John-Tagore Tevet

MIS ON STRUKTUUR

Sisukord

MTÜ Struktuurisemiootika Edendamise ja Rakenduse Rühm
Tallinn 2008

Sissejuhatus

Struktuur on süsteemi abstraktsioon, kus selle elemendid ja nendevahelised seosed on minetanud oma empiirilised tähendused ja objektiks on vaid nende organiseeritus. Struktuuri omavad pea kõik heterogeensed moodustised.

Antud teavikus huvitutakse mitte konkreetsete moodustiste struktuurist, vaid struktuurist kui niisugusest. Erinevaid struktuure on lõpmatu hulk. Erinevad moodustised võivad omada ühesuguseid struktuure ja „ühesugused" moodustised erinevaid struktuure. Käsitletakse struktuurseid atribuute nagu invariantsus, isomorfism, sümmeetria, regulaarsused jne nii üldises, epistemoloogilises kui ka struktuursest aspektist.

Vaatluse all on graafiteooria ja struktuurisemiootika erisused ja kokkulangevused.

Struktuuri esitamise atribuudi, märgimaatriksi moodustamise algoritme siin ei käsitleta, kuid viidatakse allikatele. Märgimaatriksist endast siiski mööda ei pääse, see on tarvilik struktuuride eristamiseks ja nende sisemiste omaduse tuvastamiseks. Võib julgelt väita, et märgimaatriksist on välja loetavad nii mõnigi struktuuri seni varjatud külg.

ISBN 978-9949-18-091-2

STRUKTUUR JA SELLE ATRIBUUDID

Struktuur

Struktuur on struktuurisemiootika olulisim mõiste, selle uurimisobjekt. Selgitagem seda.

Üldine tähendus

Struktuur (ladina sõnast *structura* (sise)ehitus) on *filosoofiline kategooria*, mis on määratletud kui süsteemi elementide (enamasti püsiv) *seos* ja vahekord ehk *organiseerimisviis* [Filosoofia leksikon, 1985; Schmidt, H., 1991].

Selgitusi

Struktuuri mõistele aluse panijaks peetakse mõnedes filosoofia teatmeteostes Immanuel Kanti, mõnedes Georg Wilhelm Friedrich Hegelit ning mõnedes mitte kedagi.

Struktuuri siin esitatud tähendus on nö läbilõige erinevatest sõnastustest. Kuna tegemist on abstraktse, filosoofilise kategooriaga, siis on sellel ka varieeruvaid tõlgendusi. Ollakse eri meelel, kas struktuur on püsiv või enamasti püsiv; kas on tegemist mingi seletamatu seosega või seostega elementide vahel, jne. Kokku on lepitud järgmistes määratlustes.

Struktuuri mõiste on tihedalt seotud *seaduse, vormi, paratamatuse* jt sugulaskategooriatega. Struktuur on kõigi reaalselt eksisteerivate objektide ja süsteemide *lahutamatu atribuut*.

Seoses mateeria struktuuritasemete (struktuuriaspektide) mitmekesisusega on mis tahes süsteem *multistruktuurne*.

Struktuur jääb muutumatuks, *invariantseks*, vaatamata osade ja terviku enese pidevale muutumisele, see muutub alles siis, kui kogu tervik teeb kvalitatiivse hüppe.

Teisest küljest sõltuvad struktuuri, kui terviku, elemendid terviku struktuurist ja etendavad kvalitatiivselt erinevat osa olenevalt nende seostatuse viisist – positsioonist – struktuuris (grafiidi ja teemanti näide).

Märgitakse, et struktuuri täpne definitsioon antakse matemaatikas *isomorfismi mõiste* abil.

Tõlgendusi

Struktuuri filosoofilise määratluse laialivalguvus on pannud tunnetus- ja süsteemiteoreetikuid [Tjuhtin, V., 1972] ning matemaatikuid seda mõistet täpsustama ja konkretiseerima. Samal ajal ei huvitu tunnetusteoreetikud mitte nö puhtast struktuurist vaid tunnetatava objekti struktuurist.

Väidetakse, et struktuur on *süsteemi abstraktsioon*, kus selle elemendid ja seosed on minetanud oma empiirilised tähendused, kuid säilitavad erinevusi oma *positsioonide* näol struktuuris. Kuna süsteem on (üldjuhul) paljuaspektiline, seda võib dekomponeerida osisteks erinevatest aspektidest, siis vastab igale aspektile oma struktuur.

Märgitakse, et tunnetatava objekti struktuuri avaldamise adekvaatseks ”keeleks” on *matemaatilised vahendid*, mõisted ja meetodid. Süsteemiteoreetikud konkretiseerivad, et struktuuri eksplikaadiks (äraseletajaks) on *graaf*.

Struktuuri mõistele on omane eriline, samal ajal universaalne suhete (seoste) tüüp – *järjestussuhe, kompositsioon*. Kompositsioon on matemaatiliselt avaldatav valemite, võrrandite, maatriksite, graafide jt matemaatiliste vahendite abil.

Abstraktseteks ehk mõistelisteks võib lugeda ka järgmisi struktuuri konkretiseeringuid:

Struktuuriks on algebras nimetatud ka *võre*. Õige on siin see, et tegemist on graafiga, kuigi väga väikesest alamklassist. Siiski on see arusaamatus sellest, et omaaegne G. Birckhofi "Lattice Theory" oli vene keelde tõlgitud kui "Teorija struktur". Struktuur on matemaatikas *hulk*, millele võib olla lisatud täiendavaid matemaatilisi objekte.

Probleeme

Peamine probleem seisneb struktuuri abstraktse mõiste erinevates tõlgendamistes. Siin on esitatud pea kõik sellele mõistele omistatud selgitused ja tõlgendused. Nii mõnedki näevad nende vahel vasturääkivusi. Kõik katsed formaliseerida struktuuri olemust nõuavad nende vasturääkivuste, st nii mõnegi täpsustuse, elimineerimist.

Struktuuri mõiste ära seletamise katsed on märgatavad Saksa ja Vene filosoofilistes teatmeteostes. Mujal, ka Eestis huvitutakse viimasel ajal rohkem eksistentsialistlikust filosoofiast ning on loobutud struktuuri mõiste käsitlemisest üldse [The Penguin Dictionary of Philosophy, 1997; Meos, I., 2002]. "Struktuur" on devalveeritud mitmesugusteks „eritähendusteks”. Internetis domineerivad selle märksõna all peaasjalikult ametasutuste üksused ja isikkooseisud.

Kõik püüdlused struktuuri olemust ära seletada on viinud paratamatult graafide juurde, kasvõi nende diagrammide näol [Mereste, U., 1987].

Struktuuri formaliseeritud tähendus

Selles kooskõlastamatute selgituste, tõlgenduste ja probleemide virrvarrist on omaks võetud, et struktuur on kujutatav *graafi* näol ning struktuuri mõiste on määratletav *isomorfismi* abil.

Täpsustagem, et struktuur kujutab endast ***isomorfsete graafide täielikku invarianti***, st invariantsete orbiitide (positsiooniklasside), aluste (omavahel mitteseostatud elementide klasside), klikkide (omavahel tihedalt seostatud elementide klasside) jt struktuursete atribuutide süsteemi. Samuti väidame, et igasugune protsess on kujutatav selle seisundeid kujutavate struktuuride järkjärguliste muutustena, struktuuride jadana. Struktuurisemiootika tegeleb nö *puhta struktuuriga*.

Semiootika

Üldine määratlus

Semiootika on teadus *märkidest* ja *märgisüsteemidest*. Tegeleb *tähenduse*, *kommunikatsiooni-* ja *interpretatsiooni-protsesside ja -nähtuste* uurimisega, nii nende teooria kui ka empiirilise analüüsiga.

Selgitusi

Niinimetatud *semiootikaväli* on rikkalik ja mitmekesine. Eestis on tuntuimad sellised objekt-orienteeritud semiootikad nagu *kultuuri- (J.Lotman ja tema jüngrid), sotsio-, meditsiini- ja biosemiootika* oma separaatsete märkide ja märgisüsteemidega.

Märk semiootilises süsteemis on miski, mis reeglina tähistab midagi enamat kui ta ise. Ferdinand de Saussure'i järgi on oluline tähistaja ja tähistatu omavaheline suhe. Märk on esitis objekti kohta. Ch. Peirce järgi on märk seotud tunnetuse ja mõtlemisega.

Märk kujutab endast semiootika *semantilist* aspekti, märgisüsteem *süntaktilist* ja selle kasutamine *pragmaatilist* aspekti.

Semiootika roll struktuuri määratlemisel

Struktuuri määratlemine rajaneb teatud mõttes semiootika printsiibile. Struktuuri uurimiseks kasutame graafi lokaalsetest invariantidest koosnevaid „sõnu” ehk ***märke***, milles sisalduv teabe on ***tähenduslik***.

Märgisüsteem hõlmab kõiki graafe ja seda ohjatakse vastavate töötlemiseeeskirjade, algoritmide abil, mis semiootilises süsteemis ***süntaksit*** kujutab.

Struktuuri uurimine ise kui ka tulemused kujutavad endast ***pragmaatikat***.

Invariant

Üldine tähendus

Invariant on objekti *omadus*, näiteks suuruse väärtus, avaldise vorm jne, *mis jääb* vaadeldava(te) teisenduse(te) korral *muutumatuks*.

Selgitusi

Invariantsed on näiteks liikumisseadused klassikalises mehhaanikas Galilei ajalis-ruumiliste teisenduste suhtes, liikumisseadused relatiivsusteoorias Lorentzi juures; elementaarosakeste teooriates teisenduste suhtes, milles avaldub ruumi ja aja diskreetne loomus.

Invariantsuse mõiste oli matemaatikas kasutusel juba 19. sajandi keskel. Invariantide teooria omandas suure tähtsuse geomeetrias, kus see on aluseks geomeetriliste distsipliinide süstematiseerimisel teisendusviiside (ortogonaalsete, meetriliste, afiinsete, projektiivsete, topoloogiliste, diferentsiaalsete jt) järgi.

Kui vaadeldav teisendus ei muuda mitte ühtki objekti omadust, siis on tegemist invariantide süsteemiga, ja see on *täielik invariant* [Harary, F., 1969]. Näiteks, isomorfsete graafide täielik invariant on nende ühine struktuur.

Formaalselt on invariant määratud kui matemaatiliste objektide vaadeldava kogumi $\boldsymbol{M}$ fikseeritud ekvivalentsussuhetega ρ *kujutus* ϕ teise matemaatiliste objektide kogumisse $\boldsymbol{N}$, mis on püsiv $\boldsymbol{M}$ ekvivalentsusklassidele ρ järgi (täpsemalt: ekvivalentsussuhte ρ kujutuse invariant kogumisse $\boldsymbol{M}$) [Popov, V. L., 1979]. Invariantide teooria on klassikalises mõttes algebraline teooria [Wetzenböck, R., 1923].

Invariantsusprintsiip

Täheldatakse tunnetuse kategooriate muutuvust. Ühest küljest võivad spetsiifilised kategooriad kujuneda üldisteks, teisest küljest võivad üldised kategooriad aheneda spetsiifilisteks (nagu näiteks struktuuri puhul on seda üritatud teha).

Tunnetusteooria (ja mitte ainult see) uurib reaalsete nähtuste seaduspärasusi. Selleks on vaja leida midagi muutumatut, teatud tingimustel säiluvat. Leitakse, et ükski invariant ei ole absoluutne, kuid ei ole põhjust kahelda nende objektiivsuses. Sellest tuuakse näiteid füüsikast. Leitakse, et üleminek üldisemale teooriale on seotud informatsiooni suurenemisega. See on omakorda seotud *isomorfismiga* üldistatud süsteemi kujutavate ja konkreetsemat süsteemi kujutavate sätete vahel [Ursul, A. L., 1967]. Nii on saanud spetsiifilisest mõistest *filosoofiline kategooria*.

Invariandi struktuurne tähendus

Struktuur on isomorfsete graafide ***täielik invariant***. Struktuuri kujutava graafi tippude nummerduse või nende graafilise asetuse suvalisel muutmisel jääb struktuur muutmatuks.

Isomorfism

Üldine tähendus

Isomorfism (kreeka sõnast *isos* – ühesugune; *morphe* – vorm) moodustavad koos homomorfismiga *filosoofilise kategooria*, mis iseloomustab *vastavust* objektide struktuuride vahel.

Täpsustusi

Isomorfism tähendab vastavust, kus kaks süsteemi, vaadelduna lahus neid moodustavate elementide loomusest, vastab esimese süsteemi igale elemendile ainult üks teise süsteemi element ning ühe süsteemi igale seosele vastab ainult üks seos teises – ja vastupidi. Selline üksühene vastavus võib esineda vaid abstraktsete, idealiseeritud objektide vahel.

Matemaatikas defineeritakse isomorfismi kui süsteemi niisugust üksühest kujutust sama tüüpi süsteemiks, mille korral säilib süsteemide struktuur, st seosed, järjestus, topoloogia jms [http://en.wikipedia.org/wiki/Isomorphism]. Näiteks, graafide isomorfism; kujund ja selle kujundi matemaatiline avaldis.

Isomorfism on *pööratav morfism*, millel on *vastandmorfism*, kus nende korrutis on *ühikmorfism*. Topoloogilist isomorfismi nimetatakse *homoömorfismiks*.

Mõned spetsiifilise suunitlusega filosoofilised koolkonnad võivad mitte tunnistada isomorfismi mõiste kuulumist filosoofiliste kategooriate kilda.

Isomorfismiprobleem

Isomorfismiprobleemiks nimetatakse ülesannet konstrueerida efektiivne algoritm, mis antud klassi kahe suvalise algebralise süsteemi korral selgitab, kas nad on isomorfsed või mitte.

