Tallinna Tehnikaülikool
Mehhatroonikainstituut

Jüri Kirs

Kodutöö D-16

Kahe vabadusega süsteemide lahendamine Lagrange'i teist tüüpi võrrandite abil

Tallinn 2004

ISBN 9985-894-80-4

Kodutöö D-16

Kahe vabadusega süsteemide lahendamine Lagrange'i teist tüüpi võrrandite abil

Mehaanikaline süsteem koosneb kehadest 1-6 (vt. järgnevaid jooniseid). Süsteemi paneb liikuma kas konstantne jõud $\vec{P}$, jõupaar konstantse momendiga M või raskusjõud. Lahendada süsteem Lagrange'i teist tüüpi võrrandite abil ja leida iga variandi joonise juures toodud suurused. Otsitavateks on tavaliselt kas süsteemi mingi punkti kiirendus või mingi keha nurkkiirendus. Variantides 4, 13, 17 ja 24 tuleb leida ainult süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid, neid lahendama aga ei pea.

Lahendamisel tuleb kasutada just neid üldistatud koordinaate, mis on vastaval joonisel ära näidatud. Noole suund näitab seejuures alati vastava üldistatud koordinaadi positiivset suunda. Koordinaadid x ja φ on alati absoluutsed koordinaadid, ξ on alati relatiivne koordinaat. Koordinaati x mõõdetakse paigaloleva teljestiku suhtes, mis on seotud ümbritseva ruumiga, selle nullpunkt ei ole alati ära näidatud.

Mõningates variantides tuleb arvestada ka liugehõõrdejõudu, mõningates aga viskoosset takistust. Need on ära toodud iga variandi juures.

Lisamärkusi:

1. Suurused i_2 ja i_3 on süsteemi kehade 2 ja 3 inertsiraadiused keha masskeset läbiva telje suhtes. Need kettad või silindrid, millede jaoks ei ole antud inertsiraadiusi, tuleb lugeda ühtlasteks ketasteks või silindriteks.

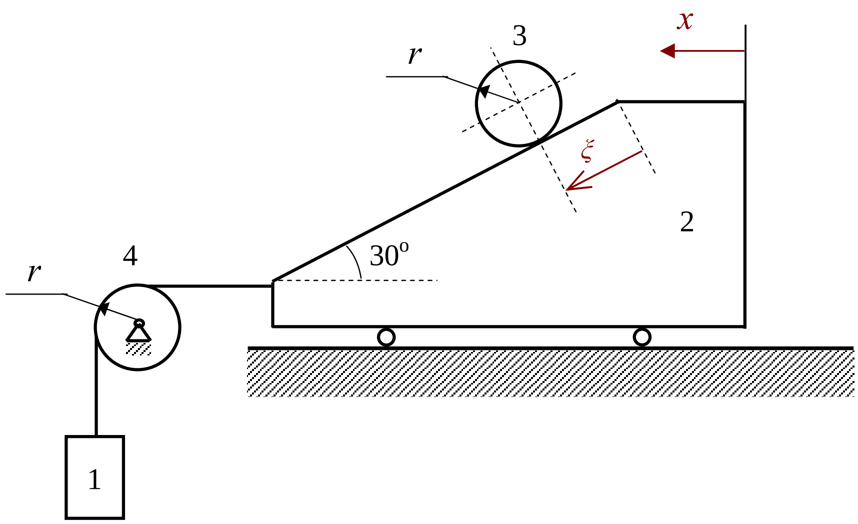
2. Vardad ja vändad lugeda ühtlasteks peenikesteks varrasteks.

3. Veeremine toimub kõikjal ilma libisemata.

4. Veeretakistust ning hõõrdumist telje laagrites ei arvestata. Niidid ja rihmad on kaalutud ning venimatud.

Kodutöö D-16 joonised

1. variant



$m_1 = 2m$ kg

$m_2 = 6m$ kg

$m_3 = m$ kg

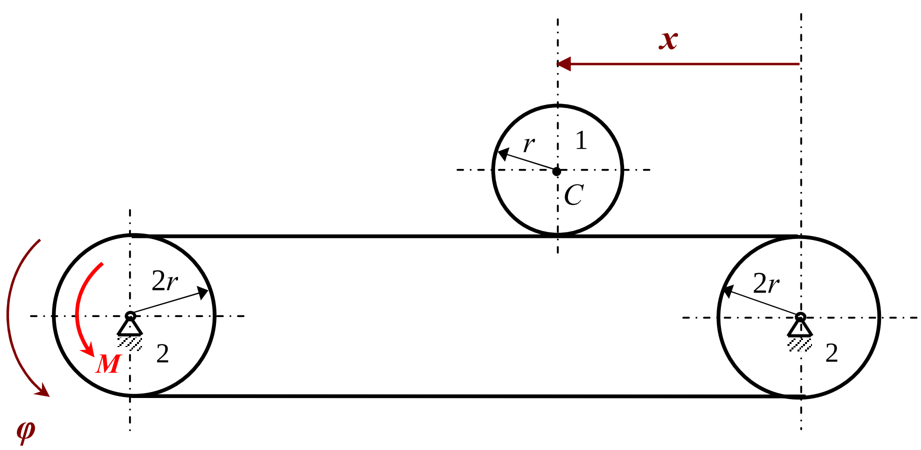
$m_4 = m$ kg

$q_1 = x; \quad q_2 = \xi$

$a_1 = ? \quad \alpha_3 = ?$

---

2. variant



$m_1 = m$ kg

$m_2 = 3m$ kg

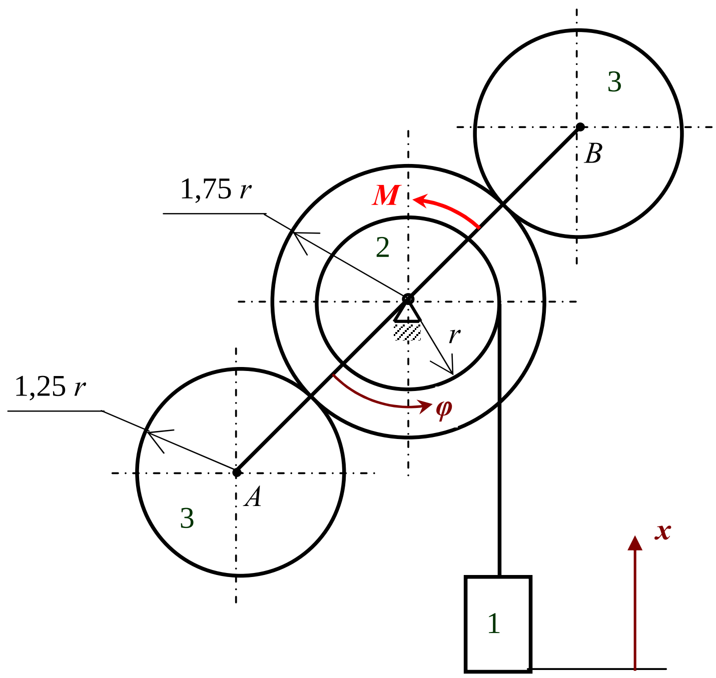
M;

$M = \mathrm{const}$

$q_1 = \varphi; \; q_2 = x$

$\alpha_2 = ? \quad a_C = ?$

3. variant



$m_1 = m$ *kg*

$m_2 = 3m$ *kg*

$m_3 = 2m$ *kg*

$i_2 = r\sqrt{2}$

M;

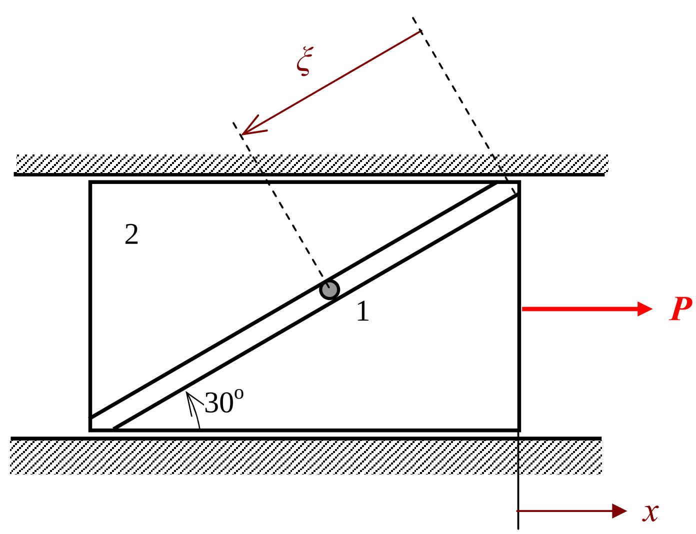
$M = \mathrm{const}$

$q_1 = \varphi$; $q_2 = x$

$a_1 = ?$ $\alpha_{AB} = ?$

Märkus: *keha 2 on kaksikplokk, mille kaks ketast on teineteisega jäigalt ühendatud.*

4. variant



$m_1 = m$ *kg*

$m_2 = 4m$ *kg*

P; $P = \mathrm{const}$

Viskoosse takistuse tegur = b

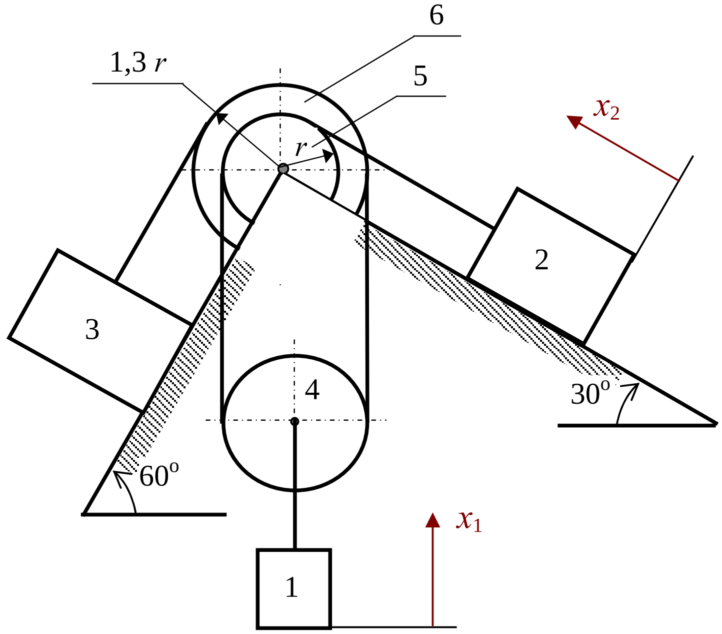
Liugehõõrdetegur = 0

$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

Süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid = ?

