 9.

Наконецъ, если ось MN проходитъ чрезъ вершину C паралелльно основанію AB (чертежъ 9), то объемъ, описываемый $\triangle$-омъ ABC, равенъ объему цилиндра, описываемаго прямоугольникомъ $ABEF$, безъ суммы объемовъ двухъ конусовъ, производящія которыхъ суть CA и CB; слѣдовательно, если $CD = h$ есть высота даннаго треугольника, то искомый объемъ есть:

$$V = \pi . BF^2 . EF - \frac{1}{3}\pi . AE^2 . CE - \frac{1}{3} . BF^2 . CF;$$

а какъ $BF = AE = CD = h$, то

$$V = \pi . BF.^2(EF - \frac{1}{3} CE - \frac{1}{3} CF) = \pi . BF^2(EF - \frac{1}{3} EF) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi . BF^2 . EF = 2\pi . BF . EF . \frac{BF}{3} = 2\pi . BF . EF . \frac{h}{3},$$

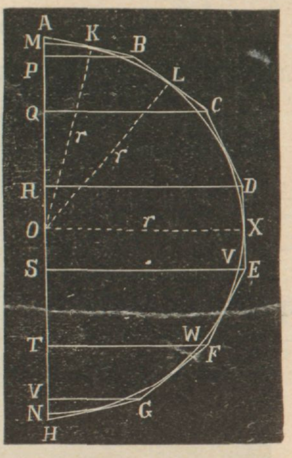
гдѣ $2\pi . BF . EF$ выражаетъ поверхность, описываемую стороною AB около оси MN, т. е.

$$V = (\text{пов. } AB) . \frac{h}{3}.$$

Перейдемъ теперь къ опредѣленію поверхности и объема шара.

Теорема II. Если около полуокружности опишемъ и въ нее впишемъ половины правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ, то описываемыя ими поверхности при ихъ вращеніи около діаметра данной полуокружности стремятся къ общему предѣлу, когда число ихъ сторонъ неограниченно увеличивается.

Доазательство. Пусть будетъ $ABC\ldots GH$ половина правильнаго многоугольника, описаннаго около полуокружности радіуса $OL = r$ (чертежъ 10). При вращеніи обѣихъ этихъ фигуръ около діаметра AH, полуокружность опишетъ поверхность шара, а многоугольникъ — поверхность, состоящую изъ боковыхъ поверхностей двухъ конусовъ (производящія AB и GH), боковыхъ поверхностей четнаго числа усѣченныхъ конусовъ (каковы, напримѣръ, описываемыя сторонами BC и CD) и, въ частномъ случаѣ, изъ боковой поверхности цилиндра, если, какъ на нашемъ чертежѣ, сторона DE паралелльна оси AH. Если поэтому изъ вершинъ многоугольника опустимъ на ось перпендикуляры BP, CD, $DR\ldots$, то на основаніи вышеприведеннаго предложенія I для поверхности S, описываемой многоугольникомъ $ABC\ldots GH$, будемъ имѣть:



Черт. 10.

$$(7)\ldots S = 2\pi r \,.\, AP + 2\pi r \,.\, PQ + 2\pi r \,.\, QR + \ldots + 2\pi r \,.\, VH = 2\pi r \,.\, AH.$$

Совершенно такимъ же образомъ мы получимъ поверхность S', производимую вращеніемъ вписаннаго въ полукругъ многоугольника: стоитъ только радіусъ r даннаго полукруга, онъ же и апоѳема описаннаго многоугольника, замѣнить апоѳемою a вписаннаго, а отрѣзокъ AH оси — діаметромъ MN, тогда

$$(8)\ldots S' = 2\pi a \,.\, MN.$$

Изъ равенствъ (7) и (8) получимъ:

$$S - S' = 2\pi(r \,.\, AH - a \,.\, MN) = 2\pi(r \,.\, AH - a \,.\, MN + r \,.\, MN + \\ - r \,.\, MN) = 2\pi r(AH - MN) + 2\pi \,.\, MN(r - a).$$

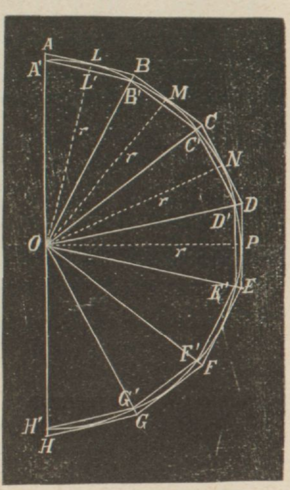
При неограниченномъ увеличеніи числа сторонъ вращающихся многоугольниковъ каждая изъ разностей $AH - MN$ и $r - a$ стремится къ нулю, множители же $2\pi r$ и $2\pi \,.\, MN$ — величины конечныя; слѣдовательно и разность $S - S'$ стремится къ нулю, откуда по теоремѣ 10 § 5 заключаемъ, что S и S' имѣютъ общій предѣлъ. Этотъ предѣлъ принимается за величину поверхности шара.

Определѣніе. За величину поверхности шара, происходящаго отъ вращенія полуокружности около діаметра, принимается предѣлъ, къ которому стремится поверхность, происходящая при вращеніи половины правильнаго многоугольника, описаннаго около той же окружности или вписаннаго въ нее, когда число его сторонъ неограниченно увеличивается.

Теорема 12. Поверхность шара равняется произведенію окружности большого круга его на діаметръ.

Доказательство. Около полуокружности радіуса r опишемъ половину правильнаго многоугольника $ABC\ldots GH$ (чертежъ 10). При его вращеніи вокругъ діаметра MN опишется поверхность, величина которой по теоремѣ 11 есть $2\pi r \,.\, AH$; предѣлъ этой поверхности есть то, что мы считаемъ поверхностью шара, описываемаго данною полуокружностью; слѣдовательно поверхность S шара есть:

$$S = \lim(2\pi r \,.\, AH) = 2\pi r \,.\, \lim AH =$$
$$= 2\pi r \,.\, MN = 2\pi r \,.\, 2r = 4\pi r^2.$$



Черт. 11.

Теорема 13. Если около полукруга радіуса r опишемъ и въ него впишемъ половины правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ, то объемъ шара, описываемаго полукругомъ при его вращеніи вокругъ діаметра, есть общій предѣлъ объемовъ тѣлъ, описываемыхъ обоими многоугольниками при вращеніи ихъ вокругъ того же діаметра.

Доказательство. Пусть будутъ $ABC\ldots GH$ и $A'B'C'\ldots G'H'$ (чертежъ 11) половины правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, изъ коихъ первый описанъ около полукруга, а второй въ него вписанъ. При вращеніи этихъ трехъ фигуръ вокругъ оси AH полукругъ опишетъ шаръ, а многоугольники опишутъ тѣла, объемы которыхъ обозначимъ соотвѣтственно чрезъ W и W'. Каждый изъ этихъ объемовъ есть сумма объемовъ тѣлъ, происходящихъ отъ вращеній треугольниковъ, на которые многоугольники разбиваются прямыми, соединяющими ихъ вершины съ центромъ; слѣдовательно, обозначивъ радіусъ даннаго полукруга чрезъ r, апоѳему вписаннаго многоугольника чрезъ a и примѣняя вышеприведенное предложеніе II, будемъ имѣть:

$$W = (\text{пов. } AB) \cdot \frac{r}{3} + (\text{пов. } BC) \cdot \frac{r}{3} + \ldots + (\text{пов. } GH) \cdot \frac{r}{3} =$$

$$= (\text{пов. } ABC \ldots GH) \cdot \frac{r}{3},$$

$$W' = (\text{пов. } A'B') \cdot \frac{a}{3} + (\text{пов. } B'C') \cdot \frac{a}{3} + \ldots + (\text{пов. } G'H') \cdot \frac{a}{3} =$$

$$= (\text{пов. } A'B'C' \ldots G'H') \cdot \frac{a}{3},$$

и потому

$$W - W' = (\text{пов.} ABC \ldots GH) \cdot \frac{r}{3} - (\text{пов. } A'B'C' \ldots G'H') \cdot \frac{a}{3} = s \cdot \frac{r}{3} - s' \cdot \frac{a}{3},$$

гдѣ принимается пов. $ABC \ldots GH = s$, пов. $A'B'C' \ldots G'H' = s'$; придавъ же къ правой части послѣдняго равенства разность $s \cdot \frac{a}{3} - s \cdot \frac{a}{3}$, равную нулю, получимъ:

$$W - W' = s \cdot \frac{r}{3} - s' \cdot \frac{a}{3} + s \cdot \frac{a}{3} - s \cdot \frac{a}{3} = s \cdot \frac{r-a}{3} + \frac{a}{3}(s - s').$$

Такъ какъ каждая изъ разностей $r - a$ и $s - s'$ при неограниченномъ увеличенiи числа сторонъ многоугольниковъ стремится къ нулю (теоремы 1 и 11), то и разность $W - W'$ стремится къ нулю; а такъ какъ объемъ V шара количество постоянное и всегда заключается между W и W', то на основанiи теоремы 8 § 5 объемъ V есть общiй предѣлъ объемовъ W и W', т. е.

$$V = \lim W = \lim W'.$$

Теорема 14. Объемъ шара равняется поверхности его, умноженной на треть радiуса.

Доказательство. Сохраняя обозначенiя, принятыя нами въ предыдущей теоремѣ, имѣемъ:

$$\text{объемъ шара } V = \lim W = \lim (\text{пов. } ABC \ldots GH) \cdot \frac{r}{3};$$

а какъ $\lim$ (пов. $ABC \ldots GH$) есть то, что мы принимаемъ за поверхность шара, то

$$\text{объемъ шара } V = (\text{пов. шара}) \cdot \frac{r}{3} = 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

При рѣшенiи нѣкоторыхъ математическихъ вопросовъ трудно, часто и невозможно, непосредственно найти зависимость между данными величинами a, b, $c, \ldots$ и искомою m; тогда подобный вопросъ разрѣшается косвеннымъ путемъ, если величины a, b, $c, \ldots$ и m могутъ быть разсматриваемы, какъ предѣлы нѣкоторыхъ перемѣнныхъ x, y, $z, \ldots$ и v, и если зависимость между послѣдними извѣстна и выражается нѣкоторымъ уравненiемъ

$$v = f(x, y, z, \ldots);$$

тогда на основанiи вышеизложеннаго такая же зависимость должна существовать между данными a, b, $c, \ldots$ и искомою m, т. е. должно быть

$$m = f(a, b, c, \ldots).$$

Такой пріемъ рѣшенія математическаго вопроса называется способомъ предѣловъ.

Примѣръ. Требуется опредѣлить объемъ m усѣченнаго конуса по площадямъ a и b его основаній и по высотѣ h.

Рѣшеніе. Зная, что объемъ m усѣченнаго конуса и площади a и b его основаній суть предѣлы объема v и площадей x и y основаній правильной усѣченной пирамиды, вписанной въ данный усѣченный конусъ, и что

$$v = \frac{h}{3}(x + y + \sqrt{xy}),$$

будемъ имѣть:

$$\lim v = \lim \frac{h}{3}(x + y + \sqrt{xy}) = \frac{h}{3} \cdot \lim(x + y + \sqrt{xy}), \text{ т. е.}$$

$$m = \frac{h}{3}(a + b + \sqrt{ab}) = \frac{h}{3}(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr),$$

гдѣ R и r радіусы основаній усѣченнаго конуса.

§ 8. О неопредѣленныхъ выраженіяхъ. При опредѣленіи предѣловъ перемѣнныхъ мы иногда наталкиваемся на выраженія, кажущіяся на первый взглядъ лишенными математическаго смысла: таковы, напримѣръ, выраженія, принимающія въ предѣлѣ одинъ изъ видовъ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$ и другія. Такіе результаты называются неопредѣленностями; ихъ истинныя значенія вообще раскрываются послѣ предварительныхъ, болѣе или менѣе удачныхъ, преобразованій и надлежащихъ сокращеній и послѣдующаго перехода къ предѣламъ. Приведемъ примѣры.

Примѣръ 1. $\lim\left(\frac{x^2-4}{3x-6}\right)_{x=2} = \frac{0}{0}$; но $\frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x+2)\ (x-2)}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3}$;

$$\text{слѣдовательно } \left(\lim \frac{x^2-4}{3x-6}\right)_{x=2} = \lim \left(\frac{x+2}{3}\right)_{x=2} = \frac{4}{3}.$$

Примѣръ 2. $\lim\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\right)_{x=\pi} = \frac{0}{0}$; но $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, а потому

$$\lim\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\right)_{x=\pi} = \lim(\cos x)_{x=\pi} = -1.$$

Примѣръ 3. $\lim\left(\frac{1-\sin x}{\pi - 2x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$; но $1 - \sin x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

$$\text{слѣдовательно } \frac{1-\sin x}{\pi - 2x} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}},$$

а какъ $\lim \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$, $\lim\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$

(см. примѣръ въ теоремѣ 9 § 5), то

$$\lim\left(\frac{1-\sin x}{\pi - 2x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Примѣръ 4. $\lim\left(\frac{1}{1-x^2} : \frac{1-x}{x^3+1}\right)_{x=-1} = \infty : \infty$;

но $\frac{1}{1-x^2} : \frac{1-x}{x^3+1} = \frac{x^3+1}{(1-x^2)(1-x)} = \frac{x^2-x+1}{(1-x)^2}$; слѣдовательно

$$\lim\left(\frac{1}{1-x^2} : \frac{1-x}{x^3+1}\right)_{x=-1} = \lim\left(\frac{x^2-x+1}{(1-x)^2}\right)_{x=-1} = \frac{3}{4}.$$

Примѣръ 5. $\lim\left(\frac{3+\sqrt{2+5x^2}}{2x}\right)_{x=\infty} = \frac{\infty}{\infty}$; но данное выраженіе можетъ быть преобразовано въ выраженіе $\frac{3}{2x} + \sqrt{\frac{1}{2x^2} + \frac{5}{4}}$, что при $x = \infty$ даетъ $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Примѣръ 6. $\lim\left(\frac{2\sec x + 1}{\operatorname{tg} x - 3}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\infty}{\infty}$;

но $\frac{2\sec x + 1}{\operatorname{tg} x - 3} = \frac{\frac{2}{\cos x} + 1}{\frac{\sin x}{\cos x} - 3} = \frac{2 + \cos x}{\sin x - 3\cos x}$; слѣдовательно

$$\lim\left(\frac{2\sec x + 1}{\operatorname{tg} x - 3}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = \lim\left(\frac{2+\cos x}{\sin x - 3\cos x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Примѣръ 7. $\lim\left(\frac{1}{x-4} - \frac{6}{x^2-2x-8}\right)_{x=4} = \infty - \infty$; но приведя данныя дроби къ общему наименьшему знаменателю и сокративъ получаемую дробь на $x-4$, получимъ:

$$\frac{1}{x-4} - \frac{6}{(x-4)(x+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(x+2)} = \frac{1}{x+2},$$ что при $x=4$ даетъ $\frac{1}{6}$.

Примѣръ 8. $\lim[\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \operatorname{cotg} 2x]_{x=\pi} = 0 \cdot \infty$;

но $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$; слѣдовательно

$$\lim[\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \operatorname{cotg} 2x]_{x=\pi} = \lim\left(-\operatorname{tg} x \cdot \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}\right)_{x=\pi} =$$

$$= \lim\left(-\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2}\right)_{x=\pi} = -\frac{1}{2}.$$

III. Несоизмѣримыя числа.

§ 9. Несоизмѣримыя числа, разсматриваемыя какъ предѣлы. Величина, которая можетъ быть выражена опредѣленною совокупностью равныхъ и однородныхъ съ нею единицъ или равныхъ долей единицы, называется величиною соизмѣримою съ единицею или просто соизмѣримою.

Такъ число 3 соизмѣримо съ единицею, ибо оно выражаетъ совокупность трехъ отвлеченныхъ единицъ; дробь $\frac{5}{7}$ соизмѣрима съ числомъ 1, ибо она выражаетъ совокупность пяти такихъ равныхъ долей, какихъ единица содержитъ семь, такъ что одна такая доля можетъ служить единицею мѣры данной дроби. Вообще, двѣ однородныя величины, имѣющія общую мѣру, т. е. величины, для которыхъ можно выбрать нѣкоторую единицу мѣры, заключающуюся въ каждой изъ нихъ по цѣлому числу разъ, называются соизмѣримыми между собою.

Величина, которая не можетъ быть выражена опредѣленною совокупностью равныхъ и однородныхъ съ нею единицъ или равныхъ долей единицы, называется величиною несоизмѣримою съ единицею или просто несоизмѣримою. Такъ, напримѣръ, квадратный корень изъ неполнаго квадрата, есть число несоизмѣримое, потому что такой корень, какъ извѣстно изъ предшествующаго курса алгебры, не можетъ быть выраженъ точнымъ образомъ ни цѣлымъ числомъ, ни обыкновенною дробью, ни даже періодическою десятичною, т. е. никакою опредѣленною совокупностью равныхъ долей единицы. Вообще, двѣ однородныя величины называются несоизмѣримыми между собою, если онѣ не имѣютъ общей мѣры, которая заключалась бы въ каждой изъ нихъ по цѣлому числу разъ, какою бы малою мы ни выбрали эту единицу мѣры; таковы, напримѣръ, діагональ квадрата и его сторона, какъ это извѣстно изъ геометріи.

Для полученія отношенія двухъ соизмѣримыхъ величинъ надо только каждую изъ нихъ измѣрить выбранною общею и однородною съ ними единицею, т. е. опредѣлить число содержанія этой единицы мѣры въ каждой изъ нихъ, и получаемыя числа раздѣлить одно на другое. Напримѣръ, если однородныя величины A и B имѣютъ общую мѣру k, содержающуюся въ A цѣлое число m разъ, а въ B — цѣлое число n разъ, то

$$A = km,\ B = kn,\ \text{откуда отношеніе}\ \frac{A}{B} = \frac{km}{kn} = \frac{m}{n}.$$

Найденное отношеніе $\frac{m}{n}$ есть число точное, соизмѣримое съ единицей, ибо оно составлено изъ $\frac{1}{n}$ доли единицы, взятой слагаемымъ m разъ.

Если же двѣ однородныя величины A и B несоизмѣримы между собою, то ихъ отношеніе не можетъ быть найдено точнымъ образомъ, потому что мы ихъ не можемъ измѣрить никакою общею единицею мѣры; слѣдовательно ихъ отношеніе $\frac{A}{B}$ также несоизмѣримое число; но всегда возможно найти приближенное ихъ отношеніе, притомъ съ желаемою степенью точности, т. е. можно найти такое соизмѣримое число, которое отличалось бы отъ несоизмѣримаго отношенія $\frac{A}{B}$ на произвольно малое число.

Дѣйствительно, раздѣлимъ B (т. е. послѣдующій членъ искомаго отношенія) на n равныхъ частей и пусть будетъ k одна изъ нихъ; тогда $B = kn$, а вслѣдствіе несоизмѣримости A и B, величина k будетъ содержаться въ A нѣкоторое цѣлое число m разъ, но съ остаткомъ меньшимъ, чѣмъ k, поэтому

$$A > mk, \text{ но } A < (m+1)k, \text{ т. е. } mk < A < (m+1)k;$$

а раздѣливъ всѣ члены этого неравенства на B, что равно nk, получимъ:

$$\frac{mk}{nk} < \frac{A}{B} < \frac{(m+1)k}{nk} \text{ или } \frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{n}.$$

Этотъ результатъ показываетъ, что несоизмѣримое отношеніе $\frac{A}{B}$ заключается между двумя соизмѣримыми числами $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, численная разность которыхъ равна $\frac{1}{n}$, а потому каждая изъ разностей $\frac{A}{B} - \frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n} - \frac{A}{B}$ меньше, чѣмъ $\frac{1}{n}$, т. е. каждое изъ соизмѣрныхъ чиселъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ отличается отъ несоизмѣримаго числа $\frac{A}{B}$ меньше, чѣмъ на $\frac{1}{n}$, и потому каждое изъ нихъ есть приближенное значеніе отношенія $\frac{A}{B}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$; но такъ какъ число n можетъ быть выбрано произвольно большимъ, а слѣдовательно дробь $\frac{1}{n}$ — произвольно малою, то и заключаемъ, что можно найти приближенное отношеніе несоизмѣримыхъ величинъ A и B съ желаемою степенью точности.

Изложенное показываетъ, что для несоизмѣримаго числа $\frac{A}{B}$ всегда возможно найти такія два соизмѣримыхъ числа, между которыми оно бы заключалось и разность которыхъ можетъ быть выбрана произвольно малою.

При неограниченномъ увеличеніи n (причемъ, очевидно, и m неограниченно увеличивается, какъ это видно изъ самаго способа полученія m и n) соизмѣримыя числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ можно разсматривать, какъ перемѣнныя, причемъ $\frac{m}{n}$ приближается къ $\frac{A}{B}$, увеличиваясь, а $\frac{m+1}{n}$ приближается къ $\frac{A}{B}$, уменьшаясь, ибо $\frac{m}{n}$ всегда меньше, чѣмъ $\frac{A}{B}$, а $\frac{m+1}{n}$ всегда больше, чѣмъ $\frac{A}{B}$ и $\frac{A}{B}$ — число постоянное; а такъ какъ разность между $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m}{n}$, т. е. $\frac{1}{n}$, можно сдѣлать безконечно — малою и постоянное число $\frac{A}{B}$ всегда заключается между ними, то на основаніи теоремы 8 § 5 несоизмѣримое число $\frac{A}{B}$ надо считать общимъ предѣломъ перемѣнныхъ чиселъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, т. е. $\lim\frac{m}{n}=\lim\frac{m+1}{n}=\frac{A}{B}$ при безконечно-большомъ n.

Такими несоизмѣримыми числами суть также всѣ ирраціональные корни, напримѣръ, $\sqrt[k]{N}$, если N не есть точная k-ая степень какого-либо соизмѣримаго числа. Дѣйствительно, допустимъ, что $\sqrt[k]{N}$ есть число соизмѣримое, а слѣдовательно точное, напримѣръ, что $\sqrt[k]{N}=\frac{p}{q}$, гдѣ p и q числа цѣлыя; тогда должно бы было быть $N=\left(\frac{p}{q}\right)^k$, т. е. N было бы точная k-ая степень соизмѣримаго числа $\frac{p}{q}$, что противорѣчило бы условію; слѣдовательно $\sqrt[k]{N}$ при сдѣланномъ условіи число несоизмѣримое.

Но и въ этомъ случаѣ всегда можно найти такія два соизмѣримыхъ числа, между которыми заключалось бы ирраціональное, а слѣдовательно несоизмѣримое число $\sqrt[k]{N}$, и разность кокорыхъ можетъ быть выбрана произвольно малою. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что желаемъ найти $\sqrt[k]{N}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, гдѣ n цѣлое число; тогда, полагая, что $\sqrt[k]{n^kN}$, вычисленный съ точностью до 1 и съ недостаткомъ, равенъ m, получимъ:

$$m<\sqrt[k]{n^kN}<m+1,\text{ откуда }\frac{m}{n}<\frac{\sqrt[k]{n^kN}}{n}<\frac{m+1}{n}$$

или, подведя знаменатель n подъ знакъ радикала:

$$\frac{m}{n}<\sqrt[\kappa]{N}<\frac{m+1}{n}.$$

Этотъ результатъ показываетъ, что ирраціональное число $\sqrt[\kappa]{N}$ заключается между соизмѣримыми числами $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, численная разность которыхъ есть $\frac{1}{n}$, а потому каждая изъ разностей $\sqrt[\kappa]{N}-\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}-\sqrt[\kappa]{N}$ меньше, чѣмъ $\frac{1}{n}$, т. е. каждое изъ соизмѣримыхъ чиселъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ отличается отъ $\sqrt[\kappa]{N}$ меньше, чѣмъ на $\frac{1}{n}$, и потому каждое изъ нихъ есть приближенное значеніе ирраціональнаго числа $\sqrt[\kappa]{N}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$; но такъ какъ n можно выбрать произвольно большимъ, значитъ дробь $\frac{1}{n}$ — произвольно малою, то и заключаемъ, что можно найти приближенное значеніе ирраціональнаго корня $\sqrt[\kappa]{N}$ съ желаемою степенью точности.

Здѣсь опять видимъ, что для несоизмѣримаго числа $\sqrt[\kappa]{N}$ всегда можно найти такія два соизмѣримыхъ числа, между которыми оно бы заключалось и разность которыхъ можетъ быть выбрана произвольно малою.

При неограниченномъ увеличеніи n (причемъ и m неограниченно увеличивается) соизмѣримыя числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ можно разсматривать какъ перемѣнныя, причемъ $\frac{m}{n}$ приближается къ $\sqrt[\kappa]{N}$, увеличиваясь, а $\frac{m+1}{n}$ приближается къ $\sqrt[\kappa]{N}$, уменьшаясь, ибо $\sqrt[\kappa]{N}$ число постоянное и $\frac{m}{n}$ всегда меньше, чѣмъ $\sqrt[\kappa]{N}$, но $\frac{1+m}{n}$ всегда больше, чѣмъ $\sqrt[\kappa]{N}$; а какъ разность между $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m}{n}$ можно сдѣлать произвольно малою, то по теоремѣ 8 § 5 радикалъ $\sqrt[\kappa]{N}$ надо считать общимъ предѣломъ перемѣнныхъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, т. е. $\lim \frac{m}{n}=\lim\frac{m+1}{n}=\sqrt[\kappa]{N}$ при безконечно большомъ n.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что всякое несоизмѣримое число надо считать предѣломъ, къ которому стремится безконечный рядъ послѣдовательно возрастающихъ или послѣдовательно убывающихъ соизмѣримыхъ чиселъ, представляющихъ собою его послѣдовательныя приближенныя значенія, вычисленныя съ возрастающею степенью точности.

Напримѣръ, вычисляя $\sqrt{2}$ послѣдовательно съ точностью до $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \ldots$, получимъ два ряда чиселъ:

(1) .... 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213 и т. д.

(2) .... 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; 1,414214 и т. д.,

изъ коихъ первый представляетъ послѣдовательныя приближенныя значенія корня $\sqrt{2}$ съ недостаткомъ, а второй — послѣдовательныя приближенія того же радикала съ избыткомъ, такъ что значеніе $\sqrt{2}$ заключается между двумя соотвѣтственными числами этихъ рядовъ; разность между такими двумя числами послѣдовательно уменьшается и можетъ быть сдѣлана произвольно малою, ибо разность эта имѣетъ видъ $\frac{1}{10^n}$, гдѣ n можетъ быть выбрано произвольно большимъ; слѣдовательно $\sqrt{2}$ по теоремѣ 8 § 5 есть общій предѣлъ соизмѣримыхъ чиселъ каждаго изъ рядовъ (1) и (2).

§ 10. Смыслъ степени a^x при несоизмѣримомъ показателѣ x. Изложенное въ предыдущемъ § даетъ намъ возможность установить, что̀ слѣдуетъ понимать подъ степенью a^x при несоизмѣримомъ показателѣ x.

Положимъ, что числа ряда

$$(p) \ldots \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n, \mu_{n+1}, \ldots$$

представляютъ послѣдовательныя соизмѣримыя приближенія несоизмѣримаго числа x, вычисленныя съ возрастающею степенью точности либо всѣ съ недостаткомъ, либо всѣ съ избыткомъ; тогда x по § 9 надо считать предѣломъ чиселъ ряда (p) и потому по теоремѣ 14 § 5

$$\lim a^{\mu_n} = a^x,$$

когда n, т. е. номеръ мѣста количества μ_n въ ряду (p), неограниченно увеличивается и слѣдовательно μ_n стремится къ своему предѣлу x. Это значитъ, что подъ a^x при несоизмѣримомъ показателѣ x слѣдуетъ понимать предѣлъ, къ которому стремится степень даннаго основанія, когда показатель ея принимаетъ послѣдовательно приближенныя соизмѣримыя значенія несоизмѣримаго показателя x, вычисленныя съ возрастающею степенью точности либо съ недостаткомъ, либо съ избыткомъ.

§ 11. Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами. Представленіе о несоизмѣримомъ числѣ, какъ о предѣлѣ ряда соизмѣримыхъ чиселъ, неограниченно къ нему приближающихся, даетъ намъ возможность 1) установить, что̀ слѣдуетъ разумѣть подъ равенствомъ двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ, и 2) показать, что всѣ правила дѣйствій, выведенныя нами для раціональныхъ, а слѣдовательно соизмѣримыхъ чиселъ, вполнѣ примѣнимы и къ числамъ несоизмѣримымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ по теоремѣ 10 § 6, что если двѣ перемѣнныя величины при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ равны между собою, то и ихъ предѣлы равны; слѣдовательно два несоизмѣримыхъ числа надо считать равными, если всякія два приближенныхъ ихъ значенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою степенью точности, равны между собою.

Положимъ теперь, что надъ несоизмѣримыми числами a, b, c, d, . . . надо совершить нѣкоторый рядъ дѣйствій, указанныхъ функціею $f(a, b, c, d, \ldots)$, и что α, β, γ, δ, . . . суть соотвѣтственно ихъ приближенныя значенія, вычисленныя съ произвольною степенью точности и разсматриваемыя по § 9, какъ перемѣнныя величины, имѣющія своими предѣлами a, b, c, d, . . .; тогда по § 6

$$(m). \ldots \lim f(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots) = f(a, b, c, d, \ldots),$$

т. е. подъ результатомъ дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами надо понимать предѣлъ, къ которому стремится результатъ тѣхъ же дѣйствій надъ числами соизмѣримыми, представляющими собою приближенныя значенія данныхъ несоизмѣримыхъ чиселъ, вычисленныя съ возрастающею степенью точности.

На основаніи этого можно показать, что всѣ правила дѣйствій и преобразованій, выведенныя для раціональныхъ, а слѣдовательно соизмѣримыхъ, чиселъ, могутъ быть распространены и на несоизмѣримыя числа. Мы здѣсь ограничимся лишь нѣсколькими примѣрами:

1) Докажемъ, что произведеніе несоизмѣримыхъ чиселъ не зависитъ отъ порядка его сомножителей.

Положимъ, что α и β суть приближенныя соизмѣримыя значенія несоизмѣримыхъ чиселъ a и b, вычисленныя съ произвольною степенью точности; тогда для соизмѣримыхъ чиселъ α и β равенство $\alpha\beta = \beta\alpha$ вѣрно; слѣдовательно на основаніи теоремы 10 § 5

$$\lim \alpha\beta = \lim \beta\alpha;$$

а какъ, по теоремѣ 6 § 5, $\lim \alpha\beta = \lim \alpha . \lim \beta = ab$, $\lim \beta\alpha = ba$, то $ab = ba$.

2) Докажемъ, что извѣстное намъ правило дѣленія многочлена на одночленъ примѣнимо и къ несоизмѣримымъ числамъ. Положимъ, что a, b, c, d, . . . несоизмѣримыя числа, приближенія которыхъ, вычисленныя съ произвольною степенью точности, соотвѣтственно суть соизмѣримыя числа α, β, γ, δ, . . .; тогда равенство

$$\frac{\beta - \gamma + \delta + \ldots}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} + \ldots$$

вѣрно; слѣдовательно на основаніи теоремъ 4 и 5 § 5

$$\lim \frac{\beta - \gamma + \delta + \ldots}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} + \ldots\right) = \lim \frac{\beta}{\alpha} - \lim \frac{\gamma}{\alpha} + \lim \frac{\delta}{\alpha} + \ldots$$

или на основаніи равенства (m)

$$\frac{b - c + d + \ldots}{a} = \frac{b}{a} - \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \ldots$$

3) Докажемъ, что $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ и въ случаѣ несоизмѣримыхъ количествъ a и b.

Пусть будутъ α и β приближенныя соизмѣримыя значенія несоизмѣримыхъ количествъ a и b, вычисленныя съ произвольною степенью точности; тогда равенство $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ вѣрно; слѣдовательно

$$\lim(\alpha - \beta)^2 = \lim(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \lim \alpha^2 - \lim 2\alpha\beta + \lim \beta^2,$$

$$\text{т. е. } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

4) Докажемъ, что $a^m : a^n = a^{m-n}$ и при несоизмѣримыхъ m и n. Дѣйствительно, положимъ, что числа ряда

$$(q) \; . \; . \; . \; . \; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \; . \; . \; . \; \mu_k, \mu_{k+1}, \; . \; . \; .$$

представляютъ послѣдовательныя приближенныя и соизмѣримыя значенія несоизмѣримаго числа m, а числа ряда

$$(r) \; . \; . \; . \; . \; \nu_1, \nu_2, \nu_3, \; . \; . \; . \; \nu_k, \nu_{k+1}, \; . \; . \; .$$

послѣдовательныя приближенныя и соизмѣримыя значенія несоизмѣримаго числа n, причемъ оба ряда вычислены съ возрастающею степенью точности; тогда, по § 9, m надо считать предѣломъ для μ_k, n — предѣломъ для ν_k, когда номеръ k мѣста чиселъ μ_k и ν_k въ рядахъ (q) и (r) неограниченно увеличивается. При соизмѣримыхъ же показателяхъ μ_k и ν_k равенство $a^{\mu_k} : a^{\nu_k} = a^{\mu_k - \nu_k}$ вѣрно; слѣдовательно и

$$\lim\left(a^{\mu_k} : a^{\nu_k}\right) = \lim a^{\mu_k - \nu_k};$$

а какъ по теоремамъ 7 и 14 § 5

$$\lim\left(a^{\mu_k} : a^{\nu_k}\right) = \lim a^{\mu_k} : \lim a^{\nu_k} = a^m : a^n,$$

$$\lim\left(a^{\mu_k - \nu_k}\right) = a^{\lim(\mu_k - \nu_k)} = a^{m-n}, \text{ то } a^m : a^n = a^{m-n}.$$

IV. Мнимыя выраженія.

§ 12. Мнимыя выраженія, какъ средство обобщеній. Мы знаемъ, что корни четныхъ степеней изъ отрицательныхъ количествъ невозможны, а потому такіе корни называются мнимыми.

Хотя мнимыя выраженія лишены всѣхъ признаковъ величинъ, тѣмъ не менѣе ихъ принято называть мнимыми величинами и для общности условились распространять на нихъ всѣ правила дѣйствій, которыя примѣняются къ вещественнымъ количествамъ.

Съ мнимыми величинами мы впервые сталкиваемся при рѣшеніи квадратныхъ уравненій. Мы тамъ видѣли, что квадратное уравненіе при нѣкоторыхъ условіяхъ имѣетъ два возможныхъ рѣшенія, при другихъ одно только, а иногда оно и вовсе не имѣетъ рѣшеній. Когда уравненіе $x^2 + px + q = 0$ имѣло одно только возможное рѣшеніе, мы условились говорить, что оно имѣетъ два рѣшенія, но равныя, на томъ основаніи, что оба его корня

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

различные при $p^2 > 4p$, стремятся къ равенству между собою при приближеніи p^2 къ $4q$ (или обратно) и становятся равными, когда $p^2 = 4q$.

Тамъ же мы говорили, что квадратное уравненіе вовсе не имѣетъ рѣшеній, когда корни его оказываются выраженіями, лишенными всѣхъ признаковъ величинъ, почему мы такія выраженія и называемъ мнимыми. Введеніе мнимыхъ величинъ въ математическія выкладки, наравнѣ съ вещественными, позволяетъ намъ обобщать математическія вопросы и сказать, напримѣръ, что квадратное уравненіе всегда имѣетъ два корня, которые при извѣстныхъ условіяхъ могутъ оказаться мнимыми; что не только сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней, но и сумма одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ можетъ быть разложена на множители, напримѣръ $x^2 + a^2 = (x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$, и прочее.

Такимъ образомъ видимъ, что введенiе въ вычисленiя мнимыхъ величинъ даетъ намъ средство обобщать алгебраическiе вопросы подобно тому, какъ введенiе отрицательныхъ величинъ служитъ прекраснымъ средствомъ подобныхъ обобщенiй.

Кромѣ того, дѣйствiя надъ мнимыми величинами, какъ увидимъ, даютъ иногда вещественные, т. е. возможные результаты; поэтому на мнимыя величины слѣдуетъ смотрѣть какъ на математическiя знакоположенiя, весьма полезныя и въ томъ отношенiи, что выводъ многихъ математическихъ истинъ основанъ именно на разсмотрѣнiи мнимыхъ величинъ.

Такъ какъ мнимыя выраженiя, представляющiя собою корни четныхъ степеней изъ отрицательныхъ величинъ, приводятся, какъ увидимъ ниже (§ 13), къ мнимымъ выраженiямъ, содержащимъ квадратные корни изъ отрицательныхъ величинъ, то мы разсмотримъ послѣднiя.

Условившись, какъ уже замѣчено выше, распространять на мнимыя количества всѣ правила дѣйствiй, примѣняемыя къ вещественнымъ величинамъ, мы квадратный корень изъ отрицательной величины можемъ преобразовать въ корень квадратный изъ -1, умноженный на вещественное количество, разсматривая отрицательное подкоренное количество какъ произведенiе изъ -1 на положительное количество и извлекая затѣмъ корень изъ каждаго множителя отдѣльно. Такъ,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = 2\sqrt{-1}; \quad \sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2.(-1)} = a\sqrt{-1};$$

$$\sqrt{-b} = \sqrt{b.(-1)} = \sqrt{b}.\sqrt{-1}; \quad \sqrt{-3} = \sqrt{3.(-1)} = \sqrt{3}.\sqrt{-1} \text{ и прочее,}$$

гдѣ $\sqrt{b}$ и $\sqrt{3}$ вещественные множители при мнимомъ знакѣ $\sqrt{-1}$, который часто обозначается буквою i (первою буквою слова imaginaire), такъ что, напримѣръ, $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$; $\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$ и прочее.

Выраженiе $\sqrt{-1}$ часто называется мнимою единицею.

Обозначая $\sqrt{-1}$ чрезъ i, мы подъ i^2 должны понимать -1. Дѣйствительно, распространяя всѣ дѣйствiя надъ вещественными выраженiями и на мнимыя, мы согласно съ опредѣленiемъ извлеченiя корней подъ выраженiемъ $\sqrt{-1}$ должны понимать такое количество, квадратъ котораго равенъ подкоренному количеству, т. е. -1, значитъ мы должны принять, что $i^2 = -1$.