Isomorfismiprobleem on seni lahendamata paljude oluliste algebra klasside puhul. Graafide vallas toimus 20. sajandi seitsmekümnendail isomorfismiprobleemi lahendamise katsete buum, mida "isomorfismihaiguseks" tituleeriti [Read, R. C., Corneil, D. G., 1977; Gati, G., 1978.]. Pärast seda muutusid selle lahendamise püüdlused peaaegu tabuks. Struktuurisemiootika on selle jälle esile toonud.

Isomorfismi tähendus struktuuris

Struktuur on ***isomorfsete graafide*** täielik invariant, st isomorfsete graafide struktuurid on *ekvivalentsed*.

Sümmeetria

Üldine tähendus

Sümmeetria (kreeka sõnast *symmetria*) on struktuurne omadus, mis avaldub objekti ühetaoliste osade kordumises nii ruumis kui ajas [Novaja filosofskaja entsiklopedija, 2001].

Laialt on levinud arusaam sümmeetriast kui seda mõistet kitsendavast erijuhtumist, sümmeetria „jupist”:

Sümmeetria on objekti omadus, kus selle objekti mingist keskpunktist või teljest samal kaugusel olevad osad on ühetaolised [Schmitd, H., 1991].

Kehtivad mõlemad arusaamad, kuid „telgsümmeetria” ei ole siiski ainuke.

Täpsustusi

Sümmeetria on *filosoofilise kategooria* staatuses Mandri-Euroopas (Saksamaa, Venemaa). Anglosaksi maades ja samuti Eestis sellele seda au ei omistata [The Oxford Companion of Philosophy, 1995].

Sümmeetria üldmõiste on matemaatikas defineeritud kui automorfismide transitiivsuspiirkonna ehk *orbiidi* olemasolu (näiteks graafides). Orbiit on sisuliselt *ekvivalentsusklass*. Sümmeetria üldmõiste leiab kasutamist *graafiteoorias, struktuurisemiootikas*, kehtib *kinematograafias* ja mujal.

Sümmeetria kitsendav erijuhtum on *matemaatikas* defineeritud kui: a) kujundi omadust "teisenduda iseendaks" (näiteks isomeetriliselt); b) binaarse relatsiooni omadust $\boldsymbol{xRy \leftrightarrow yRx}$.

Graafiteoorias räägitakse sümmeetriast ka suunatud graafide aspektist.

Sümmeetria printsiip

Filosoofiline kategooria on ka *sümmeetria printsiip* teaduses. See kujutab endast *heuristilist* ja *metodoloogilist* teadusliku uurimise printsiipi, millele vastavalt objektide omadused ja vastastikused seosed (suhted) formuleeritakse kui teadusliku teooria seadused (seaduspärasused), mis on *invariantsed* teatud teisenduste suhtes. Siin on tegemist jälle sümmeetria kitsendava erijuhtumi ehk "binaarsete relatsioonidega" [http://www.elin.ttu.ee/~rauno/symmeetria/].

Sümmeetria struktuurne tähendus

Struktuuri (graafi) sümmeetria avaldub struktuuri elementide (graafi tippude) ja elemendipaaride (tipupaaride) ***ekvivalentsusklasside*** ehk ***orbiitide*** näol. Sümmeetria on ***mõõdetav***, selle väärtus on maksimaalne kui eksisteerib üksainus orbiit, selle väärtus on *0*, kui orbiitide arv võrdub struktuurielementide arvuga.

Regulaarsusest

Määratlus

Struktuuri (graafi), mille kõik elemendid (tipud) on võrdse valentsusega nimetatakse *regulaarseks.* Nimetagem seda ***valents-regulaarsuseks.***

Regulaarsustest struktuuris

Struktuuris (graafis) esineb veel mitu regulaarsuse viisi:
Distantsregulaarsus, kus kõikide mitte-naabertippude vahelised kaugused on võrdsed.
Tugev regulaarsus kujutab endast olekut $(k,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, kus k-valentsregulaarse mitte-täisstruktuuri *iga naabertippude paar omab* $\boldsymbol{a}\geq 0$ *ühist naabertippu* ja *iga mitte-naabertippude paar* $\mathbf{b}\geq 1$ *ühist naabertippu*.
Klikkregulaarsus, kus kõik n tippu kuuluvad klikkidesse võimsusega $n-a$.
Ringregulaarsus, kus kõik tipud kuuluvad võrdse(te) pikkusega ringi(desse).
Sümmeetria, kui ekvivalentsusklass, on teatud mõttes ka regulaarsus.

GRAAFITEOORIA JA STRUKTUURISEMIOOTIKA

Graafiteooria

Pilk ajalukku.

Kunagi asus Läänemere lõunakaldal Preisimaa pealinn Königsberg oma kuningalossi (ehit. 1255), Toomkiriku (ehit. 1333), ülikooli (asut. 1544) ja parkidega. Linna läbis Pregeli jõgi, kus see oma kahe saarega neli kallast moodustas, mis seitsme sillaga ühendatud olid. Legendi järgi olevat poisikese-põlvne Immanuel Kant olnud see, kellel ei õnnestunud leida oma jalutuskäikudel marsruuti, mis läbiks kõik sillad, neist igat üht vaid üks kord ületades. Asja vastu tundis huvi L. Euler. Konstrueerides teede originaalse skeemi, tõestas ta, et sellist marsruuti ei eksisteeri. Selle tulemuse avalikustas ta 26. augustil 1735. Aasta hiljem ilmus see artikli – "probleemi selgitamisest geomeetria põhjal" [Euler, 1736] – näol. Niisiis toimus see 20 aastat enne W. A. Mozarti sündi. Selliseid skeeme käsitles Euler veel ka oma töödes 1750, 1752 ja 1759 aastal.

Need Euleri tulemused jäid pikemaks ajaks unustusse ning graafe on korduvalt „uuesti avastatud". Nii avastas need G. R. Kirchhof [1847] oma elektrivõrkude ning A. Caley [1857] orgaaniliste isomeeride alastes uuringutes. Sõna "graaf" võttis esimesena kasutusele J. J. Sylvester [1878] keemiliste struktuurvalemite kujutamisel.

N. L. Briggs jt. [1986] on leidnud üle 250 ajavahemikus 1736-1936 ilmunud graafe puudutava artikli ning fikseerinud neis kümme erinevat käsitlust nagu *teed, ringid, puud, „keemilised" graafid, Euleri valem hulktahukast, neljavärvi probleem (alustus), kaardivärvimine, algebra ja topoloogia ideed, neljavärvi probleem (XX sajani alguses), ja faktoriseerimine.* Autorite hulgas esinevad sellised tuntud nimed nagu G. D. Birkhoff (4 artiklit), A. Caley (16 artiklit), G. R. Kirchhof, E. Krahn (Tartu Ülikool!), P. T. Krikman (5 artiklit), K. Kuratowski, D. König (8), J. J. Petersen (3), G. Polya (4), H. Weil, H. Whitney (13). Tähtsaim on siin D. Königi [1936] saksakeelne monograafia, millesse oli koondatud kõik selleks ajaks teadaolev ning autori poolt edasi arendatu. Seda oopust loeme graafiteooria, kui terviku, alustuseks. Selle kordustrükk ilmus ka veel 1950 ning ingliskeelne tõlge alles 1990.

Esimesed järgijad olid C. Berge [1958] ja O. Ore [1962]. Nendes domineerib rakenduslik külg. Silmapaistvad on Frank Harary [1969], B. Bollobas'i [1979], W. T. Tutte [1984], A. Chartrand ja L. Lesniak'i [1986] ning A. Zykovi [1987, 2004] klassikalised monograafiad. Graafiteooria arenedes tekib ka erinevaid lähenemisviise. L. Collatz ja U. Sinogowitz [1957] rajasid *spektraalse graafiteooria* alused. P. Erdös esitas *juhuslike* [1961] ja *ekstremaalse graafiteooria* [1967] alused. N. L. Biggs [1974] avaldas *algebralise graafiteooria* alase monograafia. N. Cristofides'e [1975] monograafiaga loodi alus *algoritmilisele graafiteooriale.* C. Hoffman [1982] käsitles isomorfismi-probleemi *rühmateooria* seisukohalt. D. Archdeacon ja U. Vermont edendavad *topoloogilist graafiteooriat* ning E. Scheinerman jt *fraktaalset graafiteooriat.* J. Gross ja J. Yellen [1999] leiavad, et graafiteooria on *arvutiteaduse* osa. R. Thomas viljeleb *struktuurset graafiteooriat*, kus paraku struktuur kui niisugune küll määratlematuks jääb. Nii mõnigi nendest spetsiifilistest graafiteooriatest on graafidele „teistmoodi lähenemise" tagajärg. Ka graafide struktuurisemiootiline käsitlus on omamoodi lähenemise tulemus.

Aastatel 1936 kuni 2008, st pärast graafiteooria teket, ilmunud kirjanduse kohta puudub täpne teave. A. Chartrand ja L. Lesniak'i [1996] on fikseerinud 70 ajavahemikus 1936-1996 ilmunud, peamiselt inglise, saksa ja venekeelset monograafiat. Tegelikult on neid muidugi palju rohkem. Artikli-tuhandete arv on tabamatu

Kuni tänapäevani domineerib graafiteooria generaalliinis teatud "königsberglik käsitlus", mis avaldub erilises huvis ikka ja jälle just *marsruutide, teede, tsüklite, suunatud, Euleri- ja Hamiltoni graafide ning võrkudes olevate voogude* vastu. Paraku on graafide *süsteemne, struktuurne ja sümmeetriaomaduste* käsitlemine jäänud tahaplaanile.

Graafiteooriast Eestis.

Eesti matemaatikute esimesed jõukatsumised graafiteooria alal toimusid arvatavasti nelja-värvi-probleemi kallal. 1927. aastal avaldas matemaatikaprofessor Jaan Sarv neljavärviprobleemile pühendatud artikli. Paar aastat hiljem publitseeris professor Jüri Nuut ulatusliku sarja artikleid (kokku ligi 200 lehekülge), milles käsitles selle probleemiga seotud aritmeetikaküsimusi. Pikka aega tegeles neljavärviprobleemiga professor Hermann Jaakson. 1932. aastal avaldas artikli neljavärviprobleemi positiivse lahenduse tõenäosusest Edgar Krahn. Professorid Sarv, Nuut ja Jaakson tegid selle probleemi lahendamiseks pika aja jooksul tõsiseid jõupingutusi. Ka professor Mati Kilp'i [1984] raamat on pühendatud neljavärviprobleemile.

Graafiteooriale pühendatud artikleid ilmus aastatel 1964-1975 ilmavalgust näinud kogumikus „Matemaatika ja kaasaeg". Graafiteooriat on lühidalt käsitlenud oma raamatus „Arvudeta matemaatika" Tartu matemaatik Jevgeni Gabovitš [1968]. Graafiteooriat on käsitletud mitmesugustes diskreetse matemaatika alastes õppematerjales. Esimene eestikeelne monograafia graafiteooriast ilmus 1976. aastal O. Ore „Graafid ja nende kasutamine" (tõlk. Mati Kilp) näol.

Esimene graafiteooria rakendusi käsitlev põhjalik oopus „Lineaarsete ahelate teooria" (paraku venekeelne) ilmus 1968. aastal, tolleaegse TPI teaduri Vello Kuke sulest. Paljud mäletavad veel möödunud sajandi seitsmekümnendail toimunud graafiteooria rakenduste buumi nn „võrkplaneerimise" sildi all. Graafide rakenduste, ja mitte ainult nende, vastu tundis suurt huvi automaatikaprofessor Hanno Sillamaa (1928-2003), graafidele truuks on truuks jäänud elektrivõrkude arendamise *grand old man* Lembit Krumm. Teadaolevalt on meil graafiteooriat rakendatud ja rakendatakse krüptograafia, sidetehnika ja ökoloogia valdkondades.

Graafiteooria edendamisele Eestis on kaasa aidanud graafiteooria suure tegija *distinguished professor* Frank Harary maaletoomine 1989. aastal tollase TA Tallinna Botaanikaaia ettevõtmisel. F. Harary esimene loeng toimus Botaanikaaias 22. mail Odessa/Kishineu, Minski, Kaunase, Riia ja Tartu „koolkondade" tunnustatud esindajatele. Järgnevatel päevadel pidas ta loenguid Küberneetika Instituudis ning Tallinna, Riia, Kaunase ja Vilniuse Tehnikaülikoolides.

Juba suurejoonelisem oli Frank Harary 70. sünnipäevale pühendatud "The First Estonian Conference on Graphs and Applications", mis toimus Käärikul 12.-19. mail 1991 Tartu Ülikooli poolt korraldatuna. Osavõtjaid oli USAst, Austriast, Soomest, Lätist, Leedust, Valgevenest, Ukrainast ja Venemaalt. Kohal olid pea kõik Harary esimesest, Botaanikaaia seminarist, osavõtjad. Ilmus ka artiklite kogumik. Harary kolmas ja viimane esinemiste tuur toimus jälle Botaanikaaia korraldamisel 1993. aastal, mil ta huvitus jaaniõhtust Aegna saarel ning tegi ettekandeid disainifirmas "Graaf", Tallinna Tehnikaülikoolis ja Tartu Ülikoolis.

Käesoleval hetkel esindavad eestikeelset graafiteooriat Peeter Puusempa loengukonspekt [2000] ja Ahto Buldas, Peeter Laud ja Jan Willemsoni õpik „Graafid" [2003]. Artiklite kohta puudub täpsem teave, kuid teadaolevalt on graafiteooriat käsitletud uurimis-rühma S.E.R.R. väljaannetes [1999-2008] ja Leo Võhandu artiklites [2001, 2007]. Eestis on graafiteooria baasil kaitstud ka doktori väitekirju, näiteks, Leo Võhandu suunamisel on seda teinud Ahto Buldas. Ära märkida tuleks ka Denis Kumlanderi tööd praktiliste algoritmide alal.