Märkus**:** *kuulikese*1 *liikumisel kanalis arvestada ka viskoosset takistust* $\vec{R}$, *mis võrdub* $\vec{R} = -b\vec{v}_r$, kus $\vec{v}_r$ *on kuulikese relatiivne kiirus ja b on viskoosse takistuse tegur.*

5. variant



$m_1 = m$ kg

$m_2 = 2m$ kg

$m_3 = 4m$ kg

$m_4 = 2m$ kg

$m_5 = 2m$ kg

$m_6 = 2m$ kg

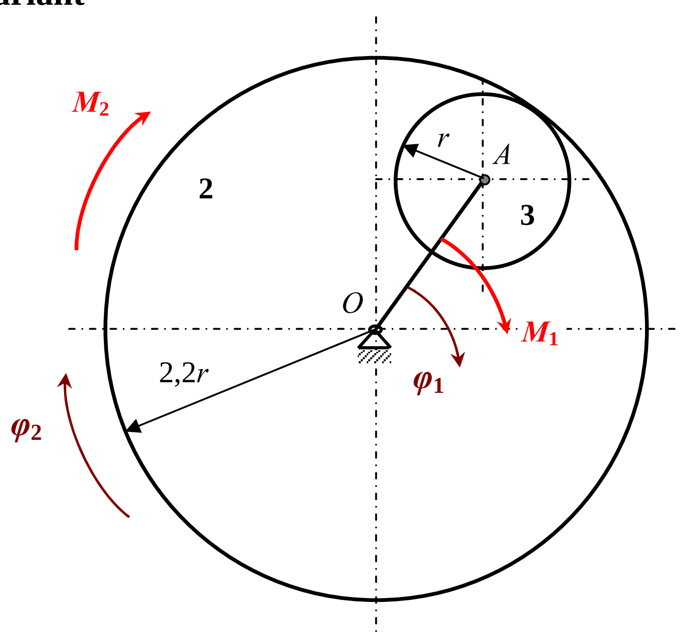
Libisemishõõrdetegur = 0,3

$q_1 = x_1$; $q_2 = x_2$

$a_2 = ?$ $a_3 = ?$

Märkus: *ketaste 5 ja 6 teljed on küll ühisel sirgel, kuid need kettad pöörlevad teineteisest täiesti sõltumatult.*

6. variant



$m_1 = m$ *kg*

$m_2 = 2m$ *kg*

$m_3 = 3m$ *kg*

keha 1 = varras OA

$i_2 = 2r$

M_1; $M_1 = \text{const}$

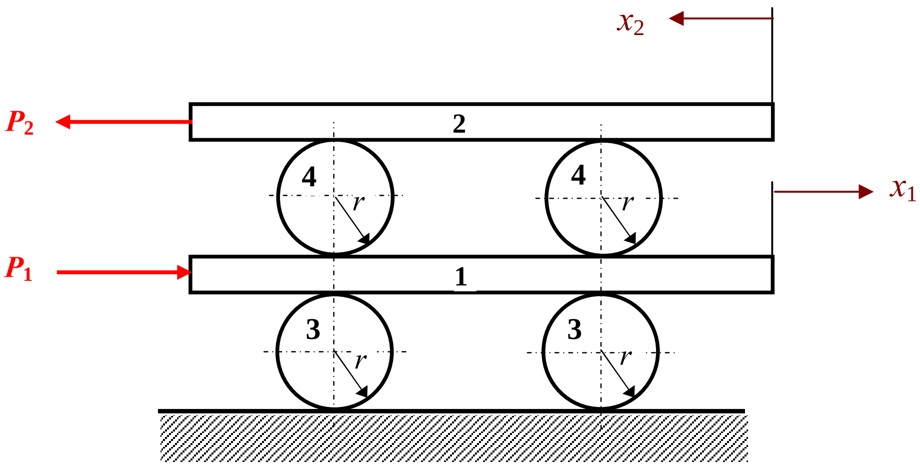
M_2; $M_2 = \text{const}$

$q_1 = \varphi_1$; $q_2 = \varphi_2$

$\alpha_1 = ?$ $\alpha_2 = ?$

Märkus: *mehhanism asub horisontaaltasapinnal.*

7. variant

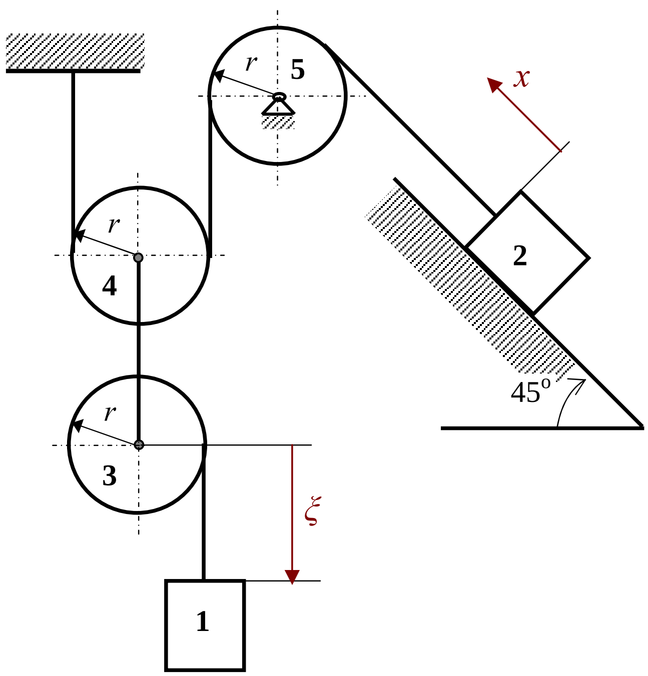


$m_1 = 3m \ kg$
$m_2 = 3m \ kg$
$m_3 = m \ kg$
$m_4 = m \ kg$
P_1 ; $P_1 = \text{const}$
P_2 ; $P_2 = \text{const}$
$q_1 = x_1$; $q_2 = x_2$

$a_1 = ?$ $a_2 = ?$

---

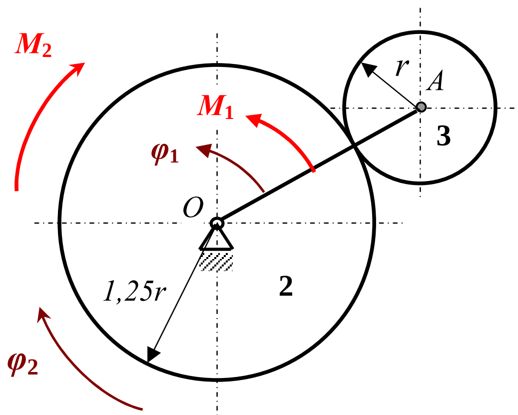
8. variant



$m_1 = m \ kg$
$m_2 = 2m \ kg$
$m_3 = 2m \ kg$
$m_4 = 2m \ kg$
$m_5 = 2m \ kg$
Liugehõõrdetegur = 0,2
$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