Если къ мнимой величинѣ вида bi, гдѣ подъ i всегда будемъ понимать $\sqrt{-1}$, а подъ b — количество вещественное, придадимъ вещественное количество a, то получимъ мнимое выраженiе

$$(1) \ldots . a + bi,$$

называемое комплекснымъ и представляющее собою общій видъ мнимой величины. Выраженіе это можетъ служить и общимъ видомъ всякаго количества, какъ вещественнаго, такъ и мнимаго, ибо b можетъ имѣть любое значеніе: если $b = 0$ то и $bi = 0$ *), и выраженіе (1) приводится тогда къ вещественнной величинѣ a; если $b \gtreqless 0$, то выраженіе это даетъ мнимую величину.

Два комплексныхъ выраженія, отличающихся между собою только знаками при мнимомъ членѣ называются сопряженными. Таковы, напримѣръ,

$a + bi$ и $a - bi$; $3 + 2i$ и $3 - 2i$; $-3 + 8i$ и $-3 - 8i$ и прочее.

Если комплексное выраженіе $a + bi$ равно нулю, то необходимо, чтобы было отдѣльно $a = 0$ и $b = 0$. Дѣйствительно, если $a + bi = 0$, то $a = -bi$, откуда $a^2 = (-b)^2 . i^2 = b^2 . (-1) = -b^2$, и слѣдовательно $a^2 + b^2 = 0$, гдѣ a^2 и b^2, какъ квадраты вещественныхъ количествъ, положительныя величины; а какъ сумма положительныхъ количествъ только тогда можетъ равняться нулю, когда каждое слагаемое отдѣльно равно нулю, то заключаемъ, что $a = 0$ и $b = 0$.

Два комплексныхъ выраженія $a + bi$ и $a' + b'i$ считаются равными, если равны какъ вещественные ихъ члены a и a', такъ и множители b и b' при мнимомъ знакѣ i.

Обратно, если два комплексныхъ выраженія равны, то равны и ихъ вещественные члены, и коэффиціенты при мнимомъ знакѣ i. Дѣйствительно, если

$$a + bi = a' + b'i, \text{ то } (a - a') + (b - b')i = 0,$$

а тогда по только-что доказанному должно быть:

$$a - a' = 0 \text{ и } b - b' = 0, \text{ откуда } a = a',\ b = b'.$$

Если имѣемъ комплексное выраженіе $a + bi$, то положительное значеніе квадратнаго корня изъ суммы квадратовъ его вещественнаго члена и коэффиціента при i, т. е. $+\sqrt{a^2 + b^2}$, называется модулемъ даннаго комплекснаго выраженія.

§ 13. Дѣйствія надъ комплексными выраженіями въ алгебраическомъ видѣ. Обратимся теперь къ дѣйствіямъ надъ мнимыми выраженіями вида $a + bi$, но предварительно разсмотримъ значенія цѣлыхъ степеней отъ i, а для этого замѣтимъ себѣ только первыя 4 степени его:

---

*) Такѣ какъ по вышеусловленному $b\sqrt{-1}$ и $\sqrt{-b^2}$ тождественныя выраженія и какъ $\sqrt{-b^2}$ равняется нулю только при $b = 0$, то и $b\sqrt{-1}$ надо принять равнымъ нулю при $b = 0$.

$i^1 = i$; $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$; $i^3 = i^2 . i = -i$; $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1$; всякая же другая цѣлая степень отъ i приводится къ одной изъ этихъ четырехъ. Въ самомъ дѣлѣ, если показатель при i болѣе 4, то его можно представить подъ видомъ $4n + r$, гдѣ n частное отъ дѣленія даннаго показателя на 4, r — остатокъ отъ этого дѣленія и слѣдовательно есть одно изъ чиселъ 0, 1, 2 или 3, а потому

$$i^{4n+r} = (i^4)^n . i^r = (+1)^n . i^r = i^r,$$

откуда видно, что для полученія значенія какой-либо цѣлой степени отъ i достаточно возвысить i въ степень, показатель которой есть остатокъ отъ дѣленія даннаго показателя на 4. Такъ, напримѣръ,

$$i^{367} = i^3 = -i;\ i^{216} = +1;\ i^{209} = i^1 = i;\ i^{94} = i^2 = -1;$$

$$i^{-17} = i^{-4.5+3} = i^3 = -i.$$

I. Сложеніе и вычитаніе комплексныхъ выраженій. Алгебраическая сумма мнимыхъ величинъ по вышеусловленному выражается по тѣмъ же правиламъ, какъ алгебраическая сумма вещественныхъ количествъ. Такъ, напримѣръ,

$$(a + bi) + (a_1 - b_1 i) - (a_2 - b_2 i) = a + bi + a_1 - b_1 i - a_2 + b_2 i =$$
$$= (a + a_1 - a_2) + (b - b_1 + b_2)i,$$

т. е. алгебраическая сумма мнимыхъ величинъ вида $a + bi$ есть выраженіе того же вида; въ частномъ случаѣ, когда коэффиціентъ при i равенъ нулю, т. е. когда $b - b_1 + b_2 = 0$, наша сумма будетъ вещественною величиною. Такъ, сумма двухъ сопряженныхъ мнимыхъ величинъ всегда величина вещественная, напримѣръ

$$(a + bi) + (a - bi) = a + bi + a - bi = 2a.$$

Примѣчаніе. Во избѣжаніе недоразумѣній и даже ошибокъ при рѣшеніи нижеслѣдующихъ задачъ съ мнимыми выраженіями квадратные корни изъ отрицательныхъ количествъ слѣдуетъ преобразовать предварительно въ произведенія корней съ положительными подкоренными количествами на i на основаніи тождества: $\sqrt{-a} = \sqrt{-1 . a} = i\sqrt{a}$, а затѣмъ подъ квадратнымъ корнемъ изъ положительнаго числа понимать одно только ариѳметическое его значеніе, т. е. положительное число, квадратъ котораго равенъ подкоренному числу.

Примѣры.

1) $3\sqrt{-27} - 4\sqrt{-\frac{3}{4}} + 3\sqrt{-75} - \frac{1}{2}\sqrt{-48} = 3i\sqrt{27} - 4i\sqrt{\frac{3}{4}} +$
$+ 3i\sqrt{75} - \frac{1}{2}i\sqrt{48} = 9i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + 15i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} = 20i\sqrt{3}.$

2) $\left(b+\sqrt{-\frac{1}{4}a}\right)-\left(2b-\sqrt{-\frac{1}{a}}\right)-\left(c-b+\sqrt{-a^{-1}}\right)=$
$$=b+i\sqrt{\frac{a}{4}}-2b+i\sqrt{\frac{1}{a}}-c+b-i\sqrt{\frac{1}{a}}=-c+\frac{i\sqrt{a}}{2}.$$

3) $\sqrt{-1-2x-x^2}+\sqrt{-1+2x-x^2}=\sqrt{-(1+x)^2}+\sqrt{-(1-x)^2}=$
$$=(1+x)i+(1-x)i=2i.$$

4) $-\sqrt{-15}+\sqrt{-135}-\sqrt{-60}+3\sqrt{-\frac{5}{3}}-10\sqrt{-\frac{3}{5}}$. Отв.$-i\sqrt{15}$.

5) $\sqrt{-\frac{4}{9}a^2}-\sqrt{-a^{-2}}+a^{-1}\sqrt{-1}$. Отв. $\frac{2}{3}ai$.

6) $ab(1+b)i\sqrt{b}-\left(\frac{b^2}{a}\sqrt{-a^4b}-2\sqrt{b}+4a\sqrt{-b^3}-\frac{3ab^2\sqrt{-1}}{\sqrt{b}}\right)$. Отв. $2\sqrt{b}$.

2. Умноженіе комплексныхъ выраженій. Умноживъ $a+bi$ на $a'+b'i$, получимъ:
$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'+a'bi+ab'i+bb'i^2=aa'+a'bi+ab'i-bb'=$$
$$=(aa'-bb')+(a'b+ab')i,$$
т. е. мнимое выраженіе того же вида; въ частномъ случаѣ, когда коэффиціентъ при i, т. е. $a'b+ab'$, обращается въ нуль, найденное произведеніе будетъ вещественнымъ количествомъ. Такъ, напримѣръ,
$$(3+2i)(6-4i)=18+12i-12i-8i^2=18+8=26.$$

Произведеніе двухъ сопряженныхъ мнимыхъ величинъ всегда количество вещественное, напримѣръ,
$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2, \text{ ибо } i^2=-1.$$

Этотъ результатъ показываетъ, что сумма двухъ квадратовъ можетъ быть разложена на два мнимыхъ множителя. Такъ,
$$4+x^2=(2+xi)(2-xi);\ p^2+q^4=(p+q^2i)(p-q^2i) \text{ и прочее.}$$

Примѣры.

1) $\sqrt{-a}\,.\sqrt{-b}=i\sqrt{a}\,.\,i\sqrt{b}=i^2\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}.$

2) $\left(\sqrt{-n}+n\sqrt{-nx}-x\sqrt{-\frac{n}{x}}\right).\sqrt{-\frac{1}{n}}=$
$$=\left(i\sqrt{n}+ni\sqrt{nx}-xi\sqrt{\frac{n}{x}}\right).i\sqrt{\frac{1}{n}}=$$
$$=i^2+ni^2\sqrt{x}-xi^2\sqrt{\frac{1}{x}}=-1-n\sqrt{x}+\sqrt{x}.$$

3) $(3a\sqrt{-a}-ax-6\sqrt{3a}-2x\sqrt{-3})(3\sqrt{-a}+x)=$
$$=(3ai\sqrt{a}-ax-6\sqrt{3a}-2xi\sqrt{3})(3i\sqrt{a}+x)=$$

$$= 9a^2i^2 - 3axi\sqrt{a} - 18ai\sqrt{3} - 6xi^2\sqrt{3a} + 3axi\sqrt{a} - ax^2 - 6x\sqrt{3a} +$$
$$- 2x^2i\sqrt{3} = -9a^2 - ax^2 - (18a\sqrt{3} + 2x^2\sqrt{3})i.$$

4) $(x + i\sqrt{a - x^2})(x - i\sqrt{a - x^2}) = x^2 - i^2(a - x^2) = x^2 + (a - x^2) = a.$

5) $(a\sqrt{-b} + 2\sqrt{-a} + 3b\sqrt{-c})(a\sqrt{-b} - 2\sqrt{-a} - 3b\sqrt{-c}).$

Отв. $4a + 9b^2c + 12b\sqrt{ac} - a^2b.$

6) $(\sqrt{-10} - \sqrt{-5} + \sqrt{-2})(\sqrt{-10} + \sqrt{-5} - \sqrt{-2}).$

Отв. $-3 - 2\sqrt{10}.$

7) $\sqrt{\sqrt{-5}+2}\,.\,\sqrt{\sqrt{-5}-2} = \sqrt{(\sqrt{-5}+2)(\sqrt{-5}-2)} =$
$$= \sqrt{-5-4} = 3i.$$

8) $\sqrt{2\sqrt{5{,}5} + 3\sqrt{-3}}\,.\,\sqrt{2\sqrt{5{,}5} - 3\sqrt{-3}}.$ Отв. 7

9) $\sqrt[3]{-10\sqrt{-6} - 2\sqrt{-22}}\,.\,\sqrt[3]{-10\sqrt{-6} + 2\sqrt{-22}}$ Отв. -8.

3. Дѣленіе комплексныхъ выраженій. Чтобы раздѣлить $a+bi$ на $a' + b'i$, напишемъ частное въ видѣ дроби и умножимъ числитель и знаменатель на мнимую величину, сопряженную со знаменателемъ, тогда получимъ:

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{aa'+bb'+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\,.\,i,$$

т. е. частное есть мнимое выраженіе того же вида; оно будетъ вещественнымъ, когда коэффиціентъ при i обращается въ нуль, а это будетъ тогда, когда числитель $a'b - ab' = 0$, откуда $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, т. е. когда вещественные члены данныхъ мнимыхъ выраженій пропорціональны коэффиціентамъ при i; въ этомъ случаѣ частное равно одному изъ равныхъ отношеній $\frac{a}{a'}$ или $\frac{b}{b'}$. Дѣйствительно, полагая $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = n$, получимъ: $a = a'n$, $b = b'n$, слѣдовательно

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{a'n+b'ni}{a'+b'i} = \frac{(a'+b'i)n}{a'+b'i} = n = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Примѣры.

1) $\sqrt{-a} : \sqrt{b} = i\sqrt{a} : \sqrt{b} = i\sqrt{\frac{a}{b}}.$

2) $(\sqrt{a+1} : 2\sqrt{-a-1}) : \sqrt{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{a+1} : 2i\sqrt{a+1}) : i\sqrt{\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{1}{2i} : i\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2i^2\sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) $(6\sqrt{-1}-4\sqrt{-3}+\sqrt{6}-9):-3\sqrt{-2}=\frac{6i-4i\sqrt{3}+\sqrt{6}-9}{-3i\sqrt{2}}=$

$=-\frac{6i}{3i\sqrt{2}}+\frac{4i\sqrt{3}}{3i\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6}}{3i\sqrt{2}}+\frac{9}{3i\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{3i}+\frac{3}{i\sqrt{2}}=$

$=-\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{i\sqrt{3}}{3i^2}+\frac{3i\sqrt{2}}{2i^2}=-\sqrt{2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)i.$

4) $(3a\sqrt{-a}-ax-6\sqrt{3a}-2x\sqrt{-3}):(3\sqrt{-a}-x)=$

$$=\frac{(3ai\sqrt{a}-ax-6\sqrt{3a}-2xi\sqrt{3})(-3i\sqrt{a}-x)}{(3i\sqrt{a}-x)(-3i\sqrt{a}-x)}=$$

$$=\frac{-9a^2i^2+3axi\sqrt{a}+18ai\sqrt{3}+6xi^2\sqrt{3a}-3axi\sqrt{a}+ax^2+6x\sqrt{3a}+2x^2i\sqrt{3}}{-9ai^2+x^2}=$$

$$=\frac{9a^2+ax^2+18ai\sqrt{3}+2x^2i\sqrt{3}}{9a+x^2}=\frac{9a(a+2i\sqrt{3})+x^2(a+2i\sqrt{3})}{9a+x^2}=a+2i\sqrt{3}.$$

5) $\dfrac{\sqrt{a-b}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}-\sqrt{b-a}}$ Отв. $\sqrt{-1}$ при $a>b$; $-\sqrt{-1}$ при $a<b$.

6) $-2\sqrt{-1}:(1-\sqrt{-1})$. Отв. $1-\sqrt{-1}$.

7) $2\sqrt{2i}:(1+i)$. Отв. ± 2.

8) $\sqrt{\sqrt{-6}-\sqrt{-2}}:\sqrt{\sqrt{-6}+\sqrt{-2}}$. Отв. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

9) $\left(\dfrac{a\sqrt{-1}-x}{a+x\sqrt{-1}}+\dfrac{a\sqrt{-1}+x}{a-x\sqrt{-1}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{-2}}{6-\sqrt{-6}}+\dfrac{\sqrt{-0,5}}{3+\sqrt{-1,5}}\right)$. Отв. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

10) $\dfrac{14-\sqrt{15}-(7\sqrt{3}+2\sqrt{5})i}{7-i\sqrt{5}}$. Отв. $2-i\sqrt{3}$.

4. Возвышеніе комплексныхъ выраженій въ степень. Возвышеніе комплексныхъ выраженій въ квадратъ и кубъ производится по общимъ формуламъ, а возвышеніе ихъ въ высшія степени (при чемъ ограничиваемся лишь цѣлымъ и положительнымъ показателемъ степени) можетъ быть произведено по биному Ньютона. И здѣсь, какъ и выше, мы убѣдимся, что результатомъ этого дѣйствія будетъ также комплексное выраженіе.

Дѣйствительно, при цѣломъ и положительномъ показателѣ n имѣемъ:

$$(a+bi)^n=a^n+k_1a^{n-1}bi+k_2a^{n-2}b^2i^2+k_3a^{n-3}b^3i^3+k_4a^{n-4}b^4i^4+$$
$$+k_5a^{n-5}b^5i^5+\ldots+k_{n-2}a^2b^{n-2}i^{n-2}+k_{n-1}ab^{n-1}i^{n-1}+k_nb^ni^n,$$

гдѣ k_1, k_2, k_3, ... k_n биноміальные коэффиціенты.

Такъ какъ по § 13 всѣ четныя степени отъ i даютъ ± 1, а нечетныя приводятся къ $\pm i$, то вторая часть предыдущаго разложенія содержитъ частью вещественные члены, частью мнимые, имѣющіе всѣ общимъ множителемъ i, а потому $(a+bi)^n$ приводится къ комплексному виду $M+Ni$. Въ частномъ случаѣ, когда N оказывается равнымъ нулю, данный биномъ даетъ вещественное количество.

Примѣры.

1) $(\sqrt{-3}+\sqrt{-5})^2=(i\sqrt{3}+i\sqrt{5})^2=i^2(\sqrt{3}+\sqrt{5})=-8-2\sqrt{15}.$

2) $(x-2\sqrt{-y})^3=(x-2i\sqrt{y})^3=x^3-6x^2i\sqrt{y}+12xyi^2-8i^3y\sqrt{y}=$

$$=(x^3-12xy)+(8y\sqrt{y}-6x^2\sqrt{y})i.$$

2) $\left(\sqrt{\sqrt{-2}+\sqrt{-1}}-\sqrt{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}\right)^4=\left[\left(\sqrt{i(\sqrt{2}+1)}+\right.\right.$

$\left.\left.-\sqrt{i(\sqrt{2}-1)}\right)^2\right]^2=[i\sqrt{2}+1)-2\sqrt{i^2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+i(\sqrt{2}-1)]^2=$

$=(2i\sqrt{2}-2\sqrt{-1})^2=(2\sqrt{2}-2)^2i^2=-(8-8\sqrt{2}+4)=8\sqrt{2}-12.$

4) $(a+bi)^{-3}=\dfrac{1}{(a+bi)^3}=\dfrac{1}{(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i}=\dfrac{(a^3-3ab^2)-(3a^2b-b^3)i}{(a^3-3ab^2)^2+(3a^2b-b^3)^2}\cdot$

5) $(1+\sqrt{-1})^2+(-1+\sqrt{-1})^2$. Отв. 0.

6) $(2\sqrt{-2}-4\sqrt{-1})^3$. Отв. $16i(10-7\sqrt{2})$.

7) $(x-\sqrt{-2})^3$. Отв. $x(x^2-6)+(2-3x^2)\sqrt{-2}.$

8) $\left(\frac{1}{2}x\sqrt{-2}+\sqrt{-2}-\sqrt{x}\right)^3$. Отв. $\left(\frac{3}{2}x^2+5x+6\right)\sqrt{x}-\left(\frac{1}{4}x^3+2\right)i\sqrt{2}.$

9) $(1+\sqrt{-1})^4+(-1+\sqrt{-1})^4$. Отв. -8.

10) $\left(\sqrt{\frac{i+3}{2}}-\sqrt{\frac{i+3}{2}}\right)^6$. Отв. $(13\sqrt{10}-31)i$.

11) Вычислить x^2-2x+2 при $x=1\pm i$. Отв. 0.

Составить квадратныя уравненія по слѣдующимъ корнямъ:

12) $3-\frac{i}{2}$ и $3+\frac{i}{2}$. Отв. $x^2-6x+\frac{37}{4}=0$.

13) $\dfrac{-1+4i\sqrt{5}}{3}$ и $\dfrac{-1-4i\sqrt{5}}{3}$. Отв. $9x^2+2x+27=0$.

14) $2\sqrt{3}+i\sqrt{2\sqrt{5}-12}$ и $2\sqrt{3}-i\sqrt{2\sqrt{5}-12}$.

Отв. $x^2-4x\sqrt{3}+2\sqrt{5}=0$.

15) $\dfrac{a(-b+\sqrt{-bc})}{b+c}$ и $-\dfrac{a(b+\sqrt{-bc})}{b+c}$. Отв. $x^2+\dfrac{2abx}{b+c}+\dfrac{a^2b}{b+c}=0$.

16) $\dfrac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{-ab}+\sqrt{-a}}$ и $\dfrac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{-b}-\sqrt{-a}}$. Отв. $x^2-\dfrac{2bx\sqrt{a}}{b-a}+\dfrac{ab}{a-b}=0$.

5. Преобразованіе радикала вида $\sqrt{a\pm bi}$. Для требуемаго преобразованія возьмемъ слѣдующія очевидныя тождества:

$(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi})^2=a+bi+2\sqrt{a^2+b^2}+a-bi=2(\sqrt{a^2+b^2}+a),$

$$(\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi})^2=a+bi-2\sqrt{a^2+b^2}+a-bi=-2(\sqrt{a^2+b^2}-a),$$

откуда

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}=\pm\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a)},$$

$$\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi}=\pm i\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}-a)};$$

сложивъ же и вычтя эти равенства почленно, получимъ:

$$(1)\ldots\ \sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

$$(2)\ldots\ \sqrt{a-bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

гдѣ изъ четырехъ возможныхъ комбинацій двойныхъ знаковъ $\pm$ правыхъ частей слагаемыхъ или вычитаемыхъ равенствъ пригодны лишь выбранныя нами комбинаціи, потому что только при такомъ ихъ выборѣ квадратъ правой части каждаго изъ равенствъ (1) и (2) равенъ подкоренному количеству лѣвой.

Такимъ образомъ видимъ, что и квадратный корень изъ мнимаго выраженія $a+bi$ есть мнимое выраженіе того же вида.

Примѣчаніе 1. Результаты (1) и (2), какъ содержащіе сложные корни, оказываются вообще болѣе сложными, чѣмъ данныя выраженія; но если количества a и b таковы, что сумма a^2+b^2 представляетъ собою полный квадратъ нѣкотораго другого количества, то результаты эти окажутся уже полезными упрощеніями данныхъ радикаловъ.

Примѣчаніе 2. Изъ разсмотрѣнныхъ нами дѣйствій надъ комплексными выраженіями вытекаетъ, что при замѣнѣ всѣхъ этихъ выраженій сопряженными съ ними мы получимъ результаты, отличающіеся отъ прежнихъ лишь знакомъ предъ мнимымъ множителемъ i; это впрочемъ слѣдуетъ и изъ того, что замѣна комплекснаго выраженія сопряженнымъ съ нимъ равносильна замѣнѣ въ первомъ $+i$ на $-i$ и обратно.

Примѣры.

1) $\sqrt{3+4\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}}\right)=\pm(2+i).$

2) $\sqrt{2-\sqrt{-12}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{16}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{16}-2}{2}}\right)=\pm(\sqrt{3}-i).$

3) $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\pm\sqrt{a-b\sqrt{-1}}.$ Отв. $\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2+b^2})}.$

4) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}}.$ Отв. $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$

5) $\sqrt{7+\sqrt{-15}}-\sqrt{7-\sqrt{-15}}$. Отв. $i\sqrt{2}$.

6) $\sqrt{150-120i\sqrt{0,31}}$. Отв. $\sqrt{186}-i\sqrt{6}$.

7) $\sqrt{3a-a\sqrt{-7}}$. Отв. $\dfrac{\sqrt{14a}-i\sqrt{2a}}{2}$.

8) $\sqrt{2x-1+2x(x-1)i}$. Отв. $x+(x-1)i$.

9) $\sqrt{\dfrac{x^2}{n}-\dfrac{n^2}{x}-2i\sqrt{nx}}$. Отв. $\dfrac{x^2\sqrt{n}-n^2i\sqrt{x}}{xn}$.

§ 14. Корень четной степени изъ -1. Помощью формулъ (1) и (2) предыдущаго § можно опредѣлить корень всякой четной степени изъ -1. Такъ, напримѣръ, $\sqrt[4]{-1}=\pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}}=\pm\sqrt{\pm i}$. Для полученія же значеній корня $\sqrt{\pm i}$ положимъ въ формулахъ (1) и (2) предыдущаго § $a=0, b=1$, тогда получимъ:

$\sqrt{+i}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}+i\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$, $\sqrt{-i}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}-i\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$; слѣдовательно $\sqrt[4]{-1}$ имѣетъ 4 значенія, заключающіяся въ выраженіи $\pm\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\pm i\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$, въ которомъ знаки $+$ и $-$ можно комбинировать какъ угодно.

Такъ же $\sqrt[8]{-1}=\pm\sqrt{\sqrt[4]{-1}}$; а какъ по предыдущему примѣру $\sqrt[4]{-1}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\pm i\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)=\pm(1\pm i)\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, то $\sqrt[8]{-1}=$

$$=\pm\sqrt{\pm(1\pm i)\sqrt{\frac{1}{2}}}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\pm(1\pm i)},$$

т. е. $\sqrt[8]{-1}$ имѣетъ 8 значеній, именно (по § 13, п. 5, форм. 1 и 2):

$$\sqrt[8]{-1}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1+i}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right),$$

$$\sqrt[8]{-1}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-i}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right),$$

$$\sqrt[8]{-1}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1+i}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right),$$

$$\sqrt[8]{-1}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1-i}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right).$$

§ 15. Преобразованіе произвольнаго мнимаго выраженія въ комплексное. Теперь легко доказать, что всякое мнимое выраженіе можетъ быть преобразовано къ комплексное вида $a+bi$.

Дѣйствительно, всякій корень четной степени изъ отрицательнаго количества $-m$ имѣетъ общій видъ $\sqrt[2^n k]{-m}$, гдѣ k нѣкоторое нечетное число (въ частномъ случаѣ $k=1$); а какъ

$\sqrt[2^n k]{-m} = \sqrt[2^n]{\sqrt[k]{-m}}$ и при показателѣ k нечетномъ $\sqrt[k]{-m} = -\sqrt[k]{m}$, то

$$\sqrt[2^n k]{-m} = \sqrt[2^n]{-\sqrt[k]{m}} = \sqrt[2^n]{-1}.\ \sqrt[2^n]{\sqrt[k]{m}} = \sqrt[2^n k]{m}.\ \sqrt[2^n]{-1} = p\sqrt[2^n]{-1},$$

гдѣ p вещественное количество, равное ариѳметическому значенію корня $\sqrt[2^n k]{m}$, а радикалъ $\sqrt[2^n]{-1}$ по предыдущему § даетъ мнимое выраженіе вида $a+bi$; слѣдовательно и выраженіе $\sqrt[2^n k]{-m}$ приводится къ мнимому выраженію того же вида.

Такимъ образомъ видимъ, что всѣ дѣйствія надъ комплексными выраженіями даютъ въ результатѣ мнимыя же выраженія того же вида. Правда въ 5 пунктѣ § 13 мы разсматривали только квадратный корень изъ выраженія $a \pm bi$; но помощію бинома Ньютона доказывается, что и корень всякой другой степени изъ $a \pm bi$ даетъ комлексное выраженіе.

§ 16. Комплексное выраженіе въ тригонометрическомъ видѣ. Иногда бываетъ полезнымъ преобразованіе мнимаго выраженія вида $a+bi$ въ другое мнимое же выраженіе вида $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, гдѣ вещественный и положительный множитель r и уголъ φ, называемый **аргументомъ** даннаго мнимаго выраженія, опредѣляются изъ тождества

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

По вышеизложенному (§ 12) это равенство требуетъ равенствъ

$$(1) \ldots\ a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi, \text{ откуда}$$

$$a^2 = r^2\cos^2\varphi,\ b^2 = r^2\sin^2\varphi, \text{ стѣдовательно}$$

$$a^2 + b^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2, \text{ значитъ } r = \sqrt{a^2+b^2};$$

r называется модулемъ даннаго мнимаго выраженія.

Раздѣливъ равенства (1) почленно, получимъ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},$$

откуда опредѣлится **аргументъ** φ.

Такъ, напримѣръ, $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$, ибо $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, слѣдовательно $\varphi = 60^0$.

Такъ же $i = \cos 90^0 + i\sin 90^0$, ибо $\cos 90^0 = 0$, $\sin 90^0 = 1$.

Отъ перемѣны знака всего мнимаго выраженія модуль не измѣняется, а аргументъ увеличивается на π, т. е. на 180^0. Дѣйствительно, если

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\text{ то } (-x) = r(-\cos\varphi - i\sin\varphi);\text{ а какъ}$$

$$-\cos\varphi = \cos(\pi + \varphi);\ -\sin\varphi = \sin(\pi + \varphi),\text{ то}$$

$$-x = r[\cos(\pi + \varphi) + i\sin(\pi + \varphi)],$$

откуда видно, что модули обоихъ выраженій x и $-x$ одинаковы, а аргументъ выраженія $-x$ на π больше аргумента выраженія x.

При перемѣнѣ знака аргумента мнимаго выраженія модуль его не измѣняется, а только знакъ предъ i мѣняется на обратный, ибо, если въ выраженіи $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ аргументъ φ замѣнимъ аргументомъ $-\varphi$, то получимъ $r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, потому что $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$.

Если два мнимыхъ выраженія равны, то ихъ модули равны, а аргументы ихъ или равны, или же разнятся между собою на цѣлое число окружностей, т. е. на $2k\pi$, гдѣ k произвольное цѣлое число, 2π — круговая мѣра окружности или угла въ 360^0.

Дѣйствительно, если $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho(\cos\Theta + i\sin\Theta)$, то по § 11 должно быть

$$r\cos\varphi = \varrho\cos\Theta;\ r\sin\varphi = \varrho\sin\Theta,\text{ откуда}$$

$$r^2\cos^2\varphi = \varrho^2\cos^2\Theta;\ r^2\sin^2\varphi = \varrho^2\sin^2\Theta;$$

сложивъ эти два равенства почленно, получимъ:

$$r^2 = \varrho^2;\text{ откуда } r = \varrho;$$

но тогда должно быть одновременно $\cos\varphi = \cos\Theta$ и $\sin\varphi = \sin\Theta$, а эти уравненія удовлетворяются при $\varphi = 2k\pi + \Theta$*), гдѣ k произвольное цѣлое число, не исключая $k = 0$.

§ 17. Дѣйствія надъ комплексными выраженіями вида $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Мнимыя выраженія имѣютъ нѣкоторыя свойства, которыя удобно изслѣдовать, если мнимыя выраженія представляются подъ видомъ $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; поэтому разсмотримъ всѣ дѣйствія надъ выраженіями этого вида.

I. Сложеніе. Сложивъ нѣсколько такихъ выраженій, получимъ:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) + \ldots =$$
$$= (r\cos\varphi + r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2 + \ldots) + i(r\sin\varphi + r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2 + \ldots),$$

гдѣ вторая часть имѣетъ видъ $M + Ni$, а слѣдовательно можетъ быть преобразована въ выраженіе вида $R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$, такъ что

*) См. учебникъ прямолинейной тригонометріи Я. Блюмберга, 3-ье изд. 1901 г. Введеніе 7 и 8, и § 6.

$$(1)\ldots r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)+r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)+\ldots=$$
$$=R(\cos\Theta+i\sin\Theta),$$

гдѣ модуль

$$R=\sqrt{(r\cos\varphi+r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2+\ldots)^2+(r\sin\varphi+r_1\sin\varphi_1+r_2\sin\varphi_2+\ldots)^2}.$$

Совершивъ указанныя подъ знакомъ корня дѣйствія и зная, что вообще $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$; $\cos\varphi\,.\cos\varphi_1+\sin\varphi\,.\sin\varphi_1=\cos(\varphi-\varphi_1)$, мы найдемъ:

$$(2)\ldots R=\sqrt{r^2+r_1^{\,2}+r_2^{\,2}+\ldots+2rr_1\cos(\varphi-\varphi_1)+2rr_2\cos(\varphi-\varphi_2)+\ldots+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\ldots}$$

Аргументъ Θ выраженія (1) опредѣляется изъ уравненія

$$(3)\ldots \operatorname{tg}\Theta=\frac{r\sin\varphi+r_1\sin\varphi_1+r_2\sin\varphi_2+\ldots}{r\cos\varphi+r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2+\ldots}.$$

Примѣръ. $\sqrt{3}(\cos60^0+i\sin60^0)+\sqrt{2}(\cos30^0+i\sin30^0)=$
$=R(\cos\Theta+i\sin\Theta)$,

гдѣ по формуламъ (2) и (3)

$$R=\sqrt{3+2+2\sqrt{6}\,.\cos30^0}=\sqrt{5+2\sqrt{6}.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{5+3\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{\sqrt{3}.\sin60^0+\sqrt{2}\,.\sin30^0}{\sqrt{3}.\cos60^0+\sqrt{2}.\cos30^0}=\frac{\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\,.\frac{1}{2}}{\sqrt{3}.\frac{1}{2}+\sqrt{2}\,.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=$$
$$=1{,}0556429,\ \text{слѣдовательно}\ \Theta=46^0 33' 2''.$$

2. Вычитаніе. Поступая, какъ выше, найдемъ, напримѣръ, что

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)-r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=R(\cos\Theta+i\sin\Theta),$$

гдѣ $R=\sqrt{r^2+r_1^{\,2}-2rr_1\cos(\varphi-\varphi_1)}$; $\operatorname{tg}\Theta=\dfrac{r\sin\varphi-r_1\sin\varphi_1}{r\cos\varphi-r_1\cos\varphi_1}$.

Примѣръ. $\sqrt{3}(\cos30^0+i\sin30^0)-\sqrt{2}(\cos60^0-i\sin60^0)=$
$=R(\cos\Theta+i\sin\Theta)$,

гдѣ $R=\sqrt{3+2-2\sqrt{6}\,.\cos(30+60^0)}=\sqrt{5-2\sqrt{6}\cos90^0}=\sqrt{5}$,

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{\sqrt{3}\,.\sin30^0+\sqrt{2}\,.\sin60^0}{\sqrt{3}\,.\cos30^0-\sqrt{2}.\cos60^0}=\frac{\sqrt{3}.\frac{1}{2}+\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}.\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}=$$
$$=2{,}6368875,\ \text{слѣдовательно}\ \Theta=69^0 13' 53'',5.$$

3. Умноженіе. Перемноживъ между собою выраженія:

$x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $x_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, получимъ:

$$xx_1=rr_1[\cos\varphi\cos\varphi_1-\sin\varphi\sin\varphi_1)+i(\sin\varphi\cos\varphi_1+\cos\varphi\sin\varphi_1)]\ \text{или}$$
$$xx_1=rr_1[\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)].$$

Умноживъ это выраженіе на $x_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, получимъ:

$$(4)\ \ldots\ xx_1x_2=rr_1r_2[\cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2)]\ \text{и т. д.}$$

Отсюда слѣдуетъ, что модуль произведенія какого угодно числа мнимыхъ выраженій равенъ произведенію модулей данныхъ выраженій, а аргументъ произведенія равенъ алгебраической суммѣ аргументовъ этихъ выраженій.

4. Дѣленіе. Для опредѣленія частнаго $\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}$ умножимъ дѣлимое и дѣлителя на выраженіе, сопряженное съ дѣлителемъ, тогда получимъ:

$$(5) \ldots \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1} =$$

$$= \frac{r}{r_1}(\cos\varphi\cos\varphi_1 + i\sin\varphi\cos\varphi_1 - i\cos\varphi\sin\varphi_1 + \sin\varphi\sin\varphi_1) =$$

$$= \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi - \varphi_1) + i\sin(\varphi - \varphi_1)],$$

т. е. модуль частнаго двухъ мнимыхъ выраженій равенъ частному ихъ модулей, а аргументъ равенъ алгебраической разности ихъ аргументовъ.

Примѣчаніе. Желая непосредственно примѣнить формулы (4) и (5) къ тѣмъ случаямъ, когда одинъ изъ мнимыхъ сомножителей или одинъ изъ членовъ дроби имѣетъ знакъ — предъ i, надо предварительно такія выраженія преобразовать такъ, чтобы они имѣли знакъ $+$ предъ i (§ 16).

Примѣръ I. $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \,.\, r_1(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1) =$
$= rr_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = rr_1[\cos(\varphi - \varphi_1) + i\sin(\varphi - \varphi_1)]$,
гдѣ $\varphi - \varphi_1$ есть алгебраическая сумма аргументовъ φ и $-\varphi_1$.

Примѣръ 2. $\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1[\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)]} =$

$$= \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi + \varphi_1) + i\sin(\varphi + \varphi_1)],$$

гдѣ $\varphi + \varphi_1$ есть алгебраическая разность аргументовъ φ и $-\varphi_1$.

5. Возвышеніе въ степень. Формула Моавра. Полагая въ формулѣ (4)
$r = r_1 = r_2 \ldots$, $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \ldots$, а слѣдовательно $x = x_1 = x_2 \ldots$,
мы при цѣломъ и положительномъ показателѣ m получимъ:

$$(6) \ldots [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

Принимая здѣсь $r = 1$, получимъ формулу:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi,$$

называемую формулою Моавра (Moivre) и дающую намъ возможность опредѣлить sin и cos кратныхъ дугъ 2φ, 3φ, 4φ, ... по sin и cos простой дуги φ. Такъ, напримѣръ, при $m = 2$ получимъ:

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$, откуда, по § 12, $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ и $\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$;

при $m = 3$ получимъ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi =$$
$= \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$, откуда $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$ и $\sin 3\varphi =$
$$= 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Формула (6) справедлива и при цѣломъ отрицательномъ показателѣ. Напримѣръ, при показателѣ $-m$ имѣемъ:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-m} = \frac{1}{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m} = \frac{1}{r^m} \cdot \frac{1}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi};$$

но 1 можно замѣнить выраженіемъ $\cos 0 + i\sin 0$; слѣдовательно по пункту 4:

$$(7)\ldots [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-m} = r^{-m} \cdot \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi} =$$
$$= r^{-m}[\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)].$$

6. Извлеченіе корней. Полагая

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = R(\cos\Theta + i\sin\Theta),$$

гдѣ n число цѣлое, и возвысивъ обѣ части въ степень n, получимъ:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta),$$ откуда по § 16

$r = R^n$; $\varphi = n\Theta$, и потому $R = \sqrt[n]{r}$; $\Theta = \frac{\varphi}{n}$; слѣдовательно

$$(8)\ldots \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\,.\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

т. е. *при извлеченіи корня изъ мнимаго выраженія надо извлечь корень той же степени изъ его модуля, а аргументъ его раздѣлить на показателя корня.*

Теперь можно показать, что формула (6) справедлива и при дробномъ показателѣ, какъ положительномъ, такъ и отрицательномъ, напримѣръ при показателѣ $\frac{m}{n}$, гдѣ m и n числа цѣлыя, причемъ n будемъ считать числомъ положительнымъ, а числитель m имѣющимъ знакъ дроби $\frac{m}{n}$; тогда по формуламъ (6) или (7) имѣемъ:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m} = \sqrt[n]{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)},$$

а примѣняя ко 2-ой части формулу (8), получимъ:

$$(9)\ldots [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\varphi + i\sin\frac{m}{n}\varphi\right).$$

Такимъ образомъ видимъ, что формула (6) справедлива при всякомъ показателѣ, цѣломъ, дробномъ, положительномъ или отрицательномъ: она выражаетъ, что модуль всякой степени мнимаго выраженія вида $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ равенъ той же степени даннаго модуля, а аргументъ равенъ данному аргументу, умноженному на показателя степени.