Äramärkimist väärib struktuurisemiootikute initsiatiivil 2006. a. septembris toimunud Eesti Teine Graafide ja Rakenduste Konverents, mis oli pühendatud graafide 270 ja graafiteooria 70[ndale] tekke-aastale. Sellest osavõtjaid oli ka Indiast ja Soomest. Euroülikooli ajakirja *Horizons* baasil ilmus konverentsi artiklite kogumik. Graafide üksikprobleemidele pühendatud üritusi korraldatakse aegajalt mitmes kohas.

Eesti „graafiteoreetilist arusaamist" iseloomustavad ka kodulehed. Näiteks, Mati Littoveri koduleht www.cc.ioc.ee/gtglossary_est.htm kujutab endast väga korralikku eesti-inglise-eesti graafiteooria seletavat sõnaraamatut. Koduleht www graphs.ee esitab graafide struktuurisemiootilise käsitluse aluseid, arendusi ja rakendusi, selles on tegemist graafide „järjekordse uuestiavastamisega". Hulgaliselt esineb ka tudengite turgutamiseks mõeldud kodulehti.

Graafiteooriast internetis.

Kui graafiteooria üksikartiklite kohta on raske mingit koondülevaadet saada, siis kodulehed on internetis „luubi all" ning andmed nende kohta koondatud vastavatesse portaalidesse. Kui esitada suvalisele otsingumootorile üldsõnaline päring „graph theory" saame kümneid tuhandeid vastuseid, milles on raske otsitavat tabada. Kui esitada päring graafiteooria kodulehtede kohta, saame kodulehtede teatud „top" nimekirja. Neid ei moodustata mitte automaatse surfamise teel, vaid on toimetatud. Peaaegu kõik sellistes nimekirjades esitatud kodulehed kuuluvad nn „top 20'sse", mis praeguseks on kasvanud „top 28'ks". Nendes esineb ka Teveti www.graphs.ee. Võib leida ka seitsme-palli-süsteemis hinnatud ja selle alusel järjestatud nimekirju.

Kodulehtede temaatika on „seinast seina". Ainukene graafiteooriat tervikuna hõlmav koduleht on *Other Graph Theory and Related Pages* (http://www.math.fau.edu/locke/graphoth.htm). Graafiteoreetikute

„jututuba” on *Graphnet* (http://listserv.nodak.edu/archives/graphnet.html). Seal arutatakse aktuaalseid probleeme ning esitatakse küsimusi ja konverentsikuulutusi. Graphnet on kõigile avatud tribüün, kus paraku domineerivad Zürichi Tehnikakõrgkooli ja Põhja-Dokata Ülikooli teadurid. Jörg Zuther (www.joergzuther.de/math/graph/ homes.html) haldab ca poole tuhande graafiteoreetiku kodulehe süstematiseeritud loetelu. Ühtteist leidub ka kodulehes http://mathworld.wolfram.com/Graphs.

Kodulehti haldavad ja korrastavad ka mõned ajakirjad. Näiteks „Journal of Graph Theory”, kuhu püüab pürgida iga endast lugupidav graafiteoreetik, on artikli maht ajakirjas viidud miinimumini, tervikut võib näha vaid nende vastaval koduleheküljel. Meie Rahvusraamatukogu on digitaalarhiivs www.nlib.digar.ee on ülesse riputet ka rida SERRi teavikke, sh käesolev. On kodulehti, mis on pühendatud suurtele tegijatele, näiteks Claude Berg'ile.

Quo vadis graafiteooria?

Graafiteooria uurimisobjektiks on graaf, mis on defineeritud kui moodustis mittetühjast hulgast V ja selle hulga elemendipaaridest E, $E \subset V \times V$, mida naabertippudeks nimetatakse. Niisugust moodustist võib käsitleda väga erinevatest aspektidest. Ajalooliselt on välja kujunenud nii, et eelkõige huvitutakse naabertippude poolt moodustatud teede, marsruutide, tsüklite jt taoliste osiste vastu. Oluliseks peetakse ka graafi kõiki servi või kõiki tippe läbivaid teid sisaldavate (vastavalt Euleri ja Hamiltoni) graafide käsitlemist. Graafiteooria saavutusi hinnatakse peamiselt nende rakendatavuse järgi praktiliste ülesannete lahendamisel. Näiteks, teedele kinnistatud voogude baasil on graafiteooriasse tekkinud valdkond, mida "elektrivõrkudeks" nimetatakse [B. Bollobas 1998]. Teisest küljest on graafiteoorias ülesandeid, mis seni lahendamata on või olemasolevaid lahendusi ei peeta korrektseks. K. Appeli ja W. Hakeni [1976] poolt esitatud neljavärviprobleemi tõestust ei peeta enam korrektseks ning praegu esitatakse selle uusi tõestusviise, arvutit kasutamata [Pirzada, S., Dharwadker, A. 2008]. Isomorfismiprobleem, mille lahendamiskatsete buum toimus möödunud sajandi kaheksakümnendail, on praegu kõrvale heidetud. Ulami hüpoteesi all tuntud taastatavusega tegeleb suur hulk uurijaid, kuid kõigi poolt aktsepteeritav üldine lahendus puudub tänapäevani.

Graafiteooria on graafide uurimistulemuste kogumi tinglik nimetus. Sinna alla mahub ka tuhandete publikatsioonide ja väitekirjade mosaiik. Graafiteooriat, kui tervikut esitama pretendeerivaisse monograafiatesse imbuvad sellest mosaiigist vähesed. Kokku on lepitud baasterminoloogias ning püütakse reglementeerida graafide käsitlemise aspekte. Aja jooksul on graafiteooria hargnenud ning praegu eksisteerivad ka ***algebraline, algoritmiline, ekstreemne, fraktaalne, juhuslike, spektraalne, struktuurne*** ja ***topoloogiline graafiteooria.*** C. Berge [1970] peab graafiteooriat "binaarsuhete teooriaks". See mõte on lähedane struktuurisemiootilise lähenemise arusaamaga "paaride süsteemi teooriast". Iga monograafia autor esitab oma nägemuse graafidest, püüdes jääda aktsepteeritud aspektide, reglementeeritud probleemide ja kokkulepitud terminoloogia raamesse. Tegelikult areneb ja laieneb graafiteooria stiihiliselt ega oma mingit "generaalplaani". Arendavaks jõuks on kas „sotsiaalne tellimus" või puhas uudishimu. Nagu teisedki, nii jaguneb ka graafiteooria kool- ja vennaskondadeks ning institutsioonideks.

Kui Euler 1736 aastal oma kuulsa skeemi koostas, mida 200 aastat hiljem graafiks nimetati, oli ta veendunud, et tegeleb geomeetria ülesandega. Mõned peavad praegugi graafiteooriat diskreetse matemaatika osaks, mille eripäraks olevatki objektide geomeetriline käsitlemine [V. Aleksejev jt 1977]. Tõepoolest, graafiteoorias esineb hulk geomeetrilisi termineid. Graafide loendamine rajaneb puhtalt kombinatoorikal. Ka topoloogia mõisteid esineb küllaldaselt. R. Busacker'i ja T. Saaty [1965] on veendunud, et graafid on matemaatiliselt kirjeldatavad just topoloogia baasil. Algebraga on asi keerulisem. Graafide sümmeetria ülesandeid on lahendatud rühmateooria abil, kasutades selleks permutatsioonide kombinatoorikat. Paraku on see küllalti mahukaks ja keerukaks tegevuseks osutunud. Isomorfismiprobleemi on rühmateooria seisukohalt käsitlenud C. Hoffmann [1982] väites, et rühmade "struktuur" sarnanevat isomorfismiprobleemile. Paraku jääb see sarnasus kõrvaltvaatajale raskelt tabatavaks.

Algoritmidest graafide käsitlemisel ei pääse. "Algoritmibuum" algas ilmselt N. Chirtofides'e monograafia ilmumisega 1975. aastal. See kestab edasi, alles hiljuti ilmus seesama monograafia uuesti. J. Gross ja J. Yellen [1999] peavad graafe arvutiteaduse objektideks. Selline seisukoht on küllaltki levinud. S. Pemmaraju ja S. Skiena [2003] pakuvad arvutiprogramme graafide käsitlemiseks. Ka graafide struktuurisemiootiline käsitlus realiseeritakse algoritmide baasil.

Graafiteooria staatusest

Üks kõrgelt kvalifitseeritud seltskond on analüüsinud Mathematical Reviews (MR) ja Zentralblatt MATH (Zbl) andmebaase ning selle alusel koostanud „2000 Mathematics Subject Classification" (MSC2000) kus sellist subjekti nagu *graafiteooria* ei eksisteerigi. Selles, 97 subjekti sisaldavas loetelus leiame küll nii numbri- kui ka väljateooria, diferentsiaalgeomeetria, üldise topoloogia, arvutiteaduse, rühmateooria, … kui ka astronoomia, mängu- ja elektromagneetika teooria ning geofüüsika, kuid graafiteooriat mitte. Siiski, 05 all leiame *Combinatorics* olemasolu, mille sees, nö teises ringis 05C esineb ka graafide atribuute nagu näiteks, 05C38 – *paths and cycles*, 05C40 – *connectivity*, 05C60 – *isomorphism and reconstruction*, 05C62 – *structural graph presentation* (nimi sobib mulle suurepäraselt, kuid pole aimu mida nad selle all mõtlevad), 05C85 – *graph algorithms* jt. Graafiteooriat kui niisugust ei esine ka teises ringis. Ka klikke ei leidu. 05C all käsitletud orbiidid on hoopis midagi muud kui graafidega seonduv. See, et MSC2000 loetelu just niisugune on, pole midagi imestada, sest ilmselt esineb MR's ja Zbl's graafidega seotut vähem kui näiteks *potential theory* (31), *several complex variables* (32), *special functions* (33) jt. Ilmselt pole graafiteooria tervikuna millegagi silma paistnud. Selles tohuvabohus ei jäägi muud üle kui oma spetsiifilist graafide käsitlust struktuurisemiootikaks nimetada. Ja ega selles nö „pärismatemaatika" ei domineerigi.

Graafiteooria ajaloolisi tegijaid

Meenutame siin vaid kolme. 2011. a. möödub 275 aastat kui **Leonhard Euler** (1707-1783), Šveitsi matemaatik ja füüsik, tollal Peterburi Teaduste Akadeemia liige tuntud "Königsbergi marssruudi" ülesande lahendamiseks skeemi koostas, mida hiljem graafiks nimetama hakati. „Graafide teooria" tekkeni kulus siiski kakssada aastat, enne kui **Dénes König** (1884-1944) selle kirja pani. Meenutada tuleks ka Eestiga sidemeis olnud graafiteooria *grand old man'*i, esimese laialt levinud graafiteooria õpiku autorit **Frank Harary**'t (1921-2005), kes 2011. a. oleks saanud 90 aastaseks.

Leonhard Euler sündis Baselis 15. aprillil 1707 ja suri St. Petersburgis 18. septembril 1783. Ta on XVIII sajandi suurim matemaatik ja teda peetakse üldse kõigi aegade suurimaks. Guinnessi rekordite raamatus on tituleeritud üheks kõige nominentsemaks isikuks ja tema kogutud teoseid on välja antud ligemale 80 kõites. L. Euleri isa oli kalvanistist pastor, kes soovis et ka tema poeg kirikus karjääri teeks. Nii astuski Euler Baseli Ülikooli teoloogiat ja heebrea keelt õppima. Kuid kõik läks teisiti. 1727 a. võeti ta Peterburi Akadeemia meditsiinisektsiooni liikmeks. Kuus aastat hiljem kinnitati ta perekonnatuttava Daniel Bernoulli eestkostel matemaatikasektsiooni liikmeks. Ta töötas nii Peterburgis kui ka Berliinis. L. Euler arendas olulisi kontseptsioone ja andis tõestusi erinevates valdkondades, numbriteooriast kuni topoloogiani. Oma töödes arendas ta matemaatilist terminoloogiat, sh sõnastas matemaatilise funktsiooni mõiste.

Dénes König on esimese graafiteooria alase monograafia kirja panija. Ta sündis Budapestis 21. septembril 1884 ja suri 19. oktoobril 1944. Aastal 1907 omandas ta doktorikraadi ja ühines Budapesti Tehnilise Kõrgkooli matemaatikateaduskonnaga. Täisprofessoriks sai ta 1935. aastal. Dénes König oli matemaatiku Julius Königi poeg, ta oli oma isa monograafia „Loogika, aritmeetika ja hulgateooria alused" toimetaja. Ta suri traagiliselt suitsiidi tagajärjel. Tema põhiteos: Denés König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936. The first graph theory textbook. Translated from German by Richard McCoart, *Theory of finite and infinite graphs*, Birkhauser, 1990.

Frank Harary sündis 11. märtsil 1921 a. New York City's ja suri 4. jaanuaril 2005. a. Las Crouses. Tema viljakad loominguaastad möödusid Michigani Ülikooli matemaatikaprofessorina töötades. Ta on avaldanud esimese laialt levinud ja tõlgitud graafiteooria monograafia ning sadu graafiteooriat käsitlevat artiklit. Aastast 1987 kuni surmani töötas ta New Mexico State University's. Frank Harary CV on mahukas. Ta on avaldanud 7 raamatut, 700 artiklit, millest pooled on kirjutatud 288 kaasautoriga, käsitlenud 36 eriala (matemaatikast muusikani ja keemiast psühholoogiani), külastatud 72 riiki ja 440 linna, osalenud 19 toimetuskolleegiumis, 49 ühingus. Ta on toimetanud 8 raamatut, sooritanud 49 külastustuuri ja –professuuri ja omandanud 24 auhinda. Ta võis pidada loenguid neljas euroopa keeles ja teda on ära märgitud üheksas kes-on-kes-tüüpi teoses. Eestisse tuli ta tulevaste struktuurisemiootikute kutsel esmakordselt 1989. aastal. 1991. a. toimus Käärikul Esimene Eesti Graafide ja Rakenduste Konverents, mis oli pühendatud F. Harary 70. sünnipäevale. Tema kolmas ja viimane külalisloengute turnee oli 1993. aastal.