$a_1 = ?$ $a_2 = ?$

9. variant



$m_1 = m\ kg$

$m_2 = 2m\ kg$

$m_3 = 3m\ kg$

keha 1 = varras OA

M_1; $M_1 = \text{const}$

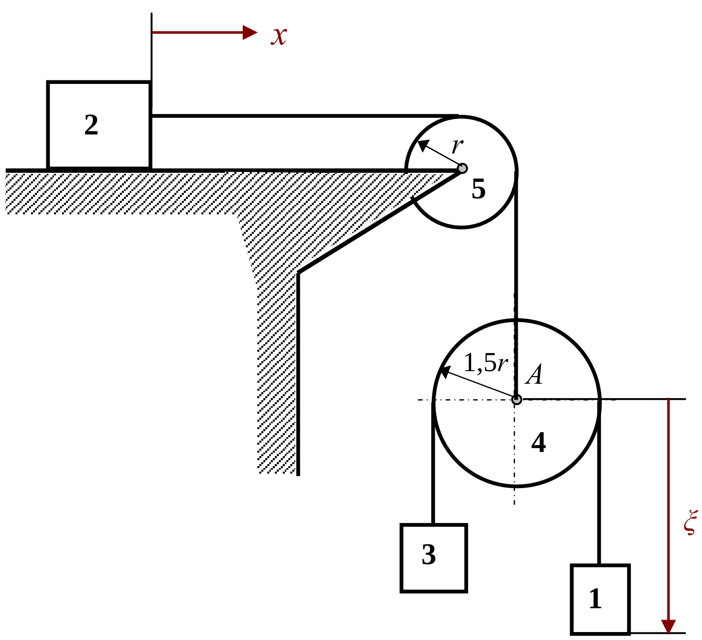
M_2; $M_2 = \text{const}$

$q_1 = \varphi_1$; $q_2 = \varphi_2$

$\alpha_1 = ?$ $\alpha_2 = ?$

Märkus: *mehhanism asub horisontaaltasapinnal.*

10. variant



$m_1 = 2m\ kg$

$m_2 = 2m\ kg$

$m_3 = m\ kg$

$m_4 = 2m\ kg$

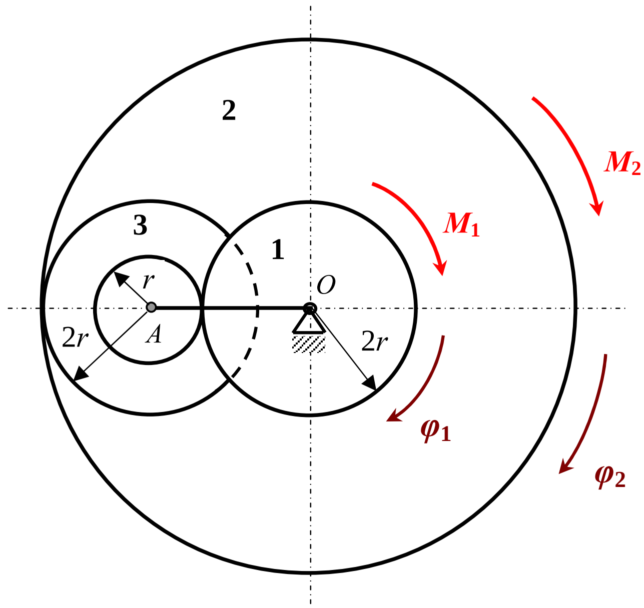
$m_5 = m\ kg$

Liugehõõrdetegur = 0,2

$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

$a_1 = ?$ $a_2 = ?$

11. variant



$m_1 = m \;\; kg$

$m_2 = 3m \;\; kg$

$m_3 = 2m \;\; kg$

$m_4 = m \;\; kg$

keha 3 = kahe raadiusega

keha 4 = varras OA

$i_2 = 4r$

$i_3 = r\sqrt{2}$

M_1 ; $M_1 = \text{const}$

M_2 ; $M_2 = \text{const}$

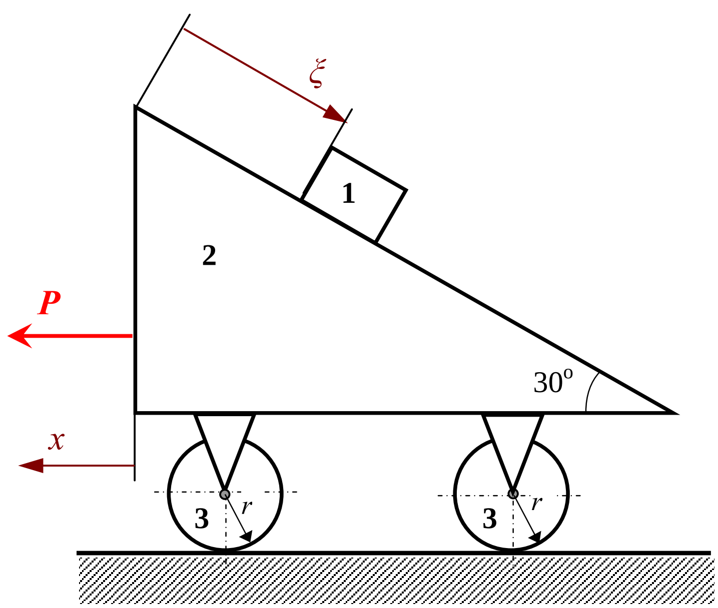
$q_1 = \varphi_1$; $q_2 = \varphi_2$

$\alpha_1 = ?$ $\alpha_2 = ?$

Märkus: *mehhanism asub horisontaaltasapinnal*

---

12. variant



$m_1 = 2m \;\; kg$

$m_2 = 5m \;\; kg$

$m_3 = m \;\; kg$

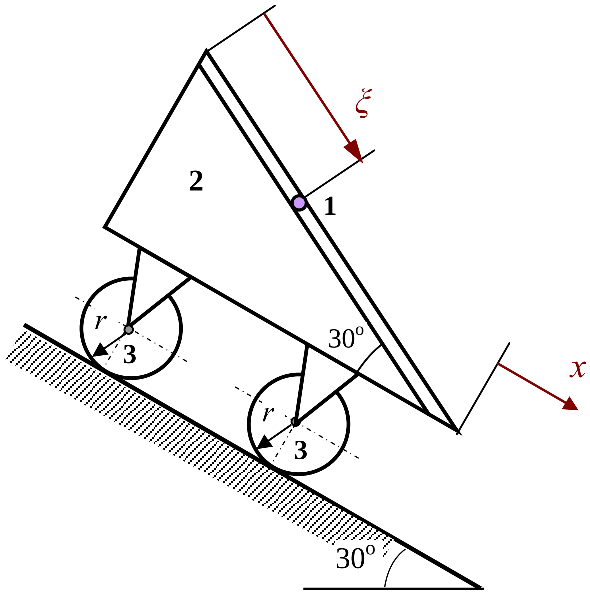
Liugehõõrdetegur = 0,3

P ; $P = \text{const}$

$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

$a_2 = ?$ $a_{1r} = ?$

13. variant



$m_1 = m$ kg

$m_2 = 3m$ kg

$m_3 = 2m$ kg

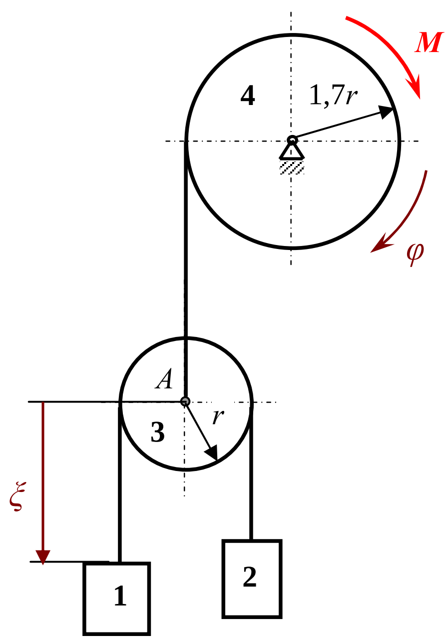
Viskoosse takistuse tegur =b

$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

Süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid = ?

Märkus: *kuulikese*1 *liikumisel kanalis arvestada ka viskoosset takistust* $\vec{R}$, *mis võrdub* $\vec{R} = -b\vec{v}_r$, kus $\vec{v}_r$ *on kuulikese relatiivne kiirus ja b on viskoosse takistuse tegur.*