Примѣры.

1) $\sqrt{3}(\cos 12^0 + i\sin 12^0)$. $\sqrt{2}(\cos 18^0 + i\sin 18^0)$.

Отв. $\sqrt{6}(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$ или $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+i)}{2}$.

2) $(\cos 36^0 + i\sin 36^0)(\cos 6^0 - i\sin 6^0)$.

Отв. $\cos 30^0 + i\sin 30^0 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

3) $\frac{2(\cos 85^0 + i\sin 85^0)}{\sqrt{2}(\cos 25^0 + i\sin 25^0)}$. Отв. $\sqrt{2}(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$ или $\frac{\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})}{2}$.

4) $\frac{\cos 12^0 - i\sin 12^0}{\cos 12^0 + i\sin 12^0}$. Отв. $\cos 24^0 - i\sin 24^0$.

5) $[4(\cos 12^0 + i\sin 12^0)]^3$.

Отв. $64(\cos 36^0 + i\sin 36^0) = 16\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$, ибо $\sin 36^0$ равенъ половинѣ стороны правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса 1, т. е. $\sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

6) Найти $\sqrt[5]{-i}$. Отв. Выразивъ $-i$ тригонометрически, мы по пункту 6 найдемъ:

$$\sqrt[5]{-i} = \sqrt[5]{\cos(90^0 + k\,.\,360^0) - i\sin(90^0 + k\,.\,360^0)} = \cos\frac{90^0 + k\,.\,360^0}{5} + \\ - i\sin\frac{90^0 + k\,.\,360^0}{5},$$

гдѣ k можетъ имѣть только 5 слѣдующихъ значеній: 0, 1, 2, 3, 4, а потому и $\sqrt[5]{-i}$ имѣетъ 5 значеній.

V. Нѣкоторыя дополненія къ теоріи уравненій.

§ 18. Опредѣленіе. Если многочленъ, содержащій нѣкоторую букву x, обращается въ нуль при нѣкоторомъ значеніи $x = a$, то говорятъ, что a есть корень этого многочлена.

Теорема Безу. Если многочленъ

$$(1) \; . \; . \; . \; Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Kx + L$$

съ постоянными коэффиціентами и цѣлый относительно x раздѣлимъ на разность $x-a$, гдѣ a произвольное количество, то остатокъ отъ этого дѣленія будетъ нѣкоторое количество R, получаемое отъ замѣны въ данномъ многочленѣ количества x количествомъ a.

Дѣйствительно, обозначивъ частное отъ дѣленія даннаго многочлена (1) на $x-a$ чрезъ Q, а окончательный остатокъ чрезъ R, получимъ тождество

$$(2) \ldots . Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Kx + L = Q(x-a) + R,$$

гдѣ очевидно Q есть цѣлый многочленъ степени $n-1$; а какъ остатокъ R не содержитъ x, потому что дѣлитель $x-a$ есть количество 1-ой степени относительно x, то онъ долженъ сохранять свое значеніе при всякомъ произвольномъ значеніи x, напримѣръ при $x=a$; полагая же въ тождествѣ (2) $x=a$, получимъ:

$$(3) \ldots . R = Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots + Ka + L,$$

потому что при $x=a$ множитель $x-a$, а вмѣстѣ съ нимъ и членъ $Q(x-a)$ тождества (2) обращается въ нуль. Равенство (3) и показываетъ, что остатокъ R получается изъ многочлена (1) замѣною въ немъ x количествомъ a.

Слѣдствіе. Если многочленъ (1) обращается въ нуль при $x=a$, т. е. если $x=a$ есть его корень, то онъ дѣлится на́-цѣло на $x-a$, потому что при этомъ условіи равенство (3) обращается въ слѣдующее: $R=0$.

Обратно, если многочленъ (1) дѣлится на́-цѣло на $x-a$, то a есть его корень, ибо тогда остатокъ R отъ этого дѣленія есть нуль, т. е.

$$Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots + Ka + L = 0,$$

значитъ $x=a$ обращаетъ многочленъ (1) въ нуль.

Приведеннымъ выше разсужденіемъ легко убѣдиться, что остатокъ отъ дѣленія цѣлаго многочлена (1) на двучленъ вида $ax \pm b$ равенъ результату, получаемому при подстановкѣ въ многочленъ (1) количества $\mp \frac{b}{a}$ на мѣсто x.

Разсмотрѣнное свойство цѣлаго многочлена даетъ намъ возможность убѣдиться въ справедливости предложеній, относящихся до дѣлимости суммы или разности одинаковыхъ цѣлыхъ и положительныхъ степеней двухъ количествъ на сумму или на разность этихъ количествъ, т. е. до дѣленій вида $(x^n \pm a^n):(x \pm a)$, гдѣ n число цѣлое и положительное, а именно:

1) Двучленъ $x^n - a^n$ обращается въ нуль при $x=a$ при вся-

комъ цѣломъ и положительномъ показателѣ n, а потому онъ по доказанному дѣлится на́-цѣло на $x-a$.

2) Двучленъ x^n+a^n не обращается въ нуль при $x=a$, а потому онъ на́-цѣло не дѣлится на $x-a$; остатокъ отъ этого дѣленія по доказанному будетъ a^n+a^n или $2a^n$.

3) Двучленъ x^n-a^n при четномъ n обращается въ нуль при $x=-a$, ибо тогда $(-a)^n=+a^n$ и слѣдовательно $(-a)^n-a^n=+a^n-a^n=0$; поэтому x^n-a^n при четномъ n дѣлится на́-цѣло на $x-(-a)$, т. е. на $x+a$.

При нечетномъ же показателѣ n двучленъ x^n-a^n не обращается въ нуль при $x=-a$, а даетъ: $(-a)^n-a^n=-a^n-a^n=-2a^n$; слѣдовательно x^n-a^n при нечетномъ n не дѣлится на́-цѣло на $x+a$, а даетъ въ остаткѣ $-2a^n$.

4) Двучленъ x^n+a^n при нечетномъ n обращается въ нуль при $x=-a$, потому что тогда $(-a)^n+a^n=-a^n+a^n=0$; откуда заключаемъ, что двучленъ x^n+a^n при нечетномъ n дѣлится на́-цѣло на $x-(-a)$ или на $x+a$.

Если же показатель n число четное, то двучленъ x^n+a^n не обращается въ нуль при $x=-a$, а потому онъ не дѣлится на $x+a$ и мы въ остаткѣ получимъ: $(-a)^n+a^n=a^n+a^n=2a^n$.

Что касается до состава частнаго въ каждомъ изъ этихъ четырехъ частныхъ случаевъ дѣленія, то онъ намъ извѣстенъ изъ предшествующаго курса алгебры*), а потому мы на немъ не останавливаемся.

Примѣры.

1) Многочленъ x^3-5x^2+8x-4 обращается въ нуль при $x=2$, а потому онъ дѣлится на $x-2$. При $x=3$, напримѣръ, данный многочленъ не обращается въ нуль, а потому онъ при дѣленіи на $x-3$ даетъ въ остаткѣ $3^3-5.3^2+8.3-4$, т. е. 2, въ чемъ легко убѣдиться непосредственнымъ дѣленіемъ.

2) Многочленъ $2x^3-3x^2-8x-3$ обращается въ нуль при $x=-\frac{1}{2}$; слѣдовательно онъ дѣлится на $x+\frac{1}{2}$ на́-цѣло.

3) Многочленъ $a^4+a^3b-2a^2b^2+ab^3-b^4$ дѣлится на́-цѣло на $a-b$, потому что онъ обращается въ нуль при $a=b$.

Не произведя дѣленія, найти остатки:

4) Отъ дѣленія $2x^4-8x^3+12x^2+7x-39$ на $x-2$. Отв. -9.

5) Отъ дѣленія $x^5-3x^3-2x^2+3$ на $x+\frac{1}{3}$. Отв. $2\frac{215}{243}$.

*) См. элементарную алгебру Я. Блюмберга, 3-е изданіе 1893 г., § 29.

6) Отъ дѣленія $25x^4 - \frac{2}{3}x - \frac{11}{15}$ на $5x - 2$. Отв. $-\frac{9}{25}$.

7) Отъ дѣленія $-3x^3 + 4x^2 - 0,5x - 14,(8)$ на $3x+4$. Отв. 0.

8) При какомъ значеніи a многочленъ $x^3 - 2x^2 + 3x + a$ дѣлится на $x - 2$? Отв. $a = -6$.

9) При какомъ значеніи a многочленъ $5x^4 + x^3 - ax^2 - 3x + 1$ дѣлится на $5x - 1$? Отв. $a = 10,4$.

10) При какихъ коэффиціентахъ a и b многочленъ $ax^5 - 5\frac{1}{2}x^4 + 12,5x^3 - 3x^2 + bx + 4$ дѣлится на $2x^2 + x - 1$?

Отв. $a = -8\frac{3}{5}$, $b = -5\frac{2}{5}$.

(Указаніе: $2x^2 + x - 1 = (x+1)(2x-1)$, при чемъ оба эти сомножителя взаимно-простые, и потому данный многочленъ долженъ дѣлиться порознь на $x + 1$ и на $2x - 1$).

§ 19. Примѣненіе теоремы Безу къ разложенію цѣлаго многочлена на линейные сомножители. Въ предыдущемъ § мы видѣли, что если многочленъ

$$M = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Kx + L$$

степени n и цѣлый относительно x имѣетъ корень $x = a$, то онъ дѣлится на $x - a$ и потому разлагается на два сомножителя именно: $M = Q(x - a)$, гдѣ Q — частное отъ дѣленія M на $x - a$ есть многочленъ степени $n-1$. Но то, что сказано о многочленѣ M, примѣнимо и къ многочлену Q; слѣдовательно, если Q имѣетъ корень $x = b$, то онъ дѣлится на́-цѣло на $x - b$ и потому $Q = Q'(x - b)$, гдѣ Q' — частное отъ дѣленія Q на $x - b$ есть многочленъ степени $n-2$, а слѣдовательно $M = Q(x - a)(x - b)$.

Такимъ же образомъ найдемъ, что $M = Q''(x-a)(x-b)(x-c)$, если Q' имѣетъ еще корень $x = c$, причемъ Q'' есть цѣлый многочленъ степени $n - 3$ и т. д. Если поэтому всѣ корни многочлена извѣстны, то послѣдній можетъ быть разложенъ на линейные сомножители, т. е. на сомножители 1-ой степени относительно перемѣнной x.

Такъ, напримѣръ, замѣчая, что многочленъ $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ обращается въ 0 при $x = 1$ и $x = 2$, мы получимъ:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x^2 - 4x + 4)(x - 1) = (x - 2)^2(x - 1).$$

Такъ же, замѣчая, что многочленъ

$$M = 2x^5 - x^4 - 9x^3 + 34x^2 - 11x - 15$$

обращается въ 0 при $x = 1$, -3 и $-\frac{1}{2}$ и что онъ слѣдовательно дѣлится и на $x - 1$, и на $x + 3$, и на $x + \frac{1}{2}$, получимъ:

$$M=(x-1)(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+10)=$$
$$=(x-1)(x+3)(2x+1)(x^2-3x+5).$$

Здѣсь множитель x^2-3x+5 не обращается въ нуль ни при какомъ вещественномъ значенiи x, а потому дальнѣйшее разложенiе на вещественные сомножители невозможно. Дѣйствительно,

$$x^2-3x+5=\left(x^2-3x+2\frac{1}{4}\right)+2\frac{3}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\frac{3}{4},$$

а какъ $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$, какъ квадратъ, есть величина положительная при всякомъ вещественномъ x, то x^2-3x+5 въ нуль обратиться не можетъ. Но онъ можетъ быть разложенъ на 2 мнимыхъ множителя, ибо

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\frac{3}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3-i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x-\frac{3+i\sqrt{11}}{2}\right).$$

Такимъ образомъ видимъ, что данный многочленъ M разлагается на 5 линейныхъ множителей, изъ коихъ два — мнимые.

Изъ всего здѣсь сказаннаго заключаемъ, что имѣя цѣлый многочленъ

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx+L$$

и нашедши какимъ-нибудь образомъ его корни или только нѣкоторые изъ нихъ, мы можемъ его представить въ видѣ произведенiя изъ стольких линейныхъ множителей, сколько знаемъ корней, и одного многочленнаго множителя высшей степени, причемъ линейные множители суть разности между x и каждымъ изъ извѣстныхъ корней, а множитель высшей степени представляетъ частное отъ дѣленiя даннаго многочлена на произведенiе всѣхъ извѣстныхъ его линейныхъ сомножителей.

Обратно, имѣя произведенiе

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

мы можемъ быть увѣрены, что $a, b, c, \ldots k$ суть его корни, ибо оно дѣлится на каждый изъ двучленовъ $x-a$, $x-b$, $x-c, \ldots$ $x-k$, притомъ эти корни единственные, потому что при всякомъ другомъ значенiи x ни одинъ изъ двучленныхъ множителей $x-a$, $x-b$, $x-c, \ldots$ не равенъ нулю, значитъ и данное произведенiе не обращается въ нуль.

§ 20. Случай возможности пониженiя степени уравненiя. Зная одинъ или нѣсколько изъ корней уравненiя n-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ x вида

$$(1)\ldots Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx+L=0,$$

можно на основанiи изложеннаго въ § 18 понизить степень его, т. е. можно дойти до уравненiя низшей степени и этимъ самымъ опредѣлить и остальные корни уравненiя (1), если только пониженное уравненiе разрѣшимо для насъ элементарнымъ прiемомъ.

Дѣйствительно, положимъ, что мы какъ-нибудь узнали, что уравненiе (1) имѣетъ корни α, β, γ,... μ, ν — числомъ p, гдѣ $p < n$; тогда первая часть этого уравненiя должна дѣлиться на каждую изъ разностей $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ... $x-\mu$ и $x-\nu$, а слѣдовательно и на ихъ произведенiе; значитъ уравненiе (1) можно написать такъ:

$$(2) \ldots . (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots (x-\mu)(x-\nu) \,.\, Q = 0,$$

гдѣ Q очевидно есть многочленъ степени $n-p$ и представляетъ собою частное отъ дѣленiя первой части уравненiя (1) на произведенiе приведенныхъ p разностей. Но уравненiе (2), слѣдовательно и уравненiе (1) удовлетворяется не только корнями α, β, γ, ... μ и ν, то и такими значенiями неизвѣстнаго x, при которыхъ многочленъ Q обращается въ нуль, а потому для нахожденiя этихъ значенiй полагаемъ $Q = 0$ и рѣшаемъ это уравненiе степени $n-p$. Такимъ образомъ степень уравненiя (1) понижена на p единицъ, т. е. на столько единицъ, сколько извѣстно корней изъ всего числа корней уравненiя.

Примѣръ. Положимъ, что мы какъ-нибудь узнали, что уравненiе 6-ой степени

$$(3) \ldots . x^6 - x^5 - 8x^4 - 15x^3 + 27x^2 + 216\,x - 324 = 0$$

имѣетъ корни $x = 2$ и $x = -3$; тогда первая часть его должна дѣлиться на $(x-2)(x+3)$, т. е. на $x^2 + x - 6$, причемъ частное будетъ $x^4 - 2x^3 - 27x + 54$, а потому степень даннаго уравненiя можетъ быть понижена на 2, именно мы приходимъ къ уравненiю 4-ой степени:

$$(4) \ldots . x^4 - 2x^3 - 27x + 54 = 0,$$

корни котораго будутъ конечно корнями и даннаго уравненiя (3).

Но рѣшенiе полныхъ уравненiй 4-ой степени не входитъ въ курсъ элементарной алгебры (за исключенiемъ развѣ возвратныхъ), а потому они вообще для насъ неразрѣшимы; но въ данномъ случаѣ первая часть уравненiя (4) легко разлагается на множители именно:

$$x^4 - 2x^3 - 27x + 54 = x^2(x-2) - 27(x-2) = (x-2)(x^3-27) =$$
$$= (x-2)(x-3)(x^2+3x+9),$$

откуда видно, что уравненіе (3) имѣетъ еще корни $x=2$ и $x=3$, а потому степень уравненія можетъ быть понижена еще на 2, и мы приходимъ къ квадратному уравненію

$$x^2+3x+9=0, \text{ откуда } x_1=\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3});\ x_2=-\frac{3}{2}(1+i\sqrt{3}),$$

слѣдовательно уравненіе (3) имѣетъ 6 корней:

$$2,\ 2,\ -3,\ +3,\ \frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3}) \text{ и } -\frac{3}{2}(1+i\sqrt{3}),$$

изъ коихъ 4 — вещественные, а 2 — мнимые сопряженные.

§ 21. О числѣ корней уравненія. Всякое алгебраическое уравненіе по раскрытіи въ немъ скобокъ и по уничтоженіи знаменателей и радикаловъ, содержащихъ неизвѣстное x, приводится къ виду:

$$(5) \ldots\ Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx+L=0,$$

гдѣ n число цѣлое и положительное, коэффиціенты A, B, C, ... K, L — числа постоянныя, вещественныя или мнимыя.

Изъ предшествующаго курса алгебры знаемъ, что уравненіе 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ 1 корень, уравненіе 2-ой степени — 2 корня, которые могутъ оказаться и мнимыми, биквадратное имѣетъ 4 корня, уравненіе (3), приведенное въ предыдущемъ §, имѣло 6 корней; словомъ на разрѣшенныхъ нами доселѣ уравненіяхъ мы подмѣтили, что уравненіе каждый разъ имѣло столько корней, сколько было единицъ въ показателѣ степени уравненія. Спрашивается, есть-ли это общее свойство уравненій? — Французскій математикъ Коши́ (Cauchy) доказалъ, что всякое уравненіе вида (5) при цѣломъ показателѣ n и съ постоянными коэффиціентами A, B, C,... имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень, хотя бы и мнимый. Основываясь на этой теоремѣ, доказательство которой мы здѣсь привести не можемъ, легко доказать, что уравненіе вида (5) имѣетъ n корней, т. е. столько корней, сколько есть единицъ въ показателѣ степени этого уравненія.

Дѣйствительно, обозначивъ ради краткости первую часть уравненія (5) чрезъ X_n, мы на основаніи теоремы Коши́ можемъ утверждать, что уравненіе $X_n=0$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень $x=a_1$, а потому X_n дѣлится на $x-a_1$ (§ 18); слѣдовательно, если частное отъ этого дѣленія обозначимъ чрезъ X_{n-1}, то получимъ уравненіе

$$X_n=(x-a_1)\,.\,X_{n-1}=0,$$

гдѣ X_{n-1} есть цѣлый многочленъ степени $n-1$ и имѣетъ очевидно высшимъ своимъ членомъ Ax^{n-1}.

Но послѣднее уравненіе удовлетворяется не только при $x = a$, но и при тѣхъ значеніяхъ x, при которыхъ $X_{n-1} = 0$; это же уравненіе по теоремѣ Коши́ имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень $x = a_2$; слѣдовательно, по тому же § 18, $X_{n-1} = (x - a_2) . X_{n-2}$ и потому

$$X_n = (x - a_1)(x - a_2) . X_{n-2} = 0,$$

гдѣ частное X_{n-2} есть цѣлый многочленъ степени $n-2$ и имѣетъ высшимъ своимъ членомъ Ax^{n-2}.

Но послѣднее уравненіе удовлетворяется и при такихъ значеніяхъ x, при которыхъ $X^{n-2} = 0$; это же уравненіе по теоремѣ Коши́ опять имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень $x = a_3$ и слѣдовательно

$$X_n = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)X_{n-3} = 0,$$

гдѣ частное X_{n-3} есть цѣлый многочленъ степени $n-3$ и имѣетъ высшимъ своимъ членомъ Ax^{n-3}.

Разсуждая такимъ же образомъ дальше и подвергая частное X_{n-3} и слѣдующія за нимъ частныя X_{n-4}, $X_{n-5}, \ldots$ тѣмъ же операціямъ, какъ мы подвергали X_{n-1} и X_{n-2}, мы каждый разъ получимъ новый линейный множитель, а степень частныхъ будетъ послѣдовательно убывать на 1, причемъ высшіе члены этихъ частныхъ всегда будутъ имѣть все тотъ же коэффиціентъ A, такъ что мы наконецъ дойдемъ до частнаго $X_2 = (x - a_{n-1})X_1$, гдѣ X_1 очевидно имѣетъ видъ $Ax + m$ или $A(x - a_n)$, гдѣ $a_n = -\frac{m}{A}$; слѣдовательно уравненіе (5) окончательно приметъ видъ

$$A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_{n-1})(x - a_n) = 0.$$

Ясно, что это уравненіе удовлетворяется при слѣдующихъ n значеніяхъ неизвѣстнаго: $x = a_1$, $x = a_2$, $x = a_3, \ldots x = a_n$ (изъ нихъ нѣкоторыя могутъ быть и равными) и только при этихъ значеніяхъ, ибо при всякомъ другомъ значенія x ни одинъ изъ двучленныхъ множителей 1-ой части нашего уравненія не обращается въ нуль, а слѣдовательно само уравненіе не можетъ обратиться въ тождество.

§ 22. О сопряженности мнимыхъ корней алгебраическаго уравненія съ вещественными коэффиціентами.

Теорема. Если алгебраическое уравненіе

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Kx + L = 0$$

съ вещественными коэффиціентами A, B, $C, \ldots$ имѣетъ мнимый корень $\alpha + \beta i$, то оно имѣетъ также сопряженный корень $\alpha - \beta i$.

Дѣйствительно по § 13 всѣ основныя дѣйствія надъ комплексными выраженіями вида $\alpha+\beta i$ даютъ въ результатѣ комплексныя же выраженія того же вида; слѣдовательно, если $\alpha+\beta i$ есть корень даннаго уравненія, то при подстановкѣ въ него $\alpha+\beta i$ на мѣсто x получимъ тождество вида $P+Qi=0$, изъ котораго по § 12 должно быть отдѣльно $P=0$ и $Q=0$. Подставимъ теперь въ данное уравненіе $\alpha-\beta i$ на мѣсто x; тогда первая часть его обратиться въ $P-Qi$, потому что замѣна въ многочленѣ выраженія $\alpha+\beta i$ выраженіемъ $\alpha-\beta i$ равносильна перемѣнѣ въ немъ $+i$ на $-i$ (§ 13 примѣчаніе 2); а какъ $P=0$ и $Q=0$, то получаемъ тождество $P-Qi=0$. Это и значитъ, что $\alpha-\beta i$ также есть корень даннаго уравненія.

Слѣдствіе. При четномъ показателѣ n наше уравненіе или вовсе не имѣетъ вещественныхъ корней, или имѣетъ ихъ четное число; при нечетномъ же n уравненіе имѣетъ нечетное число вещественныхъ корней, а слѣдовательно по крайней мѣрѣ одинъ.

§ 23. О преобразованіяхъ уравненій и случаяхъ ихъ эквивалентности. Два уравненія называются тождественными или эквивалентными, часто и равнозначащими или равносильными, если всякій корень каждаго изъ нихъ есть также корень другого; таковы, напримѣръ, уравненія

$$5x-9=2x \text{ и } 3x+30=13x,$$

ибо каждое изъ нихъ удовлетворяется только при $x=3$.

Два или нѣсколько уравненій называются совокупными, когда изъ всѣхъ корней отдѣльныхъ уравненій требуется опредѣлить только общіе ихъ корни, т. е. тѣ, которые удовлетворяли бы всѣмъ даннымъ уравненіямъ одновременно.

Рѣшеніе уравненій основывается на слѣдующихъ теоремахъ.

Теорема I. Если къ обѣимъ частямъ уравненія прибавимъ или изъ нихъ вычтемъ по равному количеству, безразлично, содержитъ ли оно неизвѣстныя, или не содержитъ ихъ, то получаемое уравненіе будетъ тождественнымъ съ даннымъ.

Положимъ, что уравненіе

$$(1) \ldots f(x, y, z, \ldots)=f_1(x, y, z, \ldots)$$

съ произвольнымъ числомъ неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots$ имѣетъ нѣкоторое рѣшеніе $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma \ldots$, т. е. обращается при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ въ тождество, и придадимъ къ обѣимъ его частямъ по количеству $\varphi(x, y, z, \ldots)$, которое въ частности можетъ и не содержать неизвѣстныхъ и быть положительнымъ или отрицательнымъ; докажемъ, что получаемое уравненіе

$(2) \dots f(x, y, z, \dots) + \varphi(x, y, z, \dots) = f_1(x, y, z, \dots) + \varphi(x, y, z, \dots)$ эквивалентно съ даннымъ уравненіемъ (1).

Дѣйствительно по условію равенство $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = f_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ есть тождество, а потому и равенство

$$(3) \dots f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) + \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = f_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots) + \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$$

есть тождество; а это показываетъ, что всякое рѣшеніе уравненія (1) есть также рѣшеніе уравненія (2).

Обратно, всякое рѣшеніе уравненія (2) есть также рѣшеніе уравненія (1). Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что уравненіе (2) имѣетъ нѣкоторое рѣшеніе $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma \dots$, заключаемъ, что равенство (3) есть тождество; а придавъ къ обѣимъ частямъ его по $-\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, получимъ опять тождество

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = f_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots).$$

Это значитъ, что всякое рѣшеніе уравненія (2) есть также рѣшеніе уравненія (1).

Изъ сказаннаго заключаемъ, что уравненія (1) и (2) эквивалентны.

Эта теорема остается очевидно справедливой, если вмѣсто $\varphi(x, y, z, \dots)$ возьмемъ какое-либо постоянное количество.

Теорема 2. Если обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же постоянное количество, неравное нулю, то получаемое уравненіе будетъ эквивалентнымъ съ даннымъ.

Положимъ, что уравненіе (1) имѣетъ нѣкоторое рѣшеніе $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma \dots$, и умножимъ обѣ части его на постоянное количество n, неравное нулю; докажемъ, что получаемое уравненіе

$$(4) \dots n \cdot f(x, y, z, \dots) = n \cdot f_1(x, y, z, \dots)$$

эквивалентно съ даннымъ уравненіемъ (1). Въ самомъ дѣлѣ по условію равенство $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = f_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ есть тождество, а потому и равенство

$$(5) \dots n \cdot f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = n \cdot f_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$$

есть тождество; это показываетъ, что всякое рѣшеніе уравненія (1) есть также рѣшеніе уравненія (4).

Обратно, всякое рѣшеніе уравненія (4) есть также рѣшеніе уравненія (1). Дѣйствительно, если уравненіе (4) имѣетъ нѣкоторое рѣшеніе $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma \dots$, то равенство (5) есть тождество; а раздѣливъ обѣ части его на постоянное количество n, получимъ опять тождество

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = f_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots).$$

Это значитъ, что всякое рѣшеніе уравненія (4) есть также рѣшеніе уравненія (1).

Отсюда заключаемъ, что уравненія (1) и (4) эквиваленты.

Такъ какъ доказанное не исключаетъ дробныхъ значеній множителя n, напримѣръ, если $n=\frac{1}{m}$, то заключаемъ, что уравненія

$$f(x, y, z, \ldots)=f_1(x, y, z, \ldots)$$

и $\frac{f(x, y, z, \ldots)}{\mathrm{m}}=\frac{f_1(x, y, z, \ldots)}{\mathrm{m}}$ также эквивалентны.

Примѣчаніе. Въ предыдущей теоремѣ мы сдѣлали условіе, что множитель n не равенъ нулю. Это условіе необходимо, потому что въ противномъ случаѣ уравненія (1) и (4) не равнозначащія. Дѣйствительно, уравненіе (4) при $n=0$ обращается въ тождество $0=0$ независимо отъ значеній неизвѣстныхъ, обращающихъ $f(x, y, z, \ldots)$ и $f_1(x, y, z, \ldots)$ въ тождественно равныя величины, т. е. уравненіе (4) удовлетворяется не только при тѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, при которыхъ удовлетворяется уравненіе (1), но и при всякихъ произвольныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, при которыхъ $f(x, y, z, \ldots)$ и $f_1(x, y, z, \ldots)$ могутъ и не становиться равными.

§ 24. Случаи введенія въ уравненіе постороннихъ корней или исчезновенія существующихъ. Въ предыдущемъ § мы видѣли, что уравненія

$$(1) \ldots . f(x,y,z,\ldots)=f_1(x,y,z,\ldots), \quad (2) \ldots . nf(x,y,z,\ldots)=nf_1(x,y,z,\ldots) \text{ и}$$

$$(3) \ldots . \frac{f(x, y, z, \ldots)}{n}=\frac{f_1(x, y, z, \ldots)}{n}$$

тождественные, т. е. что всѣ рѣшенія одного какого-либо изъ нихъ удовлетворяютъ каждому изъ остальныхъ двухъ, если n число постоянное, неравное нулю.

Посмотримъ теперь, что произойдетъ, когда обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на количество n, содержащее неизвѣстныя.

Если обѣ части уравненія (1) умножимъ на цѣлое количество n, содержащее неизвѣстныя, то получаемое уравненіе (2) можетъ вообще не оказаться эквивалентнымъ съ уравненіемъ (1). Дѣйствительно, уравненіе (2) обращается въ тождество во первыхъ при тѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, при которыхъ $f(x, y, z, \ldots)$ и $f_1(x, y, z, \ldots)$ становятся тождественно-равными, такъ что эти рѣшенія будутъ и рѣшеніями уравненія (1), во вторыхъ уравненіе (2) обращается въ тождество еще при тѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, которыя, не обращая уравненія (1) въ тождество, обращаютъ множитель n въ нуль, а слѣдовательно самое уравненіе (2) въ тождество $0=0$, такъ что эти рѣшенія или нѣкоторыя изъ нихъ могутъ оказаться посторонними, а тогда уравненіе (2) — не эквивалентно съ даннымъ.

Такъ, напримѣръ, если обѣ части уравненія

$$6x-2=7+3x,$$

которому удовлетворяетъ только $x=3$, умножимъ на $4-2x$, то получимъ уравненіе

$$(6x-2)(4-2x)=(7+3x)(4-2x),$$

имѣющее два корня: $x_1=3$ и $x_2=2$, изъ которыхъ однако второй, обращающій въ нуль двучленъ $4-2x$, не удовлетворяетъ первоначальному уравненію и потому онъ посторонній.

Обратно, если обѣ части уравненія $nf(x, y, z, \ldots)=nf_1(x, y, z, \ldots)$ раздѣлимъ на общій множитель n, содержащій неизвѣстныя, то получаемое уравненія $f(x, y, z, \ldots)=f_1(x, y, z, \ldots)$ вообще не будетъ эквивалентнымъ съ даннымъ. Въ самомъ дѣлѣ, между рѣшеніями даннаго уравненія существуютъ такія, которыя обращаютъ $f(x, y, z, \ldots)$ и $f_1(x, y, z, \ldots)$ въ тождественно-равныя величины, такъ что эти рѣшенія будутъ также рѣшеніями сокращеннаго уравненія $f(x, y, z, \ldots)=f_1(x, y, z, \ldots)$; но данное уравненіе можетъ имѣть еще и такія рѣшенія, которыя, не обращая $f(x, y, z, \ldots)$ и $f_1(x, y, z, \ldots)$ въ тождественно-равныя величины, обращаютъ общій множитель n въ нуль, между тѣмъ какъ сокращенное уравненіе $f(x, y, z, \ldots)=f_1(x, y, z, \ldots)$, лишенное этого общаго множителя, лишится и сказанныхъ рѣшеній. Такъ, напримѣръ, если обѣ части уравненія

$$5x(x^2-1)=2(x^2-1),$$

имѣющаго три корня: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=\frac{2}{5}$, раздѣлимъ на ихъ общій множитель x^2-1, получимъ уравненіе $5x=2$, имѣющее одинъ только корень $x=\frac{2}{5}$; слѣдовательно данное уравненіе лишилось двухъ корней, именно тѣхъ, которые обращаютъ исключенный множитель x^2-1 въ нуль.

Можетъ случиться, что по раздѣленіи обѣихъ частей уравненія на ихъ общій множитель, содержащій неизвѣстныя, получается невозможный результатъ, а потому такого общаго множителя исключать не слѣдуетъ. Такъ, напримѣръ, если обѣ части уравненія

$$5(x-2)=3(x-2),$$

имѣющаго одинъ корень $x=2$, раздѣлимъ на $x-2$, получимъ нелѣпый результатъ $5=3$.

Изъ всего сказаннаго въ этомъ § слѣдуетъ, что если придется умножить обѣ части уравненія на количество, содержащее неизвѣстныя, какъ это бываетъ при уничтоженіи дробныхъ членовъ уравненія, то изъ всего числа рѣшеній получаемаго уравненія слѣдуетъ откинуть, какъ постороннія, тѣ, которыя, не удовлетворяя первоначальному уравненію, обращаютъ введенный множитель въ нуль. Обратно, если обѣ части уравненія имѣютъ общій множитель, содержащій неизвѣстныя, то мы вправѣ его исключить (за нѣкоторыми исключеніями); но для полученія всѣхъ рѣшеній первоначальнаго уравненія надо къ рѣшеніямъ сокращеннаго уравненія присоединить еще тѣ, которыя обращаютъ въ нуль исключенный множитель.

Ясно, что если обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на дробное количество, содержащее неизвѣстныя, то нѣкоторыя рѣшенія получаемаго уравненія могутъ оказаться посторонними, другія — исчезнувшими: посторонними могутъ оказаться такія рѣшенія, которыя обращаютъ въ нуль числитель дробнаго множителя или знаменатель дробнаго дѣлителя, а исчезать могутъ такія рѣшенія, которыя обращаютъ въ нуль знаменатель дробнаго множителя или числитель дробнаго дѣлителя.

Такъ, напримѣръ, умноживъ обѣ части уравненія

$$3x(x-1)=x^2-1,$$

имѣющаго два корня: $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$, на $\frac{x+3}{2x-1}$, получимъ уравненіе

$$\frac{3x(x-1)(x+3)}{2x-1}=\frac{(x^2-1)(x+3)}{2x-1} \text{ или } \frac{(x-1)(x+3)[3x-(x+1)]}{2x-1}=0,$$

$$\text{или по сокращеніи } (x-1)(x+3)=0,$$

имѣющее корни: $x'=1$, $x''=-3$; сличивъ же эти корни съ корнями даннаго уравненія, видимъ, что корень $x''=-3$ посторонній, а корень $x_2=\frac{1}{2}$ исчезъ.

Обращаемъ вниманіе на слѣдующій случай, могущій представляться при рѣшеніи уравненія съ дробными членами, знаменатели которыхъ содержатъ неизвѣстныя.

Можетъ случиться, что какой-нибудь корень $x=a$ уравненія, получаемаго изъ даннаго по уничтоженіи въ немъ дробныхъ членовъ, обращаетъ нѣкоторые члены даннаго уравненія въ $\frac{0}{0}$ или въ ∞. Въ первомъ случаѣ надо заключить, что оба члена такой дроби дѣлятся на $x-a$ (§ 18, слѣдствіе), а потому, сокративъ дробь на $x-a$, мы этимъ раскроемъ неопредѣленность; во второмъ случаѣ, т. е. когда нѣкоторые дробные члены послѣ ихъ переноса въ одну часть уравненія при $x=a$ обращаются въ безконечности съ одинаковыми знаками, то, конечно, получится невозможный результатъ: $\infty =$ конечной величинѣ или въ частности нулю, а потому тогда корень a — посторонній; если же нѣкоторые дробные члены обращаются въ безконечности съ разными знаками, то неизвѣстно, есть ли a корень даннаго уравненія или нѣтъ, потому что $\infty - \infty$ есть неопредѣленность, подобная $\frac{0}{0}$. Для раскрытія этой неопредѣленности соединяемъ въ одну дробь тѣ дробные члены, которые при $x=a$ обращаются въ ∞, сокращаемъ ее сполна и затѣмъ въ уравненіи полагаемъ $x=a$; если получится тождество, то a есть корень даннаго уравненія, въ противномъ же случаѣ онъ — посторонній.

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе $\frac{1-2x}{4x^2-12x+5}=\frac{1}{3-x}$.

Рѣшеніе. По уничтоженіи знаменателей получимъ

$$2x^2-5x+2=0, \text{ откуда } x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2};$$

корень $x_1=2$ удовлетворяетъ данному уравненію, а при $x=\frac{1}{2}$ уравненіе принимаетъ видъ $\frac{0}{0}=\frac{2}{5}$, откуда на основаніи слѣдствія § 18 заключаемъ, что дробь первой части даннаго уравненія сократима на $x-\frac{1}{2}$; послѣ этого сокращенія получимъ уравненіе

$$\frac{1}{5-2x}=\frac{1}{3-x},$$

имѣющее только корень $x=2$; значитъ корень $x=\frac{1}{2}$ посторонній.

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе $\frac{6}{x^2-1}+\frac{x+4}{x+1}=2+\frac{2}{x-1}$.

Рѣшеніе. Уничтоживъ знаменателей, получимъ

$$x^2-x-2=0, \text{ откуда } x_1=2,\ x_2=-1.$$

Корень $x_1=2$ удовлетворяетъ данному уравненію, а корень $x_2=-1$ даетъ невозможный результатъ: $\infty+\infty=1$; слѣдовательно этотъ корень — посторонній.

Примѣръ 3. Рѣшить уравненіе $\frac{1}{x-4}-\frac{6}{(x-4)(x+2)}+\frac{1}{x+2}=5$.

Рѣшеніе. По уничтоженіи знаменателей получимъ

$$5x^2-12x-32=0, \text{ откуда } x_1=4,\ x_2=-\frac{8}{5}.$$

Второй изъ этихъ корней удовлетворяетъ данному уравненію, а первый обращаетъ его въ равенство

$$\infty - \infty + \frac{1}{6} = 5\,;$$

для раскрытія здѣсь неопредѣленности соединимъ первыя двѣ дроби даннаго уравненія въ одну несократимую, тогда получимъ:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = 5,$$

что при $x = 4$ не обращается въ тождество; слѣдовательно корень $x = 4$ — посторонній.

Примѣръ 4. Рѣшить уравненіе $\frac{1}{x-4} - \frac{6}{(x-4)(x+2)} + \frac{1}{x+2} = \frac{x}{12}$.