Struktuurisemiootika

Määratlus

Struktuurisemiootika on uurimissuund *graafiteooria* ja *semiootika* piirimail, mis uurib *struktuuri* kui niisugust. Semiootika aspektist on struktuuri semiootika üks paljudest objekt orienteeritud semiootikatest. Struktuurisemiootika (i.k. semiotics of the structure) on heuristiliste meetodite kogum struktuuri ja selle omaduste uurimiseks [Tevet, 1999 kuni 2008].

Selgitusi

Mõiste "struktuur" on aja jooksul kujunenud käibesõnaks, mille sisu on ähmastunud. Klassikaliselt on struktuur määratletav kui diskreetse, elementidest (osistest) koosneva objekti universaalne omadus olla oma (sisemiste) seoste kaudu organiseeritud. Organiseerituse aspektist on elemendid minetanud oma empiirilised tähendused, kuid esile kerkivad erinevused nende "positsioonide" näol struktuuris. Süsteemiteoreetikud on väitnud, et struktuuri eksplikaadiks (äraseletajaks) on *graaf*. Elementide ühesugused positsioonid tähendavad siin graafi tippude *orbiite*.

Struktuur on seotud graafide *isomorfismiga*. Kui graafid on isomorfsed, siis on nende struktuurid identsed, st isomorfsed graafid omavad üht ja sedasama struktuuri. Isomorfismi tuvastamine ei tähenda aga veel struktuuri tuvastamist, see tähendab vaid struktuuride identsuse kindlaksmääramist.

Ülesanded

Struktuuri *üldise tähenduse* lahti harutamine ja tõlgendamine.

Struktuuri esitavate *märkide* uurimine, nende *süsteemi* korraldamine ning nende töötlemise *algoritmide* konstrueerimine.

Struktuuri ja selle omadusi *tuvastava* ja *esitava atribuudi* konstrueerimine.

Struktuursete omaduste uurimine.

Meetodist

Graafi tipupaaride identifitseerimine (eristamine) toimub neid iseloomustavate *paari- ehk binaarmärkide* alusel.

Struktuuri tuvastav ja esitav *märgimaatriks* ***W*** kujutab endast *isomorfsete graafide täielikku invarianti*.

Struktuuri uurimine tähendab seda tuvastava ja esitava atribuudi, st *märgimaatriksi uurimist*. Seda on otstarbekas teha paralleelselt koos selle täiendiga.

Struktuurisemiootilist lähenemist, meetodit, võib võtta ka kui *binaaride (graafi tipupaaride) süsteemkäsitlust*.

Tulemusi

Struktuurisemiootika omistab mõistele „struktuur” omase kindla tähenduse ja sisu. Struktuurisemiootiline lähenemine avab graafiteoorias seni vähe käsitletud või märkamatuks jäänud struktuurseid omadusi:

Struktuur tervikuna on tuvastatav märgimaatriksi ***W*** näol. Binaarmärgid maatriksis ***W*** tuvastavad tipupaari omavahelise *sidususe, kauguse*, nende kuuluvuse *fikseeritud pikkusega ringi (tsüklisse)* või *fikseeritud võimsusega klikki*.

Graafide *isomorfismi* tuvastamine, kui niisugune, kätkeb struktuuride identsuses, st vastavate *märgimaatriksite ekvivalentsuse* lihtsas fikseerimises.

Struktuuri *sümmeetriaomadused (orbiidid)* on märgimaatriksis tuvastatavad ja uuritavad binaarmärgi klasside alusel. See lihtne moodus asendab ja katab nende tavapärast käsitlemist *automorfismirühmade Aut**G*** abil. Tuvastatavad on nii tipu- kui ka tipupaari orbiidid, sh viimase puhul serva- ja “mitteserva” orbiidid.

Igale tipupaari orbiidile (binaarorbiidile) vastab üks *orbiitstruktuur* ja üks *naaberstruktuur*. Orbiitstruktuuri moodustavad sinna kuuluvad tipupaarid. Naaberstruktuur saadakse serva eemaldamisel või lisamisel orbiiti kuuluva tipupaari vahele.

Orbiitstruktuurid avavad *struktuuri „varjatud"omadusi.* Nende abil on õnnestunud edasi arendada näiteks *aluselisusega* seotud ülesandeid.

Sümmeetriatunnuste (graafi orbiitide arvu ja nende võimsuste) baasil on välja töötatud sümmeetriaomaduste klassifikatsioon. Esitatakse moodus sümmeetria *mõõtmiseks*.

On avanenud võimalus tuvastada peale tava- (valents-), distants- ja tugevregulaarsuse ka veel *ring- ja klikkregulaarsus*.

On fikseeritud uusi seaduspärasusi *sümmeetriaomaduste ja tugevregulaarsuse* vahel.

Struktuuri *taastatavust* ei käsitleta Ulami hüpoteesi arusaamade valguses, see on seotud struktuursete *elementaar-muutustega*, naaberstruktuure taastavate orbiitidega.

On esitatud *struktuuride süsteemi* käsitlevad seaduspärasused. Struktuuride süsteem kujutab endast naaberstruktuuride naaberstruktuuride … korrastatud süsteemi.

Struktuur on *kvalitatiivne nähtus*, mis ainukvantitatiivselt püüdmatu näib olevat [http://www.graphs.ee].

<u>Organisatsiooniline külg</u>

1999. aastal moodustati MTÜ Struktuurisemiootika Edendamise ja Rakenduse Rühm (S.E.R.R.). Euroülikooli egiidi all on korraldatud seni 31 seminari ja S.E.R.R. on välja andnud 25 teavikku.

2006. aastal alustati struktuurisemiootika alast koostööd india matemaatikutega.

MÄRGIMAATRIKSIST VÄLJALOETAVAID STRUKTUURSEID ATRIBUUTE

Binaarorbiidid

Struktuur jaguneb tipu- ja tipupaari orbiitideks. ***Orbiit*** on rühmateooria mõiste ja see vajab siin selgitust. Struktuuri säilitavat tippude või tipupaaride substitutsiooni (permutatsiooni) nimetatakse ***automorfismiks*** α. Seda tõlgendatakse kui *lokaalset isomorfismi (isomorfismi iseendasse)*. Automorfismid moodustavad graafi automorfismirühma *Aut****G.*** Permutatsioonitehnika võtetega fikseeritakse selles rühmas *automorfismide transitiivsuspiirkonnad ehk orbiidid* Ω, mille elemente peetakse "ühesugusteks". *Aut****G*** puhul huvitutakse peamiselt tipuorbiitidest.

Struktuuri identifitseerimisel lähtume selle elementaarosisest, milleks on elemendipaare (tipupaare) v_i, v_j eristav struktuuriosis. Määratleme selle:

Propositsioon 1. Alamgraafi, mis kujutab endast graafi elementide (tippude) v_i ja v_j vahelise kaugusega piiratud ümbruste ühisosa nimetame ***paari-*** ehk ***binaargraafiks*** g_{ij}.

Järeldus 1. Kuna orbiit on automorfismide transitiivsuspiirkond ja automorfismid on seotud lokaalsete isomorfismidega, siis on ka *binaargraafide isomorfismiklass* $\{g_{ij1} \cong g_{ij2} \cong \ldots \cong g_{ijq}\} \subset GS$ seotud *binaarorbiidiga*. Isomorfismiklassi võib tõlgendada kui "isomorfismide transitiivsuspiirkonda", mis on määratud orbiiti kuuluvate paaride hulgaga. Niisiis, isomorfism $g_{ij1} \cong g_{ij2}$ vastab paari automorfismile, isomorfismiklass aga ***binaarorbiidile*** ΩR_n, mida me ka paari ***ekvivalentsus- või sümmeetriaklassiks*** peame [Tevet, 2006c].

Järeldused 2. Rühmateoreetilise ja struktuurse käsitluse erinevustest ja kokkulangevusest orbiitide tuvastamisel:

- **a)** Rühmateoreetiline orbiidituvastus toimub graafi "figuuri-pööramis-operatsioonide" transitiivsuse kindlaksmääramise teel, struktuurne käsitlus rajaneb binaartunnuste ekvivalentsusklassidel.
- **b)** Rühmateoreetilise orbiidituvastuse korral toimub tipu- ja servaorbiitide tuvastamine eraldi ning "mitteserva" orbiitide tuvastamist ei tunta.
- **c)** Rühmateoreetilise orbiidituvastuse korral võib sümmeetriliste graafide puhul üksikoperatsioonide arv ulatuda faktoriaalini, struktuursel käsitlusel seda ei juhtu.
- **d)** Struktuurne orbiidituvastus on lihtne, see rajaneb lokaalsete invariantide, st *binaargraafe esitavate binaarmärkide* $\pm d.n.q$ *eristamisel* märgimaatriksis ***W.***
- **e)** Erinevate struktuuridega graafid võivad omada üht ja sama rühma ***AutG***, st ühesuguseid sümmeetriaomadusi, kuid omavad erinevaid märgimaatrikseid ***W.***
- **e)** Nii rühmateoreetilisel kui ka struktuursel käsitlusel tuvastatud orbiidid langevad kokku!

Suvalise graafi automorfismirühma kindlakstegemist peetakse keeruliseks ülesandeks, väidetakse koguni, et nende tuvastamise efektiivseid algoritme ei olevat olemas. Orbiitide käsitlemist peetakse siiamaani ikka veel graafiteooria ääremail olevaks.

Binaargraafid ning nende binaarmärgid ei ole alati piisavad selleks, et identifitseerida tipupaare. Tipupaaride täielikuks identifitseerimiseks kasutame vajadusel täiendavaid funktsioone, nende hulgas ka seosmaatriksite astendamist [Tevet, 2006c].

Propositsioon 2. Seosmaatriksite astendamine, st nende korrutamine iseendaga astmeni n, kus seosmaatriksi ***erinevate väärtuste*** arv elementide hulgas (st erinevate „multiplikatiivsete binaartmärlide" arv) on maksimaalne (st edasine astendamine seda arvu ei suurenda), on hea abivahend esimest järku struktuursete binaarmärkide täpsustamisel (ilmutamisel).

Järeldus 3. „Multiplikatiivne" täpsustamine kujutab endast binaarmärgile ***±d.n.q*** viienda positsiooni lisamist, ***±d.n.q.m.*** Sisuliselt tähendab see mingi *kõrgemat järku binaargraafi olemasolu*, millede isomorfismiklass tuvastab binaarorbiidi.

„Multiplikatiivsed binaarmärgid" ise, vastupidiselt struktuursetele, ei sisalda mingit teavet, kuid aitavad eristada ühesuguseid struktuurseid binaarmärke [Tevet, 2007c].

Väidetakse, et *n*-astme seosmaatriksi elemendid kajastavat tipupaari vahelist pikimat lihtahelat (teed) graafis. Struktuursest aspektist tekib siin rida küsitavusi. Mida kujutavad endast seosmaatriksi peadiagonaali nullide kohale tekkivad arvud (arvväärtused)? Miks suureneb korduval astendamisel eristavate arvväärtuste arv? Miks muutuvad teatud astmel *n* osa maatriksi elemente nullideks? See „müstika" ei kahanda muidugi selle meetodi praktilise kasutamise mõttekust.

Orbiit- ja märgistruktuurid

Orbiit- ja märgistruktuurid on seotud struktuuri orbiitide ja binaarmärkidega ning kujutavad endast struktuuri osiseid. Graafi struktuur on üldisem mõiste kui graaf. Kasutame järgnevas mõlemaid.

Orbiitstruktuurid

Orbiitstruktuuri puhul on vaatluse all sümmeetriaomadustega, selle tipu-, serva- (naabertipupaari-) ja „mitteserva"- (mittenaaber tipupaari-) orbiitidega seonduvad ilmingud. Viimaseid kahte nimetame binaarorbiitideks.

Propositsioon 3. Graafi, mille kõik servad kuuluvad ühte binaarorbiiti ΩR_n on ***orbiitgraaf*** G_n.

Orbiitgraafil, teisisõnu, ühe servaorbiidiga graafil on graafiteoorias mitu nime. Seda on nimetatud *servadest transitiivseks, servadest sümmeetriliseks* või lihtsalt *sümmeetriliseks graafiks.* Antud juhul on vaatluse all hoopis *graafide dekomponeerimine orbiitgraafideks.*

Täisgraaf on orbiitgraaf, mis ei oma teisi orbiitgraafe. Bisümmeetriline graaf on orbiitgraaf, mis omab veel üht *potentsiaalset orbiitgraafi* oma *täiendi* näol. Monosümmeetriline graaf on orbiitgraaf ja omab veel mitut potentsiaalset oma binaar(-)orbiitide näol, mis kujutavad endast selle *täiendi* osagraafe. Monosümmeetrilise graafi täiend on polüsümmeetriline. Polüsümmeetrilise graafi servad kuuluvad rohkem kui ühte binaarorbiiti. Nii polü- kui ka ositi sümmeetrilised graafid koosnevad mitmetest binaar(+)- ja (–)orbiitidest ning omavad nende näol mitu *potentsiaalset orbiitgraafi*. Polüsümmeetrilise graafi servaorbiitidele (binaar(+)orbiitidele) vastavad orbiitgraafid on selle osagraafid, „mitteserva" orbiitidele (binaar(–)orbiitidele) vastavad aga selle *täiendi* osagraafid.