14. variant



$m_1 = 2m$ kg

$m_2 = m$ kg

$m_3 = m$ kg

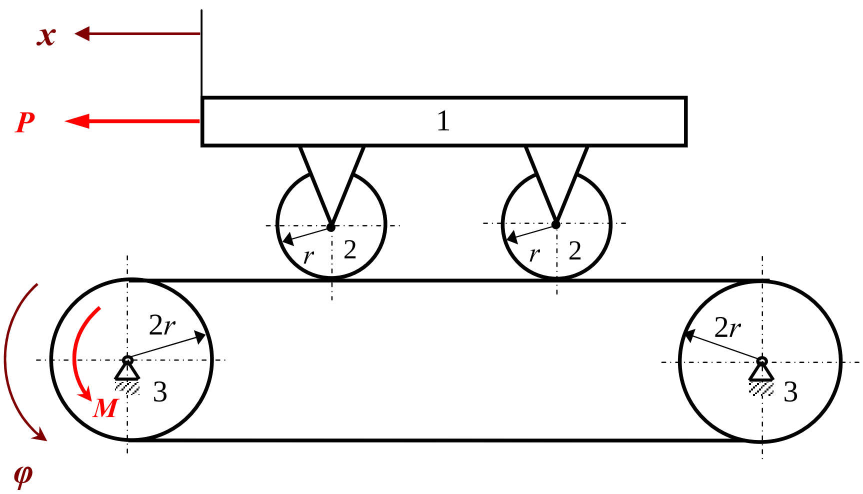
$m_4 = 2m$ kg

M; $M = \text{const}$

$q_1 = \varphi$; $q_2 = \xi$

$\alpha_4 = ?$

15. variant



$m_1 = 3m\ kg$

$m_2 = m\ kg$

$m_3 = 2m\ kg$

$P;\quad P = \text{const}$

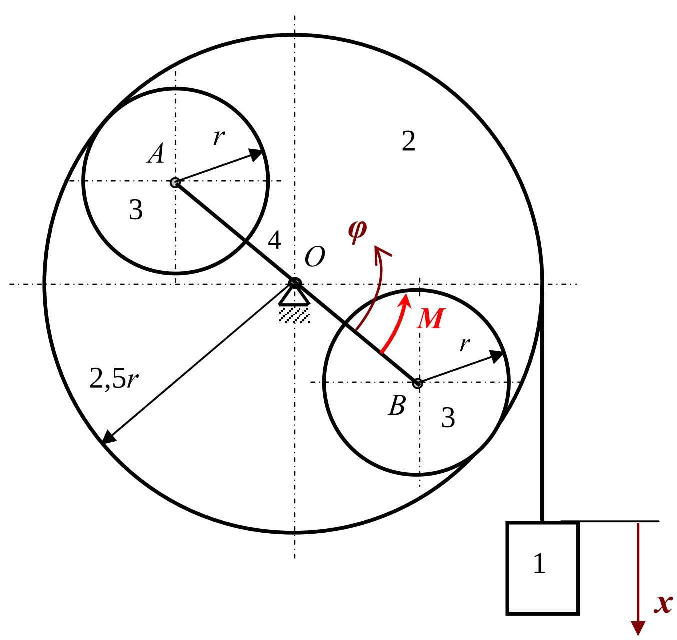
$M;\quad M = \text{const}$

$q_1 = \varphi;\quad q_2 = x$

$a_1 = ?\quad \alpha_3 = ?$

---

16. variant



$m_1 = 2m\ kg$

$m_2 = 3m\ kg$

$m_3 = 2m\ kg$

$m_4 = m\ kg$

keha 4 = varras AB

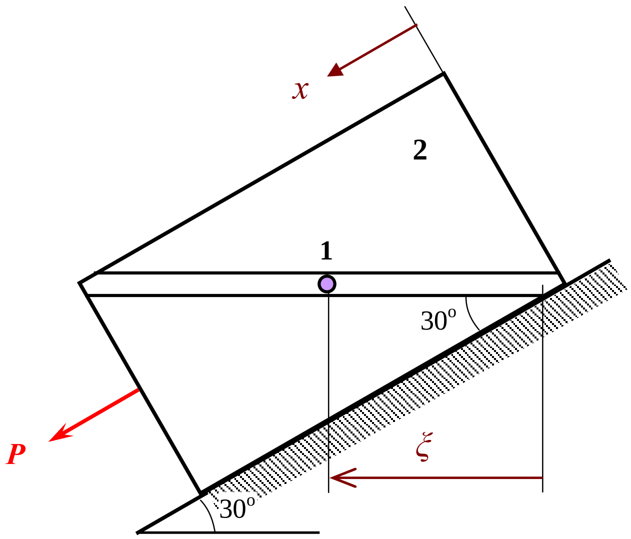
$i_2 = 2r$

$M;\quad M = \text{const}$

$q_1 = \varphi;\quad q_2 = x$

$a_1 = ?\quad \alpha_4 = ?$

17. variant



$m_1 = m \ kg$

$m_2 = 3m \ kg$

P; $P = \text{const}$

Liugehõõrdetegur = 0,4

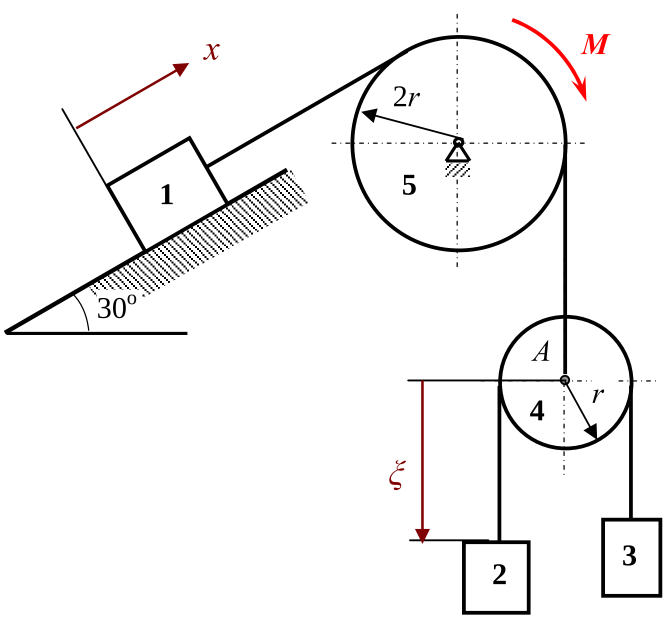
Viskoosse takistuse tegur = *b*

$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

Süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid = ?

Märkus: *kuulikese*1 *liikumisel kanalis arvestada ka viskoosset takistust* $\vec{R}$, *mis võrdub* $\vec{R} = -b\vec{v}_r$, kus $\vec{v}_r$ *on kuulikese relatiivne kiirus ja b on viskoosse takistuse tegur.*