Рѣшеніе. Уничтоживъ знаменателей, получимъ уравненіе

$$24(x-4) = x(x-4)(x+2) \text{ или } (x-4)[24 - x(x+2)] = 0,$$

имѣющее корни $x_1 = x_2 = 4$; $x_3 = -6$, изъ коихъ послѣдній обращаетъ данное уравненіе въ тождество, а при $x = 4$ уравненіе принимаетъ видъ

$$\infty - \infty + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\,;$$

повторивъ же указанное въ примѣрѣ 3 преобразованіе, получимъ уравненіе

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \frac{x}{12},$$

удовлетворяющееся и при $x = -6$, и при $x = 4$.

Если всѣ дробные члены уравненія, содержащіе неизвѣстныя, перенесемъ въ одну часть и соединимъ въ одну несократимую дробь, и затѣмъ уничтожимъ знаменатель, то получаемое уравненіе всегда окажется эквивалентнымъ съ даннымъ.

Положимъ, что имѣемъ уравненіе

$$(p) \ldots . \frac{A}{B} = C,$$

гдѣ дробь $\frac{A}{B}$ есть совокупность всѣхъ дробныхъ членовъ уравненія и несократима, C — совокупность всѣхъ членовъ, цѣлыхъ относительно неизвѣстныхъ, и умножимъ обѣ части уравненія на B; тогда получимъ:

$$(q) \ldots . A = BC,$$

гдѣ A и B по условію не имѣютъ общаго множителя, содержащаго неизвѣстныя, а потому умноженіемъ обѣихъ частей уравненія (p) на B новый общій множитель въ нихъ не вводится, значитъ и не вводится посторонній корень, т. е. уравненія (p) и (q) эквивалентны.

Такъ, напримѣръ, если бы мы дробные члены въ примѣрѣ (3) соединили въ одну несократимую дробь, то мы получили бы уравненіе

$$\frac{2}{x+2}=5,$$

имѣющее лишь корень $x=-\frac{8}{5}$, удовлетворяющій данному уравненію, а вышенайденный посторонній корень $x=4$ не появился бы.

Замѣтимъ еще, что если въ уравненіи съ однимъ неизвѣстнымъ x есть дробные члены, содержащіе это неизвѣстное, то оно иногда имѣетъ корень $x=\infty$, который обыкновенными пріемами рѣшенія не обнаруживается; это имѣетъ мѣсто тогда, когда по переносѣ всѣхъ членовъ въ одну часть уравненія и по ихъ соединеніи въ одну дробь числитель оказывается многочленомъ низшей степени, чѣмъ знаменатель. Имѣя, напримѣръ, уравненіе

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{(x+1)(3x^2+2)}=\frac{5}{3x^2+2}$$

и сдѣлавъ указанное преобразованіе, получимъ уравненіе

$$(r)\ \ldots\ \frac{2x^2-x-6}{3x^4-x^2-2}=0,$$

которое обычнымъ пріемомъ рѣшенія, т. е. уничтоженіемъ знаменателя, даетъ

$$2x^2-x-6=0, \text{ откуда } x_1=2,\ x_2=-\frac{3}{2};$$

но наше уравненіе (r) обратится въ тождество и тогда, когда знаменатель его первой части обратится въ ∞, а это при цѣломъ многочленномъ знаменателѣ возможно лишь при $x=\infty$, а какъ тогда и числитель обращается въ ∞, то первая часть уравненія (r) принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытія этой неопредѣленности раздѣлимъ числитель и знаменатель на x^2, т. е. на высшую степень неизвѣстнаго, встрѣчающуюся въ числителѣ (а на это имѣемъ здѣсь право, такъ какъ единственный корень, который при этомъ можетъ исчезнуть, есть $x=0$, который однако не удовлетворяетъ данному уравненію); тогда получимъ:

$$\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{3x^2-1-\frac{2}{x^2}}=0.$$

Если здѣсь x станемъ неограниченно увеличивать до ∞, то дроби $\frac{1}{x}$, $\frac{6}{x^2}$ и $\frac{2}{x^2}$ будутъ уменьшаться, стремясь къ нулю, а слѣдовательно дробь первой части стремится къ $\frac{2}{3x^2-1}$, т. е. къ $\frac{2}{\infty}$ или къ 0, такъ что въ предѣлѣ получимъ тождество $0=0$.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что наше уравненіе кромѣ корней 2 и $-\frac{3}{2}$, получаемыхъ обычными пріемами рѣшенія уравненій, имѣетъ еще корень $x = \infty$.

Если же степень числителя равна степени знаменателя или выше ея, то уравненіе не можетъ имѣть корня $= \infty$, въ чемъ можно убѣдиться вышеуказаннымъ преобразованіемъ уравненія.

При рѣшеніи уравненій съ радикалами или съ дробными степенями неизвѣстныхъ также случается, что не всѣ получаемые корни удовлетворяютъ данному уравненію. Это происходитъ отъ того, что для уничтоженія радикаловъ или дробныхъ показателей мы обѣ части уравненія возвышаемъ въ степень, а тогда уравненіе можетъ пріобрѣсти посторонніе корни. Дѣйствительно, если обѣ части уравненія $A = B$ возвысимъ въ цѣлую и положительную степень n, получимъ уравненіе

$$A^n = B^n \text{ или } A^n - B^n = 0, \text{ или}$$
$$(A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + B^{n-1}) = 0,$$

а это уравненіе распадается на два:

$$A - B = 0 \text{ и } A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + B^{n-1} = 0,$$

изъ которыхъ первое тождественно съ даннымъ, между тѣмъ какъ корни второго, удовлетворяя уравненію $A^n = B^n$, могутъ не удовлетворять данному уравненію $A = B$.

Такъ, уравненіе $3x + 5\sqrt{x} = 12$ приводится къ уравненію $9x^2 - 97x = -144$, корни котораго суть

$$x_1 = 1\frac{7}{9} \text{ и } x_2 = 9;$$

второй изъ этихъ корней, удовлетворяя уравненію, освобожденному отъ радикала, не удовлетворяетъ данному уравненію, если изъ двухъ значеній радикала $\sqrt{x}$ требуется взять только положительное.

Можетъ случиться, что никакой изъ получаемыхъ корней не удовлетворяетъ данному уравненію съ радикалами. Такъ, напримѣръ, уравненіе

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 1$$

по освобожденіи его отъ радикаловъ даетъ единственный корень $x = 5$, но и онъ не удовлетворяетъ данному уравненію. Замѣтимъ, что рѣшеніе $x = 5$ есть корень уравненія $\sqrt{x+4} + -\sqrt{x-1} = 1$.

Обратно, если изъ обѣихъ частей уравненія извлечь корень, то оно чрезъ это теряетъ одинъ или нѣсколько корней. Дѣйствительно, если уравненіе $A^n = B^n$ или $A^n - B^n = 0$, тождественное съ уравненіемъ

$$(A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + B^{n-1}) = 0,$$

замѣнимъ уравненіемъ $A = B$, то корни послѣдняго удовлетворятъ данному, такъ какъ они обращаютъ множителя $A - B$ въ нуль; но данное уравненіе помимо этихъ корней имѣетъ еще такіе, которые обращаютъ въ нуль многочленъ множитель $A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + B^{n-1}$; эти-то корни и теряются.

Рѣшеніе совокупныхъ уравненій основывается какъ на двухъ теоремахъ, разсмотрѣнныхъ нами выше, такъ и на слѣдующихъ.

Теорема 3. Любое изъ n совокупныхъ уравненій можно, сохраняя остальныя, замѣнить другимъ, получаемымъ почленнымъ сложеніемъ или вычитаніемъ замѣняемаго уравненія и произвольнаго числа изъ остальныхъ, причемъ новая система уравненій будетъ эквивалентна съ данною.

Докажемъ, напримѣръ, что система n совокупныхъ уравненій

$$(1) \ldots \left\{ \begin{array}{l} A = B \\ A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \\ A_3 = B_3 \\ A_4 = B_4 \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

эквивалентна съ системою n уравненій

$$(2) \ldots \left\{ \begin{array}{r} A + A_1 - A_2 = B + B_1 - B_2 \\ A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \\ A_3 = B_3 \\ A_4 = B_4 \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Дѣйствительно, всякое рѣшеніе системы (1) удовлетворяетъ также уравненію $A + A_1 - A_2 = B + B_1 - B_2$ системы (2), потому что при этомъ рѣшеніи каждый членъ первой части этого уравненія имѣетъ тождественно равный себѣ во второй; значитъ это же рѣшеніе удовлетворяетъ всѣмъ уравненіямъ системы (2), такъ какъ остальныя уравненія въ обѣихъ системахъ тѣ же. Обратно, всякое рѣшеніе системы (2) удовлетворяетъ и системѣ (1), потому что уравненія $A_1 = B_1$; $A_2 = B_2$; $A_3 = B_3 \ldots$ въ обѣихъ системахъ тѣ же, а уравненіе $A = B$ системы (1) получается изъ системы (2), когда къ первому уравненію системы (2) придадимъ почленно третье, а вычтемъ второе.

Теорема 4. Любое изъ n совокупныхъ уравненій можно, сохраняя остальныя, замѣнить другимъ, получаемымъ почленнымъ умноженіемъ или дѣленіемъ замѣняемаго уравненія на произвольное число изъ остальныхъ, причемъ новая система и данная будутъ эквивалентны.

Докажемъ, напримѣръ, что система (1) n совокупныхъ уравненій эквивалентна системѣ уравненій

$$(3) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{AA_1A_2}{A_3A_4} = \dfrac{BB_1B_2}{B_3B_4} \\ A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \\ A_3 = B_3 \\ A_4 = B_4 \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Въ самомъ дѣлѣ, всякое рѣшеніе системы (1) удовлетворяетъ также уравненію $\frac{AA_1A_2}{A_3A_4} = \frac{BB_1B_2}{B_3B_4}$ системы (3), потому что при этомъ рѣшеніи каждый множитель или дѣлитель первой части этого уравненія имѣетъ тождественно равный себѣ множитель или дѣлитель во второй; значитъ это же рѣшеніе удовлетворяетъ всѣмъ уравненіямъ системы (3), потому что остальныя уравненія въ обѣихъ системахъ тѣ же. — Обратно, всякое рѣшеніе системы (3) удовлетворяетъ и системѣ (1), ибо уравненія $A_1 = B_1$; $A_2 = B_2$; $A_3 = B_3 \ldots$ въ обѣихъ системахъ тѣ же, а уравненіе $A = B$ системы (1) получается изъ системы (3), когда первое изъ этихъ уравненій почленно помножимъ на 4-ое и 5-ое, а раздѣлимъ на 2-ое и 3-ье.

VI. Рѣшеніе возвратныхъ уравненій 4-ой степени, двучленныхъ и трехчленныхъ.

§ 25. Рѣшеніе возвратныхъ уравненій 4-ой степени. Уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ называется возвратнымъ, если по перенесеніи всѣхъ членовъ въ одну часть уравненія и по расположеніи ихъ по восходящимъ или нисходящимъ степенямъ неизвѣстнаго эта часть оказывается цѣлымъ многочленомъ, въ которомъ коэффиціенты каждыхъ двухъ членовъ, равноотстоящихъ отъ крайнихъ, равны между собою. Мы здѣсь разсмотримъ только возвратное уравненіе 4-ой степени, т. е. уравненіе вида

$$(p) \ldots ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Такое уравненіе называется возвратнымъ потому, что оно возвращается къ первоначальному виду при замѣнѣ въ немъ x дробью $\frac{1}{x}$. Въ самомъ дѣлѣ, при такой замѣнѣ получается уравненіе

$$\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{b}{x}+a=0,$$

откуда по уничтоженіи знаменателей получается уравненіе

$$a+bx+cx^2+bx^3+ax^4=0,$$

тождественное съ даннымъ.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что если уравненіе (p) имѣетъ корень $x=a$, то оно имѣетъ также корень $x=\frac{1}{a}$.

Для рѣшенія уравненія (p) раздѣлимъ обѣ части его на x^2, отъ чего уравненіе не теряетъ ни одного корня, ибо x^2 обращается въ нуль только при $x=0$, но нуль очевидно не есть корень даннаго уравненія; тогда получимъ:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0 \text{ или}$$

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0;$$

но такъ какъ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, то получимъ:

$$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+(c-2a)=0,$$

т. е. квадратное уравненіе относительно $x+\frac{1}{x}$. Рѣшивъ это уравненіе, мы получимъ нѣкоторыя два рѣшенія:

$$x+\frac{1}{x}=\alpha \text{ и } x+\frac{1}{x}=\beta,$$

а рѣшивъ эти два уравненія, получимъ 4 корня даннаго уравненія (p).

Примѣръ. Уравненіе $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$ по раздѣленіи обѣихъ частей на x^2 даетъ

$$2\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0;$$

а какъ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, то получимъ:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0, \text{ откуда}$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}, \text{ т. е. } x+\frac{1}{x}=2\tfrac{1}{2} \text{ и } x+\frac{1}{x}=1;$$

первое изъ этихъ уравненій даетъ $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$; второе даетъ

$$x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравненіе вида

$$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \mp bx + a = 0,$$

въ которомъ коэффиціенты 2-ого и 4-го членовъ равны, но противоположны по знакамъ, можно до нѣкоторой степени причислить къ возвратнымъ въ томъ смыслѣ, что если уравненіе это имѣетъ корень $x = \alpha$, то оно имѣетъ также корень $x = -\frac{1}{\alpha}$, въ чемъ убѣждаемся, какъ выше. Такое уравненіе рѣшается подобнымъ образомъ, какъ уравненіе (p); именно, раздѣливъ обѣ части уравненія на x^2, получимъ:

$$ax^2 \pm bx + c \mp \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0, \text{ откуда}$$

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \pm b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0;$$

а какъ $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$, то получимъ:

$$a\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \pm b\left(x - \frac{1}{x}\right) + (c + 2a) = 0$$

и т. д., какъ въ случаѣ уравненія (p). Такъ, напримѣръ, уравненіе

$$6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$$

приводится къ уравненію

$$6\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 24 = 0, \text{ откуда}$$

$$x - \frac{1}{x} = \frac{25 \pm 7}{12}, \text{ т. е. } x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3} \text{ и } x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2};$$

корни 1-го изъ этихъ уравненій суть $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$; корни 2-го суть $x_3 = 2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

§ 26. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій въ алгебраическомъ видѣ. Уравненіе съ однимъ извѣстнымъ x вида

$$(1) \; . \; . \; . \; . \; ax^n \pm b = 0$$

называется двучленнымъ; коэффиціенты a и b считаемъ здѣсь положительными, въ противномъ случаѣ мѣняемъ знаки обоихъ членовъ на обратные.

Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на a и полагая $\frac{b}{a}=p$, получимъ:

$$(2) \ldots . x^n \pm p = 0,$$

гдѣ p число положительное.

По § 21 уравненіе это имѣетъ n корней; а какъ оно даетъ $x=\sqrt[n]{\mp p}$, то заключаемъ, что и каждый изъ радикаловъ $\sqrt[n]{+p}$ и $\sqrt[n]{-p}$ имѣетъ n значеній.

При нечетномъ n радикалъ $\sqrt[n]{p}$ между своими n значеніями имѣетъ нѣкоторое вещественное и положительное значеніе, притомъ только одно, потому что два разныхъ положительныхъ числа, будучи возвышены въ одну и ту же степень n, не могутъ давать одно и то же подкоренное число p; слѣдовательно всѣ остальныя $n-1$ значеній радикала мнимыя. При четномъ же n радикалъ $\sqrt[n]{p}$ имѣетъ два вещественныхъ значенія, численно равныя, но противоположныя по знакамъ, притомъ только эти два вещественныхъ значенія (причина та же, какъ выше), такъ что всѣ остальныя $n-2$ его значеній мнимыя.

Единственное вещественное и положительное значеніе корня $\sqrt[n]{p}$ изъ положительнаго числа p называется ариѳметическимъ его значеніемъ.

Радикалъ $\sqrt[n]{-p}$ имѣетъ при нечетномъ n нѣкоторое вещественное и отрицательное значеніе, притомъ только одно, а всѣ остальныя $n-1$ его значеній мнимые; при четномъ же n онъ имѣетъ всѣ значенія мнимыя.

Рѣшеніе уравненія (2) приводится къ рѣшенію двучленнаго уравненія, къ которомъ извѣстный членъ равенъ 1. Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ уравненіи (2) $x=z\sqrt[n]{p}$, гдѣ подъ радикаломъ $\sqrt[n]{p}$ понимаемъ только ариѳметическое его значеніе, получимъ:

$$z^n p \pm p = 0 \text{ или по сокращеніи на } p$$

$$(3) \ldots . z^n \pm 1 = 0.$$

Такимъ образомъ мы должны познакомиться съ рѣшеніемъ двучленнаго уравненія вида

$$(4) \ldots . z^n - 1 = 0 \text{ и вида}$$

$$(5) \ldots . z^n + 1 = 0,$$

изъ коихъ каждое по вышеизложенному имѣетъ n значеній.

При этомъ намъ придется ограничиваться лишь частными примѣрами, потому что общій пріемъ рѣшенія двучленныхъ уравненій въ алгебраическомъ видѣ относится къ Высшей Алгебрѣ.

Рѣшивъ уравненіе (3), мы затѣмъ получимъ корни уравненія (2), а слѣдовательно и уравненія (1), умноживъ всѣ корни уравненія (3) на ариѳметическое значеніе радикала $\sqrt[n]{p}$, ибо $x = z\sqrt[n]{p}$.

Примѣчаніе. Изъ того, что при нечетномъ n уравненіе (4) даетъ $z = \sqrt[n]{+1} = +\sqrt[n]{1}$, а уравненіе (5) даетъ $z = \sqrt[n]{-1} = -\sqrt[n]{1}$, заключаемъ, что, зная всѣ корни уравненія (4), мы получимъ всѣ корни уравненія (5), взявъ корни перваго съ обратными знаками.

Примѣры.

1) Уравненіе $x^2 - 1 = 0$ имѣетъ очевидно два корня: $x = \pm 1$.

2) Уравненіе $x^2 + 1 = 0$ имѣетъ два корня: $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

3) Уравненіе $x^3 - 1 = 0$ можно замѣнить слѣдующимъ:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

которое распадается на два:

$$x - 1 = 0 \text{ и } x^2 + x + 1 = 0,$$

ибо данное уравненіе удовлетворяется какъ значеніями x, которыя обращаютъ множитель $x - 1$ въ нуль, такъ и тѣми значеніями, которыя обращаютъ множитель $x^2 + x + 1$ въ нуль. Первое уравненіе даетъ $x = 1$, а второе $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ 3 корня: 1, $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

4) Уравненіе $x^3 + 1 = 0$ можно замѣнить слѣдующимъ:

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0,$$

которое распадается на два: $x + 1 = 0$ и $x^2 - x + 1 = 0$; первое даетъ $x = -1$, второе $x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; значитъ данное уравненіе имѣетъ 3 корня: -1, $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Сличая эти корни съ корнями предыдущаго уравненія (3), видимъ, что согласно съ вышеприведеннымъ примѣчаніемъ корни нашего уравненія отличаются отъ корней предыдущаго только знаками.

На основаніи вышеизложеннаго же корни уравненія $8x^3 + 27 = 0$, напримѣръ, будутъ:

$$-1 . \sqrt[3]{\frac{27}{8}},\quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2} . \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \text{ и } \frac{1-i\sqrt{3}}{2} . \sqrt[3]{\frac{27}{8}}, \text{ т. е.}$$

$$-1{,}5,\quad \frac{1{,}5(1+i\sqrt{3})}{2} \text{ и } \frac{1{,}5(1-i\sqrt{3})}{2}.$$

5) Уравненіе $x^4 - 1 = 0$ распадается на два:

$$x^2 - 1 = 0 \text{ и } x^2 + 1 = 0;$$

первое даетъ $x = \pm 1$, второе же $x = \pm i$, такъ что данное уравненіе имѣетъ 4 корня.

6) Уравненіе $x^4 + 1 = 0$ можно написать такъ:

$$(x^2+1)^2 - 2x^2 = 0 \text{ или } (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = 0,$$

и слѣдовательно оно распадается на два уравненія:

$$x^2 + 1 + x\sqrt{2} = 0 \text{ и } x^2 + 1 - x\sqrt{2} = 0;$$

первое даетъ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$, а второе даетъ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ 4 корня.

7) Уравненіе $x^5 - 1 = 0$ даетъ $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$, а слѣдовательно распадается на два, изъ коихъ одно есть $x - 1 = 0$, откуда $x = 1$, а другое возвратное

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

которое по § 25 приводится къ виду

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0,$$

т. е. къ квадратному уравненію относительно $x + \frac{1}{x}$, откуда

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \text{ а также } x + \frac{1}{x} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2};$$

первое изъ этихъ двухъ уравненій даетъ $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$,

второе же даетъ $x = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$; значитъ данное уравненіе имѣетъ одинъ вещественный корень именно 1, и 4 мнимыхъ.

8) Уравненіе $x^5 + 1 = 0$ даетъ $(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$ и рѣшается подобнымъ образомъ, какъ предыдущее; согласно съ вышеобъясненнымъ корни его будутъ отличаться отъ корней

предыдущаго уравненія лишь знаками, а слѣдовательно они будутъ:

$$-1,\ \frac{1-\sqrt{5}}{4}\mp\frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\ \text{и}\ \frac{1+\sqrt{5}}{4}\mp\frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

9) Уравненіе $x^6-1=0$ распадается на два:

$$x^3-1=0\ \text{и}\ x^3+1=0,$$

откуда на основаніи примѣровъ 3 и 4 заключаемъ, что данное уравненіе имѣетъ 6 корней: ± 1, $\pm\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ и $\pm\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

10) Уравненіе $x^7\pm 1=0$ въ окончательномъ видѣ не разрѣшимо элементарнымъ пріемомъ.

11) Уравненіе $x^8-1=0$ распадается на два:

$$x^4-1=0\ \text{и}\ x^4+1=0,$$

а потому на основаніи примѣровъ 5 и 6 данное уравненіе имѣетъ 8 корней: ± 1, $\pm i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$.

12) Уравненіе $x^8+1=0$ можно написать такъ:

$$(x^4+1)^2-2x^4=0\ \text{или такъ:}\ (x^4+1)^2-(x^2\sqrt{2})^2=0,$$

а слѣдовательно оно распадается на два биквадратныхъ уравненія:

$$x^4+1+x^2\sqrt{2}=0\ \text{и}\ x^4+1-x^2\sqrt{2}=0;$$

первое изъ нихъ даетъ $x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$; слѣдовательно въ случаѣ $+i$ оно по формуламъ 1 и 2 пункта 5 § 13 имѣетъ два корня:

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right),$$

а въ случаѣ $-i$ также два корня:

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right).$$

Такимъ же образомъ и второе биквадратное уравненіе даетъ 4 корня:

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\sqrt{1+i}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\ \text{и}$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\sqrt{1-i}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right);$$

значитъ данное уравненіе имѣетъ 8 корней.

13) Уравненіе $x^9 \pm 1 = 0$ элементарнымъ алгебраическимъ путемъ въ окончательномъ видѣ неразрѣшимо.

14) Уравненіе $x^{10} - 1 = 0$ распадается на два:

$$x^5 - 1 = 0 \text{ и } x^5 + 1 = 0,$$

а потому на основаніи примѣровъ 7 и 8 заключаемъ, что данное уравненіе имѣетъ 10 корней:

$$\pm 1, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm i\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{2}},$$

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Этими примѣрами мы ограничиваемся, потому что общій пріемъ рѣшенія двучленныхъ уравненій въ алгебраическомъ видѣ относится, какъ уже замѣчено выше, къ высшей алгебрѣ.

§ 27. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій въ тригонометрическомъ видѣ. Мы знаемъ, что общій видъ всякаго количества какъ мнимаго, такъ и вещественнаго, есть $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а потому и общій видъ корней уравненія $x^m - 1 = 0$ есть

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

надо только опредѣлить модуль r и аргументъ φ. Для этого возвысимъ обѣ части послѣдняго равенства въ степень m; тогда, замѣчая, что по условію $x^m = 1$, мы на основаніи § 17 пункта 5 получимъ:

$$r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) = 1;$$

а какъ при всякомъ цѣломъ k единицу правой части послѣдняго равенства можно замѣнить количествомъ $\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$, ибо $\cos 2k\pi = 1$, $\sin 2k\pi = 0$, то предыдущее равенство можно написать такъ:

$$r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi.$$

Наконецъ, замѣчая, что послѣднее равенство удовлетворяется при

$$r = 1, \quad m\varphi = 2k\pi, \text{ а слѣдовательно } \varphi = \frac{2k\pi}{m},$$

находимъ, что общій видъ корней уравненія $x^m - 1 = 0$ есть

$$(1) \ldots . x = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Такъ какъ здѣсь k произвольное цѣлое число, то казалось бы, что уравненіе $x^m - 1 = 0$ имѣетъ безконечное число, корней, но легко убѣдиться, что количеству k можно давать только слѣдующія m значеній:

$$(2) \ldots . k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots m - 2,\ m - 1,$$

а при дальнѣйшемъ увеличеніи k значенія корня x повторяются періодически.

Дѣйствительно, всякое число k бóльшее, чѣмъ $m - 1$, можетъ быть представлено подъ видомъ $k = mp + q$, гдѣ p частное отъ дѣленія k на m, q — остатокъ отъ этого дѣленія, слѣдовательно, полагая въ формулѣ (1) $k = mp + q$, получимъ:

$$x = \cos\left(\frac{2mp\pi + 2q\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{2mp\pi + 2q\pi}{m}\right) \text{ или}$$

$$x = \cos\left(2p\pi + \frac{2q\pi}{m}\right) + i\sin\left(2p\pi + \frac{2q\pi}{m}\right) = \cos\frac{2q\pi}{m} + i\sin\frac{2q\pi}{m},$$

гдѣ цѣлое число q, какъ меньшее, чѣмъ m, есть одно изъ чиселъ ряда (2); слѣдовательно x приняло опять одно изъ предыдущихъ m значеній, а потому данное двучленное уравненіе имѣетъ только m корней.

Для рѣшенія уравненія $x^m + 1 = 0$ положимъ опять

$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; слѣдовательно должно быть

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m = -1;$$

а какъ при всякомъ цѣломъ значеніи k будетъ:

$$\cos(2k + 1)\pi = -1;\ \sin(2k + 1)\pi = 0,$$

то предыдущее уравненіе можно написать такъ:

$$r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) = \cos(2k + 1)\pi + i\sin(2k + 1)\pi;$$

замѣчая же, что это равенство удовлетворяется при

$r = 1$; $m\varphi = (2k + 1)\pi$, откуда $\varphi = \frac{(2k + 1)\pi}{m}$, получимъ:

$$(2) \ldots . x = \cos\frac{(2k + 1)\pi}{m} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}.$$

Въ этой формулѣ количество k можетъ имѣть только слѣдующія m значеній: $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots m - 2,\ m - 1$, а при дальнѣйшемъ увеличеніи k значенія корня x повторяются періодически. Дѣйствительно, полагая, какъ выше, $k = mp + q$, гдѣ $q < m$, мы уравненіе (3) можемъ написать такъ:

$$x = \cos\frac{(2mp+2q+1)\pi}{m} + i\sin\frac{(2pm+2q+1)\pi}{m} \text{ или}$$

$$x = \cos\left(2p\pi + \frac{(2q + 1)\pi}{m}\right) + i\sin\left(2p\pi + \frac{(2q + 1)\pi}{m}\right) = \cos\frac{(2q+1)\pi}{m} + i\sin\frac{(2q+1)\pi}{m},$$

гдѣ q есть одно изъ чиселъ ряда: $0, 1, 2, 3, \ldots m-2, m-1$, слѣдовательно x приняло опять одно изъ предыдущихъ m значенiй, а потому данное двучленное уравненiе имѣетъ только m корней.

Согласно изложенному въ § 26 мы получимъ корни уравненiя $ax^n \pm b = 0$, если корни уравненiя $z^n \pm 1 = 0$ умножимъ на ариѳметическое значенiе радикала $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

Примѣръ I. Всѣ корни уравненiя $x^3 - 1 = 0$ заключаются по только-что изложенному въ формулѣ

$$x = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3},$$

гдѣ k имѣетъ слѣдующiя три значенiя: $k = 0, 1, 2$; слѣдовательно искомые корни будутъ:

$$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1:$$

$$x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos 120^0 + i\sin 120^0 =$$

$$= -\cos 60^0 + i\sin 60^0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$

$$x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos 240^0 + i\sin 240^0 =$$

$$= -\cos 60^0 - i\sin 60^0 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$ (см. примѣръ 3 §26).

Примѣръ 2. Общiй видъ корней уравненiя $x^5 + 1 = 0$ есть

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{5} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{5},$$

гдѣ k имѣетъ только слѣдующiя 5 значинiй: $k = 0, 1, 2, 3, 4$; слѣдовательно

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5} = \cos 36^0 + i\sin 36^0;$$

$$x_2 = \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5} = \cos 108^0 + i\sin 108^0 = -\cos 72^0 + i\sin 72^0;$$

$$x_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

$$x_4 = \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5} = \cos 252^0 + i\sin 252^0 = -\cos 72^0 - i\sin 72^0;$$

$$x_5 = \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5} = \cos 324^0 + i\sin 324^0 = \cos 36^0 - i\sin 36^0.$$

Примѣръ 3. Рѣшить уравненiе $x^6 - 1 = 0$.

Рѣшенiе. По вышеизложенному

$$x = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6},$$

гдѣ k имѣетъ только слѣдующія 6 значеній: 0, 1, 2, 3, 4, 5; слѣдовательно, придавая количеству k эти 6 значеній и зная, что

$$\cos 0=1,\ \sin 0=0;\ \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\pi=-1,\ \sin\pi=0;\ \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

получимъ 6 корней даннаго уравненія:

$$x=1,\ -1,\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$ (см. примѣръ 9 § 26).

§ 28. Рѣшеніе трехчленныхъ уравненій. Трехчленнымъ называется уравненіе вида

$$(m)\ \ldots\ ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

первая часть котораго послѣ переноса всѣхъ членовъ въ эту часть и соединенія подобныхъ членовъ состоитъ изъ трехъ членовъ, изъ коихъ одинъ полагается извѣстнымъ, а другіе два содержатъ такія степени неизвѣстнаго, что одна изъ нихъ есть квадратъ другой. Рѣшеніе такого уравненія приводится къ рѣшенію одного квадратнаго уравненія и двухъ двучленныхъ степени n. Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ уравненіи (m) $x^n=y$, получимъ квадратное уравненіе

$$(p)\ \ldots\ ay^2+by+c=0,$$

откуда найдемъ два значенія для y, напримѣръ $y_1=\alpha$, $y_2=\beta$, а потому для опредѣленія x будемъ имѣть два двучленныхъ уравненія:

$$x^n=\alpha \text{ и } x^n=\beta,$$

изъ которыхъ каждое по предыдущему имѣетъ n корней, а слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ $2n$ корней (§ 21).

Изъ нижеслѣдующихъ примѣровъ усмотримъ, что не всякое трехчленное уравненіе для насъ разрѣшимо въ окончательномъ видѣ элементарнымъ алгебраическимъ пріемомъ, ибо часто для нахожденія всѣхъ его корней приходится извлекать изъ мнимыхъ выраженій корни высшихъ степеней, что не входитъ въ нашъ курсъ; оно же всегда разрѣшимо, если показатель n есть одно изъ чиселъ 2, 4, 8, 16, ... и вообще вида 2^k, ибо тогда вопросъ приводится къ послѣдовательному извлеченію квадратнаго корня изъ комплекснаго выраженія (§ 13, пунктъ 5, формулы 1 и 2). Приведемъ примѣры.

Примѣръ I. Для рѣшенія уравненія $x^6-26x^3-27=0$ полагаемъ $x^3=y$; тогда

$$y^2-26y-27=0,\ \text{откуда}\ y_1=27,\ y_2=-1;$$

слѣдовательно для опредѣленія x имѣемъ два двучленныхъ уравненія:

$$(q) \ldots . x^3 = 27 \text{ и } (r) \ldots . x^3 = -1;$$

корни перваго изъ нихъ мы найдемъ, опредѣливъ всѣ 3 значенія радикала $\sqrt[3]{1}$ и умноживъ ихъ на ариѳметическое значеніе корня $\sqrt[3]{27}$, т. е. на 3 (§ 26); а какъ три значенія радикала $\sqrt[3]{1}$ по 3-му примѣру § 26 суть: 1 и $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, то корни уравненія (q) суть: 3 и $\frac{3(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}$; корни же уравненія (r) по 4-му примѣру § 26 суть: -1 и $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, такъ что данное уравненіе имѣетъ 6 корней: два дѣйствительныхъ и 4 мнимыхъ, попарно сопряженныхъ.

Примѣръ 2. Уравненіе $x^6 - 8x^3 + 25 = 0$ при $x^3 = y$ даетъ $y^2 - 8y + 25 = 0$, откуда $y_1 = 4 + 3i$, $y_2 = 4 - 3i$, а слѣдовательно $x^3 = 4 + 3i$, откуда $x = \sqrt[3]{4 + 3i}$, и $x^3 = 4 - 3i$, откуда $x = \sqrt[3]{4 - 3i}$; дальнѣйшее рѣшеніе для насъ невозможно, ибо извлеченіе кубическаго корня изъ мнимаго выраженія не входитъ въ нашъ курсъ.

Примѣръ 3. Для рѣшенія уравненія $4x^8 - 12x^4 + 25 = 0$ полагаемъ $x^4 = y$; тогда

$$4y^2 - 12y + 25 = 0, \text{ откуда } y_1 = \frac{3 + 4i}{2}, \; y_2 = \frac{3 - 4i}{2};$$

слѣдовательно для опредѣленія x имѣемъ два двучленныхъ уравненія:

$$x^4 = \frac{3 + 4i}{2} \text{ и } x^4 = \frac{3 - 4i}{2},$$

изъ коихъ каждое имѣетъ 4 мнимыхъ корня, именно: 1-ое даетъ $x = \pm\sqrt[4]{\frac{3+4i}{2}} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{3+4i}{2}}} = \pm\sqrt{\pm(2+i)}$ (§ 13, пунктъ 5, формула 1), т. е. 4 корня: $\pm\sqrt{2+i}$ и $\pm\sqrt{-2-i}$; второе двучленное уравненіе $x^4 = \frac{3-4i}{2}$ даетъ также 4 корня: $\pm\sqrt{2-i}$ и $\pm\sqrt{-2+i}$; такъ что данное уравненіе имѣетъ 8 мнимыхъ корней, изъ коихъ каждый по § 13, п. 5, форм. 1 и 2 можетъ быть приведенъ къ комплексному виду, напримѣръ $\sqrt{2-i} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

§ 29. Преобразованіе радикала вида $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$. При рѣшеніи трехчленныхъ уравненій четныхъ степеней часто получаются корни вида $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, гдѣ a и b числа раціональныя, но $\sqrt{b}$ количество ирраціональное; напримѣръ, уравненіе

$$x^4 - 14x^2 + 36 = 0 \text{ имѣетъ корни: } x = \pm\sqrt{7 \pm \sqrt{13}};$$

подобныя выраженія при нѣкоторомъ условіи могутъ быть преобразованы въ болѣе простыя вида $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$, гдѣ m и n числа раціональныя, но радикалы $\sqrt{m}$ и $\sqrt{n}$ или одинъ изъ нихъ ирраціональны.

Для этой цѣли возьмемъ очевидныя тождества

$$(\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}})^2 = 2(a + \sqrt{a^2-b}) \text{ и}$$

$$(\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}})^2 = 2(a - \sqrt{a^2-b}), \text{ откуда}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \pm\sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})} \text{ и}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = \pm\sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})};$$

сложивъ же и вычтя послѣднія два равенства почленно, получимъ:

$$(1) \ldots \sqrt{a+\sqrt{b}} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right) \text{ и}$$

$$(2) \ldots \sqrt{a-\sqrt{b}} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right),$$

гдѣ изъ четырехъ возможныхъ комбинацій двойныхъ знаковъ слагаемыхъ или вычитаемыхъ равенствъ пригодна лишь выбранная нами комбинація, потому что только при такомъ ихъ выборѣ квадратъ правой части каждаго изъ равенствъ (1) и (2) равенъ подкоренному количеству лѣвой.

Мы поставили себѣ цѣлью данный радикалъ съ ирраціональнымъ подкореннымъ количествомъ преобразовать въ радикалы съ раціональными подкоренными количествами; выраженія же (1) и (2) показываютъ, что это возможно лишь при такихъ значеніяхъ a и b, при которыхъ $a^2 - b$ оказывается точнымъ квадратомъ, въ противномъ случаѣ указанное преобразованіе только усложняло бы вопросъ.

Примѣры.

1) $$\sqrt{6+\sqrt{11}} = \pm\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{36-11}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{36-11}}{2}}\right) = \pm\frac{\sqrt{22}+\sqrt{2}}{2}.$$

2) $$\sqrt{1\tfrac{1}{2}-\sqrt{2}} = \pm\left(\sqrt{\frac{1\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-2}}{2}} - \sqrt{\frac{1\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-2}}{2}}\right) = \pm\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) $\sqrt{10+\sqrt{51}}$. Отв. $\frac{\sqrt{34}+\sqrt{6}}{2}$.

4) $\sqrt{75-12\sqrt{21}}$. Отв. $3\sqrt{7}-2\sqrt{3}$.

5) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$. Отв. $5+\sqrt{3}$. 6) $\sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{11}}$. Отв. $\frac{2\sqrt{22}-\sqrt{11}}{11}$.

7) $\sqrt{m-2\sqrt{m^2-n^2}}=\sqrt{\frac{m+\sqrt{n^2}}{2}}-\sqrt{\frac{m-\sqrt{n^2}}{2}}=\sqrt{\frac{m+n}{2}}-\sqrt{\frac{m-n}{2}}$.

8) $\sqrt{ax+1+\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}}$. Отв. $\sqrt{\frac{ax+1+a+x}{2}}+\sqrt{\frac{ax+1-a-x}{2}}$.

9) $\sqrt{(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{ab}}$. Отв. $a-b-2\sqrt{ab}$.

10) $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}}$. Отв. $\frac{\sqrt{\sqrt{1-a^2}+1}}{\sqrt[4]{1-a^2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1-a^2}}\left(\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)$.

11) $\sqrt{\sqrt{32}+\sqrt{30}}$. Отв. $\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

12) $\sqrt{5\sqrt{5}+2\sqrt{30}}=\sqrt{\sqrt{5}(5+2\sqrt{6})}=\sqrt[4]{5}\,.\sqrt{5+2\sqrt{6}}=$

$$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt[4]{5}.$$

13) $\sqrt{\frac{a+b^2}{2b}+\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a+b^2}{2b}-\sqrt{a}}$.