Servadest sümmeetriliste graafide osakaal kõikide graafide hulgas on kaduvväike, kuid nad esinevad kõikjal nende hulgas orbiidsete osagraafidena.

Järeldus 4. Graafi igale binaarorbiidile ΩR_n vastab üks orbiitgraaf G_n.

Bi-, mono- ja polüsümmeetriliste graafide orbiitgraafid hõlmavad graafi kõiki tippe. Ositi sümmeetriliste graafide omad aga vaid ühte tipuorbiiti kuuluvaid tippe. *0*-sümmeetrilise graafi ja selle täiendi orbiitgraafid kujutavad endast *2*-klikke. Huvi pakuvad eelkõige muidugi sümmeetriliste graafide orbiitgraafid.

Järeldus 5. Kõik orbiitgraafid on servadest sümmeetrilised, st kas mono- või bisümmeetrilised.

Alustagem ühe lihtsa orbiitgraafiga, *10*-ringiga.

Näide 1. Monosümmeetrilise graafi ***ZE2*** binaarmärgid, märgimaatriks ja orbiitgraafid G_n:

`A:-5.10.10; B:-4.5.4; C:-3.4.3; D:-2.3.2;` **`E:+9.10.10.`**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*i*	*ABCD***E**	**Orb**	1
0	**E**	-D	-C	-B	-A	-B	-C	-D	**E**	**1**	*1222***2**	1	2
	0	**E**	-D	-C	-B	-A	-B	-C	-D	**2**	*1222***2**	1	2
		0	**E**	-D	-C	-B	-A	-B	-C	**3**	*1222***2**	1	2
			0	**E**	-D	-C	-B	-A	-B	**4**	*1222***2**	1	2
				0	**E**	-D	-C	-B	-A	**5**	*1222***2**	1	2
					0	**E**	-D	-C	-B	**6**	*1222***2**	1	2
						0	**E**	-D	-C	**7**	*1222***2**	1	2
							0	**E**	D	**8**	*1222***2**	1	2
								0	**E**	**9**	*1222***2**	1	2
									0	**10**	*1222***2**	1	2

Monosümmeetriline ***ZE2*** kui 10-ring omab orbiitgraafe märkide *–A, –B, –C ja –D* näol, mis vastavad erinevatele kaugusteke *10*-ringi „mittenaabertippude” vahel.

Märgimaatriksit moodustamata, näeme et märgile *–A* vastab *2*-klikkidest koosnev *5*-komponentne orbiitgraaf. Ülejäänud märkidele vastavad orbiitgraafid on *2*-valentsed ning peavad kujutama ringe. Kuid milliseid?

Graafi ***ZE2*** märgile *–B* vastava *orbiitgraafi* $\boldsymbol{ZE2}_{n:-B}$ binaarmärgid ja märgimaatriksi fragment:

`A:-2.3.2; B: -0.2.0;` **`C: +4.5.5.`**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*i*	***ABC***	**Orb**	1
0	-B	-A	-B	**C**	-B	**C**	-B	-A	-B	**1**	*252*	1	2
	0	-B	-A	-B	**C**	-B	**C**	-B	-A	**2**	*252*	1	2
		0	-B	-A	-B	**C**	-B	**C**	-B	**3**	*252*	1	2

Märkide järgi on orbiitgraaf $\boldsymbol{ZE2}_{n:-B}$ mittesidus ja koosneb kahest *5*-ringist, üks paaris- ja teine paaritunumbriliste tippudega.

Graafi ***ZE2*** märgile *–C* vastava *orbiitgraafi* $\boldsymbol{ZE2}_{n:-C}$ binaar- ja *u*-märgid:

`A:-5.10.10; B:-4.5.4; C:-3.4.3; D:-2.3.2;` **`E:+9.10.10.`** **`u`**`=1.2.2.2.`**`2.`**

Märkide järgi on orbiitgraaf $\boldsymbol{ZE2}_{n:-C}$ *10*-ring ning osutub ***isomorfseks*** oma lähtegraafiga ***ZE2.***

Graafi ***ZE2*** märgile *–D* vastava *orbiitgraafi* $\boldsymbol{ZE2}_{n:-D}$ binaar- ja *u*-märgid:

`A:-2.3.2; B: -0.2.0;` **`C: +4.5.5.`** **`u`**`=2.5.`**`2.`**

Märkide järgi on orbiitgraaf $\boldsymbol{ZE2}_{n:-D}$ mittesidus ja koosneb kahest komponentsest *5*-ringist, ning on ***isomorfne*** orbiitgraafiga $\boldsymbol{ZE2}_{n:-B}$.

Järeldus 6. Graafi orbiitgraaf G_n olla isomorfne lähtegraafiga ***G***.

Järeldus 7. Graafi erinevad orbiitgraafid võivad osutuda isomorfseteks.

Järeldus 8. Orbiitgraafi G_n oma orbiitgraafid $G_{n,n}$ on lähtegraafi ***G*** suhtes nö *kõrgemat järku orbiitgraafid.*

Graafi ***ZE2*** *teist järku orbiitgraafi* **$ZE2_{n:-B,-A}$** binaartunnused ja märgimaatriks:

A:-2.3.2; B: -0.2.0; ***C: +4.5.5.***

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	i	ABC	Orb	1
0	-B	-A	-B	C	-B	C	-B	-A	-B	1	252	1	2
	0	-B	-A	-B	C	-B	C	-B	-A	2	252	1	2
		0	-B	-A	-B	C	-B	C	-B	3	252	1	2

Märkide järgi on teist järku orbiitgraaf **$ZE2_{n:-B,-A}$** mittesidus ja koosneb kahest komponentsest *5*-ringist. Antud juhul see ***langeb kokku*** esimest järku orbiitgraafiga **$ZE2_{n:-B}$**.

Järeldus 9. Kõrgemat järku orbiitgraafid võivad kokku langeda madalamat järku orbiitgraafiga.

Komponentse orbiitgraafi **$ZE2_{n:-B}$** orbiitgraaf märgi *–B* järgi **$ZE2_{n:-B,-B}$** on *5*-valentne. Märk *–B* on mittesidususe märk ehk „tühi koht” (see tähendab, et selle märgi kohal graafi *täiendis* on klikk).

Graafi ***ZE2*** *teist järku orbiitgraafi* **$ZE2_{n:-B,-B}$** binaartunnused ja märgimaatriks:

A:-2.7.10; ***B:+3.10.25.***

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	i	AB	Orb	1
0	B	-A	B	-A	B	-A	B	-A	B	1	45	1	5
	0	B	-A	B	-A	B	-A	B	-A	2	45	1	5
		0	B	-A	B	-A	B	-A	B	3	45	1	5
			0	B	-A	B	-A	B	-A	4	45	1	5
				0	B	-A	B	-A	B	5	45	1	5
					0	B	-A	B	-A	6	45	1	5
						0	B	-A	B	7	45	1	5
							0	B	–A	8	45	1	5
								0	B	9	45	1	5
									0	10	45	1	5

Teist järku orbiitgraaf **$ZE2_{n:-B,-B}$** on *bisümmeetriline,* märkide järgi *kahealuseline*, alustega antud juhul paaris- ja paaritunumbrilistest tippudest. See kujutab endast ***5-bi-klikki***, millest tuleb juttu järgmises peatükis, kus see esineb graafi ***B10-25*** all.

Mis kasu on orbiitgraafidest? Kas need iseloomustavad mingil määral oma lähtegraafi? Mis on ühist *10*-ring graafil ja selle teist järku orbiitgraafil **$ZE2_{n:-B,-B}$**? Iseloomustavaid omadusi on küll. Näiteks, *10*-ring on graaf, kus igal paarisnumbrilisel tipul on kaks paaritunumbrilist naabertippu. Sellest tulenevalt ka komponentsed *5*-ringid ja alused jne. Komplitseeritud graafide puhul ilmneb orbiitgraafide roll veelgi selgemalt.

Näide 2. Polüsümmeetrilise graafi ***KOH*** märgimaatriks ja selle graafi orbiitgraafid **G_n**:

*-A:-2.6.12; B:-2.4.5; -C:-2.3.2; +**D:+2.4.5; +E:+2.5.7.***

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	i	ABCDE	Orb	1
0	D	-C	-B	D	E	-A	-C	-C	-A	E	D	-B	-C	D	1	22442	1	6
	0	D	-C	-B	D	E	-A	-C	-C	-A	E	D	-B	-C	2	22442	1	6
		0	D	-C	-B	D	E	-A	-C	-C	-A	E	D	–B	3	22442	1	6
			0	D	-C	-B	D	E	-A	-C	-C	-A	E	D	4	22442	1	6
				0	D	-C	-B	D	E	-A	-C	-C	-A	E	5	22442	1	6
					0	D	-C	-B	D	E	-A	-C	-C	–A	6	22442	1	6
						0	D	-C	-B	D	E	-A	-C	–C	7	22442	1	6
							0	D	-C	-B	D	E	-A	–C	8	22442	1	6
								0	D	-C	-B	D	E	–A	9	22442	1	6
									0	D	-C	-B	D	E	10	22442	1	6
										0	D	-C	-B	D	11	22442	1	6
											0	D	-C	–B	12	22442	1	6
												0	D	–C	13	22442	1	6
													0	D	14	22442	1	6
														0	15	22442	1	6

Järeldus 10. Polüsümmeetriline graaf on orbiitgraafide ühend servadest, $\cup G_n$.

Polüsümmeetriline ***KOH*** on sisuliselt oma orbiitgraafide **$KOH_{n:+D}$** ja **$KOH_{n:+E}$** ühend. Binaarmärkidest on välja loetav vaid see, et ***KOH*** on *2-distants-regulaarne* ja *triangulaarne.* Graafi kohta rohkema teabe saamiseks dekomponeerime selle orbiitgraafideks. Alustagem serva-orbiitgraafidest ehk orbiit(+)graafidest.

Graafi ***KOH*** märgile +***D*** vastava *orbiitgraafi* **$KOH_{n:+D}$** märgimaatriks:

`-A:-3.10.14; -B:-2.4.4 (vt.kommentaar); -C:-2.3.2;` **`+D:=+3.6.7.`**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	i	ABBCD	Orb	1
0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	-A	-C	-C	-A	-B2	**D**	-B1	-C	**D**	**1**	22244	1	4
	0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	-A	-C	-C	-A	-B2	**D**	-B1	-C	**2**	22244	1	4
		0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	-A	-C	-C	-A	-B2	**D**	-B1	**3**	22244	1	4
			0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	-A	-C	-C	-A	-B2	**D**	**4**	22244	1	4
				0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	-A	-C	-C	-A	-B2	**5**	22244	1	4
					0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	-A	-C	-C	-A	**6**	22244	1	4
						0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	-A	-C	-C	**7**	22244	1	4
							0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	-A	-C	**8**	22244	1	4
								0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	-A	**9**	22244	1	4
									0	**D**	-C	-B1	**D**	-B2	**10**	22244	1	4
										0	**D**	-C	-B1	**D**	**11**	22244	1	4
											0	**D**	-C	-B2	**12**	22244	1	4
												0	**D**	-C	**13**	22244	1	4
													0	**D**	**14**	22244	1	4
														0	**15**	22244	1	4

Orbiitgraafi **$KOH_{n:-+D}$** binaarmärk *–B=–2.4.4* jagunes seosmaatriksi astendamismeetodi põhjal kaheks binaarorbiidiks. **$KOH_{n:+D}$** on märgi ***D:+3.6.7*** järgi ***aluseline.*** See tähendab, et ka lähtegraaf ***KOH*** on aluseline ning selle *täiend* sisaldab alustele vastavaid klikke.

Graafi ***KOH*** märgile +***E*** vastava *orbiitgraafi* **$KOH_{n:+E}$** märgimaatriks:

`-A:-0.2.0;` **`B:+2.3.3.`**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	i	AB	Orb	1
0	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	-A	-A	**1**	122	1	2
	0	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	-A	**2**	122	1	2
		0	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	**3**	122	1	2
			0	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	**4**	122	1	2
				0	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	-A	-A	**B**	**5**	122	1	2
					0	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	-A	-A	**6**	122	1	2
						0	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	-A	**7**	122	1	2
							0	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	-A	**8**	122	1	2
								0	-A	-A	-A	-A	**B**	-A	**9**	122	1	2
									0	-A	-A	-A	-A	**B**	**10**	122	1	2
										0	-A	-A	-A	-A	**11**	122	1	2
											0	-A	-A	-A	**12**	122	1	2
												0	-A	-A	**13**	122	1	2
													0	-A	**14**	122	1	2
														0	**15**	122	1	2

Märgimaatriksist ning tunnusest ***+B=+****2.3.3* ja *u*-märgist on välja loetav, et orbiitgraaf **$KOH_{n:+E}$** koosneb ***viiest 3-klikki moodustavast komponendist*** 1,6,11 ja 2,7,12 ja 3,8,13, ja 4,9,14 ja 5,10,15. Järeldus: ***KOH*** sisaldab samu *3*-klikke.