18. variant



$m_1 = 2m \ kg$

$m_2 = 2m \ kg$

$m_3 = m \ kg$

$m_4 = m \ kg$

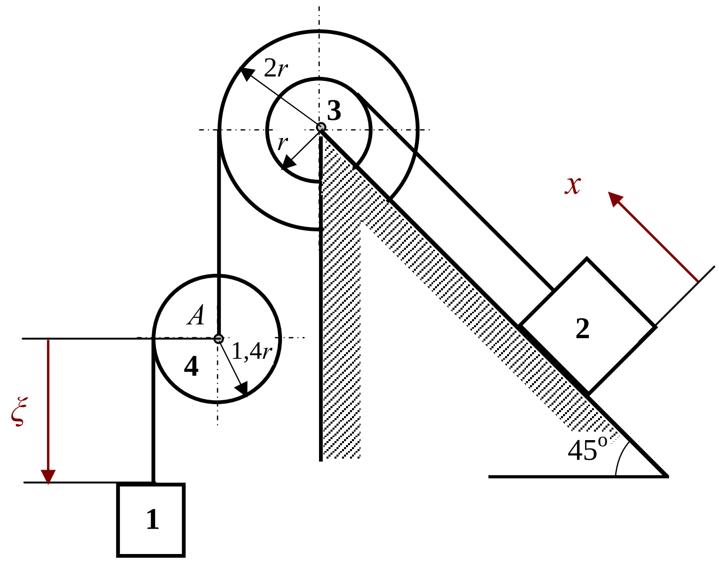
$m_5 = 3m \ kg$

Liugehõõrdetegu r = 0,2

$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

$a_1 = ?$ $a_2 = ?$

19. variant



$m_1 = 2m\ kg$

$m_2 = 2m\ kg$

$m_3 = 3m\ kg$

$m_4 = m\ kg$

$i_3 = r\sqrt{2}$

keha 3 = kaksikplokk

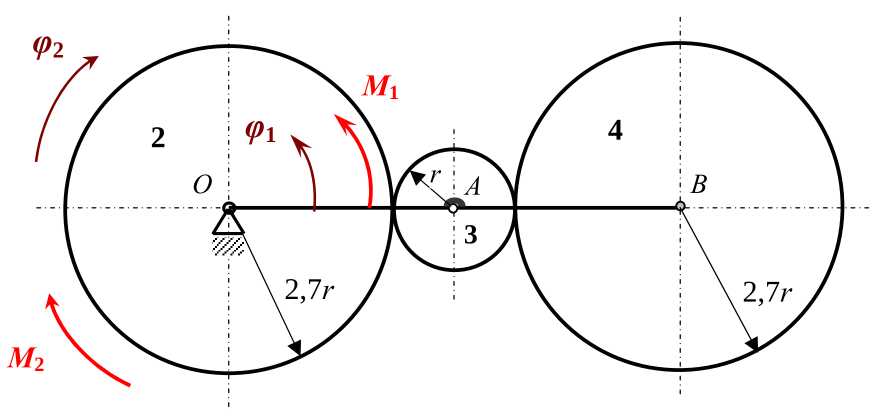
Liugehõõrdetegur = 0,4

$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

$a_1 = ?$ $a_2 = ?$

---

20. variant



$m_1 = 2m\ kg$

$m_2 = 3m\ kg$

$m_3 = m\ kg$

$m_4 = 3m\ kg$

keha 1 = varras *OAB*

M_1; $M_1 = \text{const}$

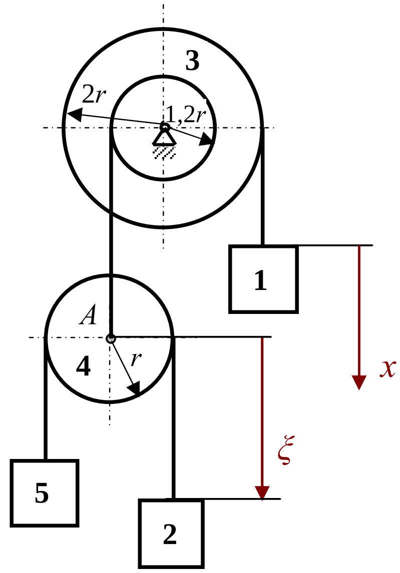
M_2; $M_2 = \text{const}$

$q_1 = \varphi_1$; $q_2 = \varphi_2$

$\alpha_1 = ?$ $\alpha_2 = ?$

Märkus: *mehhanism asub horisontaaltasapinnal.*

21. variant



$m_1 = 2m\ kg$

$m_2 = 2m\ kg$

$m_3 = 3m\ kg$

$m_4 = 2m\ kg$

$m_5 = m\ kg$

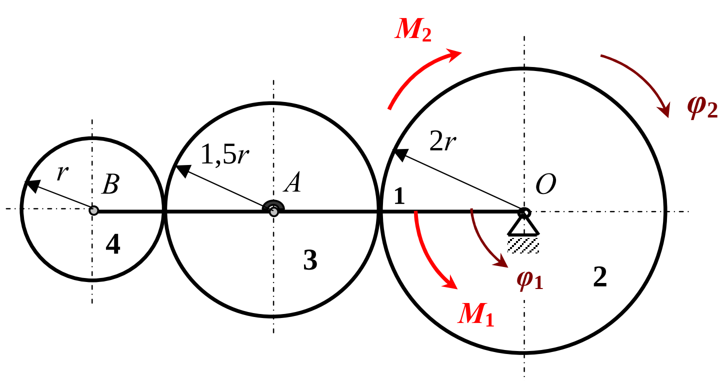
$i_3 = r\sqrt{2}$

keha 3 = kaksikplokk

$q_1 = x;\quad q_2 = \xi$

$a_1 = ?\quad \alpha_4 = ?$

22. variant



$m_1 = m\ kg$

$m_2 = 3m\ kg$

$m_3 = 2m\ kg$

$m_4 = m\ kg$

keha 1 = varras *OAB*

$M_1;\ M_1 = \text{const}$

$M_2;$

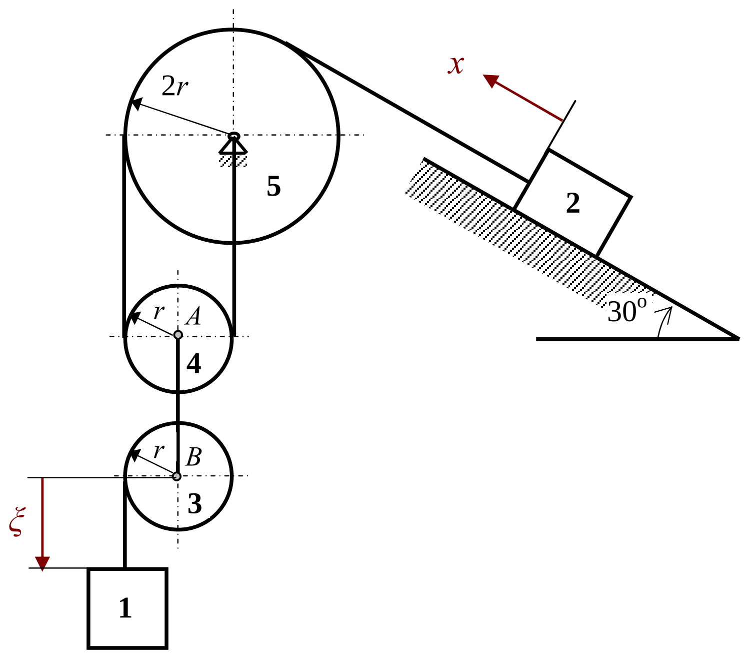
$M_2 = \text{const}$

$q_1 = \varphi_1;\ q_2 = \varphi_2$

$\alpha_1 = ?\quad \alpha_2 = ?$

Märkus: *mehhanism asub horisontaaltasapinnal.*

23. variant



$m_1 = 2m \ kg$

$m_2 = m \ kg$

$m_3 = m \ kg$

$m_4 = m \ kg$

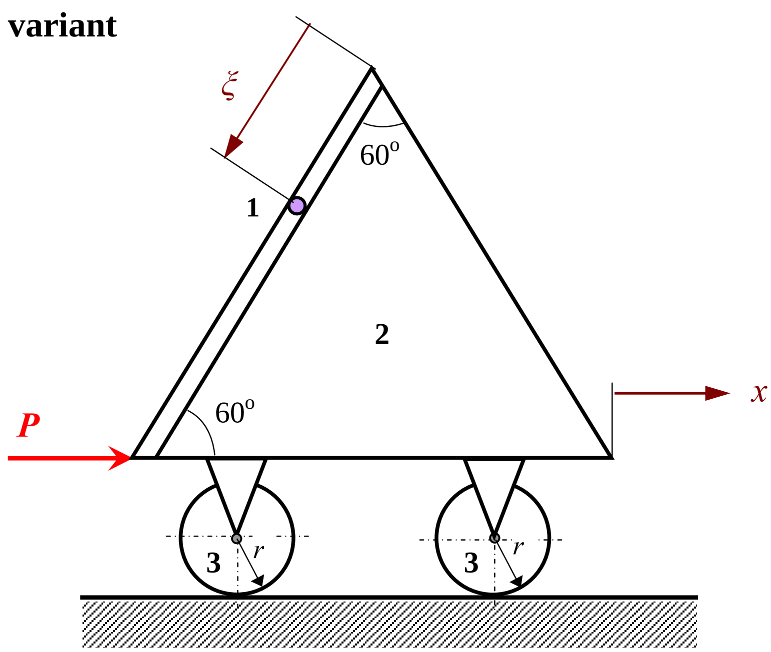
$m_5 = 3m \ kg$

Liugehõõrdetegur = 0,3

$q_1 = x; \quad q_2 = \xi$

$a_1 = ? \quad a_2 = ?$

24. variant



$m_1 = m \ kg$

$m_2 = 3m \ kg$

$m_3 = m \ kg$

$P; \quad P = \text{const}$

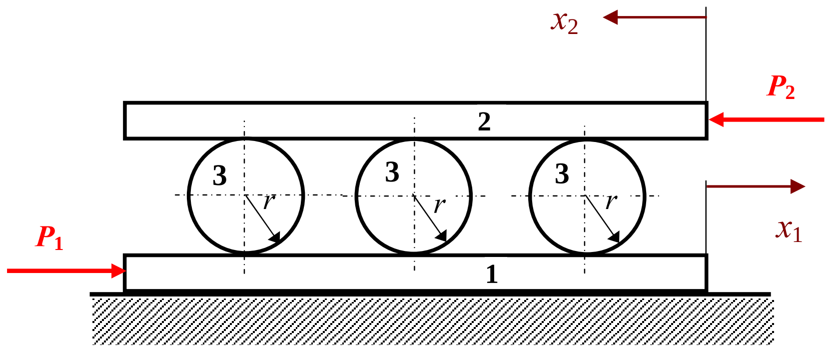
Viskoosse takistuse tegur = *b*

$q_1 = x; \quad q_2 = \xi$

Süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid = ?

Märkus: *kuulikese*1 *liikumisel kanalis arvestada ka viskoosset takistust* $\vec{R}$, *mis võrdub* $\vec{R} = -b\vec{v}_r$, kus $\vec{v}_r$ *on kuulikese relatiivne kiirus ja b on viskoosse takistuse tegur.*