Отв. $\sqrt{2\left[\frac{a+b^2}{2b}-\sqrt{\left(\frac{a+b^2}{2b}\right)^2-a}\right]}=\sqrt{2b}$.

14) $\sqrt{\frac{11}{12}+\frac{\sqrt{30}}{6}}+\sqrt{\frac{11}{12}-\frac{\sqrt{30}}{6}}$. Отв. $\pm\sqrt{2}$.

VII. Неравенства и неопредѣленныя уравненія.

§ 30. Неравенства и ихъ рѣшеніе. Два количества, соединенныя между собою однимъ изъ знаковъ $>$, $<$, $\geqq$, $\leqq$ и $\gtrless$, составляютъ выраженіе, называемое неравенствомъ.

Два количества могутъ быть или явно неравными, например $5>3$ или $x+1>x$, или же становиться неравными только при опредѣленныхъ значеніяхъ нѣкоторыхъ буквъ, входящихъ въ ихъ составъ и называемыхъ тогда неизвѣстными; напримѣръ $3x-1$ меньше, чѣмъ $x+5$, не при всякомъ значеніи x, а только при x, меньшемъ 3.

Способъ опредѣленія значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ данному неравенству, называется рѣшеніемъ неравенства.

Неравенства имѣютъ, между прочимъ, слѣдующія свойства.

1. Знакъ неравенства не измѣнится, если къ обѣимъ частямъ неравенства придадимъ или изъ обѣихъ частей вычтемъ по-ровну, т. е.

если, напримѣръ, $a > b$, то и $a + m > b + m$ и $a - m > b - m$.

Дѣйствительно, если $a > b$, то разность $a - b$ положительная величина, т. е. $a - b > 0$; но ясно, что разность $a - b$ не измѣнится, если къ ней придадимъ $m - m$, ибо $m - m = 0$; слѣдовательно и

$$(1) \ldots \; a - b + m - m > 0, \text{ откуда}$$

$$(a + m) - (b + m) > 0,$$

т. е. разность $(a + m) - (b + m)$ положительная величина, значитъ

$$a + m > b + m.$$

Неравенство (1) можно написать еще такъ:

$(a - m) - (b - m) > 0$; слѣдовательно также: $a - m > b - m$.

На основаніи этого свойства члены изъ одной части неравенства могутъ быть перенесены въ другую съ обратными знаками. Такъ, напримѣръ, придавъ къ обѣимъ частямъ неравенства

$$a + b - c < d + e$$

по c, получимъ:

$$a + b - c + c < d + e + c \text{ или}$$

$$a + b < d + e + c;$$

а если затѣмъ вычтемъ изъ обѣихъ частей этого неравенства по d, получимъ:

$$a + b - d < e + c.$$

Сличивъ это неравенство съ даннымъ, видимъ, что c и d перешли изъ одной части неравенства въ другую съ обратными знаками.

2. Знакъ неравенства не измѣнится, если обѣ части неравенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же, но положительное количество n; если же обѣ части умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же отрицательное количество $-n$, то знакъ неравенства перемѣнится на обратный, т. е. если, напримѣръ, $a > b$, то

$$a \,.\, n > b \,.\, n \text{ и } \frac{a}{n} > \frac{b}{n}, \text{ но}$$

$$a\,.\,(-n) < b\,.\,(-n) \text{ и } \frac{a}{-n} < \frac{b}{-n}.$$

Дѣйствительно, если $a > b$, то $a - b$ положительная величина; слѣдовательно при положительномъ n количества $(a - b)\,.\,n$ и $\frac{a-b}{n}$ будутъ положительными, т. е.

$$(a-b)\,.\,n > 0 \text{ и } \frac{a-b}{n} > 0 \text{ или}$$

$$a\,.\,n - b\,.\,n > 0 \text{ и } \frac{a}{n} - \frac{b}{n} > 0, \text{ значитъ}$$

$$a\,.\,n > b\,.\,n \text{ и } \frac{a}{n} > \frac{b}{n}.$$

Если же положительную величину $a - b$ умножимъ или раздѣлимъ на отрицательную величину $-n$, то количества $(a - b)\,.\,(-n)$ и $\frac{a-b}{-n}$ будутъ отрицательными, т. е.

$$(a-b)\,.\,(-n) < 0 \text{ и } \frac{a-b}{-n} < 0 \text{ или}$$

$$a\,.\,(-n) - b\,.\,(-n) < 0 \text{ и } \frac{a}{-n} - \frac{b}{-n} < 0, \text{ значитъ}$$

$$a\,.\,(-n) < b\,.\,(-n) \text{ и } \frac{a}{-n} < \frac{b}{-n}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при перемѣнѣ знаковъ всѣхъ членовъ неравенства на обратные надо и знакъ неравенства перемѣнить на обратный, потому что это значитъ, что мы обѣ части неравенства умножаемъ на -1.

На основанiи этой теоремы можно уничтожить дробные члены въ неравенствѣ, умноживъ обѣ части его на наименьшее кратное всѣхъ знаменателей.

§ 31. Рѣшенiе неравенства 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Неравенства, какъ и уравненiя, раздѣляются по числу неизвѣстныхъ и по степенямъ на неравенства съ однимъ, двумя, тремя неизвѣстными и т. д. и на неравенства 1-ой степени, 2-ой и т. д. Разсмотримъ примѣры рѣшенiя неравенствъ 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Примѣръ 1. Опредѣлить тѣ значенiя неизвѣстнаго x, при которыхъ

$$\frac{3(x-2)}{4} - \frac{2(x+1)}{7} < \frac{1}{8}.$$

Рѣшенiе. Уничтоживъ знаменателей, получимъ:

$$42(x-2) - 16(x+1) < 7;$$

раскрывъ затѣмъ скобки, перенеся неизвѣстные члены въ одну часть неравенства, извѣстные въ другую, и сдѣлавъ приведенiе, получимъ:

$$26x < 107, \text{ откуда } x < \frac{107}{26}, \text{ т. е. } x < 4\frac{3}{26},$$

т. е. всякое положительное число меньшее $4^3/_{26}$ и всякое отрицательное число безъ всякаго ограниченія удовлетворяетъ данному неравенству.

Примѣръ 2. Рѣшить неравенство $\frac{x}{3} < \frac{3}{2}x - 7$.

Рѣшеніе. Уничтоживъ знаменателей, получимъ:

$$2x < 9x - 42, \text{ откуда } 2x - 9x < -42, \text{ т. е.}$$

$-7x < -42$, значитъ $7x > 42$ (свойство 2 § 30), а потому $x > 6$,

т. е. всякое число бо́льшее 6 удовлетворяетъ данному неравенству.

Примѣръ 3. Капиталъ, отданный въ ростъ болѣе чѣмъ по $4^0/_0$, даетъ ежегодно 325 руб. прибыли. Опредѣлить этотъ капиталъ.

Рѣшеніе. Обозначивъ буквою x число рублей искомаго капитала, найдемъ, что онъ при $4^0/_0$ даетъ прибыли $\frac{4x}{100}$ руб., что должно быть меньше 325 руб., ибо по условію капиталъ x даетъ 325 руб. прибыли, если онъ отданъ въ ростъ выше чѣмъ по $4^0/_0$; слѣдовательно

$\frac{4x}{100} < 325$, откуда $x < 8125$, т. е. капиталъ меньше 8125 руб.

Примѣръ 4. Куплено 3 фунта чаю и изъ 10 рублей получено сдачи не болѣе одной трети стоимости одного фунта. Сколько стоитъ фунтъ этого чаю?

Рѣшеніе. Полагая, что одинъ фунтъ стоитъ x рублей, получмъ:

$$10 - 3x \leqq \frac{1}{3}x, \text{ откуда}$$

$$10 \leqq 3\frac{1}{3}x, \text{ слѣдовательно } x \geqq 3,$$

т. е. одинъ фунтъ чаю стоитъ не меньше 3 руб.

§ 32. Рѣшеніе двухъ неравенствъ I-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Изъ предыдущаго § видно, что при рѣшеніи одного неравенства мы для неизвѣстнаго получаемъ множество значеній, бо́льшихъ или меньшихъ извѣстнаго предѣла. Но бываютъ вопросы, рѣшаемые помощію двухъ или болѣе неравенствъ, которыя должны удовлетворяться одними и тѣми же значеніями неизвѣстнаго; тогда для этихъ значеній можетъ получиться иногда одна только предѣльная величина, иногда двѣ предѣльныя величины, между которыми заключаются значенія неизвѣстнаго, а иногда даже противорѣчащіе другъ другу результаты, указывающіе на невозможность вопроса.

Поясним это примѣрами.

Примѣръ I. Опредѣлить, при какихъ цѣлыхъ значеніяхъ x дробь $\frac{3x-8}{4x-15}$ имѣетъ положительное значеніе.

Рѣшеніе. Данная дробь будетъ положительною, когда ея числитель и знаменатель будутъ или оба положительные, или оба отрицательные, т. е. когда одновременно

$$(1) \ldots\ 3x-8>0 \text{ и } 4x-15>0 \text{ или когда}$$

$$(2) \ldots\ 3x-8<0 \text{ и } 4x-15<0;$$

первое изъ этихъ условій даетъ для x предѣлы: $x>2^2/_3$ и $x>3^3/_4$, изъ которыхъ первый содержится во второмъ, ибо если число больше $3^3/_4$, то оно подавно больше $2^2/_3$; слѣдовательно для x имѣемъ одинъ только низшій предѣлъ именно $3^3/_4$ и вопросъ удовлетворяется при

$$x=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8, \ldots \text{ до } \infty.$$

Условіе (2) даетъ предѣлы: $x<2^2/_3$ и $x<3^3/_4$, изъ которыхъ второй содержится въ первомъ, а потому для x имѣемъ опять одинъ только высшій предѣлъ $x<2^2/_3$; слѣдовательно вопросъ удовлетворяется также при $x=2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2, \ldots$ до $-\infty$. Итакъ данная дробь будетъ положительная при всякихъ цѣлыхъ значеніяхъ x за исключеніемъ $x=3$.

Примѣръ 2. Опредѣлить, при какихъ цѣлыхъ значеніяхъ x дробь $\frac{5x-3}{0{,}5x+1}$ величина отрицательная.

Рѣшеніе. Вопросъ требуетъ, чтобы было одновременно или

$$(1) \ldots\ 5x-3>0 \text{ и } 0{,}5x+1<0, \text{ или}$$

$$(2) \ldots\ 5x-3<0 \text{ и } 0{,}5x+1>0;$$

первое условіе даетъ $x>\frac{3}{5}$ и $x<-2$; но эти рѣшенія несовмѣстны, ибо никакое число. будучи больше $\frac{3}{5}$, въ то же время не можетъ быть меньше -2; второе же условіе даетъ два возможныхъ предѣла: $x<\frac{3}{5}$ и $x>-2$, изъ коихъ первый есть высшій предѣлъ, а второй низшій, и между которыми заключается только два цѣлыхъ числа именно 0 и -1; слѣдовательно данная дробь будетъ отрицательная только при $x=0$ и $x=-1$.

Примѣръ 3. При какихъ цѣлыхъ значеніяхъ a дробь $\frac{4-5a}{8a-3}$ будетъ положительная?

Рѣшеніе. Условіе вопроса требуетъ, чтобы было одновременно

$$\text{или } 4 - 5a > 0 \text{ и } 8a - 3 > 0,$$
$$\text{или } 4 - 5a < 0 \text{ и } 8a - 3 < 0;$$

слѣдовательно должно быть одновременно или

$$(1) \ldots . \; a < \tfrac{4}{5} \text{ и } a > \tfrac{3}{8}, \text{ или}$$
$$(2) \ldots . \; a > \tfrac{4}{5} \text{ и } a < \tfrac{3}{8};$$

предѣлы (1) сами по себѣ возможны, но между ними не заключается никакое цѣлое число, предѣлы же (2) несовмѣстны; слѣдовательно данная дробь ни при какомъ цѣломъ значеніи a положительною быть не можетъ.

Примѣръ 4. Если бы въ учебномъ заведеніи выходило ежемѣсячно 19-ю тетрадями болѣе, чѣмъ выходитъ, то въ 8 мѣсяцевъ вышло бы не менѣе 900 тетрадей; а если бы ежемѣсячно выходило 12-ю тетрадями менѣе, то въ 10 мѣсяцевъ вышло бы не болѣе 900 тетрадей. Сколько тетрадей выходило ежемѣсячно?

Рѣшеніе. Полагая, что ежемѣсячно выходило x тетрадей, получимъ два неравенства:

$$\begin{cases} 8(x+19) \geqq 900 \text{ и} \\ 10(x-12) \leqq 900, \text{ откуда} \end{cases}$$
$$x \geqq 93^1/_2 \text{ и } x \leqq 102;$$

слѣдовательно число тетрадей равно одному изъ чиселъ:

94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101 и 102.

Изъ разсмотрѣнныхъ нами примѣровъ очевидно, что вопросы, рѣшаемые помощію неравенствъ, принадлежатъ къ неопредѣленнымъ вопросамъ, такъ какъ неизвѣстное имѣетъ вообще неопредѣленное число значеній; въ нѣкоторыхъ только случаяхъ, при извѣстныхъ условіяхъ, число рѣшеній ограничено (см. примѣры 2 и 4), а иногда вопросъ вовсе не имѣетъ рѣшеній (см. примѣръ 3).

§ 33. Рѣшеніе неравенства 2-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій видъ неравенства 2-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ есть

$$Ax^2 + Bx + C > 0 \text{ или же } Ax^2 + Bx + C < 0,$$

гдѣ коэффиціенты A, B и C вещественныя числа; но мы займемся только рѣшеніемъ неравенства перваго вида, потому что второй видъ всегда можно привести къ первому, перемѣнивъ знаки всѣхъ его членовъ на обратные.

Для рѣшенія неравенства $Ax^2 + Bx + C > 0$ разложимъ трехчленъ первой его части на линейные множители. Пусть будутъ α и β корни этого трехчлена; тогда наше неравенство можетъ быть написано такъ:

$$(m) \ldots \; A(x-\alpha)(x-\beta) > 0,$$

гдѣ можетъ быть или $A > 0$, или $A < 0$.

I. Положимъ, что $A > 0$; при этомъ корни α и β могутъ быть: a) мнимыми и, конечно, сопряженными, b) вещественными и равными, c) вещественными неравными.

a) Если корни α и β мнимые, напримѣръ $\alpha = a + bi$, $\beta = a - bi$ (а это, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто при $B^2 - 4AC < 0$), то первая часть нашего неравенства можетъ быть преобразована такъ:

$$A(x-\alpha)(x-\beta) = A(x-a-bi)(x-a+bi) = A[(x-a)^2 + b^2],$$

а слѣдовательно имѣемъ неравенство

$$A[(x-a)^2 + b^2] > 0,$$

гдѣ первая часть есть величина положительная при всякомъ значеніи x, ибо $A > 0$ и $(x-a)^2 + b^2$, какъ сумма квадратовъ, величина положительная; слѣдовательно данное неравенство удовлетворяется всякимъ значеніемъ x.

b) Если корни трехчлена вещественные и равные (а это имѣетъ мѣсто при $B^2 - 4AC = 0$), то наше неравенство принимаетъ видъ

$$A(x-\alpha)^2 > 0,$$

гдѣ 1-ая часть положительная величина при всякомъ значеніи x; слѣдовательно и въ этомъ случаѣ неравенство наше удовлетворяется при всякомъ значеніи x.

c) Если корни α и β вещественные и неравные, напримѣръ $\alpha > \beta$ (а это имѣетъ мѣсто при $B^2 - 4AC > 0$), то при $A > 0$ наше неравенство (m) требуетъ, чтобы множители $x - \alpha$ и $x - \beta$ имѣли одинаковые знаки, т. е. чтобы было одновременно

$$x - \alpha > 0 \text{ и } x - \beta > 0 \text{ или же } x - \alpha < 0 \text{ и } x - \beta < 0;$$

первыя два неравенства выполнимы при $x > \alpha$ (ибо $\alpha > \beta$), вторыя — при $x < \beta$; слѣдовательно всякое значеніе x, большее бо́льшаго корня α, и всякое значеніе x, меньшее меньшаго корня β, т. е. всякое значеніе x, не лежащее между α и β, удовлетворяетъ неравенству (m).

II. Положимъ теперь, что $A < 0$. И здѣсь разсмотримъ 3 случая: a) корни α и β мнимые, b) вещественные и равные, c) вещественные и неравные.

a) Если корни α и β мнимые, напримѣръ $\alpha = a + bi$, $\beta = a - bi$, то неравенство (m) можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$A[(x-a)^2 + b^2] > 0,$$

гдѣ 1-ая часть при $A<0$ есть величина отрицательная при всякомъ x; слѣдовательно данное неравенство въ этомъ случаѣ не имѣетъ рѣшенія.

b) Если $\alpha=\beta$, то неравенство (m) даетъ

$$A(x-\alpha)^2>0,$$

что также не удовлетворяется никакимъ значеніемъ x, ибо первая часть этого неравенства при $A<0$ всегда величина отрицательная.

c) Если корни α и β вещественные и неравные, напримѣръ $\alpha>\beta$, то при $A<0$ неравенство (m) требуетъ, чтобы $x-\alpha$ и $x-\beta$ имѣли противоположные знаки, а это при $\alpha>\beta$ выполнено при $\alpha>x>\beta$; слѣдовательно всѣ значенія x, заключающіяся между корнями α и β, и только эти значенія удовлетворяютъ неравенству (m).

Примѣръ I. Неравенство $x^2-2x+5>0$ даетъ $(x-1)^2+4>0$; слѣдовательно оно (по I, a) удовлетворяется всякимъ значеніемъ x.

Примѣръ 2. Неравенство $-4x^2+12x-9<0$ или $4x^2-12x+9>0$ даетъ $4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2>0$; слѣдовательно оно (по I, b) удовлетворяется всякимъ значеніемъ x.

Примѣръ 3. Неравенство $3x^2+8x-3>0$ даетъ $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3)>0$, слѣдовательно оно (по I, c) удовлетворяется какъ при всякомъ значеніи x бо́льшемъ, чѣмъ $\frac{1}{3}$, такъ и при всякомъ значеніи x меньшемъ, чѣмъ -3.

Примѣръ 4. При какихъ значеніяхъ x радикалъ $\sqrt{-3x^2+4x-4\frac{1}{3}}$ имѣетъ вещественныя значенія?

Рѣшеніе. Радикалъ будетъ вещественный, когда $-3x^2+4x+-4\frac{1}{3}>0$; а такъ какъ этотъ трехчленъ преобразовывается въ $-3\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+1\right\}$, что не можетъ быть больше 0, то данный радикалъ не можетъ имѣть вещественныхъ значеній (II, a).

Примѣръ 5. Неравенство $x^2-4x+4<0$ или $-x^2+4x-4>0$, даетъ $-(x-2)^2>0$, что (по II, b) не имѣетъ рѣшенія.

Примѣръ 6. При какихъ значеніяхъ x радикалъ $\sqrt{10x^2-13x-3}$ имѣетъ вещественныя значенія?

Рѣшеніе. Подкоренное количество, которое можетъ быть преобразовано въ $10\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$, есть положительная величина при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между $-\frac{1}{5}$ и

$\frac{3}{2}$ (II, c), поэтому и данный радикалъ вещественный при этихъ же значеніяхъ x.

Примѣръ 7. На сколько надо уменьшить каждый изъ сомножителей произведенія 8.11, чтобы произведеніе стало меньше 54?

Условія вопроса приводятъ къ неравенству

$$-x^2+19x-34>0 \text{ или } -(x-17)(x-2)>0;$$

слѣдовательно (по II, c) вопросу удовлетворяютъ всѣ числа, заключающіяся между 2 и 17.

Примѣръ 8. Какое положительное число надо придать къ каждому изъ сомножителей произведенія 7 . 9, чтобы произведеніе осталось меньше 120?

Условія вопроса приводятъ къ неравенству

$$-x^2-16x+57>0 \text{ или } -(x-3)(x+19)>0,$$

которому (по II, c) удовлетворяютъ всѣ положительныя числа, заключающіяся между -19 и 3, т. е. числа 0, 1 и 2.

§ 34. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій I-ой степени. Изъ общаго курса алгебры знаемъ, что одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, два уравненія съ двумя неизвѣстными и вообще система совокупныхъ уравненій, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ, имѣютъ вполнѣ опредѣленное, конечное число рѣшеній, а потому такія уравненія называются опредѣленными. Иное дѣло, когда имѣемъ одно уравненіе съ двумя или болѣе неизвѣстными и вообще систему уравненій, число которыхъ меньше числа неизвѣстныхъ; въ этомъ случаѣ число рѣшеній неопредѣленно велико и потому такія уравненія называются неопредѣленными.

Для разъясненія сказаннаго возьмемъ уравненіе съ двумя неизвѣстными

$$3x+5y=16.$$

Придавая одному изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ x, рядъ совершенно произвольныхъ значеній, напримѣръ

$$x=2,\ -1,\ 0,\ \frac{1}{3} \text{ и прочее,}$$

и опредѣливъ затѣмъ каждый разъ соотвѣтствующее значеніе для y, получимъ:

$$y=2,\ 3\frac{4}{5},\ 3\frac{1}{5},\ 3 \text{ и прочее;}$$

слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ неопредѣленно большое число рѣшеній:

1-ое рѣшеніе: $x=2,\ y=2,$

2-ое „ $x=-1,\ y=3\frac{3}{4},$

3-ье рѣшеніе: $x=0$, $y=3\frac{1}{5}$,

4-ое „ $x=\frac{1}{3}$, $y=3$ и прочее.

Точно также уравненіе $3x-5y-2z=14$ съ 3 неизвѣстными есть неопредѣленное, ибо, придавая двумъ изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ y и z, рядъ произвольныхъ значеній и опредѣливъ затѣмъ каждый разъ соотвѣтствующее имъ значеніе неизвѣстнаго x, мы получимъ неопредѣленно большое число рѣшеній даннаго уравненія.

Вообще, если имѣемъ систему изъ m уравненій съ n неизвѣстными, причемъ число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ, т. е. $m<n$, то, придавая каждому изъ $n-m$ неизвѣстныхъ рядъ произвольныхъ значеній и рѣшивъ затѣмъ данныя m уравненій относительно остальныхъ m неизвѣстныхъ, мы опять получимъ безконечное число рѣшеній для данныхъ уравненій. Но часто вопросы таковы, что изъ всѣхъ рѣшеній такихъ уравненій слѣдуетъ выбрать одни только цѣлыя и положительныя; тогда число такихъ рѣшеній можетъ быть опять-таки неопредѣленно велико, иногда оно ограничено, а при извѣстныхъ условіяхъ уравненія могутъ и не имѣть вовсе рѣшеній.

Займемся же рѣшеніемъ неопредѣленныхъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ.

Общій и упрощенный видъ одного уравненія 1-ой степени съ двумя неизвѣстными есть

$$(1) \ldots . \; ax+by=c.$$

Предварительно укажемъ на нѣкоторыя свойства такого уравненія.

Положимъ, что въ этомъ уравненіи коэффиціенты a, b и c числа цѣлыя и a и b взаимно-простыя съ c (каковыми въ противномъ случаѣ ихъ всегда можно сдѣлать, уничтоживъ знаменатели и раздѣливъ затѣмъ обѣ части уравненія на общій наибольшій дѣлитель коэффиціентовъ a, b и c); тогда наше уравненіе имѣетъ между прочимъ слѣдующія свойства:

I. Если въ уравненіи (1) a и b числа взаимно-простыя съ c, но коэффиціенты a и b при неизвѣстныхъ имѣютъ общій дѣлитель, то уравненіе не можетъ имѣть цѣлыхъ рѣшеній.

Дѣйствительно, допустивъ, что a и b, будучи простыми съ c, имѣютъ общаго дѣлителя d, и раздѣливъ обѣ части уравненія (1) на d, получимъ:

$$(2) \ldots . \; \frac{a}{d}\cdot x+\frac{b}{d}\cdot y=\frac{c}{d},$$

гдѣ коэффиціенты $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$ числа цѣлыя, членъ же $\frac{c}{d}$ несократимая дробь, ибо по условію a, b и c не имѣютъ общаго дѣлителя; слѣдовательно, если бы x и y могли имѣть цѣлыя значенія, то первая часть уравненія (2) при этихъ значеніяхъ дала бы цѣлое число и слѣдовательно не могла бы равняться несократимой дроби $\frac{c}{d}$.

2. Если коэффиціенты a и b при неизвѣстныхъ въ уравненіи (1) числа цѣлыя и взаимно-простыя, то это уравненіе всегда имѣетъ рѣшеніе въ цѣлыхъ (хотя бы и въ отрицательныхъ) числахъ.

Чтобы убѣдиться въ справедливости этого предложенія, рѣшимъ уравненіе (1), напримѣръ относительно x, и, получивъ:

$$(u) \ldots\ldots x = \frac{c - by}{a},$$

докажемъ, что всегда существуетъ такое цѣлое значеніе для y, при которомъ $c - by$ дѣлится нá-цѣло на a, или, что то же, при которомъ x имѣетъ также цѣлое значеніе.

Дѣйствительно, если въ формулѣ (u) количеству y дадимъ послѣдовательно значенія чиселъ слѣдующаго ряда:

$$(v) \ldots\ldots 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots m, \ldots n, \ldots (a-2),\ (a-1),$$

то $c - by$ приметъ соотвѣтственно слѣдующія значенія:

$$(w) \ldots\ c,\ c-b,\ c-2b,\ c-3b, \ldots\ c-mb, \ldots\ c-nb, \ldots\ c-(a-2)b,\ c-(a-1)b,$$

которыя по раздѣленіи ихъ на a дадутъ различные между собою остатки. Въ самомъ дѣлѣ, если бы два какія-либо изъ количествъ этого рода, напримѣръ $c - mb$ и $c - nb$, по раздѣленіи на a дали частныя q и q', но одинъ и тотъ же остатокъ r, то мы имѣли бы:

$$c - mb = aq + r \text{ и } c - nb = aq' + r;$$

а вычтя эти равенства почленно, мы получили бы равенство

$$b(n - m) = a(q - q'),$$

вторая часть котораго дѣлится на a, слѣдовательно и первая часть должна бы была дѣлиться на a; такъ какъ b, будучи по условію число простое съ a, не дѣлится на a, то разность $n - m$ должна была бы дѣлиться на a, что однакожъ невозможно, потому что n и m положительныя числа и порознь меньше a, какъ это видно изъ ряда (v). Итакъ, всѣ остатки, получаемые при раздѣленіи чиселъ ряда (w) на a, различны между собой, притомъ они меньше дѣлителя a; слѣдовательно всѣ они должны заключаться въ ряду (v) и потому одинъ изъ этихъ остатковъ непремѣнно есть 0, т. е. одно изъ чиселъ ряда (w) дѣлится на a безъ остатка. Отсюда и заключаемъ, что при нѣкоторомъ цѣломъ значеніи y количество $\frac{c-by}{a}$ или x имѣетъ также цѣлое значеніе и слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ цѣлое рѣшеніе.

3. Легко показать, что если мы какъ-нибудь найдемъ одно изъ цѣлыхъ рѣшеній даннаго уравненія (1), напримѣръ $x=m$, $y=n$, которое назовемъ частнымъ рѣшеніемъ, то формулы, дающія всѣ цѣлыя рѣшенія этого уравненія, будутъ слѣдующія:

$$(3) \ldots \begin{cases} x=m\pm bt, \\ y=n\mp at, \end{cases}$$

гдѣ t можетъ имѣть произвольное цѣлое значеніе, т. е. каждое изъ неизвѣстныхъ равно своему частному рѣшенію, сложенному съ произведеніемъ коэффиціента при другомъ неизвѣстномъ на произвольное, но въ обоихъ случаяхъ одно и то же цѣлое число t, при условіи, чтобы одинъ изъ коэффиціентовъ входилъ въ формулы (3) со своимъ знакомъ, а другой съ обратнымъ знакомъ.

Дѣйствительно, если уравненіе (1) удовлетворяется при $x=m$ и $y=n$, то имѣемъ тождество

$$am+bn=c;$$

а вычтя его почленно изъ даннаго уравненія (1) получимъ:

$$a(x-m)+b(y-n)=0 \text{ или}$$

$$a(x-m)=b(n-y), \text{ откуда } \frac{x-m}{b}=\frac{n-y}{a}.$$

Это равенство выражаетъ, что значенія неизвѣстныхъ x и y должны обращать дроби $\frac{x-m}{b}$ и $\frac{n-y}{n}$ въ равныя, хотя бы произвольныя величины, слѣдовательно, если положимъ, что

$$(4) \ldots \frac{x-m}{b}=t, \text{ то и } \frac{n-y}{a}=t, \text{ откуда}$$

$$(5) \ldots x=m+bt,\ y=n-at,$$

гдѣ t произвольное, положительное или отрицательное число.

Что выраженія (3) для x и y удовлетворяютъ данному уравненію (1) при всякомъ значеніи t, убѣждаемся также подстановкою этихъ выраженій въ уравненіе (1).

Дѣйствительно, сдѣлавъ эту подстановку, получимъ:

$$a(m\pm bt)+b(n\mp at)=c, \text{ откуда}$$

$$am\pm abt+bn\mp abt=c \text{ или}$$

$$am+bn=c,$$

а это независимо отъ значеній t есть тождество, такъ какъ по условію $x = m$ и $y = n$ удовлетворяютъ уравненію (1).

Положимъ для примѣра, что мы для уравненія

$$(6) \ldots \; 3x + 2y = 37$$

какимъ-нибудь образомъ нашли одно изъ его цѣлыхъ рѣшеній: $x=7$, $y=8$; тогда по вышеизложенному получимъ общія формулы

$$(7) \ldots \; x = 7 + 2t, \quad y = 8 - 3t,$$

дающія всѣ цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, придавая t произвольныя цѣлыя значенія. Такъ, при $t = 1$ получаемъ $x = 9$, $y = 5$, при $t = 3$ имѣемъ $x = 13$, $y = -1$ и т. д. Подстановкою этихъ значеній неизвѣстныхъ въ уравненія (6) убѣдимся, что всѣ они удовлетворяютъ ему.

Чтобы получить одни только положительныя цѣлыя рѣшенія уравненія вида $ax + by = c$, надо въ общемъ его рѣшеніи (5) выбрать значенія t такъ, чтобы было одновременно

$$m + bt \geqq 0 \text{ и } n - at \geqq 0;$$

рѣшеніе этихъ неравенствъ и даетъ намъ предѣлы тѣхъ значеній t, при которыхъ x и y имѣютъ положительныя значенія.

Такъ, получивъ для уравненія (6) общее рѣшеніе (7), полагаемъ

$$7 + 2t \geqq 0 \text{ и } 8 - 3t \geqq 0, \text{ откуда } t > -\frac{7}{2} \text{ и } t < \frac{8}{3}\,{}^{*)};$$

слѣдовательно t можетъ имѣть только слѣдующія 6 значеній: -3, -2, -1, 0, $+1$ и $+2$, а потому уравненіе (6) имѣетъ только 6 положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній именно:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 17, \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 14, \end{cases} \begin{cases} x = 5 \\ y = 11, \end{cases} \begin{cases} x = 7 \\ y = 8, \end{cases} \begin{cases} x = 9 \\ y = 5, \end{cases} \begin{cases} x = 11 \\ y = 2. \end{cases}$$

4. Легко получить всѣ рѣшенія уравненія (1), когда коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ 1.

Такъ, уравненіе $x + 3y = 8$ даетъ $x = 8 - 3y$; а полагая здѣсь послѣдовательно $y = 0, 1, 2$ (при другихъ положительныхъ значеніяхъ для y неизвѣстное x будетъ имѣть отрицательныя значенія), мы получимъ соотвѣтственно $x = 8, 5, 2$.

Къ этому случаю приводится тотъ, когда извѣстный членъ уравненія есть кратное число одного изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ. Такъ, имѣя уравненіе

$$4x - 5y = 24,$$

*) Здѣсь знакъ $=$ не годится, ибо t должно быть цѣлымъ числомъ.

въ которомъ 24 есть кратное число коэффиціента 4, полагаемъ въ немъ $y = 4z$; тогда получимъ:

$$4x - 5 \,.\, 4z = 24,$$

а раздѣливъ обѣ части на 4, имѣемъ:

$$x - 5z = 6, \text{ откуда } x = 6 + 5z;$$

слѣдовательно, полагая здѣсь $z = 0, 1, 2, 3, \ldots$ до ∞, получимъ:

$$x = 6, 11, 16, 21, \ldots \text{ и } y = 4z = 0, 4, 8, 12, \ldots$$

5. Если коэффиціенты a и b уравненія (1) сдѣланы взаимно простыми, но одинъ изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, напримѣръ a, еще имѣетъ общаго наибольшаго дѣлителя съ извѣстнымъ членомъ c, то a и c можно уменьшить. Дѣйствительно, если общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и c есть d, то и by дѣлится на d; а какъ по условію b на d не дѣлится, то y должно быть кратнымъ d, и потому, полагая $y = dy'$, получимъ:

$$ax + bdy' = c, \text{ откуда } \frac{a}{d} x + by' = \frac{c}{d},$$

гдѣ $\frac{a}{d}$ и $\frac{c}{d}$ числа цѣлыя, соотвѣтственно меньшія, чѣмъ a и c. Опредѣливъ затѣмъ изъ этого уравненія x и y', найдемъ y изъ условія $y = dy'$.

Въ предыдущемъ мы видѣли, какъ по случайно найденному частному рѣшенію уравненія (1) можно составить общее рѣшеніе, т. е. формулы (3); при этомъ все равно, будетъ ли частное рѣшеніе положительное или отрицательное: надо только въ формулахъ (3) дать t такія цѣлыя значенія, чтобы x и y вышли положительными. Но часто бываетъ труднымъ напасть на частное рѣшеніе даннаго уравненія; поэтому покажемъ, какъ въ этомъ случаѣ рѣшается неопредѣленное уравненіе въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ. Способъ этотъ основанъ на томъ, что данное уравненіе приводится къ другому, такого же вида, но въ которомъ коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ 1; рѣшенія послѣдняго уравненія получаются легко, какъ мы это видѣли выше, а отъ этихъ рѣшеній уже легко будетъ перейти къ рѣшеніямъ даннаго уравненія.

Рѣшимъ для примѣра уравненіе

$$(1) \ldots\ldots 1\frac{7}{8} x - 3y = 6\frac{3}{8}.$$

Уничтоживъ знаменателей, получимъ:

$$(2) \ldots\ldots 15x - 24y = 51,$$

а раздѣливъ обѣ части на 3, получимъ уравненіе

$$(3) \ldots\ldots 5x - 8y = 17,$$

въ которомъ коэффиціенты при x и y взаимно-простые, откуда заключаемъ, что это уравненіе, а слѣдовательно и данное, имѣетъ цѣлыя рѣшенія.

Рѣшивъ уравненіе (3) относительно неизвѣстнаго, имѣющаго меньшій коэффиціентъ, т. е. относительно x, получимъ:

$$x = \frac{17 + 8y}{5},$$

а исключивъ отсюда цѣлую часть, найдемъ:

$$x = \frac{15 + 2 + 5y + 3y}{5} = \frac{15 + 5y}{5} + \frac{2 + 3y}{5} = 3 + y + \frac{2 + 3y}{5}.$$

Такъ какъ x и y должны имѣть цѣлыя значенія, то y надо выбрать такъ, чтобы дробь $\frac{2 + 3y}{5}$ дала какое-нибудь цѣлое число; положимъ, что это цѣлое число есть t, тогда

$$(4) \; .\;.\;.\;.\; x = 3 + y + t,$$

гдѣ по условію $\frac{2 + 3y}{5} = t$. Это условіе даетъ

$$(5) \; .\;.\;.\;.\; 2 + 3y = 5t,$$

т. е. новое неопредѣленное уравненіе съ двумя неизвѣстными y и t, въ которомъ однако коэффиціенты меньше, чѣмъ въ данномъ уравненіи.

Сдѣлавъ съ уравненіемъ (5) то же самое, что сдѣлали съ уравненіемъ (3), т. е. рѣшивъ его относительно неизвѣстнаго, имѣющаго меньшій коэффиціентъ, и исключивъ цѣлую часть, получимъ:

$$y = \frac{5t - 2}{3} = \frac{3t + 2t - 2}{3} = t + \frac{2t - 2}{3}.$$

Такъ какъ y и t должны имѣть цѣлыя значенія, то здѣсь надо выбрать t такъ, чтобы дробь $\frac{2t - 2}{3}$ дала нѣкоторое цѣлое число; слѣдовательно, обозначивъ это цѣлое число буквою t', получимъ:

$$(6) \; .\;.\;.\;.\; y = t + t',$$

гдѣ по условію $\frac{2t - 2}{3} = t'$, откуда получаемъ:

$$(7) \; .\;.\;.\;.\; 2t - 2 = 3t',$$

т. е. новое уравненіе съ двумя неизвѣстными t и t', но съ меньшими коэффиціентами, чѣмъ въ предыдущемъ уравненіи (5).

Рѣшивъ и это уравненіе относительно неизвѣстнаго, имѣющаго меньшій коэффиціентъ, получимъ:

$$t = \frac{3t' + 2}{2} = \frac{2t' + t' + 2}{2} = t' + 1 + \frac{t'}{2},$$

а полагая $\frac{t'}{2} = t''$, гдѣ t'' означаетъ какое-нибудь цѣлое число, получимъ:

$$(8) \ldots . t = t' + 1 + t'',$$

гдѣ по условію $\frac{t'}{2} = t''$, откуда получаемъ:

$$(9) \ldots . t' = 2t'',$$

т. е. неопредѣленное уравненіе съ двумя неизвѣстными t' и t'', причемъ одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ 1; а такое уравненіе какъ мы видѣли, рѣшается очень просто: стóитъ только дать t'' рядъ произвольныхъ цѣлыхъ значеній и мы получимъ соотвѣтственныя значенія для t'; а зная t' и t'', мы изъ уравненія (8) получимъ цѣлыя значенія для t, а тогда изъ уравненій (6) и (4) найдемъ цѣлыя значенія для y и x, удовлетворяющія данному уравненію (3).