Graafi ***KOH*** märgile *–A* vastava *orbiitgraafi* **$KOH_{n:-A}$** märgimaatriksi fragment:

`-A:-2.3.2; -B:-0.2.0;` **`+C:+4.5.5.`**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	i	A BC	Orb	1
0	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	-B	**1**	2102	1	2
	0	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	**2**	2102	1	2
		0	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	**3**	2102	1	2

Graafi ***KOH*** märgile *–B* vastava *orbiitgraafi* **$KOH_{n:-B}$** märgimaatriksi fragment:

`-A:-2.3.2; -B:-0.2.0; C:+4.5.5.`

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	i	A BC	Orb	1
0	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	-B	**1**	2102	1	2
	0	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	**2**	2102	1	2
		0	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	**3**	2102	1	2

Tunnuste alusel näeme, et orbiitgraafid **$KOH_{n:--A}$** ja **$KOH_{n:-B}$** on ***isomorfsed***. Binaarmärkidest on välja loetav, et orbiitgraafid **$KOH_{n:-A}$** ja **$KOH_{n:-B}$** koosnevad ***kolmest 5-ringi moodustavast komponendist.*** Erinevad on aga nende tippude järjestus ringides. **$KOH_{n:--A}$** puhul on ringid 1-7-13-4-10-1 ja 2-8-14-5-11-2 ja 3-9-15-6-12-3. **$KOH_{n:--B}$** puhul 1-4-7-10-13-1 ja 2-5-8-11-14-2 ja 3-6-9-12-15-3. Neid ringe moodustavad tipud langevad kokku orbiitgraafi **$KOH_{n:+D}$** aluseid moodustavate tippudega 1,4,7,10,13 ja 2,5,8,11,14 ja 3,6,9,12,15. See on kinnitus sellest, et lähtegraaf ***KOH*** on ***kolme-aluseline***.

Graafi ***KOH*** märgile *–C* vastava *orbiitgraafi* **$KOH_{n:-C}$** märgimaatriksi fragment:

`-A:-3.10.14; -B:-2.4.4 (vt. kommentaar); -C:-2.3.2; +D:+3.6.7.`

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	i	ABBCD	k	1
0	C	**D**	A	C	B2	B1	**D**	**D**	B1	B2	C	A	**D**	C	**1**	22244	1	4
	0	C	**D**	A	C	B2	B1	**D**	**D**	B1	B2	C	A	**D**	**2**	22244	1	4
		0	C	**D**	A	C	B2	B1	**D**	**D**	B1	B2	C	A	**3**	22244	1	4

Orbiitgraafi **$KOH_{n:--C}$** binaarmärk *–B=–2.4.4* jagunes seosmaatriksi astendamismeetodi põhjal kaheks binaarorbiidiks. **$KOH_{n:-C}$** on ***isomorfne*** orbiitgraafiga **$KOH_{n:+D}$** ning osutub samuti ***kolmealuseliseks*** tippudega 1,7,13,4,10 ja 2,8,14,5,11 ja 3,9,15,6,12. Need langevad kokku ka orbiitgraafide **$KOH_{n:--A}$** ja **$KOH_{n:-B}$** kolme ringi tippudega.

Järeldus 11. Orbiitgraafid avavad lähtegraafi struktuuri erinevatest aspektidest ja esitavad selle varjatud omadusi. Kui graaf on aluseline või sisaldab komponente, klikke, ringe jt, siis kerkivad neid osiseid kujutavad tipukogumid orbiitgraafides mingil teisel kujul esile.

Võib väita, et orbiitgraafid on oma lähtegraafi „sugulased”, need on selle „geneetilised tuletised”.

Põgusalt ka ***KOH*** *kõrgemat järku orbiitgraafe.*

Graafi ***KOH*** *teist järku orbiit(+)graafi,* antud juhul orbiitgraafi **$KOH_{n:+D}$** orbiitgraafi **$KOH_{n:+D-A}$** märgimaatriksi fragment:

`-A:-2.3.2; -B:-0.2.0; +C:+4.5.5.`

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	i	A BC	Orb	1
0	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	-B	**1**	2102	1	2
	0	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	**2**	2102	1	2
		0	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	**3**	2102	1	2

Teist järku orbiitgraaf **$KOH_{n:+D-A}$** ***langeb kokku*** esimest järku orbiitgraafiga **$KOH_{n:-A}$** ning koosneb samuti ***kolmest 5-ringi moodustavast komponendist*** 1-7-13-4-10-1 ja 2-8-14-5-11-2 ja 3-9-15-6-12-3.

Graafi ***KOH*** *teist järku orbiit(+)graafi,* antud juhul orbiitgraafi **$KOH_{n:+D}$** orbiitgraafi **$KOH_{n:+D-B1}$** märgimaatriksi fragment:

`-A:-2.3.2; -B:-0.2.0; +C:+4.5.5.`

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	i	A BC	Orb	1
0	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	-B	**1**	2102	1	2
	0	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	-B	**2**	2102	1	2
		0	-B	-B	**C**	-B	-B	-A	-B	-B	-A	-B	-B	**C**	**3**	2102	1	2

Teist järku orbiitgraaf $KOH_{n:+D-B1}$ ***langeb kokku*** esimest järku orbiitgraafiga $KOH_{n:-B}$ ning koosneb samuti ***kolmest 5-ringi moodustavast komponendist,*** kuid 1-4-10-13-1 ja 2-5-8-11-14-2 ja 3-6-9-12-15-3. $KOH_{n:+D-B1}$ on ***isomorfne*** graafiga $KOH_{n:+D-A}$.

Graafi ***KOH*** *teist järku orbiit(+)graafi,* antud juhul orbiitgraafi $KOH_{n:+D}$ orbiitgraafi $KOH_{n:+D-B2}$ märgimaatriksi fragment:

```
                          -A:-0.2.0; B:+2.3.3.

 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15|   i   AB  Orb  1
 0 -A -A -A -A  B -A -A -A -A  B -A -A -A –A|   1  122   1   2
    0 -A -A -A -A  B -A -A -A -A  B -A -A –A|   2  122   1   2
       0 -A -A -A -A  B -A -A -A -A  B -A -A|   3  122   1   2
```

Teist järku orbiitgraaf $KOH_{n:+D-B2}$ ***langeb kokku*** esimest järku orbiitgraafiga KOH_{n+E} ning koosneb samuti ***viiest 3-klikki moodustavast komponendist*** 1,6,11 ja 2,7,12 ja 3,8,13, ja 4,9,14 ja 5,10,15, kus komponendi iga tipp kuulub lähtegraafi ***KOH*** erinevasse alusesse. Seega sisaldab ***KOH*** samu *3*-klikke.

Graafi ***KOH*** *teist järku orbiit(+)graafi,* antud juhul orbiitgraafi $KOH_{n:+D}$ orbiitgraafi $KOH_{n:+D-C}$ märgimaatriksi fragment:

```
 -A:-3.10.14; -B:-2.4.4 (vt.kommentaar); -C:-2.3.2; +D:=+3.6.7.

 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15|   i   ABBCD  Orb  1
 0 –C  D –A -C–B1–B2  D  D-B2-B1 –C –A  D –C|   1   22244   1   4
    0 –C  D –A –C-B1-B2  D  D-B2-B1 –C –A  D|   2   22244   1   4
       0 –C  D –A –C-B1-B2  D  D-B2-B1 –C –A|   3   22244   1   4
```

Orbiitgraafi $KOH_{n:+D-C}$ binaarmärk *–B=–2.4.4* jagunes seosmaatriksi astendamismeetodi põhjal kaheks binaarorbiidiks.

Teist järku orbiitgraaf $KOH_{n:+D-C}$ ***langeb kokku*** esimest järku orbiitgraafiga $KOH_{n:-C}$ ning on ***isomorfne*** orbiitgraafiga $KOH_{n:+D}$ ning osutub samuti ***kolmealuseliseks*** tippudega 1,7,13,4,10 ja 2,8,14,5,11 ja 3,9,15,6,12. Need langevad kokku ka orbiitgraafide $KOH_{n:--A}$ ja $KOH_{n:-B}$ kolme ringi tippudega.

Graafi ***KOH*** *teist järku orbiit(-)graafi,* antud juhul orbiitgraafi $KOH_{n:-A}$ orbiitgraafi $KOH_{n:-A,-A}$ binaar- ja *u*-märgid:

```
A:-2.3.2; B:=-0.2.0; C:+4.5.5; ui=2.10.2.
```

Teist järku orbiitgraaf $KOH_{n:-A.-A}$ ***langeb kokku*** oma "baasgraafi", st esimest järku orbiitgraafiga $KOH_{n:-A}$. See tähendab, et ka $KOH_{n:-A,-A}$ koosneb ***kolmest 5-ringi moodustavast komponendist.***

Graafi ***KOH*** *teist järku orbiit(-)graafi*, antud juhul orbiitgraafi $KOH_{n:-C}$ orbiitgraafi $KOH_{n:-C,-B1,}$ binaar- ja *u*-märgid:

```
-A:-2.3.2; -B:-0.2.0; +C:+4.5.5; ui=2.10.2.
```

Teist järku orbiitgraaf $KOH_{n:-C.-B1}$ ***langeb kokku*** esimest järku orbiitgraafiga $KOH_{n:-A}$ ja teist järku orbiitgraafidega $KOH_{n:-A.-A}$, $KOH_{n:-C-B1}$ ning $KOH_{n:+D-B1}$. Seega ka $KOH_{n:-C-B1}$ koosneb ***kolmest 5-ringi moodustavast komponendist***. Kui ei oleks eristatud esimest järku orbiitgraafi $KOH_{n:-C,}$ tunnusele *-B* vastavad binaar(-)orbiidid vastava algoritmi abil, siis oleksime saanud orbiitgraafide ühendi $KOH_{n:-C.-B}$ tunnustega: *-A=-3.6.7; -B=-2.4.4; -C=-2.3.2; +**D**=+2.3.3; +**E**=+3.6.9;* $\mathbf{u_i}$*=4.4.2.2.2*, st *polü-sümmeetrilise* graafi.

Graafi ***KOH*** *teist järku orbiit(-)graafi*, antud juhul orbiitgraafi $KOH_{n:-C}$ orbiitgraafi $KOH_{n:-C,-B2,}$ binaar- ja *u*-märgid:

```
-A:-0.2.0; +B:+2.3.3; ui=12.2.
```

Teist järku orbiitgraaf $KOH_{n:-C,-B2}$ ***langeb kokku*** esimest järku orbiitgraafiga $KOH_{n:+E}$ ning teist järku orbiitgraafidega $KOH_{n:-C-B2}$ ja $KOH_{n:+D-B2}$. ning ***koosneb viiest 3-klikki moodustavast komponendist***.

Järeldus 12. Kõrgemat järku orbiitgraafide puhul ei teki enam uusi kombinatsioone, need hakkavad korduma. Nende indutseerimine on *koonduv* protsess.

Näide 3. Folkmani tuntud kahealuselise kooskõlastamata graafi ***FOL*** märgimaatriks ***W*** ja orbiitgraafid G_n:

```
          A:-4.14.21; B:-3.8.10; C:-2.6.8; D:-2.4.4; E:-2.3.2; F:+3.6.8.

| 1  1  1  1  1  1  1  1  1  1| 2  2  2  2  2  2  2  2  2  2|               Orb*
|11 12 13 14 15 16 17 18 19 20| 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10|  i   ABCDEF       12
   0 -E -E -E -E -E -E -E -E –C| F -B -B  F -B  F -B -B -B -F| 11   061084   1  04
      0 -E -E -E -E -E -E -C –E|-B  F -B -B  F -B -B -B  F  F| 12   061084   1  04
         0 -E -E -E -E -C -E –E| F -B  F -B -B -B -B  F  F  B| 13   061084   1  04
            0 -E -E -C -E -E –E|-B  F -B  F -B -B  F  F -B –B| 14   061084   1  04
               0 -C -E -E -E –E|-B -B  F -B  F  F  F -B -B –B| 15   061084   1  04
                  0 -E -E -E –E|-B -B  F -B  F  F  F -B -B –B| 16   061084   1  04
                     0 -E -E –E|-B  F -B  F -B -B  F  F -B –B| 17   061084   1  04
                        0 -E –E| F -B  F -B -B -B -B  F  F –B| 18   061084   1  04
                           0 –E|-B  F -B -B  F -B -B -B  F  F| 19   061084   1  04
                              0| F -B -B  F -B  F -B -B -B  F| 20   061084   1  04
                               | 0 -A -D -D -A -D -A -D -D –D|  1   360604   2  40
                                    0 -A -D -D -A -D -D -D -D|  2   360604   2  40
                                       0 -A -D -D -D -D -D –A|  3   360604   2  40
                                          0 -A -D -D -D -A –D|  4   360604   2  40
                                             0 -D -D -A -D –D|  5   360604   2  40
                                                0 -D -A -A –D|  6   360604   2  40
                                                   0 -D -A –A|  7   360604   2  40
                                                      0 -D –A|  8   360604   2  40
                                                         0 –D|  9   360604   2  40
                                                            0| 10   360604   2  40
```

Graaf ***FOL*** on *ositi sümmeetriline orbiitgraaf* ja selle potentsiaalsed orbiitgraafid esinevad tipuorbiitide raames. ***FOL*** jaguneb vastavalt oma binaarorbiitidele *A, B, C, D, E ja* ***F*** kuueks *orbiitgraafiks*:

Graafi ***FOL*** märgile *–A* vastav *orbiitgraaf* $\boldsymbol{FOL_{n:-A}}$ on ***Peterseni graaf*(!)**. Seda kujutab ka ***FOL*** märgi osamaatriksis $\boldsymbol{W_{2.2}}$, kui sealne ***–A*** asendada peterseni tunnusega ***+4.10.15*** ja *–B* asendada tunnusega *–2.3.2.*

Graafi ***FOL*** märgile *–B* vastav *orbiitgraaf* $\boldsymbol{FOL_{n:-B}}$ osutub A. Titovi [1976] poolt konstrueeritud ***kooskõlastamata kahealuseliseks*** graafiks, mille üks orbiitgraaf on teada olevalt samuti ***Peterseni graaf***.

Graafi ***FOL*** märgile *–C* vastav *orbiitgraaf* $\boldsymbol{FOL_{n:-C}}$ on ***bisümmeetriline 10-komponentne***, *2*-klikkidest koosnev graaf. Antud juhul on *2*-kliki üks tipp paaris- ja teine paaritu numbriline.