25. variant



$m_1 = 2m\ kg$

$m_2 = 2m\ kg$

$m_3 = m\ kg$

P_1; $P_1 = \text{const}$

P_2; $P_2 = \text{const}$

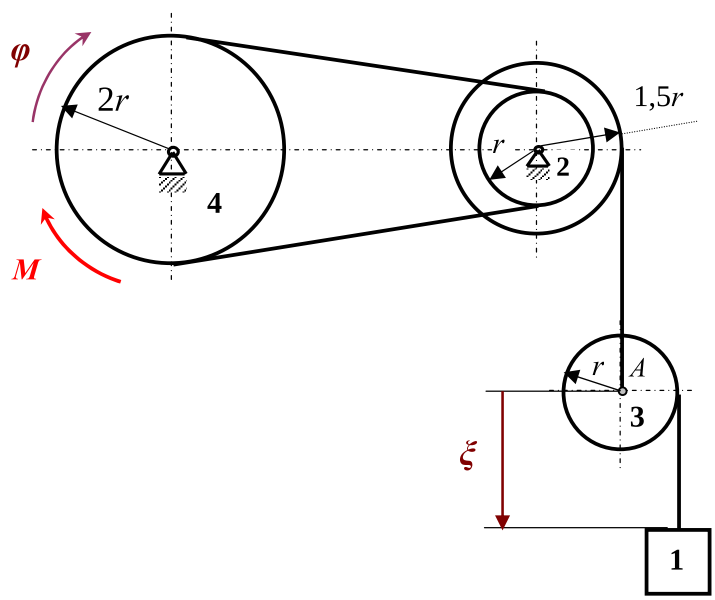
Liugehõõrdetegur $= f$

$q_1 = x_1$; $q_2 = x_2$

$a_1 = ?\quad a_2 = ?$

---

26. variant



$m_1 = m\ kg$

$m_2 = 3m\ kg$

$m_3 = 2m\ kg$

$m_4 = 3m\ kg$

$i_2 = r$

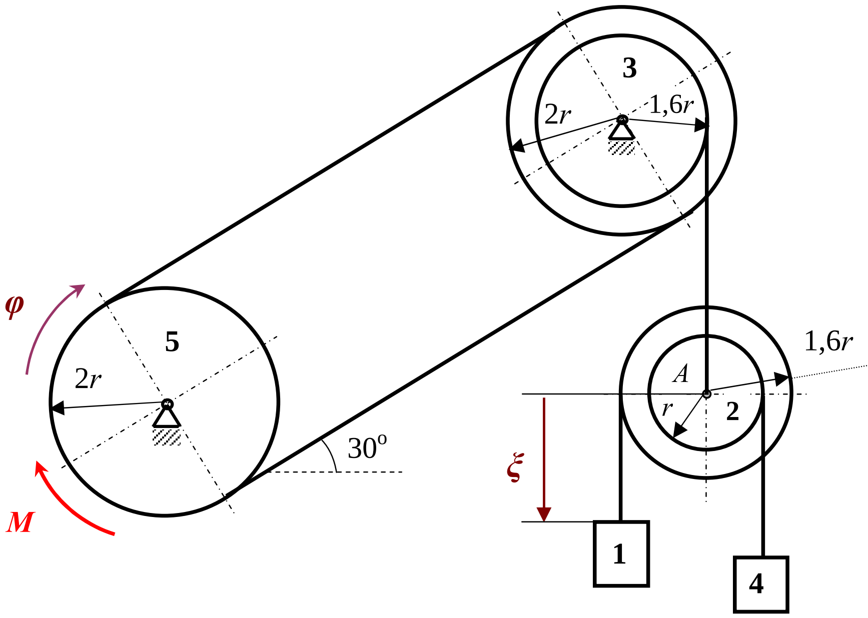
keha 2 = kaksikplokk

M; $M = \text{const}$

$q_1 = \varphi$; $q_2 = \xi$

$\alpha_3 = ?\quad \alpha_4 = ?$

27. variant



$m_1 = 2m\ kg$

$m_2 = 2m\ kg$

$m_3 = 3m\ kg$

$m_4 = m\ kg$

$m_5 = 2m\ kg$

$i_2 = r\sqrt{2}$

$i_3 = r\sqrt{3}$

keha 2 = kahe raadiusega

keha 3 = kaksikplokk

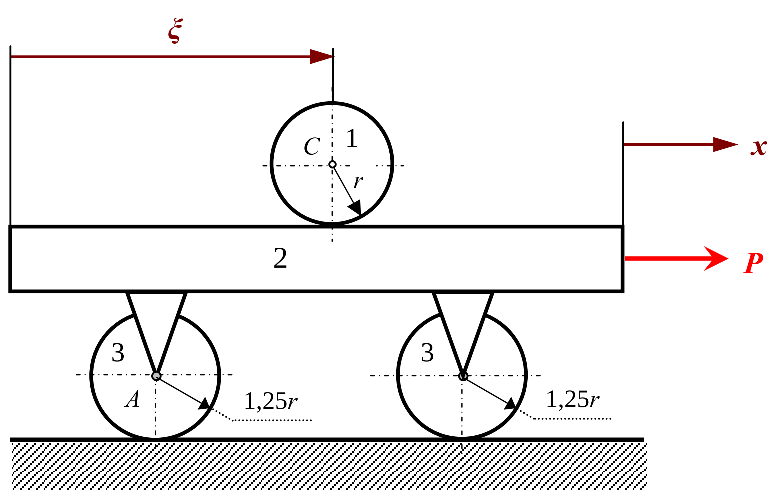
$M\,;\ \ M = \text{const}$

$q_1 = \varphi\,;\ \ q_2 = \xi$

$a_1 = ?\quad \alpha_5 = ?$

---

28. variant



$m_1 = m\ kg$

$m_2 = 3m\ kg$

$m_3 = m\ kg$

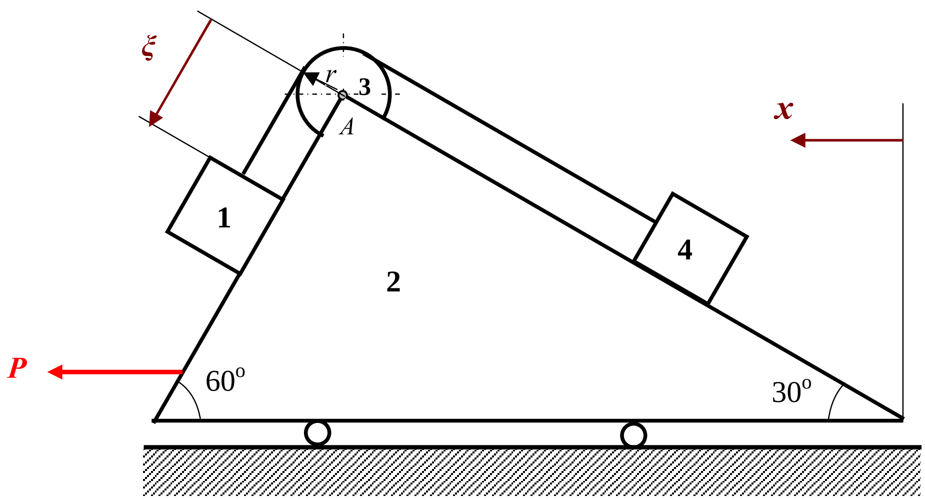
$P\,;\ \ P = \text{const}$

$q_1 = x\,;\ \ q_2 = \xi$

$a_2 = ?$

$a_C = ?$

29. variant



$m_1 = 2m\ \ kg$

$m_2 = 4m\ \ kg$

$m_3 = m\ \ kg$

$m_4 = m\ \ kg$

Liugehõõrdetegur = 0,4

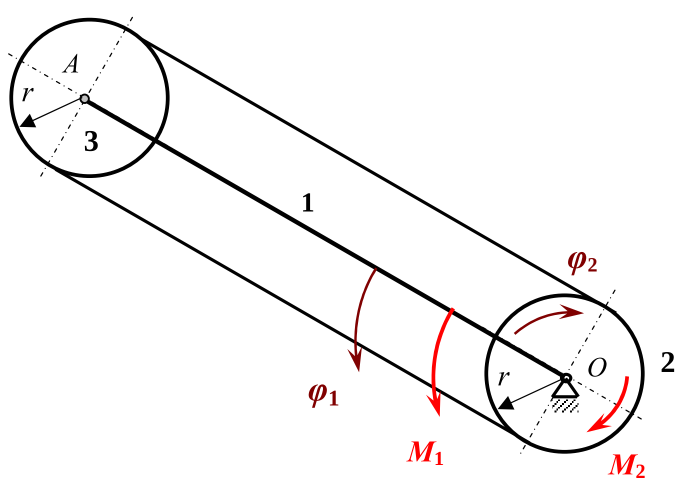
P ; $P = \text{const}$

$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

$a_2 = ?$ $\alpha_3 = ?$

---

30. variant



$m_1 = 3m\ \ kg$

$m_2 = 2m\ \ kg$

$m_3 = 2m\ \ kg$

keha 1 = varras OA

$OA = 6r$

M_1 ; $M_1 = \text{const}$

M_2 ; $M_2 = \text{const}$

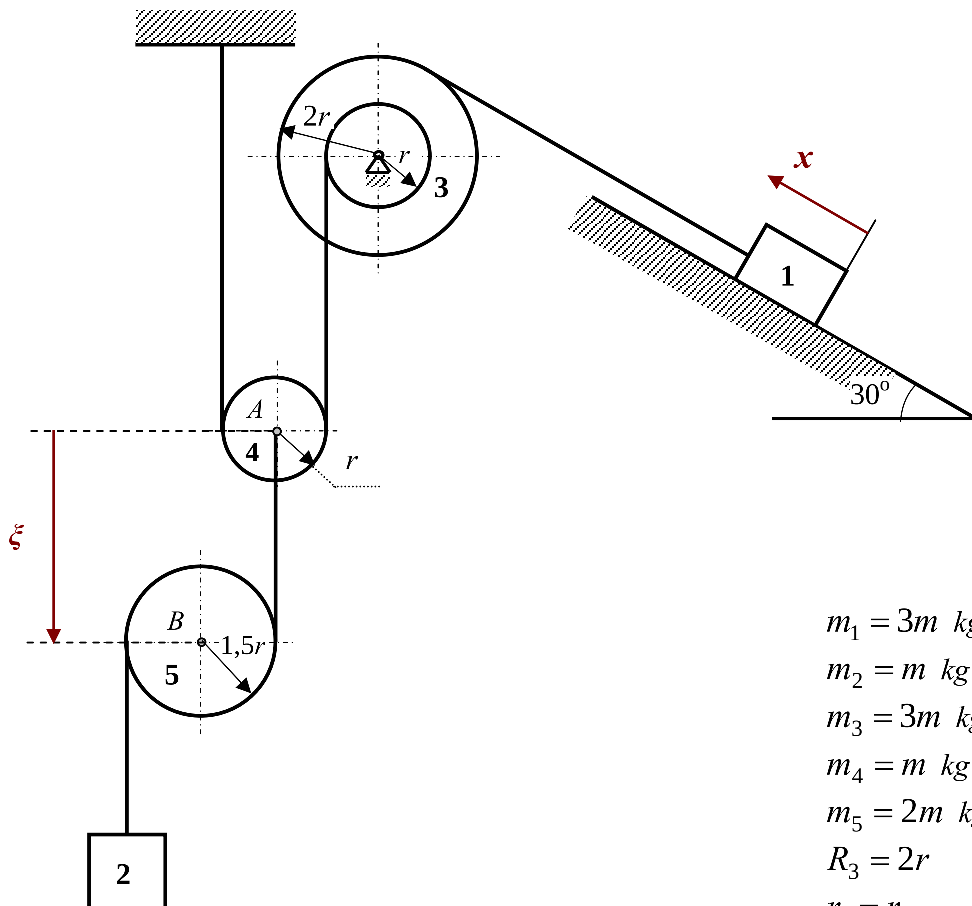
$q_1 = \varphi_1$; $q_2 = \varphi_2$

$\alpha_1 = ?$ $\alpha_2 = ?$

Märkus: *mehhanism asub horisontaaltasapinnal.*

Lahendusnäide

Vaatleme süsteemi, mis on toodud järgneval joonisel 1. Olgu antud: $m_1 = 3m$; $m_2 = m$; $m_3 = 3m$; $m_4 = m$; $m_5 = 2m$; $i_3 = r\sqrt{2}$; liugehõõrdetegur $f = 0{,}3$. Leida Lagrange'i teist tüüpi võrrandite abil keha 1 kiirendus a_1 ja ketta 5 nurkkiirendus α_5, kasutades joonisel näidatud üldistatud koordinaate $q_1 = x$ ja $q_2 = \xi$.



$m_1 = 3m$ kg

$m_2 = m$ kg

$m_3 = 3m$ kg

$m_4 = m$ kg

$m_5 = 2m$ kg

$R_3 = 2r$

$r_3 = r$

$R_4 = r$

$R_5 = 1{,}5r$

$i_3 = r\sqrt{2}$

keha 3 = kaksikplokk

Liugehõõrdetegur = 0,3

$q_1 = x$; $q_2 = \xi$

$a_1 = ?$ $\alpha_5 = ?$

Joonis 1

Lahendus

Lagrange'i teist tüüpi võrrandid kahe vabadusega süsteemis, juhul kui $q_1 = x$ ja $q_2 = \xi$, avalduvad kujul

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi$$

Nagu näha, tuleb nende võrrandite saamiseks kõigepealt leida 3 avaldist: 1) süsteemi kineetilise energia avaldis; 2) üldistatud jõu Q_x avaldis; 3) üldistatud jõu Q_ξ avaldis.