Но мы скорѣе достигнемъ цѣли, если x и y выразимъ въ зависимости отъ одного только t'', а затѣмъ уже дадимъ t'' произвольныя цѣлыя значенія. Для этого подставимъ въ уравненіи (8) вмѣсто t' его величину $2t''$ изъ уравненія (9); тогда

$t = 2t'' + 1 + t'' = 1 + 3t''$; слѣдовательно уравненіе (6) даетъ

$(a) \ldots . \begin{cases} y = 1 + 3t'' + 2t'' = 1 + 5t'', \text{ и, наконецъ, уравненіе (4) даетъ} \\ x = 3 + 1 + 5t'' + 1 + 3t'' = 5 + 8t''. \end{cases}$

Чтобы теперь получить всѣ цѣлыя положительныя рѣшенія, полагаемъ

$5 + 8t'' \geqq 0$ и $1 + 5t'' \geqq 0$, откуда $t'' > -\frac{5}{8}$ и $t'' > -\frac{1}{5}$;

слѣдовательно t'' можетъ имѣть значенія:

$$t'' = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots \text{ до } \infty; \text{ тогда}$$

$x = 5,\ 13,\ 21,\ 29, \ldots$ и соотвѣтственно $y = 1,\ 6,\ 11,\ 16, \ldots$

Формулы (a), какъ видно, вполнѣ согласны съ тѣмъ, что мы сказали выше въ пунктѣ 3 о составѣ общихъ рѣшеній, а это служитъ признакомъ вѣрности рѣшеній (a).

Изъ разсмотрѣннаго нами примѣра видно, что рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія приводится къ рѣшенію другого тоже неопредѣленнаго уравненія, но съ меньшими коэффиціентами; рѣшеніе этого уравненія въ свою очередь приводится къ рѣшенію третьяго неопредѣленнаго же уравненія, въ которомъ коэффиціенты еще меньше, и т. д., и эта замѣна одного уравненія другимъ производится до тѣхъ поръ, пока не получится уравненіе, въ которомъ коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ есть 1. Поэтому ясно, что рѣшеніе будетъ тѣмъ успѣшнѣе, чѣмъ скорѣе мы получимъ такое именно уравненіе, а этого достигнемъ, во-первыхъ, тогда, когда при исключеніи цѣлой части мы устроимъ такъ, чтобы коэффиціенты остатковъ отъ членовъ, содержащихъ неизвѣстныя, вышли по возможности меньшими (ибо эти остатки становятся очевидно коэффиціентами въ послѣдующихъ уравненіяхъ), во-вторыхъ, еще однимъ пріемомъ, польза котораго выяснится при самомъ рѣшеніи уравненія.

Возьмемъ опять уравненіе (3) и рѣшимъ его относительно x; тогда получимъ:

$$(10) \ldots . x = \frac{17+8y}{5} = \frac{15+10y+2-2y}{5} = 3+2y+\frac{2-2y}{5} = 3+2g+\frac{2(1-y)}{5}.$$

Чтобы x и y были цѣлыми числами, надо выбрать y такъ, чтобы и членъ $\frac{2(1-y)}{5}$ былъ цѣлымъ числомъ, а для этого достаточно, чтобы множитель $1-y$ дѣлился на́-цѣло на 5; слѣдовательно, обозначивъ это цѣлое частное буквою t, получимъ:

$$(11) \ldots . x = 3+2y+2t,$$

гдѣ по условію $\frac{1-y}{5} = t$, откуда

$$(12) \ldots . y = 1-5t,$$

т. е. получимъ уравненіе, въ которомъ коэффиціентъ при y есть 1. Мы такъ скоро достигли цѣли, во-первыхъ, потому, что въ уравненіи (10) членъ $8y$ мы разбили не на $5y+3y$, какъ прежде, а на $10y-2y$, вслѣдствіе чего послѣ дѣленія на 5 мы получили въ остаткѣ не $3y$, а $-2y$, т. е. членъ съ меньшимъ коэффиціентомъ, во-вторыхъ, потому, что мы приняли не $\frac{2(1-y)}{5} = t$, а $\frac{1-y}{5} = t$, вслѣдствіе чего коэффиціентъ при y въ уравненіи (12) сталъ еще меньше, именно 1, а не 2, какъ это случилось бы, если бы мы приняли $\frac{2-2y}{5} = t$.

Подставивъ значеніе y изъ уравненія (12) въ уравненіе (11), получимъ

$$x = 3+2(1-5t)+2t = 5-8t.$$

Итакъ, общее рѣшеніе даннаго уравненія есть

$$(b) \ldots . \begin{cases} x = 5-8t \text{ и} \\ y = 1-5t. \end{cases}$$

Чтобы x и y были положительными, надо цѣлыя значенія для t выбрать такъ, чтобы было

$$5-8t \geqq 0 \text{ и } 1-5t \geqq 0, \text{ откуда}$$

$$t < \frac{5}{8} \text{ и } t < \frac{1}{5};$$

слѣдовательно t можетъ имѣть слѣдующія цѣлыя значенія:

$$t = 0, \ -1, \ -2, \ -3, \ -4, \ldots \text{до} -\infty, \text{ тогда}$$

$$x = 5, \ 13, \ 21, \ 29, \ 37, \ldots, y = 1, \ 6, \ 11, \ 16, \ 21, \ldots,$$

т. е. тѣ же рѣшенія, которыя мы нашли и прежде.

§ 35. Признаки ограниченности или неограниченности числа положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній неопредѣленнаго уравненія вида $ax + by = c$. По одному взгляду на уравненіе можно опредѣлить, имѣетъ ли оно ограниченное или безконечное число положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній, или вовсе не имѣетъ ихъ. При этомъ положимъ, что коэффиціентъ a величина положительная (въ противномъ случаѣ мѣняемъ знаки всѣхъ членовъ уравненія на обратные).

1) Если коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ противоположные знаки, то уравненіе имѣетъ безконечное число положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній, потому что разность можетъ оставаться постоянно равною c, хотя x и y неопредѣленно возрастаютъ.

2) Если коэффиціенты a, b и c имѣютъ одинаковые знаки, то уравненіе имѣетъ ограниченное число положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній. Дѣйствительно, если въ уравненіи $ax + by = c$ членъ ax, напримѣръ, возрастаетъ, то членъ by долженъ уменьшаться (такъ какъ сумма $ax + by$ должна равняться постоянной величинѣ c), такъ что при дальнѣйшемъ увеличеніи x мы, наконецъ, дойдемъ до того, что y приметъ уже отрицательное значеніе.

3) Уравненіе $ax + by = c$ съ положительными коэффиціентами a, b и c не имѣетъ положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній, если сумма коэффиціентовъ $a + b$ больше c и c не дѣлится ни на какой изъ коэффиціентовъ a и b, потому что при этихъ условіяхъ наименьшее положительное цѣлое значеніе, которое могутъ принимать x и y, есть 1; а при этихъ значеніяхъ первая часть даннаго уравненія даетъ $a + b$, что по условію больше c; если же при условіи $a + b > c$ количество c дѣлится на одинъ изъ коэффиціентовъ a и b, напримѣръ на a, то уравненіе очевидно имѣетъ одно только рѣшеніе именно $x = \frac{c}{a}$ и $y = 0$.

4) Уравненіе $ax + by = c$ при положительныхъ a и b и отрицательномъ c не можетъ имѣть положительныхъ рѣшеній, потому что при положительныхъ значеніяхъ x и y первая часть уравненія оказывается положительною величиною, между тѣмъ какъ вторая часть — отрицательная.

VIII. Изслѣдованіе уравненій.

§ 36. Изслѣдованіе общаго уравненія I-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. При рѣшеніи математическаго вопроса въ общемъ видѣ помощью буквенныхъ уравненій мы въ отвѣтѣ получаемъ формулу, выражающую зависимость искомыхъ величинъ отъ значеній данныхъ, т. е. отъ значеній коэффиціентовъ уравненій; а если желаемъ примѣнить получаемыя рѣшенія къ частному вопросу, то мы должны замѣнить буквенныя данныя числовыми; а какъ послѣднія могутъ быть весьма разнообразны, то важно знать, при какихъ данныхъ вопросъ возможенъ и при какихъ онъ невозможенъ. Опредѣлить условія возможности или невозможности предлагаемаго вопроса и зависимости искомыхъ величинъ отъ значеній данныхъ — значитъ изслѣдовать вопросъ.

Общій и упрощенный видъ уравненія 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ x есть

$$(1) \ldots . \; ax = b,$$

гдѣ a и b полагаются извѣстными. Рѣшивъ это уравненіе, получимъ:

$$(2) \ldots . \; x = \frac{b}{a}.$$

Смотря по значеніямъ коэффиціентовъ a и b, неизвѣстное x можетъ имѣть разныя значенія. Изслѣдуемъ эту зависимость.

I. Если a и b неравны нулю и имѣютъ одинаковые знаки, т. е. если $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$, то найденное значенія для x будетъ положительное и дастъ, вообще говоря, прямой отвѣтъ на вопросъ, рѣшаемый уравненіемь (1), хотя и есть случаи, гдѣ и положительное рѣшеніе несогласно со смысломъ задачи. Напримѣръ, если спрашивалось, сколько было рабочихъ? и въ отвѣтѣ получаемъ дробное число, или если требовалось опредѣлить двухзначное число по извѣстнымъ условіямъ, и мы получаемъ въ отвѣтѣ, что одна изъ цифръ искомаго числа больше 9, чего очевидно быть не можетъ.

2. Если a и b неравны нулю и имѣютъ противоположные знаки, т. е. если $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$, то x имѣетъ отрицательное значеніе.

Отрицательное рѣшеніе указываетъ или на неправильную постановку вопроса, а именно на то, что искомой величинѣ слѣдовало бы дать значеніе, противоположное тому, которое ей было дано въ разсматриваемой задачѣ, или же оно указываетъ на ошибочное допущеніе, сдѣланное нами при составленіи уравненія, или, наконецъ, на абсолютную невозможность задачи вслѣдствіе несообразныхъ условій.

Разъяснимъ это на слѣдующихъ примѣрахъ:

Примѣръ I. Отцу теперь 46 лѣтъ, сыну 18 лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ втрое старше сына?

Рѣшеніе. Обозначивъ буквою x число лѣтъ, по прошествіи которыхъ отецъ будетъ втрое старше своего сына, мы получимъ уравненіе

$$(3) \dots 3(18+x) = 46+x, \text{ откуда } x = -4.$$

Чтобы объяснить себѣ смыслъ этого отрицательнаго рѣшенія, замѣтимъ, что если бы мы получили положительное значеніе для x, напримѣръ $x=4$, то этимъ самымъ мы получили бы прямой отвѣтъ на вопросъ именно: отецъ *будетъ* втрое старше сына по *прошествіи* четырехъ лѣтъ; слѣдовательно изъ понятія, которое имѣемъ о положительныхъ и отрицательныхъ величинахъ, мы должны заключить, что отрицательное рѣшеніе $x = -4$ даетъ намъ обратный отвѣтъ на вопросъ именно: отецъ *былъ* втрое старше своего сына четыре года *тому назадъ*.

Справедливость такого толкованія отрицательнаго рѣшенія въ нашей задачѣ подтверждается тѣмъ, что, подставивъ въ уравненіе (3) вмѣсто x его значеніе -4, мы получимъ тождество

$$3(18-4) = 46-4,$$

показывающее, что число лѣтъ отца станетъ равнымъ утроенному числу лѣтъ сына тогда, когда число лѣтъ каждаго уменьшимъ на 4, значитъ отецъ *былъ* втрое старше своего сына 4 года *тому назадъ*.

Примѣръ 2. Нѣкто купилъ два сорта сукна по 2 руб. и по 3 руб. за аршинъ; въ кускѣ лучшаго сорта было двумя аршинами меньше, чѣмъ въ другомъ, а одинъ изъ этихъ кусковъ (неизвѣстно, какой именно) стоилъ 9-ю рублями больше другого. Сколько было аршинъ въ каждомъ кускѣ?

Рѣшеніе. Положимъ, что было x аршинъ по 2 руб.; тогда сукна по 3 руб. было $x-2$ арш.; слѣдовательно кусокъ худшаго сорта стоилъ $2x$ руб., а кусокъ лучшаго $3(x-2)$ руб.; но такъ какъ неизвѣстно, какой изъ этихъ кусковъ стоилъ на 9 руб. дороже, то допустимъ наудачу, что это былъ кусокъ низшей доброты; тогда получимъ уравненіе

$$2x - 3(x-2) = 9, \text{ откуда } x = -3.$$

Такъ какъ здѣсь неизвѣстному x нельзя придавать значеніе, противоположное тому, которое ему дано было при составленіи уравненія, то заключаемъ, что отрицательное рѣшеніе могло получиться здѣсь только вслѣдствіе предположенія, что кусокъ низшей доброты былъ на 9 руб. дороже другого; допуская же обратное, получимъ уравненіе

$$3(x-2)-2x=9, \text{ откуда } x=15.$$

Примѣръ 3. Сколько надо взять серебра 72-й пробы и сколько 80-й пробы, чтобъ получить сплавъ въ 3 фунта 84-й пробы?

Рѣшеніе. Положимъ, что надо взять x фунтовъ 72-й пробы, а слѣдовательно $(3-x)$ фунт. 80-ой пробы; тогда первый кусокъ содержитъ $72x$ золотника чистаго серебра, а второй $80(3-x)$ золотника чистаго серебра; слѣдовательно весь сплавъ содержитъ

$$72x+80(3-x) \text{ золотника чистаго серебра.}$$

Съ другой стороны сплавъ долженъ вѣсить три фунта и быть 84-й пробы, а потому онъ долженъ содержать $84 \,.\, 3$, т. е. 252 золотника чистаго серебра; слѣдовательно

$$72x+80(3-x)=252, \text{ откуда } x=-1^1/_2.$$

Здѣсь отрицательное рѣшеніе показываетъ, что задача невозможна. И дѣйствительно, условія задачи требуютъ составить сплавъ высшей пробы изъ серебра низшихъ пробъ, что невозможно.

Итакъ, если при рѣшеніи вопроса помощью уравненія корень его оказывается отрицательнымъ, то неизвѣстному слѣдуетъ дать значеніе, противоположное тому, которое ему дано было при составленіи уравненія, если только неизвѣстное можетъ быть взято въ двухъ противоположныхъ значеніяхъ (см. примѣръ 1); если этого сдѣлать нельзя, то слѣдуетъ убѣдиться, не сдѣлано ли какое-нибудь невозможное предположеніе при составленіи уравненія и исправить эту ошибку (см. примѣръ 2); во всякомъ же иномъ случаѣ отрицательное рѣшеніе служитъ признакомъ того, что вопросъ невозможенъ вслѣдствіе несообразныхъ данныхъ (см. примѣръ 3).

3. Если $b=0$ и $a \gtreqless 0$, то формула (2) даетъ $x=\frac{0}{a}=0$.

Такое рѣшеніе показываетъ отсутствіе искомой величины.

Примѣръ. Отцу теперь 45 лѣтъ, сыну 15 лѣтъ. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ втрое старше сына?

Рѣшеніе. Обозначивъ искомое число лѣтъ чрезъ x, получимъ уравненіе

$$3(15+x)=45+x, \text{ откуда}$$

$$45+3x=45+x, \text{ откуда } x=0,$$

т. е., считая съ настоящаго времени, отецъ не былъ и не будетъ втрое старше своего сына. Слѣдовательно это обстоятельство должно имѣть мѣсто уже теперь. И дѣйствительно, 45 лѣтъ больше 15 лѣтъ въ три раза.

4. Если $a=0$ и $b \gtreqless 0$, то формула (2) даетъ $x=\frac{b}{0}$.

Чтобы разъяснить смыслъ такого рѣшенія, замѣтимъ, что при сдѣланномъ предположеніи уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$(4) \ldots . \; 0 \,.\, x = b,$$

которому нельзя удовлетворить никакимъ опредѣленнымъ значеніемъ для x, ибо всякая конечная величина, умноженная на нуль, даетъ въ произведеніи нуль, а не какую-нибудь опредѣленную величину b, отличную отъ нуля, какъ того требуетъ уравненіе (4); слѣдовательно вопросъ, рѣшаемый уравненіемъ (1) при предположеніи, что $a=0$ и $b \gtreqless 0$, невозможенъ, такъ какъ дробь, числитель которой величина конечная b, неравная нулю, а знаменатель нуль, равна безконечности.

Такимъ образомъ уравненіе (1) при условіи $a=0$ и $b \gtreqless 0$ удовлетворяется при $x=\infty$; а какъ безконечность недоступна человѣческому уму, то такое рѣшеніе указываетъ на невозможность вопроса.

Впрочемъ, безконечное рѣшеніе иногда допускаетъ возможное толкованіе, напримѣръ въ нѣкоторыхъ геометрическихъ вопросахъ. Такъ, если по нѣкоторымъ условіямъ требуется опредѣлить разстояніе точки пересѣченія двухъ прямыхъ, лежащихъ на одной плоскости, и мы получаемъ въ отвѣтѣ, что искомое разстояніе безконечно, то это означаетъ, что искомаго пересѣченія вовсе не существуетъ; значитъ данныя прямыя параллельны.

5. Если, наконецъ, $a=0$ и $b=0$, то выводъ (2) даетъ $x=\frac{0}{0}$.

Чтобы опредѣлить смыслъ такого вывода, замѣтимъ, что уравненіе (1) при сдѣланномъ условін обращается въ тождество $0 \,.\, x = 0$, которому удовлетворяетъ всякое значеніе для x; отсюда заключаемъ, что знакъ $\frac{0}{0}$ представляетъ собою любую величину, почему онъ и называется знакомъ неопредѣленности.

Примѣчаніе. Не слѣдуетъ полагать, что всякое выраженіе, принимающее видъ $\frac{0}{0}$, есть истинная неопредѣленность, т. е. представляетъ собою какую-угодно величину. Напротивъ, часто случается, что алгебраическая дробь принимаетъ видъ неопредѣленности $\frac{0}{0}$ вслѣдствіе того только, что числитель и знаменатель ея содержатъ общаго множителя, вообще неравнаго нулю, но обращающагося въ нуль при частныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ составъ дроби; слѣдовательно, исключивъ этотъ общій множитель сокращеніемъ дроби, мы при тѣхъ же частныхъ предположеніяхъ получимъ уже истинную ея величину или, какъ говорятъ, раскроемъ неопредѣленность.

Въ § 8 нами было уже приведено нѣсколько примѣровъ на раскрытіе неопредѣленностей.

§ 37. Изслѣдованіе двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными. Рѣшивъ два уравненія съ двумя неизвѣстными 1-й степени въ общемъ видѣ именно уравненія:

$$(1) \ldots . \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c', \end{cases} \text{ получимъ корни:}$$

$$(2) \ldots . \; x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \; y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Относительно коэффиціентовъ a, b, c, a', b' и c' можно сдѣлать слѣдующія предположенія:

1. Положимъ, что ни одинъ изъ числителей выраженій (2), ни общій ихъ знаменатель не равенъ нулю; тогда оба корня x и y будутъ конечныя величины, неравныя нулю, притомъ положительныя, если оба члена каждой дроби имѣютъ одинаковые знаки, а отрицательныя, когда оба члена дроби имѣютъ противоположные знаки.

2. Положимъ, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, b, c, a', b', c' не равенъ нулю, но что общій знаменатель корней x и y равенъ нулю, а числители ихъ не равны нулю, т. е. что

$$(3) \ldots . \; ab' - a'b = 0 \text{ или } ab' = a'b; \text{ тогда}$$

$$x = \frac{cb' - c'b}{0} = \infty, \quad y = \frac{ac' - a'c}{0} = \infty \; (\S\ 36 \text{ пунктъ } 4).$$

При рѣшеніи одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ x мы видѣли, что рѣшеніе $x = \infty$ указываетъ на невозможность уравненія, а потому и на невозможность вопроса, рѣшаемаго помощью этого уравненія. Посмотримъ теперь, имѣетъ ли мѣсто то же самое и здѣсь. Для этого уравняемъ коэффиціенты при x въ данныхъ уравненіяхъ, для чего умножимъ обѣ части перваго на a', а обѣ части второго на a; тогда получимъ уравненія

$$(4) \ldots . \begin{cases} aa'x + ba'y = ca' \text{ и} \\ aa'x + b'ay = c'a, \end{cases}$$

первыя части которыхъ на основаніи условія (3) тождественны, слѣдовательно и вторыя ихъ части должны быть равны между собою, т. е. должно быть $ca' = c'a$ или $ca' - c'a = 0$, что противорѣчитъ условію, что ни одинъ изъ числителей корней x и y не равенъ нулю; слѣдовательно и уравненія (4), а потому и уравненія (1), другъ другу противорѣчатъ, т. е. несовмѣстны.

3. Положимъ, что каждый изъ числителей выраженій (2) равенъ нулю, т. е. что

$$(5) \ldots . \; cb' - c'b = 0 \text{ и } ac' - a'c = 0,$$

причемъ ни одинъ изъ коэффиціентовъ данныхъ уравненій не равенъ нулю; докажемъ, что тогда общій ихъ знаменатель $ab' - a'b$ непремѣнно равенъ нулю. Дѣйствительно, условія (5) даютъ равенства

$$cb' = c'b \text{ и } a'c = ac',$$

а раздѣливъ ихъ почленно, мы послѣ сокращеній получимъ:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a},$$

откуда $ab' = a'b$ или $ab' - a'b = 0$; слѣдовательно $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$.

Чтобы убѣдиться, что въ уравненіяхъ (1) неизвѣстныя имѣютъ неопредѣленныя значенія, уравняемъ въ нихъ коэффиціенты при x; тогда получимъ уравненія (4), которыя на основаніи условій (5) тождественны; слѣдовательно для опредѣленія x и y мы имѣемъ не два уравненія, а только одно; а какъ одно уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ неограниченное число рѣшеній, то значенія x и y остаются неопредѣленными.

Къ такому же выводу мы бы пришли, если бы полагали, что одинъ изъ числителей выраженій (2) и общій ихъ знаменатель равны нулю, но что ни одинъ изъ коэффиціентовъ данныхъ уравненій не равенъ нулю.

4. Допустимъ опять, что каждый изъ числителей выраженій (2) равенъ нулю, притомъ числитель, напримѣръ, въ выраженіи для x вслѣдствіе того, что члены взаимно уничтожаются, а числитель въ выраженіи для y вслѣдствіе того, что a и a' порознь равны нулю, т. е. положимъ:

$$(6) \ldots . \; cb' - c'b = 0, \; a = 0, \; a' = 0;$$

тогда опять получимъ: $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$.

Легко показать, что здѣсь одно только x остается неопредѣленнымъ, а неопредѣленный видъ неизвѣстнаго y только кажущійся, происходящій отъ того, что числитель и знаменатель его содержатъ общій множитель, обращающійся въ нуль при условіи (6). Дѣйствительно, это условіе даетъ

$$cb' = c'b, \text{ откуда } c = \frac{c'b}{b'}, \text{ а потому}$$

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=\frac{ac'-a\,.\,\frac{c'b}{b'}}{ab'-a'b}=\frac{ab'c'-a'bc'}{b'(ab'-a'b)}=\frac{c'(ab'-a'b)}{b'(ab'-a'b)}=\frac{c'}{b'};$$

слѣдовательно y имѣетъ опредѣленное значеніе $\frac{c'}{b'}$; а какъ такого преобразованія въ выраженіи для x сдѣлать нельзя, то x остается неопредѣленнымъ.

Сказанное подтверждается и данными уравненіями (1), которыя при условіяхъ (6) приводятся къ слѣдующимъ:

$$\begin{cases} 0\,.\,x+by=c \\ 0\,.\,x+b'y=c', \end{cases}$$

изъ которыхъ видно, что x можетъ имѣть любое значеніе, а для y мы изъ этихъ уравненій получаемъ:

$$y=\frac{c}{b} \text{ и } y=\frac{c'}{b'};$$

но изъ условія $cb'-c'b=0$ слѣдуетъ, что $cb'=c'b$, откуда $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$; слѣдовательно y имѣетъ одно только опредѣленное значеніе $\frac{c}{b}$.

5. Мы въ пунктѣ (3) видѣли, что если оба числителя въ выраженіяхъ для x и y равны нулю, но ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, b, c, a', b', c' не равенъ нулю, то и общій ихъ знаменатель равенъ нулю; для того же, чтобы оба числителя обратились въ нуль, а общій ихъ знаменатель нѣтъ, необходимо, чтобы было $c=0$ и $c'=0$; тогда получимъ:

$$x=\frac{0}{ab'-a'b}=0,\ y=\frac{0}{ab'-a'b}=0.$$

§ 38. Изслѣдованіе общаго уравненія 2-й степени. Общій и упрощенный видъ квадратнаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ и съ вещественными коэффиціентами есть

$$ax^2+bx+c=0.$$

Его корни суть $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Изслѣдуемъ эти корни, причемъ положимъ, что коэффиціентъ a число положительное; въ противномъ случаѣ мы можемъ перемѣнить знаки всѣхъ членовъ уравненія на обратные.

I. Если ни a, ни b не равно нулю и $b^2-4ac>0$, то оба корня вещественные и неравные; при этомъ можетъ быть $c=0$, $c>0$ или $c<0$.

1) Если $c=0$, то и $4ac=0$, а потому одинъ корень есть $\frac{-b+b}{2a}=0$, другой равенъ $\frac{-b-b}{2a}=-\frac{b}{a}$.

2) Если при условіи $b^2-4ac>0$ будетъ $c>0$, то $\sqrt{b^2-4ac}$ численно меньше, чѣмъ b, ибо $a>0$, а потому при положительномъ b (слѣдовательно $-b$ число отрицательное) оба корня отрицательные, а при отрицательномъ b, оба корня положительные.

3) Если $c<0$, то очевидно условіе $b^2-4ac>0$ при $a>0$ всегда выполнено и $\sqrt{b^2-4ac}$ численно больше b, а потому при положительномъ b корень x_1 положительный, корень x_2 — отрицательный, притомъ положительный корень численно меньше отрицательнаго; при отрицательномъ же b одинъ корень опять будетъ положительнымъ, другой отрицательнымъ, но положительный корень численно больше отрицательнаго.

II. Если $b^2-4ac=0$, то $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$, т. е. оба корня равны.

III. Если $b^2-4ac<0$, то оба корня мнимые и сопряженные:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{-(4ac-b^2)}}{2a}=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a},\ x_2=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

IV. Если $b=0$ и $c<0$, то $x_1=+\frac{\sqrt{-ac}}{a}=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=$ $=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$, т. е. оба корня численно равны, но противоположны по знакамъ, притомъ они вещественные, ибо при $a>0$ и $c<0$ количество $-\frac{c}{a}$ есть число положительное; если же $a>0$ и $c>0$, то корни мнимые, ибо тогда $-\frac{c}{a}$ количество отрицательное.

V. Если $b=0$ и $c=0$, то $x_1=x_2=\frac{0}{2a}=0$.

VI. Предполагать, что $a=0$, мы въ сущности не можемъ, потому что тогда мы имѣли бы не квадратное уравненіе, а уравненіе 1-й степени $bx+c=0$; но можно поставить такой вопросъ, къ какимъ значеніямъ стремятся корни нашего уравненія, когда коэффиціентъ a уменьшается, стремясь къ нулю?

Въ этомъ случаѣ рѣшеніе даннаго уравненія принимаетъ видъ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-b\pm b}{0},$$

т. е. при неограниченномъ уменьшеніи коэффиціента a одинъ корень въ предѣлѣ принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{-b+b}{0}=\frac{0}{0}$, другой численно увеличивается, стремясь къ $\frac{-b-b}{0}=\frac{-2b}{0}=\infty$. Для раскрытія неопредѣленности перваго корня преобразуемъ первоначальный видъ этого корня такъ:

$$\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},$$

что при стремленіи a къ нулю стремится къ $\frac{2c}{-b-b}$, т. е. къ $-\frac{c}{b}$; это можно бы было предвидѣть, такъ какъ тогда данное уравненіе стремится къ предѣльному уравненію $bx+c=0$, имѣющему корень $-\frac{c}{b}$.

VII. Если $b=0$, $c \gtrless 0$ и a стремится къ нулю, то пред. $x_1=\frac{0}{0}$ и пред. $x_2=\frac{0}{0}$. Для раскрытія этихъ неопредѣленностей преобразуемъ корни такъ, какъ мы это дѣлали въ предыдущемъ случаѣ VI; тогда получимъ:

$$x_1=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},\quad x_2=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}},$$

откуда видно, что съ приближеніемъ a и b къ нулю пред. $x_1=\frac{2c}{0}=\infty$, пред. $x_2=\frac{2c}{0}=\infty$.

VIII. Полагать въ нашемъ уравненіи одновременно $a=0$, $b=0$ и $c=0$ въ сущности нельзя, ибо тогда мы имѣли бы не уравненіе, а тождество $0=0$; однако ради общности можно разсматривать и этотъ случай; тогда оба корня опять принимаютъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$; но эти неопредѣленности уже нераскрываемы, значитъ данное уравненіе въ этомъ случаѣ удовлетворяется всякими значеніями x, что, впрочемъ, можно бы было предвидѣть, такъ какъ при $a=0$, $b=0$ и $c=0$ наше уравненіе можно написать такъ: $0 \,.\, x^2+0 \,.\, x+0=0$, а это равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ значеніи x.

Примѣръ на изслѣдованіе уравненія 2-ой степени. На прямой расположены два источника свѣта A и B; опредѣлить на той же прямой точку, равноосвѣщаемую обоими источниками.

Рѣшеніе. Положимъ, что разстояніе между источниками A и B есть d и что искомая точка находится между обоими источниками на разстояніи x отъ источника A; тогда ея разстояніе отъ источника B будетъ $d-x$.

Изъ физики же извѣстно, что яркость свѣта даннаго источника при прочихъ равныхъ обстоятельствахъ обратно-пропорціональна квадрату разстоянія освѣщаемаго предмета отъ источника свѣта; слѣдовательно, полагая, что

яркость свѣта источника A на разстояніи, равномъ 1, есть m,

яркость свѣта источника B на разстояніи, равномъ 1, есть n,

найдемъ, что

яркость свѣта въ искомой точкѣ отъ источника A есть $\frac{m}{x^2}$,

яркость свѣта въ искомой точкѣ отъ источника B есть $\frac{n}{(d-x)^2}$,
а потому по условію задачи должно быть

$$\frac{m}{x^2}=\frac{n}{(d-x^2)},\ \text{откуда}\ x=\frac{d(m \pm \sqrt{mn})}{m-n}=\frac{d\sqrt{m}(\sqrt{m}\pm\sqrt{n})}{m-n},\ \text{т. е.}$$

$$x_1=\frac{d\sqrt{m}(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{m-n}=\frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}},\ x_2=\frac{d\sqrt{m}(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{m-n}=\frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}.$$

Такъ какъ m и n существенно положительныя количества, то оба корня всегда вещественные; а какъ и d существенно положительное количество и въ частномъ случаѣ можетъ быть $d=0$, то предложенный вопросъ приходится изслѣдовать въ каждомъ изъ слѣдующихъ 5 случаевъ:

1) $d>0,\ m>n$; 2) $d>0,\ m<n$; 3) $d>0,\ m=n$; 4) $d=0$, $m \gtrless n$; 5) $d=0,\ m=n$.

I случай. $d>0$, $m>n$ (т. е. источникъ A сильнѣе источника B). Въ этомъ случаѣ x_1 и x_2 положительныя величины; слѣдовательно существуютъ двѣ точки, разноосвѣщаемыя обоими источниками; а какъ при сдѣланномъ условіи $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}>1$, дробь же $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}<1$, но $>\frac{1}{2}$ (ибо при $n<m$ имѣемъ $\sqrt{m}+$ $+\sqrt{n}<2\sqrt{m}$), то $x_1>d$ и $x_2<d$, но $>\frac{d}{2}$, т. е. одна точка находится за слабѣйшимъ источникомъ B, а другая между обоими источниками ближе къ слабѣйшему.

II случай. $d>0$, $m<n$ (т. е. источникъ A слабѣе B). При этомъ условіи корень x_2 положительный, меньшій чѣмъ $\frac{d}{2}$ (ибо если $n>m$, то $\sqrt{m}+\sqrt{n}>2\sqrt{m}$), корень же x_1 отрицательный, численно большій чѣмъ d; слѣдовательно опять существуютъ двѣ точки, удовлетворяющія вопросу: одна между обоими источниками ближе къ слабѣйшему A, отвѣчающая положительному корню x_2, другая по другую сторону отъ того же источника и отвѣчающая отрицательному корню x_1.

III случай. $d>0$, $m=n$. При этомъ условіи $x_1=\infty$, $x_2=\frac{d}{2}$. Второе рѣшеніе показываетъ, что искомая точка находится какъ-разъ въ срединѣ между обоими источниками, чего при равной силѣ ихъ и нужно было ожидать, первое же рѣшеніе показываетъ, что второй равноосвѣщенной точки въ сущности нѣтъ, но что по мѣрѣ сравненія силы свѣта обоихъ источниковъ вторая точка удаляется въ безконечность.

IV случай. $d=0$, $m \gtrless n$. Въ этомъ случаѣ $x_1=0$ и $x_2=0$, т. е. когда оба источника разной яркости и находятся въ одной и той же точкѣ, то только одна эта точка одинаково освѣщается обоими источниками.

V случай. $d=0$, $m=n$. При этомъ условіи $x_1=\frac{0}{0}$, $x_2=0$. Второе рѣшеніе показываетъ, что при равныхъ источникахъ, находящихся въ одной и той точкѣ, эта же точка одинаково освѣщается обоими источниками; первое же рѣшеніе, неопредѣленность котораго очевидно не раскрываема, показываетъ, что и всякая другая точка одинаково освѣщается обоими источниками, чего при равныхъ источникахъ, находящихся на одномъ и томъ же мѣстѣ, и нужно было ожидать.

IX. Дополненіе къ теоріи логариѳмовъ.

§ 39. Измѣненіе показательной функціи a^x при измѣненіи показателя x. Въ нижеслѣдующемъ изложеніи мы будемъ считать основаніе a положительнымъ; тогда a^x при всякомъ цѣломъ x имѣетъ положительное значеніе, а въ случаѣ дробнаго значенія x, т. е. когда a^x приводится къ радикалу, мы будемъ имѣть въ виду только его вещественное и положительное, т. е. ариѳметическое значеніе, которое онъ всегда имѣетъ (§ 26). Докажемъ теперь слѣдующія теоремы:

Теорема I. Если $a>1$, то $a^x>1$ при положительномъ значеніи x, но $a^x<1$ при отрицательномъ значеніи x.

1) Если x число цѣлое и положительное и $a>1$, то a^x есть произведеніе равныхъ множителей, бо́льшихъ 1, а потому $a^x>1$.

2) Если x есть соизмѣримая положительная дробь, напримѣръ $x=\frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя и положительныя числа, то $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$; но такъ какъ при $a>1$ будетъ также $a^m>1$, то и $\sqrt[n]{a^m}$ или $a^{\frac{m}{n}}>1$.

3) Если x при $a>1$ имѣетъ положительное несоизмѣримое значеніе m, то положимъ, что числа ряда

$$(k) \ldots . \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots . \mu_n \ldots .$$

суть его послѣдовательныя соизмѣримыя приближенныя значенія, вычисленныя съ недостаткомъ и съ возрастающею степенью точности; тогда, по § 10, $m = \lim \mu_n$ и слѣдовательно $a^m = a^{\lim \mu_n} = \lim a^{\mu_n}$; а какъ по предыдущему случаю всегда $a^{\mu_n} > 1$, то и $\lim a^{\mu_n} > 1$, т. е. $a^m > 1$.

Наконецъ, 4) если x имѣетъ отрицательное значеніе, напримѣръ $x = -m$, то $a^x = a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; а какъ $a^m > 1$, то $\frac{1}{a^m}$ или $a^{-m} < 1$, т. е. $a^x < 1$.

Теорема 2. Если $a < 1$, то $a^x < 1$ при положительномъ значеніи x, но $a^x > 1$ при отрицательномъ значеніи x.

Дѣйствительно, если $a < 1$, то можно полагать $a = \frac{1}{b}$, гдѣ $b > 1$; слѣдовательно $a^x = \frac{1}{b^x}$; но такъ какъ по предыдущей теоремѣ при положительномъ x будетъ $b^x > 1$, то $a^x < 1$; при отрицательномъ же x будетъ $b^x < 1$, значитъ $a^x > 1$.

Теорема 3. Показательная функція a^x возрастаетъ съ увеличеніемъ x, если основаніе $a > 1$, но убываетъ съ увеличеніемъ x, если $a < 1$.

Дадимъ показателю x какія-нибудь два значенія m и n, причемъ $m > n$, и докажемъ, что $a^m > a^n$ при $a > 1$, но $a^m < a^n$ при $a < 1$.

Въ самомъ дѣлѣ, $a^m : a^n = a^{m-n}$, гдѣ $m - n > 0$; слѣдовательно, если $a > 1$, то $a^{m-n} > 1$, значитъ $a^m > a^n$; если же $a < 1$, то $a^{m-n} < 1$, а тогда $a^m < a^n$.

Теорема 4. При $a > 1$ функція a^x стремится къ $+\infty$, когда x стремится къ $+\infty$, но она стремится къ нулю, когда x стремится къ $-\infty$.

1) Положимъ, что $a > 1$ и что x принимаетъ цѣлыя и положительныя значенія; тогда

$$\frac{a^x - 1}{a - 1} = a^{x-1} + a^{x-2} + a^{x-3} + \ldots + a + 1 \text{ (всего } x \text{ членовъ)},$$

гдѣ каждый членъ правой части за исключеніемъ послѣдняго больше 1; слѣдовательно, замѣнивъ эти члены единицами, получимъ:

$$\frac{a^x - 1}{a - 1} > x, \text{ откуда } a^x > x(a - 1) + 1;$$

правая часть этого неравенства при неограниченномъ увеличеніи x стремится къ $+\infty$, значитъ a^x подавно стремится къ $+\infty$.

2) Если x стремится къ $+\infty$, принимая дробныя или несоизмѣримыя значенія, то для всякаго такого значенія x всегда

найдутся два такихъ цѣлыхъ числа p и $p+1$, что каждый разъ будетъ $p<x<p+1$, а слѣдовательно $a^p<a^x<a^{p+1}$ (теорема 3); но такъ какъ a^p и a^{p+1} съ неограниченнымъ увеличеніемъ p стремятся къ $+\infty$, то и a^x стремится къ $+\infty$ (§ 5, теорема 11).

3) Если x принимаетъ отрицательныя значенія, численно стремящіяся къ ∞, напримѣръ $x=-y$, гдѣ y стремится къ ∞, то $a^x=a^{-y}=\frac{1}{a^y}$; а какъ a^y при $a>1$ стремится къ ∞, то $\frac{1}{a^y}$ или a^x стремится къ $\frac{1}{\infty}$, т. е. къ нулю.