Graafi ***FOL*** märgile *–D* vastav *orbiitgraaf* $\boldsymbol{FOL_{n:-D}}$ on ***Peterseni graafi täiendiks***(!), st Peterseni graafi teiseks orbiitgraafiks.

Graafi ***FOL*** märgile *–E* vastav *orbiitgraaf* $\boldsymbol{FOL_{n:-E}}$ on orbiitgraafi $\boldsymbol{FOL_{n:-C}}$ täiend, st ***2-kvinta klikk.***

Graafi ***FOL*** märgile ***+F*** vastav *orbiitgraaf* $\boldsymbol{FOL_{n:-F}}$ on muidugi ***Folkmani graaf*** ise.

Ilmselt jaotuvad graafid „geneetilistesse rühmadesse", nende uurimine on muidugi omaette projekt. Praeguste kogemuste alusel võib väita, et 20-tipulised monosümmeetrilised kahealuselised graafid moodustavad mingi „geneetilise rühma", mille teatud orbiitgraafid osutuvad Peterseni graafideks.

Järeldus 13. Graafi igale orbiidile vastab selle täiendi orbiit, mille vastavad orbiitgraafid langevad kokku.

Märgistruktuurid

Käsitlesime eelnenus vaid sümmeetrilisi graafe. Teame, et *0*-sümmeetriliste puhul kujutab iga tipupaar (serv, „mitteserv") endast iseseisvat binaarorbiiti ning nende käsitlemine mõttetu. Ühe binaarmärgi alla võib graafis, eriti just ositi ja *0*-sümmeetrilises, kuuluda rohkem kui üks binaarorbiit.

Propositsioon 4. Graafi, mille kõik servad vastavad niisugusele etteantud binaarmärgile ***dnq***, mille alla kuulub rohkem kui üks binaarorbiit, st on orbiitgraafide teatud ühendit, nimetame ***märgigraafiks*** G_p.

Järeldus 14. Märgigraaf moodustatakse binaarmärgi *tähenduse* aspektist.

Võtame vaatluse alla näiteks *0*-sümmeetrilise puu-struktuuri kui ahelalüli märgile ***+1.2.1*** vastava märgigraafi.

Näide 4. Märgigraafi $\boldsymbol{ELF}_{n:+G,}$ binaartunnused ja tunnusmaatriks ***W*** koos *u*- ja *deg*-tunnustega:

A:-7.8.7; B:-6.7.6; C:-5.6.5; D:-4.5.4; E:-3.4.3; F:-2.3.2;
G:+1.2.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11				Orb
3	1	2	9	7	5	10	4	8	6	11	*i*	*ABCDEF*__G__	**deg**	*
0	**G**	-F	**G**	**G**	-E	-F	-E	-F	-D	-E	3	000133**3**	3	**1**
	0	**G**	-F	-F	-F	-E	-F	-E	-E	-D	1	000134**2**	2	**2**
		0	-E	-E	**G**	-D	**G**	-D	-F	-C	2	001222**3**	3	**3**
			0	-F	-D	**G**	-D	-E	-C	-F	9	001223**2**	2	**4**
				0	-D	-E	-D	**G**	-C	-D	7	001322**2**	2	**5**
					0	-C	-F	-C	**G**	-B	5	012212**2**	2	**6**
						0	-C	-D	-B	**G**	10	012221**2**	2	**7**
							0	-C	-E	-B	4	012222**1**	1	**8**
								0	-B	-C	8	013221**1**	1	**9**
									0	-A	6	122121**1**	1	**10**
										0	11	122211**1**	1	**11**

Oletagem, et on vaja muuta see hargnev graaf triangulaarseks nii, et selles säiliks osagraafina ka algne graaf (sorry, midagi „targemat” hetkel pähe ei tulnud – eemärgiks on vaid põhimõtte demonstreerimine). Me teeme seda muidugi mitte graafi „pildi” vaid binaarmärgi alusel. Selleks ühendame kõik *2-distantsi* omavad tipupaarid. Teisisõnu, moodustame märgigraafi algse graafi binaarmärgi ***G:+1.2.1*** ja *2*-distantsi esitava binaarmärgi *F:–2.3.2* järgi.

Laiendatud märgigraafi $\boldsymbol{ELF}_{n:+G,-F}$ binaartunnused ja tunnusmaatriks ***W*** koos *u*- ja *deg*-tunnustega:

A:-4.8.13; B:-3.6.9; C:-3.4.3; D:-2.4.5; E:-2.3.2;
F:+2.3.3; G:+2.4.5; H:+2.4.6; I:+2.5.8.

1	3	9	2	7	5	4	10	8	11	6	*i*	*ABCDE*__FGHI__	**deg**	**Orb**
0	**I**	**H**	**I**	**H**	**H**	**H**	-D	-D	-E	-D	1	00031**0042**	6	**1**
	0	**I**	**F**	**I**	-D	-D	**F**	**F**	-D	-E	3	00031**3003**	6	**2**
		0	-D	**H**	-E	-E	**G**	-D	**F**	-B	9	01022**1121**	5	**3**
			0	-D	**I**	**H**	-E	-E	-B	**F**	2	01022**2012**	5	**4**
				0	-E	-E	-D	**F**	-E	-B	7	01023**1021**	4	**5**
					0	**H**	-B	-B	-C	**F**	5	02112**1021**	4	**6**
						0	-B	-B	-C	-D	4	02122**0030**	3	**7**
							0	-E	**F**	-C	10	02122**2100**	3	**8**
								0	-B	-C	8	03122**2000**	2	**9**
									0	-A	11	12212**2000**	2	**10**
										0	6	12221**2000**	2	**11**

Hargnevuse „sulgenud” puu $\boldsymbol{ELF}_{n:+G,-F}$ näol on ***triangulaarne*** ning ei ole aluseline. Binaartunnustest on välja loetav, et see sisaldab „hajutatud” *4*-klikki, millesse kuuluvad kõik tipud v.a. 6, 8 ja 11.

Binaarmärgi tähendusel on oma roll ka orbiitgraafide puhul, eriti siis kui ainuke binaar(+)märk hõlmab graafi kõiki tippe ja servi.

Järeldus 15. Kui orbiitgraafi binaar(+)märk hõlmab graafi kõiki tippe ja servi, siis on see selle graafi *täielik invariant*, st on omane vaid sellele graafile.

Tegemist on muidugi raskelt tõestatava, kuid ilmselt ümberlükkamatu hüpoteesiga. Tuntud graafide hulgas omavad selliseid binaar(+)märke, näiteks Peterseni, Heawoodi, Coxeteri, kuup-, oktaeeder-, dodekaeeder jt graafid. Huvitav oleks muidugi anda mõni selline konstrueerimisülesanne arvutile. Esineb ka lihtsaid, graafi täielikuks invariandiks olevaid binaarmärke, mille graafe on kerge kujutada. Vaatleme mõnda graafi, mille ainuke binaar(+)märk on täielik invariant.

Peterseni graaf kuulub Graafiatlase arusaama järgi *regulaarsete, sidusate kuupgraafide* (lk 127, tähistus **C27**), *sümmeetriliste kuupgraafide* (lk 167, koos Heawood'i graafiga), *(3,5)-cage*-graafide (lk 271) ja *snark*-graafide (lk 276, tähistus **Sn1**) hulka. Selle täiendi kohta andmeid ei ole. Selgitus Graafiatlases lk 263: ***Cages*** *are regular graphs of given girth with minimum vertices; specifically, a (k,g)cage is a k-regular graph of girth g with the minimum number of vertices.* Käsitlegem Peterseni graafi struktuursest aspektist.

Näide 5. Peterseni graafi ***PET*** ja selle täiendi ***PETC*** binaartunnused ja tunnusmaatriks ***W*** koos *u-* ja *deg*-tunnustega:

A:-2.3.2; ***B:+4.10.15.*** *A:-2.6.12;* ***B:+2.5.8.***

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	i	AB	Orb	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	AB
0	B	-A	-A	B	B	-A	-A	-A	-A	1	63	1	0	-A	B	B	-A	-A	B	B	B	B	36
	0	B	-A	-A	-A	B	-A	-A	-A	2	63	1		0	-A	B	B	B	-A	B	B	B	36
		0	B	-A	-A	-A	B	-A	-A	3	63	1			0	-A	B	B	B	-A	B	B	36
			0	B	-A	-A	-A	B	-A	4	63	1				0	-A	B	B	B	-A	B	36
				0	-A	-A	-A	-A	B	5	63	1					0	B	B	B	B	–A	36
					0	-A	B	B	-A	6	63	1						0	B	-A	-A	B	36
						0	-A	B	B	7	63	1							0	B	-A	–A	36
							0	-A	B	8	63	1								0	B	–A	36
								0	-A	9	63	1									0	B	36
									0	10	63	1										0	36

Peterseni graaf on ***bisümmeetriline*** ja ***tugevregulaarne***, selle binaarmärgid on *–2.3.2* ja ***+4.10.15.*** Viimane märk tähendab, et graaf koosneb 10 tipust ja 15 servast, mis moodustavad *5*-ringe – see on selle graafi ***täielik invariant***. Esimene märk fikseerib *5*-ringides olevate mittenaabertipu paaride vahelise ahela pikkusega 2, mis koosneb kolmest tipust ja kahest servast. kui püstitada ülesanne konstrueerida (valents-) regulaarne 10-tipuline graaf, mille 15 serva moodustavad *5*-ringe, saame tulemuseks vaid Peterseni graafi.

Peterseni graafis ***PET*** on 12 *5*-ringi, antud juhul tippudega: 1-2-3-4-5-1 (nö välisring), 6-8-10-7-9-6 (nö sisering), 1-2-3-8-6-1 ja 1-2-7-10-5-1 ja 1-5-4-9-6-1 ja 2-3-4-9-7-2 ja 3-4-5-10-8-3 (3 välis- ja 2 siseringi tippu), 1-2-7-9-6-1 ja 1-5-4-9-6-1 ja 2-3-8-10-7-2 ja 3-4-9-6-8-3 ja 4-5-10-7-9-4 (2 välis- ja 3 siseringi tippu). Iga tipp esineb 6 ringis. Iga serv rsinrb 4 ringis. See on ***5-ring-regulaarsus.***

Peterseni graafi täiendis ***PETC*** on 5 *4*-klikki, antud juhul tippudega: 1,3,9,10 ja 1,4,6,10 ja 1,4,7,8 ja 2,5,8,9 ja 3,5,6,7. Iga tipp osaleb kahes klikis. Iga serv esineb ühes klikis. See on ***4-klikk-regulaarsus.***

Teineteisest sõltumatult on nii Graafiatlase koostajad (lk 275) kui ka siinkirjutaja [2004b, lk 8-9] konstrueerinud 5-ringseid graafe tippude arvuga 7, 9, ..., mida ***üldistatud Peterseni graafideks*** nimetatud on. Paraku puudub neil Peterseni graafi üks põhiomadus – bisümmeetria – ja need on osutunud ositi sümmeetrilisteks.

Järeldus 16. Orbiitgraaf on *valents- ja ring- või klikkregulaarne*. Bisümmeetriline graaf on ka veel *tugevregulaarne.*

Heawood'i graaf kuulub Graafiatlase arusaama järgi regulaarsete graafide alajaotuste, nii *sidusate kuup-* (lk 144, tähistus **C621**) *sümmeetriliste kuup-* (lk 167, koos Peterseni graafiga) kui ka *(3,6)-cage* graafide (lk 271) hulka. Käsitlegem Heawood'i graafi struktuursest aspektist.

Näide 6. Heawood'i graafi ***HEA*** ja selle täiendi ***HEAC*** binaartunnused ja tunnusmaatriks ***W*** koos *u-* ja *deg*-tunnustega:

A:-3.8.9; B:-2.3.2; ***C:+5.14.21.***

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	i	ABC	Orb	deg
0	**C**	-B	-A	-B	**C**	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	**C**	**1**	*463*	1	3
	0	**C**	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	**C**	-B	-A	-B	**2**	*463*	1	3
		0	**C**	-B	-A	-B	**C**	-B	-A	-B	-A	-B	–A	**3**	*463*	1	3
			0	**C**	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	**C**	–B	**4**	*463*	1	3
				0	**C**	-B	-A	-B	**C**	-B	-A	-B	–A	**5**	*463*	1	3
					0	**C**	-B	-A	-B	-A	-B	-A	–B	**6**	*463*	1	3
						0	**C**	-B	-A	-B	**C**	-B	–A	**7**	*463*	1	3
							0	**C**	-B	-A	-B	-A	–B	**8**	*463*	1	3
								0	**C**	-B	-A	-B	**C**	**9**	*463*	1	3
									0	**C**	-B	-A	–B	**10**	*463*	1	3
										0	**C**	-B	–A	**11**	*463*	1	3
											0	**C**	–B	**12**	*463*	1	3
												0	**C**	**13**	*463*	1	3
													0	**14**	*463*	1	3

A:-2.10.36; **B:+2.8.22; C:+2.9.30.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	i	ABC	Orb	deg
0	-A	**C**	**B**	**C**	-A	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	–A	**1**	*346*	1	10
	0	-A	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	-A	**C**	**B**	**C**	**2**	*346*	1	10
		0	-A	**C**	**B**	**C**	-A	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**B**	**3**	*346*	1	10
			0	-A	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	-A	**C**	**4**	*346*	1	10
				0	-A	**C**	**B**	**C**	-A	**C**	**B**	**C**	**B**	**5**	*346*	1	10
					0	-A	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**6**	*346*	1	10
						0	-A	**C**	**B**	**C**	-A	**C**	**B**	**7**	*346*	1	10
							0	-A	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**8**	*346*	1	10
								0	-A	**C**	**B**	**C**	–A	**9**	*346*	1	10
									0	-A	**C**	**B**	**C**	**10**	*346*	1	10
										0	-A	**C**	**B**	**11**	*346*	1	10
											0	-A	**C**	**12**	*346*	1	10
												0	–A	**13**	*346*	1	10
													0	**14**	*346*	1	10

Heawood'i graaf on ***monosümmeetriline***, selle binaarmärgid on *–3.8.9*, *–2.3.2* ja ***+5.14.21.*** Viimane märk tähendab, et graaf koosneb 14 tipust ja 21 servast, mis moodustavad *6*-ringe – see on selle graafi ***täielik invariant***. Esimene ja teine märk fikseerivad *6*-ringides olevate mittenaabertipu paaride vahelise ahelad pikkustega 3 ja 2.