1. *Leiame kõigepealt süsteemi kineetilise energia*. Vaatame süsteemi joonisel 1 ning paneme tähele, et kehad 1 ja 2 liiguvad translatoorselt; keha 3 pöörleb ümber kinnistelje, mis läbib selle kaksikploki masskeset; kehad 4 ja 5 teostavad aga tavalist tasapinnalist liikumist, sest esiteks nende masskeskmed liiguvad ja teiseks nad ka pöörlevad ümber oma masskeskme. Seetõttu avaldub süsteemi kineetiline energia üldkujul järgmiselt

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 v_A^2}{2} + \frac{I_A \omega_4^2}{2} + \frac{m_5 v_B^2}{2} + \frac{I_B \omega_5^2}{2} \qquad (1)$$

Nüüd tuleb avaldada kõik siin esinevad kiirused ja nurkkiirused üldistatud kiiruste kaudu. Kuna üldistatud koordinaadid on siin x ja ξ, siis **üldistatud kiirused on $\dot{x}$ ja $\dot{\xi}$.**

a) Kõigepealt on kohe selge, et kuna x on klotsi 1 absoluutne koordinaat, siis keha 1 kiirus ongi selle absoluutse koordinaadi tuletis

$$v_1 = \dot{x} \qquad (2)$$

b) Vaadates nüüd joonise 2 kehal 3 olevaid sarnaseid kolmnurki, mis on joonistatud kiiruste $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_K$ põhjal, saame kirjutada kinemaatika põhivalemite põhjal, et

$$\omega_3 = \frac{v_1}{R_3} = \frac{v_K}{r_3} \qquad (3)$$

Siit leiame

$$\omega_3 = \frac{\dot{x}}{2r}; \qquad v_K = \frac{\dot{x}}{2}. \qquad (4)$$

c) Sarnased kolmnurgad joonise 2 kehal 4 annavad

$$\omega_4 = \frac{v_K}{2R_4} = \frac{v_A}{R_4} \qquad (5)$$

Arvestades v_K avaldist (4), saame siit

$$\omega_4 = \frac{\dot{x}}{4r}; \qquad v_A = \frac{\dot{x}}{4}. \qquad (6)$$

d) Kuna ξ on relatiivne koordinaat, mis näitab ketta 5 tsentri B suhtelist asupaika ketta 4 tsentri A suhtes (joonis 1), siis

$$\omega_5 = \frac{\dot{\xi}}{R_5} = \frac{\dot{\xi}}{1{,}5r} \tag{7}$$

e) Punkti B kiiruse v_B leidmiseks rakendame tasapinnalise liikumise kinemaatikat. Nimelt — kasutame teoreemi antud punkti kiirusest pooluse kiiruse kaudu. Leiamegi punkti B kiiruse võttes pooluseks punkti L (joonis 2). Sel juhul

$$\vec{v}_B = \vec{v}_L + \vec{v}_{BL}\,. \tag{8}$$

Kuna on selge, et

$$v_L = v_A = \frac{\dot{x}}{4} \tag{9}$$

ja

$$v_{BL} = \dot{\xi} \tag{10}$$

siis arvestades, et antud juhul on tegemist paralleelsete ja samasuunaliste vektorite liitmisega, saame

$$v_B = \frac{\dot{x}}{4} + \dot{\xi} \tag{11}$$

Sama teoreemi rakendame punkti D kiiruse leidmiseks

$$\vec{v}_D = \vec{v}_L + \vec{v}_{DL} \tag{12}$$

Kuna

$$v_{DL} = 2\dot{\xi} \tag{13}$$

Siis

$$v_D = \frac{\dot{x}}{4} + 2\dot{\xi} \tag{14}$$

Ning lõpuks

$$v_2 = v_D \tag{15}$$

Asendame kõik leitud kiirused ja nurkkiirused süsteemi kineetilise energia avaldisse (1). Arvestades veel, et

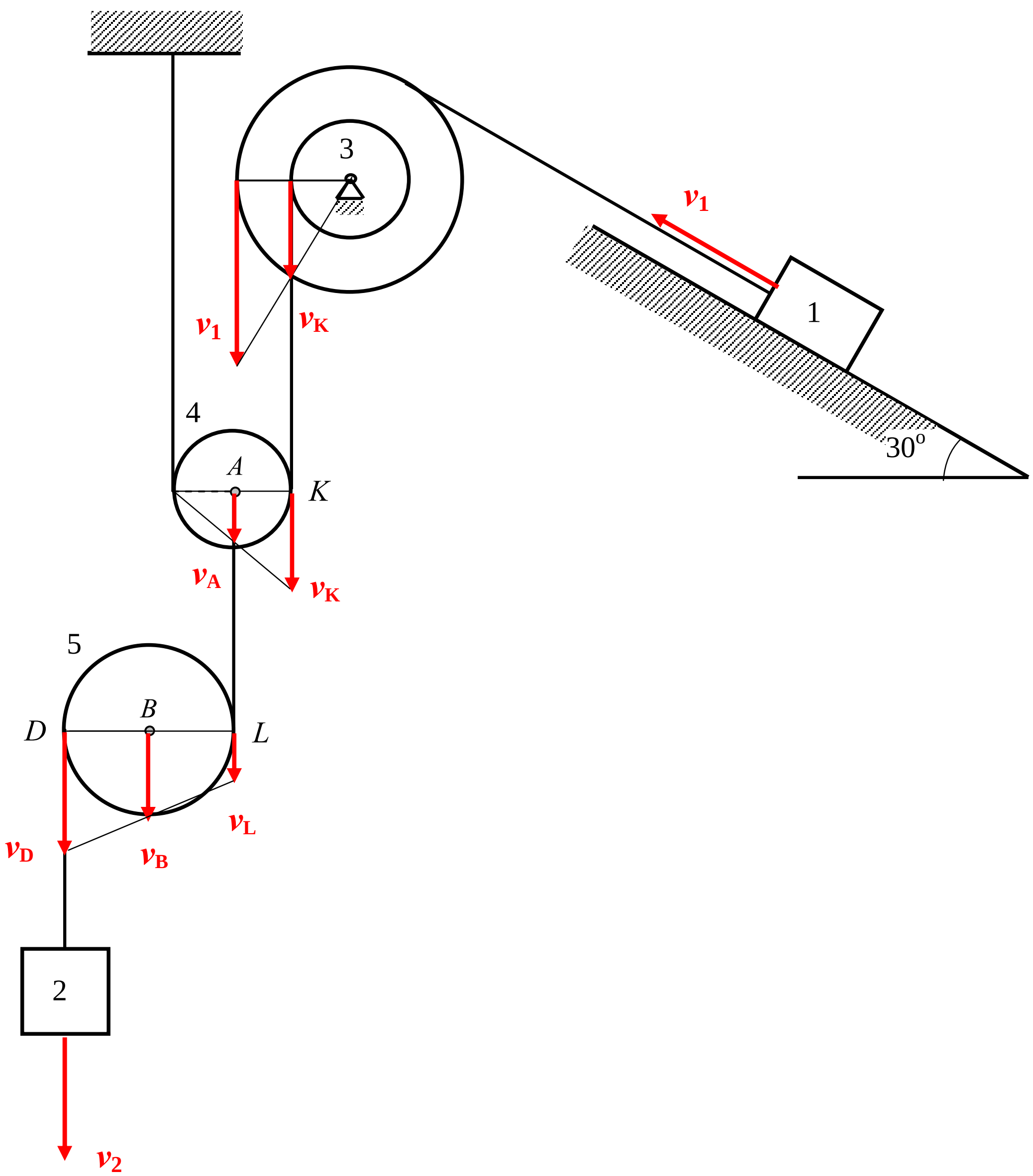
$$I_3 = m_3 i_3^{\,2} = 6mr^2 \tag{16A}$$

$$I_A = \frac{m_4 R_4^{\,2}}{2} = \frac{mr^2}{2} \tag{16B}$$

$$I_B = \frac{m_5 R_5^{\,2}}{2} = \frac{9mr^2}{4} \tag{16C}$$

saame pärast vajalikke teisendusi kirjutada süsteemi kineetilise energia lõpuks kujul

$$T = \frac{147}{64} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{x}}{4} + 2\dot{\xi}\right)^2 + m\left(\frac{\dot{x}}{4} + \dot{\xi}\right)^2 \tag{17}$$



Joonis 2

Vastavalt Lagrange’i teist tüüpi võrranditele tuleb nüüd siit leida osatuletised nii üldistatud koordinaatide kui ka üldistatud kiiruste järgi. Kuna siin kineetilise energia avaldises üldistatud koordinaate x ja ξ otsesel kujul ei esine, siis

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \tag{18}$$

Osatuletised üldistatud kiiruste järgi avalduvad kujul

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{147}{32} m\dot{x} + \frac{m}{4}\left(\frac{\dot{x}}{4} + 2\dot{\xi}\right) + \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{x}}{4} + \dot{\xi}\right) \tag{19A}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} + 2m\left(\frac{\dot{x}}{4} + 2\dot{\xi}\right) + 2m\left(\frac{\dot{x}}{4} + \dot{\xi}\right) \tag{19B}$$

Leides nendest veel tuletised aja järgi ja koondades sarnased liikmed saame Lagrange'i teist tüüpi võrrandite vasakud pooled lõplikult kujul

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{153}{32} m\ddot{x} + m\ddot{\xi} \tag{20A}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) = m\ddot{x} + 7m\ddot{\xi} \tag{20B}$$

2. *Leiame üldistatud jõu* Q_x. Selle leidmiseks tuleb süsteemi kehadele anda väga spetsiifilised virtuaalsiirded, nimelt sellised, et *üheaegselt oleks*:

1) $\delta x \neq 0$, seejuures peab olema $\delta x > 0$;
2) $\delta \xi = 0$.