Теорема 5. При $a<1$ функція a^x стремится къ нулю, когда x стремится къ $+\infty$, но она стремится къ $+\infty$, когда x стремится къ $-\infty$.

Если $a<1$, то можно полагать $a=\frac{1}{b}$, гдѣ $b>1$; тогда $a^x=\frac{1}{b^x}$; а какъ b^x съ неограниченнымъ увеличеніемъ x стремится къ ∞, то a^x стремится къ нулю; когда же x стремится къ $-\infty$, то b^x стремится къ $b^{-\infty}$ или къ $\frac{1}{b^\infty}$, т. е. къ нулю, значитъ a^x стремится къ $\frac{1}{0}$, т. е. къ $+\infty$.

Теорема 6. Показательная функція a^x — непрерывная на всемъ протяженіи измѣненія перемѣнной x.

Положимъ, что при нѣкоторомъ опредѣленномъ, впрочемъ произвольномъ, значеніи x, напримѣръ при $x=p$, a^x принимаетъ значеніе q, т. е. $a^p=q$, и дадимъ показателю p безконечно-малое приращеніе α; тогда и q получитъ нѣкоторое приращеніе k; докажемъ, что k также безконечно-малая величина, чѣмъ и докажется непрерывность функціи a^x при всякомъ x.

Дѣйствительно, $k=a^{p+\alpha}-a^p=a^p(a^\alpha-1)$; слѣдовательно

$$\lim k=a^p\,.\,\lim(a^\alpha-1),$$

ибо a^p — постоянная величина; а какъ по теоремѣ 13 § 5 $\lim(a^\alpha-1)=0$ и a^p — конечная величина, то $\lim k=0$, т. е. k — безконечно-малая величина.

§ 40. Логариѳмы, разсматриваемые какъ члены ариѳметической прогрессіи. Мы знаемъ, что логариѳмомъ даннаго числа называется показатель степени, въ которую надо возвысить нѣкоторое извѣстное, разъ на всегда выбранное число, называемое основаніемъ логариѳмовъ, чтобы получить данное число. Такъ въ равенствѣ $a^y=x$, y есть логариѳмъ числа x при основаніи a, что обозначается такъ:

$$y=\lg x \text{ при основаніи } a \text{ или такъ: } y=\lg_a x,$$

8

гдѣ указатель (index) a около знака lg, нѣсколько ниже его, означаетъ, что за основаніе логариѳмовъ выбрано число a.

Функція $y = \lg x$ называется логариѳмическою.

Изъ предыдущаго курса также извѣстно, что за основаніе логариѳмовъ можно выбрать всякое положительное и конечное число, неравное единицѣ.

Докажемъ теперь слѣдующія теоремы:

Теорема I. Логариѳмическая функція $\lg x$ — непрерывная.

Положимъ, что при нѣкоторомъ опредѣленномъ, положительномъ, хотя и произвольномъ значеніи x, напримѣръ при $x = p$, $\lg x$ принимаетъ значеніе q, такъ что $\lg p = q$, и дадимъ количеству p безконечно-малое приращеніе α; тогда и q получитъ нѣкоторое приращеніе k; докажемъ, что k также безконечно-малая величина, чѣмъ и докажется непрерывность функціи $\lg x$ при всякомъ значеніи x.

Равенства $q = \lg p$ и $q + k = \lg(p + \alpha)$ однозначащія съ равенствами $a^q = p$ и $a^{p+k} = p + \alpha$, гдѣ a — основаніе логариѳмовъ, и потому

$$\alpha = a^{q+k} - a^q = a^q\,(a^k - 1), \text{ откуда } a^k - 1 = \frac{\alpha}{a^q};$$

но такъ какъ α безконечно-малая величина, a^q — конечная, то $\frac{\alpha}{a^q}$ безконечно-малая величина; слѣдовательно

$$\lim(a^k - 1) = 0 \text{ или } \lim a^k = 1, \text{ или } a^{\lim k} = 1,$$

значитъ $\lim k = 0$, а потому k— безконечно-малая величина.

Теорема 2. Если составимъ двѣ прогрессіи: одну геометрическую съ произвольнымъ знаменателемъ q и начинающуюся съ единицы, другую ариѳметическую съ произвольною разностью d и начинающуюся съ нуля, и эти прогрессіи продолжимъ въ обѣ стороны неопредѣленно далеко, то получимъ безконечные ряды:

$$(1) \ldots q^{-n}, \ldots q^{-3},\ q^{-2},\ q^{-1},\ \mathbf{1},\ q,\ q^2,\ q^3, \ldots q^n \ldots,$$

$$(2) \ldots -nd, \ldots -3d,\ -2d,\ -d,\ \mathbf{0},\ d,\ 2d,\ 3d, \ldots nd \ldots,$$

гдѣ всякій членъ прогрессіи (2) есть логариѳмъ соотвѣтствующаго ему члена прогрессіи (1) при основаніи $q^{\frac{1}{d}}$.

Доказательство. Произвольный членъ прогрессіи (1), напримѣръ q^n, можно представить такъ:

$$q^n = \left(q^{\frac{1}{d}}\right)^{nd},$$

слѣдовательно по опредѣленію логариѳма $\lg q^n = nd$ при основаніи $q^{\frac{1}{d}}$. Отсюда и заключаемъ, что члены ряда (1) имѣютъ логариѳмами соотвѣтствующіе имъ члены ряда (2) при условіи, что за основаніе логариѳмовъ принято $q^{\frac{1}{d}}$.

Теорема 3 (обратная предыдущей). Если составимъ двѣ прогрессіи: одну геометрическую (1) съ произвольнымъ знаменателемъ q и начинающуюся съ единицы, другую — ариѳметическую съ произвольною разностью d и начинающуюся съ нуля, и эти прогрессіи продолжимъ въ обѣ стороны неопредѣленно далеко, то, принимая члены ариѳметической прогрессіи (2) за систему логариѳмовъ, соотвѣтствующіе имъ члены геометрической прогрессіи (1) можно будетъ разсматривать какъ числа, соотвѣтствующія этимъ логариѳмамъ при основаніи $q^{\frac{1}{d}}$.

Доказательство. Положимъ, что при нѣкоторомъ основаніи $d = \lg q$; тогда

$$nd = n \lg q = \lg q^n = \lg\left(q^{\frac{1}{d}}\right)^{nd},$$

откуда и заключаемъ, что, если какой-нибудь членъ nd ариѳметической прогрессіи (2) принять за логариѳмъ, то соотвѣтствующее этому логариѳму число есть соотвѣтствующій ему членъ q^n геометрической прогрессіи (1) при условіи, что за основаніе логариѳмовъ принято $q^{\frac{1}{d}}$.

Изъ послѣднихъ двухъ теоремъ слѣдуетъ, что, составивъ двѣ произвольныя прогрессіи: геометрическую, начинающуюся съ единицы, и ариѳметнческую, начинающуюся съ нуля, и продолженныя въ обѣ стороны до безконечности, мы можемъ разсматривать члены ариѳметической прогрессіи какъ систему логариѳмовъ чиселъ, составляющихъ геометрическую прогрессію, и обратно, причемъ основаніемъ логариѳмовъ будетъ знаменатель геометрической прогрессіи съ показателемъ, равнымъ единицѣ, дѣленной на разность ариѳметической прогрессіи.

§ 41. Существованіе логариѳма для всякаго положительнаго числа при положительномъ основаніи. Зная, что цѣлая степень положительнаго основанія есть число положительное, и условившись подъ дробною степенью положительнаго основанія понимать только его ариѳметическое, т. е. положительное, значеніе, заключаемъ, что отрицательное число при положительномъ основаніи не имѣетъ логариѳма.

Докажемъ теперь слѣдующую теорему:

Всякое положительное число при положительномъ основаніи, неравномъ единицѣ, имѣетъ логариѳмъ, который можетъ быть вычисленъ или точно, или приближенно съ желаемою степенью точности.

Въ самомъ дѣлѣ, если примемъ положительное число a, неравное единицѣ, за основаніе логариѳмовъ, то по предыдущему каждый членъ ариѳметической прогрессіи

$$(3) \ldots . -(n+1), -n, \ldots -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ldots n, (n+1) \ldots$$

есть логариѳмъ соотвѣтствующаго ему члена геометрической прогрессіи

$$(4) \ldots . a^{-(n+1)}, \ a^{-n}, \ldots a^{-3}, \ a^{-2}. \ a^{-1}, \ 1, \ a, \ a^2, \ a^3, \ldots a^n, \ a^{n+1}, \ldots$$

при основаніи a, считая соотвѣтственными тѣ члены, которые занимаютъ тѣ-же мѣста относительно члена нуль ариѳметической прогрессіи и члена единицы геометрической.

Положимъ, что надо опредѣлить $\lg N$ при основаніи a. Если въ ряду (4) найдется число равное N, напримѣръ, если $a^n = N$, то соотвѣтствующее ему число n ряда (3) и будетъ логариѳмъ числа N; если же ни одно изъ чиселъ ряда (4) не равно N, то въ немъ всегда найдутся два смежныхъ числа, напримѣръ a^n и a^{n+1}, между которыми заключается N. Вставимъ между этими двумя числами произвольное число p среднихъ геометрическихъ чиселъ, а также между соотвѣтствующими имъ числами n и $n+1$ ряда (3) p среднихъ ариѳметическихъ; тогда знаменатель вновь получаемой геометрической прогрессіи будетъ $a^{\frac{1}{p+1}}$, а разность вновь получаемой ариѳметической прогрессіи будетъ $\frac{1}{p+1}$, такъ что получимъ ряды:

$$(5) \ldots . a^n, \ a^{n+\frac{1}{p+1}}, a^{n+\frac{2}{p+1}}, \ldots a^{n+\frac{k}{p+1}}, \ a^{n+\frac{k+1}{p+1}}, \ldots a^{n+\frac{p}{p+1}}, \ a^{n+1} \text{ и}$$

$$(6) \ldots . n, n+\frac{1}{p+1}, n+\frac{2}{p+1}, \ldots n+\frac{k}{p+1}, n+\frac{k+1}{p+1}, \ldots n+\frac{p}{p+1}, \ n+1,$$

причемъ каждый членъ ряда (6) есть логариѳмъ соотвѣтствующаго ему члена ряда (5) при основаніи a. Если теперь данное число N равно какому-нибудь члену ряда (5), напримѣръ $N = a^{n+\frac{k}{p+1}}$, то его логариѳмъ есть соотвѣтствующій ему членъ ряда (6), именно $n+\frac{k}{p+1}$ — число точное, а слѣдовательно соизмѣримое; если же N не встрѣчается между числами ряда (5), то между числами a^n и a^{n+1} ряда (4) вставимъ бо̀льшее число среднихъ геометрическихъ, чѣмъ прежде, и столько же среднихъ ариѳметическихъ между n и $n+1$, неопредѣленно увеличивая p (причемъ и k увеличивается, оставаясь однако меньше, чѣмъ p) и каждый разъ испытывая число вновь получаемыхъ геометрическихъ прогрессій. Если ни при какомъ сколь-угодно большомъ числѣ p среднихъ геометрическихъ чиселъ, вставленныхъ между a^n и a^{n+1}, въ ряду (5) не окажется числа равнаго N, то $\lg N$ не можетъ быть опредѣленъ точнымъ образомъ, а можетъ быть найденъ лишь приближенно, впрочемъ съ произвольною степенью точности.

Дѣйствительно, если число N не встрѣчается въ ряду (5), то выбираемъ въ немъ два смежныхъ числа $a^{n+\frac{k}{p+1}}$ и $a^{n+\frac{k+1}{p+1}}$, между которыми заключается N, т. е. такія, что будетъ

$$a^{n+\frac{k}{p+1}} < N < a^{n+\frac{k+1}{p+1}} \text{ или же } a^{n+\frac{k}{p+1}} > N > a^{n+\frac{k+1}{p+1}},$$

смотря по тому, будетъ ли $a>1$ или $a<1$; слѣдовательно $\lg N$ будетъ заключаться между $n+\frac{k}{p+1}$ и $n+\frac{k+1}{p+1}$; а какъ численная разность между этими числами есть $\frac{1}{p+1}$, которая при неограниченномъ увеличеніи p можетъ быть сдѣлана произвольно малою, то и численная разность $a^{n+\frac{k+1}{p+1}} - a^{n+\frac{k}{p+1}}$ можетъ быть сдѣлана произвольно малою, ибо показательная функція есть непрерывная (§ 39). Отсюда заключаемъ (теорема 10 § 5), что данное постоянное число N есть общій предѣлъ чиселъ $a^{n+\frac{k}{p+1}}$ и $a^{n+\frac{k+1}{p+1}}$ при неограниченномъ увеличеніи p, т. е.

$$\lim_{p=\infty}\left(a^{n+\frac{k}{p+1}}\right) = \lim_{p=\infty}\left(a^{n+\frac{k+1}{p+1}}\right) = N \text{ или}$$

$$a^{\lim\limits_{p=\infty}\left(n+\frac{k}{p+1}\right)} = a^{\lim\limits_{p=\infty}\left(n+\frac{k+1}{p+1}\right)} = N, \text{ откуда}$$

$$\lg N = \lim\left(n+\frac{k}{p+1}\right)_{p=\infty}.$$

Этотъ результатъ показываетъ, что $\lg N$ существуетъ, и если онъ окажется числомъ несоизмѣримымъ, то онъ по крайней мѣрѣ можетъ быть найденъ приближенно съ желаемою степенью точности. Такъ, напримѣръ, если $\lg N$ заключается между $n+\frac{k}{p+1}$ и $n+\frac{k+1}{p+1}$, то, принимая $\lg N = n+\frac{k}{p+1}$, мы сдѣлаемъ ошибку, меньшую чѣмъ на $\frac{1}{p+1}$, ибо $\left(n+\frac{k+1}{p+1}\right)-\left(n+\frac{k}{p+1}\right)=\frac{1}{p+1}$, а слѣдовательно численная разность $\lg N-\left(n+\frac{k}{p+1}\right)<\frac{1}{p+1}$.

Замѣтимъ, что при положительномъ основанiи a неравномъ единицѣ всякое положительное число N имѣетъ одинъ только вещественный логариѳмъ*), потому что a^x при разныхъ вещественныхъ значенiяхъ x имѣетъ разныя значенiя.

Обратно, всякому данному логариѳму соотвѣтствуетъ одно только число, потому что, если бы тому же логариѳму x соотвѣтствовали два различныхъ числа N и N_1, то было бы

$$a^x=N \text{ и } a^x=N_1, \text{ откуда } N=N_1,$$

что при разныхъ числахъ N и N_1 невозможно.

Общiя свойства логариѳмовъ при всякомъ основанiи, равно какъ свойства Бригговыхъ логариѳмовъ, намъ уже извѣстны изъ общаго курса алгебры.

§ 42. Основанiе натуральныхъ логариѳмовъ. Совокупность логариѳмовъ чиселъ, вычисленныхъ при одномъ и томъ же основанiи, составляетъ систему логариѳмовъ при этомъ основанiи. Общеупотребительная система логариѳмовъ — система Бригга, вычисленная при основанiи десять; но въ высшемъ математическомъ анализѣ употребляется еще другая система логариѳмовъ, называемая натуральною и вычисленная при несоизмѣримомъ основанiи, съ которымъ мы здѣсь нѣсколько познакомимся.

Составимъ геометрическую прогрессiю со знаменателемъ $1+\varepsilon$ и начинающуюся съ 1, а также ариѳметическую прогрессiю съ разностью α и начинающуюся съ 0, т. е. ряды

$$(1) \ldots . \; 1, \; (1+\varepsilon), \; (1+\varepsilon)^2, \; (1+\varepsilon)^3, \ldots (1+\varepsilon)^n, \; (1+\varepsilon)^{n+1} \ldots \text{ и}$$
$$(2) \ldots . \; 0, \quad \alpha, \quad 2\alpha, \quad 3\alpha, \quad \ldots \quad n\alpha, \quad (n+1)\alpha \quad \ldots ;$$

тогда по § 40 всякiй членъ ряда (2) есть логариѳмъ соотвѣтствующаго ему члена ряда (1) при основанiи $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Положимъ, что здѣсь ε безконечно-малая величина; тогда и α безконечно-малая величина, ибо изъ рядовъ (1) и (2) видно, что $\alpha=\lg(1+\varepsilon)$; а какъ $\lg 1=0$ и логариѳмическая функцiя — непревывная, то при безконечно-маломъ ε и α должна быть

*) Въ высшемъ анализѣ доказывается, что при указанныхъ условiяхъ всякое число при положительномъ основанiи имѣетъ безчисленное множество логариѳмовъ, изъ коихъ только одинъ вещественный, а всѣ остальные — мнимые.

безконечно-малою. Обозначая разсматриваемое основаніе логариѳмовъ черезъ a, будемъ имѣть

$$(3)\ \ldots\ a = \lim\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\left\{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}} = \left\{\lim\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right\}^{\lim\frac{\varepsilon}{\alpha}},$$

гдѣ ε и α стремятся къ нулю, причемъ очевидно a зависитъ отъ $\lim\frac{\varepsilon}{\alpha}$, т. е. отъ того закона, по которому α измѣняется въ зависимости отъ ε.

Ясно, что изъ всѣхъ системъ логариѳмовъ, та будетъ простѣйшая, для которой зависимость между α и ε такова, что $\lim\frac{\varepsilon}{\alpha} = 1$, и которая поэтому называется натуральною; тогда, обозначая соотвѣтствующее этой системѣ основаніе черезъ e, получимъ

$$e = \lim\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}},\ \text{когда } \varepsilon \text{ стремится къ нулю.}$$

Покажемъ, что этотъ предѣлъ вполнѣ опредѣленное число, по какому бы закону ε ни стремилось къ нулю, и что онъ заключается между 2 и 3, а затѣмъ вычислимъ его.

Для удобства выкладки положимъ, что $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и слѣдовательно $\frac{1}{\varepsilon} = n$, такъ что при стремленіи ε къ нулю n стремится къ $\pm\infty$; тогда

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=\pm\infty}.$$

Здѣсь приходится разсматривать три случая: 1) когда n, стремясь къ ∞, принимаетъ только цѣлыя и положительныя значенія, 2) когда n принимаетъ какія угодно положительныя значенія, соизмѣримыя ли, или несоизмѣримыя, 3) когда n принимаетъ отрицательныя значенія, численно стремящіяся къ ∞.

Въ первомъ случаѣ мы по биному Ньютона имѣемъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

или

$$(4)\ \ldots\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1\,.\,2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)n}.$$

Такъ какъ здѣсь всѣ члены этого разложенія положительные, то заключаемъ, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$, значитъ и $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty} > 2$.

Далѣе, если во второй части разложенія (4) откинемъ всѣ дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$, которыя всѣ меньше 1, то получимъ неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n},$$

а слѣдовательно подавно

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

ибо мы каждаго множителя въ знаменателяхъ, начиная со множителя 3, замѣнили меньшимъ числомъ 2; а какъ многочленъ въ скобкахъ есть сумма членовъ убывающей кратной прогрессіи, знаменатель которой есть $\frac{1}{2}$, и слѣдовательно эта сумма равна

$$\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^{n-1}}, \text{ то } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+1-\frac{1}{2^{n-1}}, \text{ т. е. } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

значитъ и $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty} < 3$.

Такимъ образомъ доказано, что $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty}$ при цѣломъ и положительномъ показателѣ n, стремящемся къ ∞, заключается между 2 и 3. Обозначимъ этотъ предѣлъ черезъ e.

Положимъ для 2-го случая, что n, стремясь къ ∞, принимаетъ какія угодно положительныя значенія, соизмѣримыя ли, или несоизмѣримыя; тогда всегда найдутся два цѣлыхъ числа p и $p+1$, между которыми заключается n (§ 9), причемъ, конечно, p стремится къ ∞ одновременно съ n, такъ что

$$p < n < p+1, \text{ а слѣдовательно } \frac{1}{p} > \frac{1}{n} > \frac{1}{p+1}; \text{ тогда}$$

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p,$$

ибо какъ возвышаемые двучлены, такъ и ихъ показатели расположены здѣсь по ихъ убывающимъ значеніямъ. Послѣднее неравенство можно написать такъ:

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^p \cdot \left(1+\frac{1}{p}\right) > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}}{1+\frac{1}{p+1}},$$

гдѣ крайніе члены имѣютъ общій предѣлъ, ибо по предыдущему случаю $\lim\left(1+\frac{1}{p+1}\right)_{p=\infty}=e$, $\lim\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}_{p=\infty}=e$, $\lim\left(1+\frac{1}{p}\right)_{p=\infty}=1$, $\lim\left(1+\frac{1}{p+1}\right)_{p=\infty}=1$, и потому по теоремѣ 11 § 5 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имѣетъ тотъ же предѣлъ e, который, какъ мы видѣли въ первомъ случаѣ, заключается между 2 и 3.

Наконецъ, если n принимаетъ отрицательныя значенія, численно стремящіяся къ ∞, то, полагая $n=-m$, гдѣ слѣдовательно m число положительное, будемъ имѣть

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^m=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\cdot\left(1+\frac{1}{m-1}\right);$$

а какъ $\lim\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}_{m=\infty}=e$, $\lim\left(1+\frac{1}{m-1}\right)_{m=\infty}=1$, то и $\lim\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}_{m=\infty}=e$,

т. е. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=-\infty}$ и при отрицательномъ n, численно стремящемся къ ∞, есть то же число e, заключающееся между 2 и 3.

Такимъ образомъ мы убѣдились, что, каковъ бы ни былъ законъ, по которому n численно стремится къ ∞, $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=\pm\infty}$, или, что то же, $\lim\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}_{\varepsilon=0}$ $\Big($ибо мы выше полагали $\varepsilon=\frac{1}{n}\Big)$ есть нѣкоторое опредѣленное число e, заключающееся между 2 и 3. Этотъ предѣлъ и есть основаніе натуральныхъ логариѳмовъ.

Для вычисленія этого основанія достаточно опредѣлить

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=\pm\infty},$$

когда n принимаетъ цѣлыя и положительныя значенія, стремящіяся къ ∞, ибо этотъ предѣлъ одинъ и тотъ же, по какому бы закону n ни стремилось къ ∞. Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{1.2.3.4}+\ldots,$$

гдѣ число членовъ неограниченно увеличивается, когда n стремится къ ∞. Это равенство можно написать такъ:

$$(5)\ldots\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{1.2.3.4}+\ldots+$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1.2.3\ldots k}+R,$$

гдѣ R выражается слѣдующимъ безконечнымъ рядомъ:

$$(6)\ldots R=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k(k+1)}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k(k+1)(k+2)}+\ldots$$

Чтобы теперь опредѣлить e, надо только опредѣлить предѣлъ второй части равенства (5) при $n=\infty$; слѣдовательно, примѣняя къ первымъ k членамъ ряда (5) теоремы § 5, получимъ:

$$(7)\ldots e=2+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}+\lim R;$$

остается только опредѣлить $\lim R$ или, говоря вѣрнѣе, возможно меньшее положительное число, но превышающее R, чтобы можно было судить о степени погрѣшности, которую сдѣлаемъ, если за e возьмемъ первые k членовъ ряда (5). Для этого въ числителяхъ дробей ряда (6) откинемъ дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ... $\frac{k}{n}$, $\frac{k+1}{n}$ ..., которыя всѣ меньше 1, и, кромѣ того, каждый изъ множителей $k+2$, $k+3$, $k+4$,... въ знаменателяхъ замѣнимъ меньшимъ числомъ $k+1$; тогда

$$R<\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k(k+1)}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k(k+1)^2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k(k+1)^3}+\ldots,$$

гдѣ вторая часть есть безконечно убывающая кратная прогрессія, знаменатель которой равенъ $\frac{1}{k+1}$; слѣдовательно при всякомъ значеніи k будетъ

$$R<\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k(k+1)}:\left(1-\frac{1}{k+1}\right),\ \text{т. е. } R<\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\cdot\frac{1}{k},$$

значитъ и $\lim R<\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\cdot\frac{1}{k}$.

Такимъ образомъ, ограничиваясь только первыми k членами ряда (7), мы за основаніе натуральныхъ логариѳмовъ получимъ:

$$e=2+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}$$

съ точностью до $\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\cdot\frac{1}{k}$.

Такъ, вычисливъ сумму первыхъ 12-ти членовъ этого ряда, получимъ

$e=2{,}718281828$ съ точностью до $0{,}000000001$.

§ 43. Модуль. Зависимость между натуральнымъ основаніемъ логариѳмовъ и какимъ-либо другимъ. Имѣя логариѳмы чиселъ по одному основанію, легко вычислить логариѳмы по всякому другому основанію. Положимъ, что намъ извѣстенъ $\lg_e N$ по какому-нибудь основанію e, и требуется опредѣлить $\lg_a N$ по другому основанію a. Обозначивъ этотъ логариѳмъ чрезъ x, получимъ $a^x = N$; а взявъ логариѳмы обѣихъ частей этого равенства по основанію e, получимъ

$$x.\lg_e a = \lg_e N \text{ или } \lg_a N.\lg_e a = \lg_e N, \text{ откуда}$$

$$\lg_a N = \frac{\lg_e N}{\lg_e a} = \frac{1}{\lg_e a}\,.\,\lg_e N,$$

т. е., имѣя логариѳмъ числа N по какому-либо основанію e, мы получимъ логариѳмъ того же числа по другому основанію a, умноживъ данный логариѳмъ на дробь, равную единицѣ, дѣленной на логариѳмъ новаго основанія, взятый по данному основанію.

Этотъ постоянный множитель $\frac{1}{\lg_e a}$, на котораго слѣдуетъ умножать логариѳмы чиселъ по основанію e для полученія логариѳмовъ тѣхъ же чиселъ по новому основанію a, называется модулемъ новой системы относительно данной.

Такъ, напримѣръ, зная, что

основаніе натуральныхъ логариѳмовъ есть $e = 2{,}718281828$,

основаніе Бригговыхъ логариѳмовъ $a = 10$,

$\lg 10$ при натуральномъ основаніи равенъ 2,30258509,

$\lg e$ при основаніи a равенъ 0,43429448,

и обозначивъ модуль Бригговой системы логариѳмовъ относительно натуральной чрезъ M, а модуль, натуральной системы относительно Бригговой чрезъ M', получимъ

$$M = \frac{1}{\lg_e a} = \frac{1}{\lg_e 10} = \frac{1}{2{,}30258509} = 0{,}43429448\ldots,$$

$$M' = \frac{1}{\lg_a e} = \frac{1}{\lg_{10} 2{,}718281828} = \frac{1}{0{,}43429448} = 2{,}30258509.$$

На основаніи этого, зная, что $\lg_e 2 = 0{,}6931471$, получимъ

$$\lg_{10} 2 = 0{,}43429448 \times 0{,}6931471 = 0{,}3010300.$$

Слѣдствіе. Изъ свойства модулей слѣдуетъ, что

$$\lg_a N = M\,.\,\lg_e N,\ \lg_e N = M'\,.\,\lg_a N,$$

а перемноживъ эти два равенства почленно, получимъ

$$\lg_a N\,.\,\lg_e N = MM'\,.\,\lg_e N\,.\,\lg_a N, \text{ слѣдовательно}$$

$$MM' = 1, \text{ откуда } M = \frac{1}{M'}, \text{ т. е.}$$

модуль одной системы логариѳмовъ относительно другой равенъ 1, дѣленной на модуль второй системы относительно первой.

Покажемъ еще, какая зависимость существуетъ между какимъ-либо основаніемъ логариѳмовъ и натуральнымъ основаніемъ.

Зная, что $\lim\limits_{\varepsilon=0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$, мы (изъ формулы 3 § 42) имѣемъ равенство

$$(p) \quad \ldots \quad a = e^{\lim \frac{\varepsilon}{a}},$$

выражающее зависимость какого-либо основанія a отъ натуральнаго основанія e; зависимость эта обусловлена значеніемъ $\lim \frac{\varepsilon}{a}$, которое для натуральнаго основанія, какъ мы видѣли, равно 1.

Посмотримъ теперь, что представляетъ собою $\lim \frac{a}{\varepsilon}$.

Взявъ логариѳмы обѣихъ частей равенства (p) по основанію e, получимъ

$$\lg_e a = \lim \frac{\varepsilon}{a}, \text{ откуда } \frac{1}{\lg_e a} = \frac{1}{\lim \frac{\varepsilon}{a}} = \lim \frac{a}{\varepsilon},$$

откуда видно, что $\lim \frac{a}{\varepsilon}$ есть модуль системы логариѳмовъ по основанію a относительно натуральной системы.

X. Розысканіе наибольшаго (maximum) или наименьшаго (minimum) значенія трехчлена 2-ой степени и нѣкоторыхъ другихъ функцій.

§ 44. Опредѣленія. Если функція $y = f(x)$ непрерывная по крайней мѣрѣ на нѣкоторомъ протяженіи, то при непрерывномъ измѣненіи аргумента x въ одну и ту же сторону, т. е. или постоянно увеличивая его, или постоянно уменьшая, функція y можетъ или непрерывно возрастать, или убывать; она можетъ также сначала возрастать до нѣкотораго значенія $y = b$, соотвѣтствующаго нѣкоторому значенію $x = a$, а затѣмъ снова убывать; тогда $y = b$ есть наибольшее значеніе функціи y относительно всякихъ двухъ смежныхъ ея значеній, какъ угодно близкихъ къ b, изъ коихъ одно предшествуетъ значенію $y = b$, а другое за нимъ слѣдуетъ; въ этомъ случаѣ $y = b$ называется maximum'омъ данной функціи. Если же при указанномъ измѣненіи аргумента функція y сначала убываетъ до нѣкотораго значенія $y = b'$, соотвѣтствующаго нѣкоторому значенію $x = a'$, а затѣмъ снова возрастаетъ, то $y = b'$ есть наименьшее значеніе функціи относительно

сительно всякихъ двухъ смежныхъ ея значеній, произвольно близкихъ къ b', изъ которыхъ одно предшествуетъ значенію $y=b'$, а другое за нимъ слѣдуетъ; въ такомъ случаѣ $y=b'$ называется minimum'омъ данной функціи.

Можетъ также случаться, что съ непрерывнымъ измѣненіемъ перемѣнной x функція ея y сначала увеличивается до извѣстнаго значенія $y=b$, затѣмъ уменьшается до нѣкотораго значенія $y=b'$, потомь снова увеличивается до значенія $y=b''$ и т. д.; слѣдовательно функція можетъ имѣть нѣсколько maximum'овъ и нѣсколько minimum'овъ.

Изъ приведеннаго опредѣленія слѣдуетъ, что надо различать maximum и minimum функціи отъ крайнихъ ея значеній, которыя она принимаетъ при крайнихъ значеніяхъ независимой перемѣнной, т. е. значеніяхъ, дальше которыхъ эта перемѣнная уже неспособна или не должна измѣняться; хотя-бы эти крайнія значенія функціи и представляли собою наибольшія или наименьшія изъ всѣхъ ея значеній, тѣмъ не менѣе ихъ не считаютъ maximum'омъ или minimum'омъ, потому что здѣсь нѣтъ приведеннаго признака ихъ существованія.

Напримѣръ, имѣя функцію $y=3^x$, видимъ, что y постоянно возрастаетъ съ непрерывнымъ увеличеніемъ x и при $x=\infty$ будетъ $y=\infty$. Но послѣднее, крайнее значеніе функціи, будучи наибольшимъ изъ всѣхъ ея значеній, не есть однако maximum, ибо x не можетъ измѣняться дальше ∞ и слѣдовательно нѣтъ здѣсь приведеннаго признака существованія maximum'а или minimum'а.

Точно также, имѣя функцію $y=2+\sqrt{9-x^2}$, видимъ, что x можетъ измѣняться только отъ $x=-3$ до $x=+3$, а при этихъ значеніяхъ x функція y получаетъ значеніе 2, которое, будучи наименьшимъ изъ всѣхъ ея значеній, не есть однако minimum ея, ибо x не можетъ увеличиваться дальше $x=3$ или уменьшаться дальше $x=-3$, потому что внѣ предѣловъ $+3$ и -3 функція y оказывается мнимою.

Если функція имѣетъ и maximum, и minimum, то maximum иногда можетъ быть и менѣе ея minimum'а. Такъ, напримѣръ, имѣя $y=\sec x$ и непрерывно измѣняя x, найдемъ, что

$$
\begin{array}{lrl}
\text{при } x= & -\frac{\pi}{2}, & y=\pm\infty \\
\text{,, } x= & 0, & y=+1 \\
\text{,, } x= & \frac{\pi}{2}, & y=\pm\infty \\
\text{,, } x= & \pi, & y=-1
\end{array}
$$

$$\text{при } x = \frac{3\pi}{2},\ y = \pm\infty$$

. . . .

слѣдовательно между предѣлами $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = +\frac{\pi}{2}$ функція y сначала уменьшается отъ $+\infty$ до $+1$, а затѣмъ увеличивается отъ $+1$ до $+\infty$, и потому $y = 1$ есть minimum при $x = 0$; между предѣлами же $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ функція y сначала увеличивается (въ алгебраическомъ смыслѣ) отъ $-\infty$ до -1, а затѣмъ уменьшается отъ -1 до $-\infty$, и слѣдовательно $y = -1$ есть maximum (при $x = \pi$). Отсюда и видно, что въ данномъ случаѣ maximum меньше minimum'а.

Изъ этого примѣра усматриваемъ, что выраженія „maximum" и „minimum" принимаются въ алгебраическомъ смыслѣ, такъ что отрицательный maximum, взятый въ абсолютномъ значеніи, можно считать minimum'омъ, и обратно, если только вопросъ допускаетъ такое толкованіе.

§ 45. Maximum и minimum трехчлена 2-ой степени. Розысканіе maximum или minimum любой функціи требуетъ знанія высшей математики; поэтому мы ограничимся здѣсь только частными случаями, именно функціею, представляющей трехчленъ 2-ой степени относительно перемѣнной независимой x, т. е, функціей вида:

$$(1) \ldots . y = ax^2 + bx + c$$

и еще тремя видами функцій, maximum и minimum которыхъ легко опредѣляется элементарными пріемами.

Взявъ во второй части равенства (1) a за скобки, получимъ

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right);$$

а прибавивъ къ трехчлену въ скобкахъ и вычтя изъ него $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, т. е. квадратъ половины коэффиціента при x въ первой степени, получимъ

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right\} \text{ или}$$

$$(2) \ldots . y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Такъ какъ здѣсь количество $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$, какъ квадратъ, при всякомъ вещественномъ значеніи x есть величина положительная, то знакъ количества $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ будетъ одинаковъ со знакомъ множителя a, т. е. со знакомъ коэффиціента при x^2 въ данномъ трехчленѣ (1); слѣдовательно, если a положительная величина, то при всякомъ вещественномъ x будемъ имѣть

$$y \geqq c - \frac{b^2}{4a},$$

а именно y обратится въ $c - \frac{b^2}{4a}$ только при такомъ значенiи перемѣнной x, при которомъ $x + \frac{b}{2a} = 0$, т. е. при $x = -\frac{b}{2a}$, а при всѣхъ прочихъ значенiяхъ для x, какъ угодно близкихъ къ $-\frac{b}{2a}$, будь они больше или меньше, чѣмъ $-\frac{b}{2a}$, мы всегда будемъ имѣть $y > c - \frac{b^2}{4a}$; слѣдовательно

minimum $y = c - \frac{b^2}{4a}$, причемъ minimum имѣетъ мѣсто при $x = -\frac{b}{2a}$.

Если же коэффицiентъ a величина отрицательная, то и количество $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ въ равенствѣ (2) при всякомъ вещественномъ x будетъ отрицательная величина, а потому будемъ имѣть

$$y \leqq c - \frac{b^2}{4a},$$

а именно $y = c - \frac{b^2}{4a}$ только при $x = -\frac{b}{2a}$, а при всѣхъ прочихъ значенiяхъ перемѣнной x, какъ угодно близкихъ къ $-\frac{b}{2a}$, будь они больше или меньше, чѣмъ $-\frac{b}{2a}$, мы всегда будемъ имѣть $y < c - \frac{b^2}{4a}$; слѣдовательно maximum $y = c - \frac{b^2}{4a}$ при $x = -\frac{b}{2a}$.

Итакъ, если въ трехчленѣ (1) коэффицiентъ a при x^2 положительная величина, то этотъ трехчленъ имѣетъ minimum; если же a величина отрицательная, то трехчленъ имѣетъ maximum; во всякомъ же случаѣ maximum или minimum есть

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; y = c - \frac{b^2}{4a} \text{ при } x = -\frac{b}{2a}.$$

Результатъ этотъ приводитъ насъ къ слѣдующему правилу:

Maximum или minimum даннаго трехчлена равенъ извѣстному члену его c безъ квадрата коэффицiента при перемѣнной x въ 1-й степени, дѣленнаго на учетверенный коэффицiентъ при 2-й степени этой перемѣнной, и это имѣетъ мѣсто, когда перемѣнная величина x равна коэффицiенту при первой степени этой перемѣнной, взятому съ обратнымъ знакомъ и дѣленному на удвоенный коэффицiентъ при 2-й степени той же перемѣнной.

Примѣры.

1) Функція $y = 3x^2 - 5x + 3$ имѣетъ minimum, ибо коэффиціентъ при x^2 положительная величина, притомъ (по формулѣ 3)

$$\text{minimum } y = 3 - \frac{5^2}{4\,.\,3} = \frac{11}{12} \text{ при } x = \frac{+5}{2\,.\,3} = \frac{5}{6}.$$

2) Функція $y = x^2 - 2x$ имѣетъ minimum, именно (по формулѣ 3)

$$\text{minimum } y = 0 - \frac{2^2}{4.1} = -1 \text{ при } x = \frac{+2}{2.1} = 1.$$

3) Функція $y = x^2 + 2x + 1$ имѣетъ minimum, именно

$$\text{minimum } y = 0 \text{ при } x = -1.$$

4) Функція $y = 2x - x^2$ имѣетъ maximum, ибо коэффиціентъ при x^2 величина отрицательная, именно maximum $y = 1$ при $x = 1$.

5) Изъ всѣхъ прямоугольниковъ даннаго периметра $2p$ опредѣлить тотъ, который имѣетъ наибольшую площадь.

Рѣшеніе. Если высоту искомаго прямоугольника обозначимъ чрезъ x, то его основаніе будетъ $p - x$, а потому его площадь s будетъ

$$s = x(p - x) = px - x^2; \text{ слѣдовательно maximum } s = \frac{p^2}{4} \text{ при } x = \frac{p}{2},$$

т. е. искомый прямоугольникъ есть квадратъ.