See tähendab seda, et **klotsi 1 nihutame väga väikese suuruse δx võrra mööda kaldpinda üles** (s.t positiivses suunas), ning **kettaid 4 ja 5 liigutame nii, et nende tsentrite *A* ja *B* kõrguste vahe ξ mitte mingil juhul ei muutuks**. On selge, et sel juhul nii keha 4 punkt A, kui kehade 5 ning 2 kõik punktid nihkuvad täpselt ühepalju, s.t kehad 5 ja 2 teostavad translatoorset liikumist.

Joonise 3 abiga on nüüd kerge koostada süsteemi virtuaaltöö avaldise selliste virtuaalsiirete puhul. Siinjuures tuleb veelkord toonitada, et definitsiooni kohaselt on virtuaalsiire lõpmata väike siire, joonisel 3 on aga parema nähtavuse huvides need joonistatud küllaltki suurtena. Süsteemi virtuaaltöö võrdub

$$\delta W_x = -m_1 g \sin 30° \delta x - F_h \delta x + (m_4 g + m_5 g + m_2 g) \cdot \delta s_A \tag{21}$$

Hõõrdejõud on siin

$$F_h = m_1 g f \cos 30° \tag{22}$$

Arvestades ka veel seda, et analoogia põhjal valemiga (6) on

$$\delta s_A = \frac{\delta x}{4} \tag{23}$$

saame pärast vajalikke teisendusi

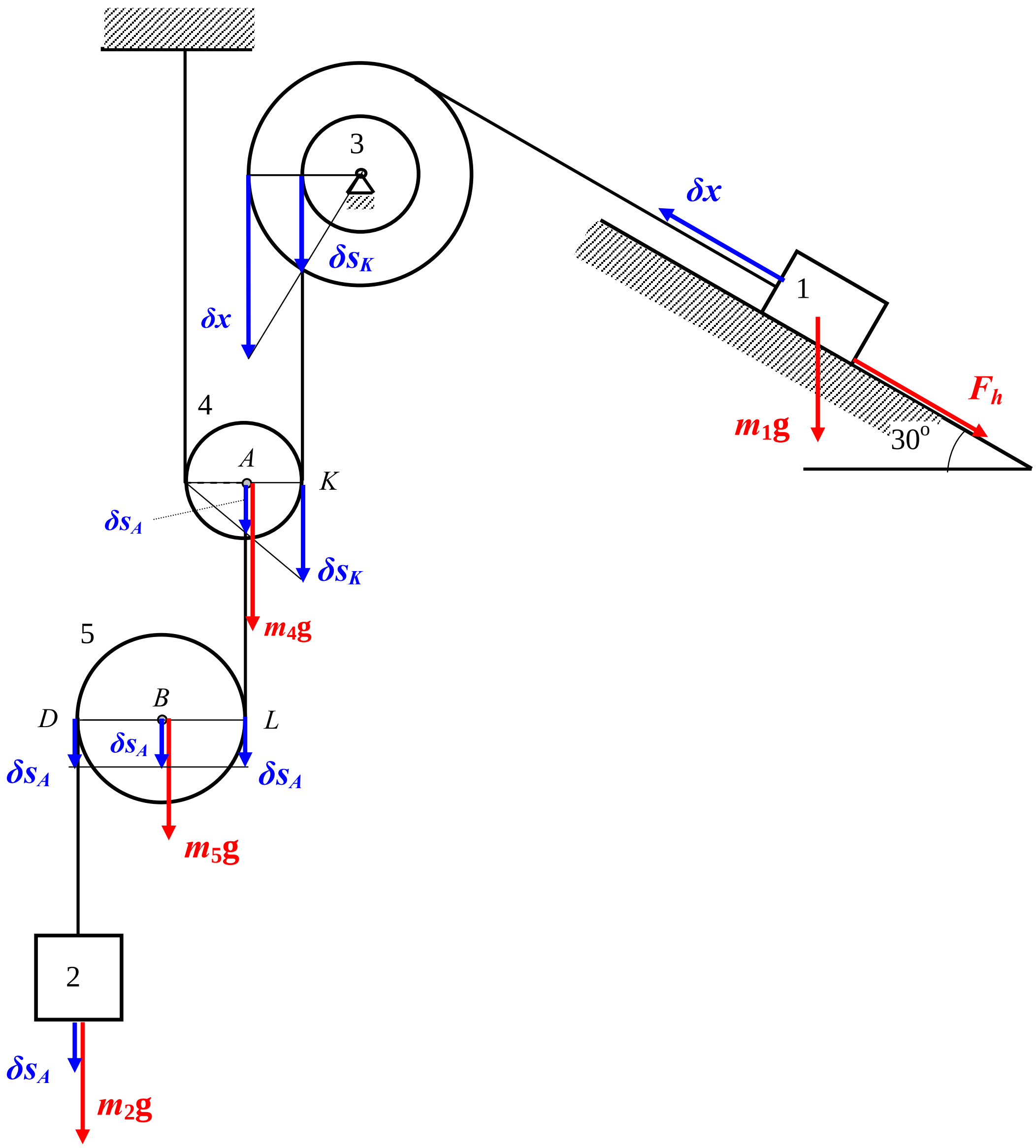
$$\delta W_x = \delta x \cdot \left[mg - 1{,}5mg\left(1 + f\sqrt{3}\right)\right] \tag{24}$$

Seega üldistatud jõud Q_x on

$$\boldsymbol{Q_x = mg - 1{,}5mg\left(1 + f\sqrt{3}\right)} \tag{25}$$

Asendades siia hõõrdeteguri $f = 0{,}3$ saame

$$\boldsymbol{Q_x = -1{,}2794mg = -12{,}5509m} \tag{26}$$



Joonis 3

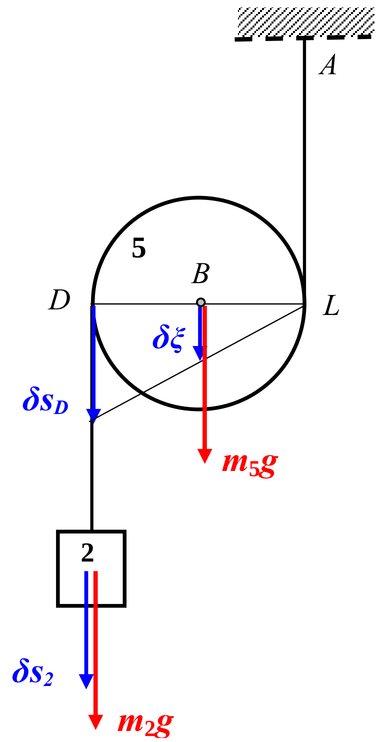
3. *Leiame üldistatud jõu* Q_ξ. Nüüd tuleb süsteemi kehadele anda sellised virtuaalsiirded, et *oleksid üheaegselt täidetud järgmised tingimused*:

1) $\delta\xi \neq 0$, seejuures peab olema $\delta\xi > 0$;

2) $\delta x = 0$.

Tingimusest 2 on selge, et **keha 1 liikuda ei tohi, järelikult ei liigu ka kehad 3 ja 4**. Siis on aga punkt A paigal, **järelikult on ka punkt *L* paigal**. Seega ketas 5 teostab lõpmata väikese pöörde ümber punkti L kui ümber paigaloleva punkti, kusjuures punkt B nihkub seejuures allapoole lõpmata väikese suuruse võrra, mis üldistatud koordinaadi ξ määrangu põhjal ongi ju $\delta\xi$.

Kui teha nüüd joonise virtuaaltöö δW_ξ leidmiseks, siis **ei ole vaja välja joonistada kogu süsteemi**, vaid ainult selle osa, mis liigub.



Joonis 4

Joonisel 4 on selge, et tööd teevad ainult jõud $m_2\vec{g}$ ja $m_5\vec{g}$. Süsteemi virtuaaltöö avaldis on seega

$$\delta W_\xi = m_5 g \delta\xi + m_2 g \delta s_2 \tag{27}$$

Kuna $\delta s_2 = \delta s_D = 2\delta\xi$, siis saame

$$\delta W_\xi = \left(m_5 g + 2m_2 g\right)\cdot \delta\xi \tag{28}$$

Siit üldistatud jõud

$$\boldsymbol{Q_\xi = \left(m_5 + 2m_2\right)g} \tag{29}$$

ehk pärast teisendusi

$$\boldsymbol{Q_\xi = 4mg = 39{,}24m} \tag{30}$$

4. Vastavalt Lagrange'i teist tüüpi võrranditele saab nüüd välja kirjutada järgmise võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{153}{32} m\ddot{x} + m\ddot{\xi} = -12{,}5509m \\ m\ddot{x} + 7m\ddot{\xi} = 39{,}24m \end{cases} \tag{31}$$

Siit saame

$$\begin{cases} 4{,}7813\ddot{x} + \ddot{\xi} = -12{,}5509 \\ \ddot{x} + 7\ddot{\xi} = 39{,}24 \end{cases} \tag{32}$$

Lahendades selle süsteemi, saame

$$\boldsymbol{\ddot{x} = -3{,}914}\,; \qquad \boldsymbol{\ddot{\xi} = 6{,}165} \tag{33}$$

Ülesanne on lahendatud.

Vastus:

$$\boldsymbol{a_1 = \ddot{x} = -3{,}914\left({}^{m}\!/_{s^2} \right)} \tag{34A}$$

$$\boldsymbol{\alpha_5 = \frac{\ddot{\xi}}{1{,}5r} = \frac{4{,}11}{r}\left({}^{1}\!/_{s^2} \right)} \tag{34B}$$