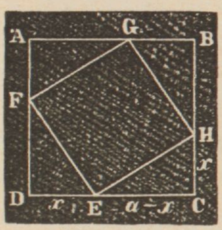
6) Число a раздѣлить на такія двѣ части, чтобы сумма ихъ квадратовъ имѣла наименьшую величину.

Рѣшеніе. Пусть будетъ x одна изъ искомыхъ частей даннаго числа a; тогда $a - x$ будетъ другая часть; слѣдовательно, обозначивъ сумму квадратовъ этихъ частей чрезъ y, получимъ

$$y = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2, \text{ и слѣдовательно}$$

$$\text{minimum } y = a^2 - \frac{(2a)^2}{4.2} = \frac{a^2}{2} \text{ при } x = \frac{+2a}{2\,.\,2} = \frac{a}{2},$$

т. е. данное число a надо раздѣлить на двѣ равныя части.



Черт. 12.

7) Въ квадратъ $ABCD$ (чертежъ 12), сторона котораго a, вписать квадратъ, имѣющій наименьшую площадь,

Рѣшеніе. Положимъ, что $EFGH$ искомый квадратъ, и обозначимъ площадь его чрезъ s; тогда, полагая $DE = x$, получимъ

$$s = \overline{HE}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CH}^2 = (a - x)^2 + x^2 \text{ или}$$

$$s = 2x^2 - 2ax + a^2; \text{ слѣдовательно minimum } s = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{при } x = \frac{a}{2},$$

т. е. вершины искомаго квадрата дѣлятъ стороны даннаго пополамъ.

8) Изъ всѣхъ прямоугольниковъ даннаго периметра $2p$ опредѣлить тотъ, діагональ котораго имѣетъ наименьшую величину.

Рѣшеніе. Если x есть высота искомаго прямоугольника, то $p-x$ будетъ его основаніе; слѣдовательно для опредѣленія діагонали его y имѣемъ

$$y=\sqrt{x^2+(p-x)^2}=\sqrt{2x^2-2px+p^2}.$$

Ясно, что опредѣленіе наименьшаго значенія y приводится къ опредѣленію наименьшаго значенія подкореннаго трехчлена $2x^2-2px+p^2$, а послѣднее имѣетъ мѣсто при $x=\frac{2p}{4}=\frac{p}{2}$, т. е. когда искомый прямоугольникъ есть квадратъ.

9) Въ треугольникъ вписать прямоугольникъ, имѣющій наибольшую площадь.

Рѣшеніе. Обозначивъ черезъ h высоту треугольника, черезъ a его основаніе, черезъ x высоту искомаго треугольника, черезъ s — его площадь, получимъ

$$s=\frac{a}{h}.\,(hx-x^2);$$

надо только очевидно найти maximum $(hx-x^2)$, ибо $\frac{a}{h}$ постоянное количество; мы тогда получимъ

$$\text{maximum } s=\frac{ah}{4} \text{ при } x=\frac{h}{2},$$

т. е. верхнее основаніе искомаго прямоугольника дѣлитъ высоту даннаго треугольника пополамъ.

10) Въ конусъ, высота котораго h, радіусъ основанія r, вписать цилиндръ, имѣющій наибольшую полную поверхность.

Рѣшеніе. Обозначивъ чрезъ x радіусъ основанія искомаго цилиндра, чрезъ y его высоту, а чрезъ S — полную поверхность его, получимъ

$$S=2\pi xy+2\pi x^2,$$

$$\text{а какъ } \frac{y}{h}=\frac{r-x}{r}, \text{ откуда } y=\frac{h(r-x)}{r}, \text{ то}$$

$$S=\frac{2\pi}{r}.\,[(r-h)\,x^2+rhx].$$

Ясно, что эта функція получитъ maximum или minimum при тѣхъ же значеніяхъ x, при которыхъ получитъ maximum или minimum двучленъ въ скобкахъ, т. е. функція

$$S_1=(r-h)x^2+rhx,$$

ибо множитель $\frac{2\pi}{r}$ величина постоянная; слѣдовательно, если $h > r$, т. е. если $r - h < 0$, то

$$\text{maximum } S_1 = -\frac{r^2h^2}{4(r-h)} = \frac{r^2h^2}{4(h-r)} \text{ при } x = \frac{rh}{2(h-r)}, \text{ а потому}$$

$$\text{maximum } S = \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{h^2r^2}{4(h-r)} = \frac{\pi h^2 r}{2(h-r)} \text{ при } x = \frac{rh}{2(h-r)}$$

при томъ однако условіи, что h не меньше $2r$. Дѣйствительно, x не можетъ превышать r, т. е. должно быть $\frac{hr}{2(h-r)} \leqq r$, откуда и слѣдуетъ, что $h \geqq 2r$; въ противномъ же случаѣ нѣтъ maximum.

Если же $h < r$, т. е. если $r - h > 0$, то въ алгебраическомъ смыслѣ существуетъ minimum, именно

$$\text{minimum } S = -\frac{\pi h^2 r}{2(r-h)} \text{ при } x = -\frac{rh}{2(r-h)};$$

но этотъ результатъ не имѣетъ геометрическаго смысла, такъ какъ поверхность цилиндра не можетъ имѣть отрицательнаго значенія.

Наконецъ, если $r - h = 0$, то S не имѣетъ ни maximum, ни minimum, ибо тогда $S = 2\pi hx$, откуда видно, что съ неограниченнымъ увеличеніемъ или уменьшеніемъ x функція S соотвѣтственно неограниченно увеличивается или уменьшается.

II) На данной гипотенузѣ a, какъ на основаніи, построить прямоугольный треугольникъ, имѣющій наибольшую высоту.

Рѣшеніе. Если искомая высота есть y, одинъ изъ отрѣзковъ гипотенузы, опредѣляемыхъ высотою, есть x, то $y^2 = x(a-x)$, откуда

$$y = \sqrt{ax - x^2};$$

а какъ maximum подкореннаго двучлена есть $\frac{a^2}{4}$ при $x = \frac{a}{2}$, то

$$\text{maximum } y = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \text{ при } x = \frac{a}{2},$$

т. е. искомый прямоугольный треугольникъ равнобедренный.

Къ разсмотрѣнному нами случаю приводится также опредѣленіе maximum функціи вида

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, подведя множителя x подъ знакъ корня и полагая затѣмъ $x^2 = z$, получимъ

$$y = \sqrt{x^2(a^2 - x^2)} = \sqrt{a^2z - z^2}.$$

а какъ maximum подкореннаго двучлена по предыдущему есть $\frac{a^4}{4}$ при $z = \frac{a^2}{2}$, то

$$\text{maximum } y = \sqrt{\frac{a^4}{4}} = \frac{a^2}{2} \text{ при } x = \sqrt{z} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Примѣнимъ это къ слѣдующимъ тремъ примѣрамъ:

12) Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса r, опредѣлить тотъ, площадь котораго есть maximum.

Рѣшеніе. Если x есть высота искомаго вписаннаго прямоугольника, то основаніе его есть $\sqrt{4r^2 - x^2}$, а слѣдовательно его площадь s будетъ

$$s = x\sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2z - z^2}\text{, гдѣ } z = x^2,$$

и по вышеизложенному будемъ имѣть

$$\text{maximum } s = \sqrt{4r^4} = 2r^2 \text{ при } z = 2r^2, \text{ т. е. при } x = r\sqrt{2},$$

откуда заключаемъ, что искомый прямоугольникъ есть квадратъ.

13) Изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, равныя стороны которыхъ имѣютъ постоянную длину a, опредѣлить тотъ, который имѣетъ наибольшую площадь.

Рѣшеніе. Если основаніе искомаго треугольника обозначимъ чрезъ x, то его высота будетъ $\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$, площадь его $s = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{a^2z - z^2}$, гдѣ $z = \frac{x^2}{4}$; слѣдовательно maximum $s = \sqrt{\frac{a^4}{4}} = \frac{a^2}{2}$ при $z = \frac{a^2}{2}$, т. е. при $x = a\sqrt{2}$.

14) Число a раздѣлить на двѣ такія части, чтобы ихъ произведеніе было наибольшее.

Рѣшеніе. Обозначимъ одну изъ искомыхъ частей числа a чрезъ x; тогда другая частъ будетъ $a - x$, а слѣдовательно ихъ произведеніе

$$y = x(a - x) = ax - x^2\text{; значитъ maximum } y = \frac{a^2}{4} \text{ при } x = \frac{a}{2},$$

т. е. мы получимъ наибольшее произведеніе, когда данное число раздѣлимъ на двѣ равныя части.

Эту задачу можно выразить еще такъ:

Опредѣлить наибольшее значеніе произведенія xx' при условіи, что сумма $x + x'$ обоихъ его множителей равна постоянной величинѣ a. По предыдущему произведеніе xx' будетъ имѣть наибольшее значеніе, когда множители равны между собою, т. е. когда $x = x' = \frac{a}{2}$.

15) Рѣшить по этому же способу задачи 4, 5, 9, 11, 12 и 13.

16) Изъ всѣхъ треугольниковъ даннаго периметра $2p$ и даннаго основанія a опредѣлить тотъ, который имѣетъ наибольшую площадь.

Рѣшеніе. Обозначивъ двѣ остальныя стороны искомаго треугольника чрезъ x и y, а площадь чрезъ z, получимъ

$$z = \sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)} = \sqrt{p(p-a)} \cdot \sqrt{(p-x)(p-y)}.$$

Чтобы функція z имѣла maximum, надо чтобы произведеніе $(p-x)$ $(p-y)$ имѣло maximum; а какъ сумма множителей этого произведенія равна постоянной величинѣ a [ибо $p-x+p-y=2p-(x+y)=a$], то z имѣетъ maximum, когда $p-x=p-y$, откуда $x=y$, т. е. искомый треугольникъ — равнобедренный.

§ 46. Maximum произведенія перемѣнныхъ сомножителей, сумма которыхъ постоянная величина. Въ примѣрѣ 14 предыдущаго § мы видѣли, что произведеніе двухъ перемѣнныхъ сомножителей, сумма которыхъ постоянная величина, будетъ имѣть maximum, когда оба сомножителя становятся равными. Докажемъ теперь, что произведеніе всякаго числа перемѣнныхъ и положительныхъ сомножителей, сумма которыхъ постоянная величина, будетъ имѣть maximum, когда всѣ сомножители становятся равными (если только они способны становиться равными).

Пусть требуется опредѣлить maximum произведенія

$$P=xyz\ldots uv$$

изъ положительныхъ сомножителей, при условіи, что сумма ихъ $x+y+z\ldots+u+v$ постоянная величина.

Положимъ, что число сомножителей даннаго произведенія четное. Возьмемъ два изъ нихъ и допустимъ, что они неравны; тогда ихъ можно сдѣлать равными, не измѣняя ихъ суммы; причемъ ихъ произведеніе будетъ увеличиваться (см. примѣръ 14 предыдущаго §), значитъ и данное произведеніе P будетъ увеличиваться. Сдѣлавъ то же самое со всякими двумя изъ остальныхъ сомножителей произведенія P, заключаемъ, что P каждый разъ будетъ увеличиваться и слѣдовательно достигнетъ maximum'а лишь тогда, когда всѣ его сомножители станутъ равными.

Если число сомножителей произведенія P нечетное, напримѣръ $2n+1$, то, сдѣлавъ каждую пару изъ $2n$ сомножителей равными, заключаемъ, что и оставшійся сомножитель долженъ имъ равняться, иначе сумма всѣхъ сомножителей произведенія P не сохраняла бы постояннаго значенія; слѣдовательно произведеніе P опять достигаетъ maximum'а только тогда, когда всѣ его сомножители станутъ равными.

Доказанная теорема примѣнима очевидно къ рѣшенію слѣдующаго вопроса:

Данное число a раздѣлить на n частей такъ, чтобы ихъ произведеніе было наибольшее; для этого число a надо раздѣлить на равныя части, такъ что искомый maximum есть $\left(\frac{a}{n}\right)^n$.

Примѣръ. Изъ всѣхъ треугольниковъ даннаго периметра $2p$ опредѣлить тотъ, который имѣетъ наибольшую площадь.

Рѣшеніе. Обозначивъ стороны искомаго треугольника чрезъ x, y и z, а площадь его чрезъ S, получимъ

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

По предыдущему произведеніе $(p-x)(p-y)(p-z)$, сумма сомножителей котораго есть постоянная величина p [ибо $p-x+$ $+p-y+p-z=3p-(x+y+z)=3p-2p=p$], будетъ maximum, когда $p-x=p-y=p-z$, откуда $x=y=z$; слѣдовательно искомый треугольникъ — равносторонній.

§ 47. Maximum произведенія вида $x^m y^n$ при условіи, что сумма $x+y$ постоянная величина. Положимъ, что имѣемъ произведеніе вида $x^m y^n$, гдѣ показатели m и n числа постоянныя, цѣлыя и положительныя, при условіи, что и сумма перемѣнныхъ x и y есть нѣкоторая постоянная величина a; требуется опредѣлить наибольшее значеніе этого произведенія. Произведеніе $x^m y^n$ очевидно будетъ имѣть maximum при тѣхъ же значеніяхъ x и y, при которыхъ выраженіе $\left(\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{n}\right)^n$ будетъ имѣть maximum, ибо m и n величины постоянныя. Замѣчая же, что сумма всѣхъ множителей послѣдняго выраженія есть величина постоянная [ибо $\frac{x}{m} \cdot m+\frac{y}{n} \cdot n=x+y=a$], мы по § 46 заключаемъ, что это произведеніе будетъ имѣть maximum, когда всѣ множители его равны, т. е. когда $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$; слѣдовательно произведеніе $x^m y^n$ при условіи, что сумма $x+y$ равна постоянной величинѣ, будетъ имѣть maximum, когда множители x и y пропорціональны показателямъ m и n, съ которыми они входятъ въ произведеніе, т. е. когда

$$x:y=m:n.$$

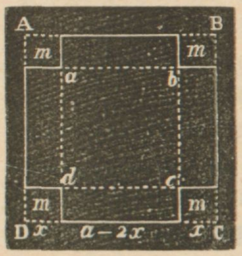
Примѣры.

1) Изъ квадратнаго листа $ABCD$ (чертежъ 13) вырѣзать въ его углахъ такіе равные угловые квадраты m, чтобы остаточный листъ, согнутый по прямымъ ab, bc, cd и da, составилъ коробку наибольшей емкости.

Рѣшеніе. Если k есть сторона даннаго квадрата, x — сторона вырѣзанныхъ квадратовъ, v — объемъ искомой коробки, то

$$v=x(k-2x)^2.$$

Для опредѣленія maximum'а этого выраженія мы можемъ опредѣлить maximum выраженія $2x.(k-2x)^2$, которое можно разсматривать какъ произведеніе двухъ множителей $2x$ и $(k-2x)$, возвышенныхъ соотвѣтственно въ степени 1 и 2; замѣчая же, что сумма множителей $2x$ и $k-2x$ послѣдняго выраженія равна постоянной величинѣ k, мы заключаемъ, что v имѣетъ maximum, когда



Черт. 13.

$$\frac{2x}{1}=\frac{k-2x}{2},\text{ откуда } x=\frac{k}{6},$$

т. е. объемъ коробки будетъ наибольшій, когда сторона каждаго изъ вырѣзанныхъ угловыхъ квадратовъ равна $\frac{1}{6}$ стороны даннаго квадрата, причемъ maximum $v=\frac{2}{27}k^3$.

2) Опредѣлить высоту цилиндра, который при данной полной поверхности имѣетъ наибольшій объемъ.

Рѣшеніе. Положимъ, что данная полная поверхность цилиндра есть $2\pi a^2$ (т. е. равновелика удвоенной площади круга радіуса a), x — радіусъ основанія, h — высота цилиндра; тогда

$$2\pi x^2+2\pi xh=2\pi a^2,\text{ откуда } h=\frac{a^2-x^2}{x};$$

слѣдовательно объемъ v цилиндра будетъ

$$v=\pi x^2h=\pi.x(a^2-x^2).$$

Чтобы опредѣлить maximum выраженія $x(a^2-x^2)$, опредѣлимъ maximum его квадрата $x^2(a^2-x^2)^2$, который можно разсматривать какъ произведеніе двухъ множителей x^2 и (a^2-x^2), возвышенныхъ соотвѣтственно въ степени 1 и 2; а какъ сумма множителей x^2 и a^2-x^2 есть величина постоянная, то $x^2(a^2-x^2)^2$, а слѣдовательно и объемъ v будетъ имѣть maximum когда $\frac{x^2}{1}=\frac{a^2-x^2}{2}$, откуда $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$; слѣдовательно $h=\frac{a^2-x^2}{x}=\frac{2a}{\sqrt{3}}=2x$, т. е. высота искомаго цилиндра равна діаметру его основанія, причемъ maximum $v=\frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

3) Въ шаръ радіуса r вписать цилиндръ наибольшаго объема.

Рѣшеніе. Если x есть радіусъ основанія искомаго цилиндра, y — его высота, то его объемъ $v=\pi x^2y$; а какъ $r^2=x^2+\frac{y^2}{4}$, откуда $y=2\sqrt{r^2-x^2}$, то

$$v=2\pi x^2\sqrt{r^2-x^2}=2\pi\sqrt{(x^2)^2.(r^2-x^2)};$$

слѣдовательно по вышеизложенному v имѣетъ maximum при

$$\frac{x^2}{2} = \frac{r^2 - x^2}{1}, \text{ откуда } x = \frac{r\sqrt{6}}{3} \text{ и}$$

$$\text{maximum } v = 2\pi \cdot \frac{2}{3} r^2 \sqrt{r^2 - \frac{2}{3} r^2} = \frac{4}{9} \pi r^3 \sqrt{3}.$$

4) Шаръ освѣщается свѣтящеюся точкою, находящеюся на разстояніи d отъ его центра; каковъ долженъ быть радіусъ шара, чтобы освѣщенная часть его поверхности была наибольшая?

Отвѣтъ. Искомый радіусъ $= \frac{2}{3} d$.

5) Опредѣлить высоту и радіусъ основанія конуса, который при данной боковой поверхности имѣетъ наибольшій объемъ.

Рѣшеніе. Обозначивъ чрезъ x радіусъ основанія искомаго конуса, чрезъ h — его высоту, чрезъ y — объемъ и полагая, что данная боковая поверхность равна πa^2, получимъ $y = \frac{\pi x^2 h}{3}$. Кромѣ того имѣемъ $\pi a^2 = \pi x\sqrt{h^2 + x^2}$, откуда $h = \frac{\sqrt{a^4 - x^4}}{x}$; слѣдовательно $y = \frac{\pi}{3} \cdot x\sqrt{a^4 - x^4} = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{x^2(a^4 - x^4)}$.

Для опредѣленія maximum подкореннаго количества, опредѣлимъ maximum его квадрата $x^4(a^4 - x^4)^2$; замѣчая же, что сумма множителей x^4 и $a^4 - x^4$ равна постоянной величинѣ a^4, мы заключаемъ, что y имѣетъ maximum, когда $\frac{x^4}{1} = \frac{a^4 - x^4}{2}$, откуда $x = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}$, а слѣдовательно $h = a\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.

6) Изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса r, опредѣлить тотъ, который имѣетъ наибольшую площадь.

Рѣшеніе. Если x есть одна изъ равныхъ сторонъ искомаго треугольника, то его высота $h = \frac{x^2}{2r}$, значитъ его площадь

$$S = \frac{1}{4r^2} \cdot x^3\sqrt{4r^2 - x^2} = \frac{1}{4r^2} \cdot \sqrt{(x^2)^3 \cdot (4r^2 - x^2)};$$

слѣдовательно S имѣетъ maximum при условіи

$$\frac{x^2}{3} = \frac{4r^2 - x}{1}, \text{ откуда } x = r\sqrt{3},$$

т. е. искомый треугольникъ — равносторонній.

7) Изъ даннаго круга радіуса r вырѣзать секторъ столькихъ градусовъ, чтобы объемъ конуса, получаемаго при свертываніи остаточной части круга, имѣлъ наибольшую величину.

Рѣшеніе. Производящая искомаго конуса очевидно равна r; слѣдовательно, если радіусъ его основанія есть x, то его объемъ

$$v = \frac{\pi}{3} x^2 \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{(x^2)^2 \cdot (r^2 - x^2)}\,;$$

maximum v имѣетъ мѣсто при $\frac{x^2}{2} = r^2 - x^2$, откуда $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$, причемъ

$$\text{maximum } v = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{3} r^2 \sqrt{r^2 - \frac{2}{3} r^2} = \frac{2}{27} \pi r^3 \sqrt{3}.$$

Для опредѣленія числа градусовъ вырѣзаемаго сектора, обозначимъ длину его дуги чрезъ y, тогда

$$2\pi x = 2\pi r - y, \text{ откуда } y = 2\pi(r - x) = 2\pi r\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right);$$

значитъ число градусовъ этой дуги есть $360^0\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

8) Какой изъ равнобедренныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса r, даетъ при вращеніи его около основанія тѣло наибольшаго объема?

Отвѣтъ. Высота искомаго треугольника $h = \frac{5}{3} r$.

9) Въ шаръ радіуса r вписать конусъ, имѣющій наибольшую боковую поверхность.

Отвѣтъ. Высота искомаго конуса $h = \frac{4}{3} r$.

10) Въ шаръ радіуса r вписать конусъ, имѣющій наибольшій объемъ.

Отвѣтъ. Высота искомаго конуса $h = \frac{4}{3} r$.

11) Опредѣлить радіусъ r такого шара, чтобы сегментъ его, имѣющій выпуклую поверхность πa^2, имѣлъ наибольшій объемъ.

Рѣшеніе. Если высота сегмента есть x, то его объемъ $v = \pi x^2\left(r - \frac{x}{3}\right)$; но по условію имѣемъ

$$\pi a^2 = 2\pi r x, \text{ откуда } x = \frac{a^2}{2r}; \text{ слѣдовательно}$$

$$v = \frac{\pi a^2}{4r^2}\left(r - \frac{a^2}{6r}\right) = \frac{\pi a^2}{4} \cdot \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a^2}{6r^2}\right).$$

Чтобы найти maximum выраженія $\frac{1}{r}\left(1 - \frac{a^2}{6r^2}\right)$, можно опредѣлить maximum его квадрата $\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{6r^2}\right)^2$ или же выраженія $\frac{a^2}{6r^2}\left(1 - \frac{a^2}{6r^2}\right)^2$, ибо $\frac{a^2}{6}$ — постоянное количество; слѣдовательно maximum имѣетъ мѣсто, когда

$$\frac{a^2}{6r^2} : \left(1 - \frac{a^2}{6r^2}\right) = 1 : 2, \text{ откуда } r = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

При такомъ значенiи радiуса высота сегмента $x = \frac{a^2}{2r} = \frac{a}{\sqrt{2}} = r$, т. е. искомый сегментъ есть полушарiе.

12) На столѣ находится малый плоскiй предметъ m, освѣщаемый свѣчей и отстоящiй отъ нея на разстоянiи d. Опредѣлить высоту, на которой должно находиться пламя свѣчи надъ столомъ, чтобы освѣщенiе даннаго предмета была наибольшее.

Рѣшенiе. Обозначимъ яркость цвѣта данной свѣчи при единицѣ разстоянiя пламени отъ освѣщаемаго предмета и при вертикальномъ направленiи лучей чрезъ a, уголъ наклоненiя лучей, испускаемыхъ свѣчею, къ поверхности освѣщаемаго предмета чрезъ α, высоту пламени свѣчи надъ столомъ чрезъ x, яркость свѣчи при этихъ данныхъ и при разстоянiи d основанiя свѣчи отъ предмета m чрезъ y; тогда, зная, что освѣщенiе пропорцiонально $\sin\alpha$, но обратно-пропорцiонально квадрату разстоянiя пламени отъ освѣщаемаго предмета, получимъ

$$y = \frac{a\sin\alpha}{d^2 + x^2} = \frac{a\sin\alpha}{d^2(1+tg^2\alpha)} = \frac{a}{d^2}.\ \sin\alpha\ (1 - \sin^2\alpha).$$

Чтобы опредѣлить maximum произведенiя $\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha)$, можно опредѣлить maximum его квадрата $\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)^2$; замѣчая же, что здѣсь сумма множителей $\sin^2\alpha$ и $1 - \sin^2\alpha$ постоянная величина именно 1, заключаемъ, что

maximum имѣетъ мѣсто при условiи $\frac{\sin^2\alpha}{1} = \frac{1-\sin^2\alpha}{2}$, откуда

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ т. е. } \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ и слѣдовательно } x = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Иногда вопросъ объ опредѣленiи minimum (или maximum) функцiи $f(x)$ полезно свести на вопросъ объ опредѣленiи maximum (или minimum) обратной функцiи $\frac{1}{f(x)}$ (и обратно).

Приведемъ примѣры.

13) Около шара радiуса r описать конусъ наименьшаго объема.

Рѣшенiе. Если x есть высота искомаго конуса, y — радiусъ его основанiя, то его объемъ $v = \frac{\pi x y^2}{3}$; при помощи же подходящаго чертежа найдемъ, что

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{\sqrt{x(x-2r)}}, \text{ откуда } y = \frac{rx}{\sqrt{x(x-2r)}}; \text{ слѣдовательно}$$

$$v = \frac{\pi x^2 r^2}{3(x-2r)} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{x^2}{x-2r}.$$

Для опредѣленія minimum выраженія $\frac{x^2}{x-2r}$ достаточно опредѣлить maximum обратнаго выраженія $\frac{x-2r}{x^2}$, равнаго $\frac{1}{x}\left(1-\frac{2r}{x}\right)$, или же выраженія $\frac{2r}{x}\left(1-\frac{2r}{x}\right)$, ибо множитель $2r$ постоянный, а для этого по примѣру 14 § 45 должно быть $\frac{2r}{x}=1-\frac{2r}{x}$, откуда $x=4r$ (а слѣдовательно $y=r\sqrt{2}$), и потому

$$\text{minimum } v=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{16r^2}{2r}=\frac{8\pi r^3}{3}.$$

Этотъ результатъ весьма интересенъ: онъ показываетъ, что высота искомаго конуса вдвое больше діаметра шара, объемъ его вдвое больше объема шара, площадь его основанія вдвое больше площади большого круга даннаго шара, ибо эта площадь есть $\pi y^2=\frac{\pi r^2x^2}{x(x-2r)}=\frac{16\pi r^4}{4r.2r}=2\pi r^2$; наконецъ, полная его поверхность вдвое больше поверхности шара, ибо эта поверхность есть $\pi y^2+\pi y\sqrt{x^2+y^2}=8\pi r^2$.

14) Конусъ касается шара радіуса r и его основаніе проходитъ чрезъ центръ; опредѣлить minimum объема этого конуса.

Рѣшеніе. Объемъ даннаго конуса есть $v=\frac{\pi x^2y}{3}$, гдѣ x радіусъ основанія конуса, y его высота. При помощи подходящаго чертежа найдемъ, что

$$\frac{x}{r}=\frac{y}{\sqrt{y^2-r^2}},\ \text{откуда } x=\frac{ry}{\sqrt{y^2-r^2}};\ \text{слѣдовательно } v=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{y^3}{y^2-r^2}.$$

Чтобы опредѣлить minimum v, опредѣлимъ minimum дроби $\frac{y^3}{y^2-r^2}$ или maximum обратной дроби $\frac{y^2-r^2}{y^3}$, равной $\frac{1}{y}\left(1-\frac{r^2}{y^2}\right)$, или ея квадрата. Этотъ maximum имѣетъ мѣсто при условіи $\frac{r^2}{y^2}:\left(1-\frac{r^2}{y^2}\right)=$ $=1:2$, откуда $y=r\sqrt{3}$, о слѣдовательно

$$\text{mimimum } v=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{3r^3\sqrt{3}}{3r^2-r^2}=\frac{\pi r^3\sqrt{3}}{2}.$$

§ 48. Maximum или minimum функціи вида $y=ax+\frac{b}{x}$. Полагая, что здѣсь a и b положительныя величины, получимъ

$$y=(\sqrt{ax})^2+\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right)^2=\left(\sqrt{ax}-\sqrt{\frac{b}{x}}\right)^2+2\sqrt{ab},$$

откуда видно, что при всякомъ положительномъ значеніи x будетъ

$$y\geqq 2\sqrt{ab},$$

а именно $y=2\sqrt{ab}$ только тогда, когда $\sqrt{ax}=\sqrt{\frac{b}{x}}$, т. е. когда

$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$; при всѣхъ же другихъ положительныхъ значеніяхъ x будетъ: $y > 2\sqrt{ab}$; слѣдовательно $2\sqrt{ab}$ есть minimum данной функціи y при $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

При отрицательныхъ значеніяхъ x, напримѣръ при $x = -x'$, будемъ имѣть

$$y = (\sqrt{-ax'})^2 + \left(\sqrt{-\frac{b}{x'}}\right)^2 = \left(\sqrt{-ax'} - \sqrt{-\frac{b}{x'}}\right)^2 + 2\sqrt{(-1)^2 ab}$$

$$\text{или } y = \left(i\sqrt{ax'} - i\sqrt{\frac{b}{x'}}\right)^2 - 2\sqrt{ab} = -\left(\sqrt{ax'} - \sqrt{\frac{b}{x'}}\right)^2 - 2\sqrt{ab},$$

откуда видно, что при всякомъ положительномъ x', а слѣдовательно при всякомъ отрицательномъ x будетъ

$$y \leqq -2\sqrt{ab},$$

а именно $y = -2\sqrt{ab}$, когда $\sqrt{ax'} = \sqrt{\frac{b}{x'}}$, т. е. когда $x = -$ $-x' = -\sqrt{\frac{b}{a}}$; при всѣхъ же прочихъ отрицательныхъ значеніяхъ x будетъ $y < -2\sqrt{ab}$; слѣдовательно $-2\sqrt{ab}$ есть maximum данной функціи.

Если коэффиціенты a и b данной функціи величины отрицательныя, напримѣръ, если $y = -ax - \frac{b}{x} = -\left(ax + \frac{b}{x}\right)$, то въ алгебраическомъ смыслѣ наименьшему значенію двучлена въ скобкахъ соотвѣтствуетъ наибольшее значеніе функціи y и наоборотъ; слѣдовательно при отрицательныхъ коэффиціентахъ будетъ

$$\text{maximum } y = 2\sqrt{ab} \quad \text{при} \quad x = \sqrt{\frac{b}{a}}\,*),$$

$$\text{minimum } y = -2\sqrt{ab} \quad \text{при} \quad x = -\sqrt{\frac{b}{x}}\,*).$$

Примѣры.

I) Число a разложить на такіе два множителя, чтобы ихъ сумма была наименьшая.

Рѣшеніе. Если одинъ множитель даннаго числа a есть x, то другой будетъ $\frac{a}{x}$, слѣдовательно ихъ сумма, которую обозначимъ чрезъ y, будетъ $y = x + \frac{a}{x}$, а потому по доказанному

$$\text{minimum } y = 2\sqrt{a} \quad \text{при} \quad x = \sqrt{a},$$

*) Въ этихъ результатахъ подъ a и b надо уже понимать абсолютныя значенія этихъ величинъ, какъ это видно изъ самаго хода изложенія.

т. е. данное число должно быть разложено на два равныхъ множителя.

2) Изъ всѣхъ прямоугольниковъ данной площади s опредѣлить тотъ, который имѣетъ наименьшій периметръ.

Рѣшеніе. Пусть будетъ y периметръ искомаго прямоугольника, x — его высота; тогда

$$s = x\left(\frac{y}{2} - x\right), \text{ откуда } y = 2x + \frac{2s}{x};$$

слѣдовательно minimum $y = 2\sqrt{2.2s} = 4\sqrt{s}$ при $x = \sqrt{s}$, т. е. искомый прямоугольникъ есть квадратъ.

3) Опредѣлить прямоугольный треугольникъ, который при данной высотѣ h имѣетъ наименьшую гипотенузу.

Рѣшеніе. Обозначивъ искомую гипотенузу чрезъ y, одинъ изъ ея отрѣзковъ, опредѣляемыхъ высотою, чрезъ x, получимъ

$$h^2 = x(y - x), \text{ откуда } y = x + \frac{h^2}{x};$$

слѣдовательно minimum $y = 2h$ при $x = h$, т. е. искомый треугольникъ равнобедренный.

4) Изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ данной площади s опредѣлить тотъ, въ которомъ равныя стороны имѣютъ наименьшую величину.

Рѣшеніе. Полагая, что x есть основаніе искомаго треугольника, y одна изъ равныхъ сторонъ его, получимъ

$$s = \frac{x}{2}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} \text{ откуда } y = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{4s^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}z + \frac{4s^2}{z}},$$

гдѣ $z = x^2$; слѣдовательно

$$\text{minimum } y = \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 4s^2}} = \sqrt{2s} \text{ при } z = \sqrt{16s^2}, \text{ т. е. при } x =$$

$$= \sqrt[4]{16s^2} = 2\sqrt{s}.$$

5) Изъ n одинаковыхъ гальваническихъ элементовъ требуется составить смѣшанное соединеніе такъ, чтобы сила тока была наибольшая.

Рѣшеніе. Положимъ, что для полученія наивыгоднѣйшаго дѣйствія тока данное число элементовъ надо разбить на m группъ, въ каждой слѣдовательно по $\frac{n}{m}$ элементовъ, гдѣ m конечно долженъ быть дѣлителемъ числа n. Если эти $\frac{n}{m}$ элементовъ соединимъ параллельно, а затѣмъ получаемыя m группъ соединимъ послѣдовательно, то сила тока J, какъ извѣстно изъ физики, выразится такъ:

$$J = \frac{mE}{\frac{m^2w}{n} + r} = \frac{E}{\frac{mw}{n} + \frac{r}{m}},$$

гдѣ E — электровозбудительная сила каждаго элемента, выраженная въ вольтахъ, w — внутреннее сопротивленіе каждаго элемента, r — внѣшнее сопротивленіе, выраженныя въ омахъ, и гдѣ очевидно $\frac{m^2w}{n}$ есть внутреннее сопротивленіе всей батареи. Ясно, что J будетъ имѣть maximum, когда знаменатель $\frac{mw}{n} + \frac{r}{m}$ будетъ имѣть minimum; но

$$\frac{mw}{n} + \frac{r}{m} = \left(\sqrt{\frac{mw}{n}} - \sqrt{\frac{r}{m}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{wr}{n}},$$

гдѣ только m перемѣнная величина; слѣдовательно по предыдущему $\frac{mw}{n} + \frac{r}{m}$ будетъ имѣть minimum при $\frac{mw}{n} = \frac{r}{m}$ или при $\frac{m^2w}{n} = r$, т. е. J будетъ имѣть maximum, когда внутреннее сопротивленіе батареи равно внѣшнему, и maximum имѣетъ мѣсто при $m = \sqrt{\frac{rn}{w}}$.

Если здѣсь радикалъ не окажется цѣлымъ числомъ, то за m придется конечно взять дѣлителя числа n, наиболѣе близко подходящаго къ значенію корня $\sqrt{\frac{rn}{w}}$. Такъ, если $E = 1$, $w = 2$, $r = 10$, $n = 12$, то $m = \sqrt{60} = 7{,}74\ldots$; а какъ дѣлители числа 12 суть 1, 2, 3, 4, 6 и 12, изъ коихъ дѣлитель 6 наиближе подходитъ къ числу 7,74..., то приходится принять $m = 6$, а тогда $J = \frac{1}{\frac{6.2}{12} + \frac{10}{6}} = \frac{3}{8}$ ампера.

(См. 2-ую стран. обложки).

5. **Приложеніе Алгебры къ Геометріи** для средн. учебн. заведеній. 8-ое изд. 1904 г. Цѣна **40** коп.

Четвертое изданіе было одобрено Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. въ качествѣ **учебнаго пособія** для VII (дополнительнаго) класса реальныхъ училищъ.

6. **Элементарная Алгебра** для среднихъ учебныхъ заведеній. 3-ье изд. 1893 г. Цѣна **1** руб. **25** коп.

Второе изданіе допущено Ученымъ Комитетомъ Мин. Народн. Просв. въ качествѣ **учебнаго пособія** для мужскихъ и женскихъ гимназій, учительскихъ семинарій и учительскихъ институтовъ.

На 1-ое изданіе этой книги имѣются два подробныхъ и весьма лестныхъ отзыва: одинъ отъ нашего покойнаго академика В. Буняковскаго (въ автографической рукописи), другой — помѣщенный въ Педагогическомъ Сборникѣ, издаваемомъ при Главномъ Управленіи Военно-Учебныхъ заведеній (книжка X, октябрь, 1878 г.).

Отзывъ академика В. Буняковскаго, послѣ перечня статей, указываетъ на полноту содержанія этой книги, на логическую послѣдовательность статей, на ясность и простоту изложенія и оканчивается словами:

„По всей справедливости можно смѣло рекомендовать изданное г. Блюмбергомъ руководство какъ одно изъ полезнѣйшихъ на русскомъ языкѣ пособій для изученія Алгебры“.

Рецензія въ вышеприведенномъ Педагогическомъ Сборникѣ, послѣ перечня статей, говоритъ:

„Алгебра г. Блюмберга совершенно соотвѣтствуетъ общепринятымъ для среднихъ учебныхъ заведеній программамъ. Статьи всѣхъ отдѣловъ, при необходимой въ учебникѣ сжатости, достаточно полны и подробны относительно своего назначенія. Простота и яснoть составляютъ одну изъ отличительныхъ чертъ характера изложенія“. Рецензія оканчивается словами:

„Мы признаемъ Алгебру г. Блюмберга пріятнымъ пріобрѣтеніемъ въ нашей учебной математической литературѣ и полезнымъ руководствомъ для среднихъ учебныхъ заведеній“.

7. **Элементарная Механика** (составили Я. Блюмбергъ и Э. Михельсонъ, инспекторъ Череповецкаго реальнаго училища), 1880 г. Цѣна **1** руб. **50** коп.

8. **Учебникъ элементарной Геометріи** для средн. учебныхъ заведеній, 1889 г. Цѣна **1** руб.

9. **Сборникъ тригонометрически - геометрическихъ задачъ** для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, 1893 г. Цѣна **40** коп.

ГЛАВНЫЕ СКЛАДЫ: С.-Петербургъ, книжный магазинъ М. Стасюлевича, Вас. Остр., 5-я линія, № 28, и книжный магазинъ Н. П. Карбасникова, Литейный Просп. № 46.