Heawood'i graafi ***HEA 6-ring-regulaarsus*** on seotud *aluselisusega* ning see osutub ***kahealuseliseks***, alustega antud juhul paarisnumbrilistest tippudest ja paaritunumbrilistest tippudest. Sellest tingitult koosneb ***täiend HEAC*** kahest omavahel sidusast *7-klikist* ning on ***7-klikkregulaarne***. ***HEAC*** klikid vastavad ***HEA*** alustele.

Heawood'i graafis ***HEA*** on 21 *6*-ringi, antud juhul tippudega: 1-2-3-4-5-6-1 ja 1-2-3-4-13-14-1 ja 1-2-11-12-13-14-1 ja 3-4-5-6-7-8-3 ja 5-6-7-8-9-10-5 ja 7-8-9-10-11-12-7 ja 9-10-11-12-13-14-9 (nö välisring), 1-2-3-8-9-14-1 ja 1-6-7-8-9-14-1 ja 1-6-7-12-13-14-1 ja 2-3-4-4-10-11-2 ja 2-3-8-9-10-11-2 ja 4-5-6-7-12-13-4 ja 4-5-10-11-12-13-4 (nö 2+4 siseringi tippu), 1-2-11-10-5-6-1 ja 1-2-11-12-7-6-1 ja 1-6-5-10-9-14-1 ja 2-3-8-7-12-11-2 ja 3-4-13-12-7-8-3 ja 3-4-13-14-9-8-3 ja 4-5-10-9-14-13-4 (nö 2+2+2 siseringi tippu). Iga tipp esineb 9=3+3+3. Iga serv esineb 6 ringis. See on ***6-ring-regulaarsus.***

Graaf ***HEA*** ja selle täiend ***HEAC*** jagunevad kolmeks ***orbiitstruktuuriks*** (vastavalt orbiitidele *A, B* ja *C*). ***HEA*** orbiidile *–A* vastav struktuur (binaartunnustega *–A:–3.10.16; –B:–2.2.4,* ***C:+3.8.10***) on samuti ***kahealuseline*** ning langeb kokku täiendi ***HEAC*** orbiidile ***B*** vastava struktuuriga. ***HEA*** orbiidile *–B* vastav struktuur (binaartunnustega *–A:–0.2.0,* ***B:+2.7.21***) on ***bisümmeetriline***, koosneb ***kahest 7-klikk komponendist*** ning langeb kokku täiendi ***HEAC*** orbiidile ***C*** vastava struktuuriga.

Kokkuvõte

Orbiitgraafide peamine tähtsus ilmneb graafi struktuursete atribuutide tuvastamisel. Orbiitgraafid võimaldavad tuvastada erinevate graafide ühesuguseid osiseid jne. On selgunud, et ka kõikide *n*-tahukate graafid on osutunud orbiitgraafideks. Märgigraafid võimaldavad teisendada ja opereerida *0*-sümmeetrilisi graafe soovitud aspektist jne.

Esineb orbiitgraafe, mille binaar(+)märgid on graafi täielikud invariandid. Nende järgi on sellised graafid alati ära tuntavad teiste graafide osiste ehk orbiitgraafidena.

Ilmneb, et kõikide klikituvastuse algoritmide loojate ideoloogia on lähtunud „suurimasse klikki kuuluvate tippude eristamisest teistest”. Klikkregulaarsuse, st kui kõik *n* tippu kuuluvad suurimasse klikki võimsusega *n-a*, siis niisugused algoritmid ei erista klikke üldse, või toovad esile vaid ühe. Tegelikult on neid palju rohkem, ja need ei ole sugugi mitte juhuslikud kombinatsioonid. Kuna klikituvastamisest näib teadusturg huvitatud olema, siis oleks sünnis väljastada õiget teavet. Selline algoritm on lihtsam kui märgimaatriksi moodustamine, mille tegelik töötlus-aeg on teada olevalt imelühike. Loodetavasti teevad hindud ka selle ära. Ringide ehk vöödega (girths) ehk „tsüklitega” on sama lugu. Ringide puhul on oluline teada ka iga selle elemendipaari omavaheline kaugus. Kas ka need turuväärtust omavad, see pole siin oluline.

Bisümmeetria ja tugev regulaarsus

Huvi graafi regulaarsuste ja sümmeetria vastu ei ole viimasel ajal märgata, kuna praktiliste üleannete puhul ei tule need atribuudid tavaliselt esile. Vähemalt seni mitte. Siiski on tegemist reaalsete seaduspärasustega. Kuna minul ei ole enam kohustust ega vajadust „praktilisi” ülesandeid lahendada, on mul võimalus heita pilk reaalsete regulaarsuste varjatud maailma.

Huvitav seos on bisümmeetria ja tugeva regulaarsuse vahel, mis näib tugevregulaarsuse spetsidele märkamatuks jäänud. Esitan siin kaks lihtsat lauset, mõned lihtsad näited ja tosinkond lihtsat järeldust, mis ka kõigile arusaadavad peaksid olema. Siiski on kasulik eelnev pilguheit veebile www.graphs.ee .

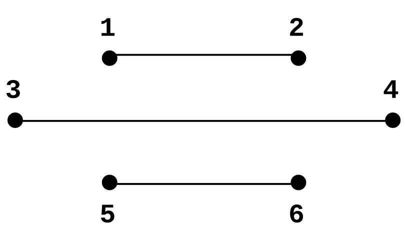
Propositsioon 5. ***Bisümmeetria*** kujutab endast ***tippudest sümmeetrilise*** (transitiivse) graafi raames parajasti ühe ***servaorbiidi*** (paari(+)orbiidi) ja ühe ***„mitteserva-orbiidi”*** (paari(+)orbiidi) olemasolu.

See tähendab, et struktuuri esitab vaid kaks erinevat binaarmärki.

Propositsioon 6. Arv ***r komponentsest klikist*** koosneva struktuuri ***täiend*** on ***r-aluseline täisgraaf***, st on ***r-klikk*** – ja vastupidi.

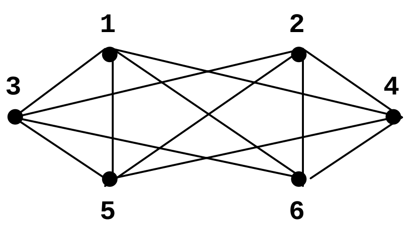
See tähendab, et kahest komponentsest klikist koosneva struktuuri täiend on *bi-klikk*, kolmest komponentsed klikist koosneva täiend on *tri-klikk* jne.

Näide 7. Graaf **B6-3,** selle täiend **B6-12** ning nende töötlemise tulemused binaarmärkide, märgimaatriksite ja peamiste mõõtude näol:



A:-0.2.0; **B:+1.2.1.**

1	2	3	4	5	6	i	AB	deg
0	**B**	-A	-A	-A	-A	**1**	41	1
	0	**B**	-A	-A	-A	**2**	41	1
		0	**B**	-A	-A	**3**	41	1
			0	**B**	-A	**4**	41	1
				0	**B**	**5**	41	1
					0	**6**	41	1



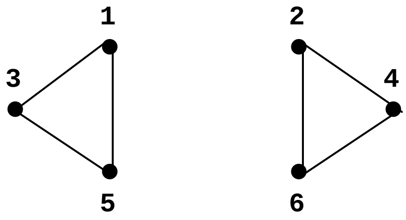
A:-2.6.12; **B:+2.4.5.**

1	2	3	4	5	6	i	AB	deg
0	-A	**B**	**B**	**B**	**B**	**1**	14	4
	0	-A	**B**	**B**	**B**	**2**	14	4
		0	-A	**B**	**B**	**3**	14	4
			0	-A	**B**	**4**	14	4
				0	-A	**5**	14	4
					0	**6**	14	4

SRV	HR	SR	aut
$3^1 12^1$	0.2173	0.8152	48

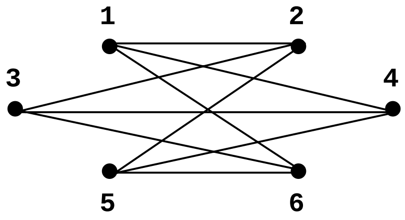
Graaf **B6-3** ja selle täiend **B6-12** on ***bisümmeetrilised.*** Graaf **B6-3** koosneb ***kolmest komponentsest 2-klikist***, see on ***2-klikk-regulaarne***. Täiend **B6-12** on ***kolme-aluseline***, kus selle alused vastavad graafi **B6-3** 2-klikkidele. Tegemist on ***alus-klikiga***, täpsemalt ***3-alus-klikiga*** ehk ***2-tri-klikiga***. Ei ole raske märgata, et see on ***3-ring- ehk -klikkregulaarne***, st kõik tipud kuuluvad *triangelisse*.

__Näide 8.__ Graaf **B6-6,** selle täiend **B6-9** ning nende töötlemise tulemused binaarmärkide, märgimaatriksite ja peamiste mõõtude näol:



A:-0.2.0; ***B:+2.3.3.***

	1	2	3	4	5	6	i	ABC	deg
	0	-A	B	-A	B	-A	1	32	2
		0	-A	B	-A	B	2	32	2
			0	-A	B	-A	3	32	2
				0	-A	B	4	32	2
					0	-A	5	32	2
						0	6	32	2



A: -2.5.6; ***B:+3.6.9.***

	1	2	3	4	5	6	i	AB	deg
	0	B	-A	B	-A	B	1	23	3
		0	B	-A	B	-A	2	23	3
			0	B	-A	B	3	23	3
				0	B	-A	4	23	3
					0	B	5	23	3
						0	6	23	3

SRV	HR	SR	aut
$6^1 9^1$	0.2923	0.7515	72

Graaf **B6-6** ja selle täiend **B6-9** on ***bisümmeetrilised.*** Graaf **B6-6** koosneb ***kahest komponentsest 3-klikist***, see on ***3-klikk-regulaarne***. Täiendit **B6-9** iseloomustav binaargraaf 4-ring tunnusega ***+3.6.9*** hõlmab graafi kõik n=6 tippu ja kõik q=9 serva, see on *täistunnus* ja ka *täielik invariant,* st see binaartunnus iseloomustab ainult seda struktuuri. Täiend on ***kahealuseline***, kus selle alused vastavad graafi **B6-6** 3-klikkidele ning see on ***2-alus-*** ehk ***3-bi-klikk***. Ei ole raske märgata, et see on ***4-ring-regulaarne***, st kõik tipud kuuluvad 4-ringi.

__Järeldus 17.__ Struktuuri bisümmeetria on paaritunnuste baasil ***kergesti tuvastatav.***

Struktuurisemiootika nii konstrueerib kui ka tuvastab bisümmeetrilisi.

__Järeldus 18.__ Bisümmeetrilise struktuuri ***täiend*** on bisümmeetriline.

__Järeldus 19.__ ***Komponentsete klikkide võimsus n*** langeb kokku ***täiendi, st r-kliki aluste võimsusega***.

__Järeldus 20.__ ***r-klikk*** sisaldab (tava)klikki võimsusega ***r***, see on ***r-klikk-regulaarne.***

See tähendab, et bi-klikk on *2-klikk-regulaarne,* tri-klikk *3-klikk-regulaarne* jne.

__Järeldus 21.__ Kui kõik ***r*** komponentset klikki on ***võrdse võimsusega n***, siis on struktuur ja selle täiend ***bisümmeetrilised.***

Bisümmetria seisukohalt pole oluline kas struktuur on *komponentne* või *sidus*.

__Järeldus 22.__ Bisümmeetriline ***r***-klikk sisaldab ***s=n^r*** klikki võimsusega ***n.***

Järeldus 23. Bisümmeetrilise ***r***-kliki servade arv ***E*** võrdub aluste võimsuse ruudu n^2 ja nende arvule ***r*** vastava tavakliki servade arvu korrutisega,

$$E=n^2r(r-1):2$$

Järeldus 24. Vastavalt aluste arvule nimetame ***r-klikki*** kas ***bi-, tri-, kvadro-, kvinta-, seksta-, septa-, okta-, nona-, deka-,*** või ***undeka-*** jne ***-klikiks.***

Kommentaarid: Võime julgelt väita, et 1 kuni 20 tipuliste bispmmeetriliste graafide hulgas esineb:

üks 4-tipuline ***r***-klikk – ***2-biklikk*** kui komponentsete 2-klikkide täiend;

kaks 6-tipulist ***r***-klikki – ***2-tri-klikk*** ja ***3-bi-klikk*** kui komponentsete, vastavalt 2- ja 3-klikkide täiendid;

kaks 8-tipulist ***r***-klikki – ***2-kvadro-klikk*** ja ***4-bi-klikk*** kui komponentsete, vastavalt 2- ja 4-klikkide täiendid;

üks 9-tipuline ***r***-klikk – ***3-tri-klikk*** kui komponentsete 3-klikkide täiend;

kaks 10-tipulist ***r***-klikki – ***2-kvinta-*** *ja* ***5-bi-klikk*** kui komponentsete, vastavalt 2- ja 5-klikkide täiendid;

neli 12-tipulist ***r***-klikki – ***2-seksta-, 3-kvadro-, 4-tri-*** *ja* ***6-bi-klikk*** kui komponentsete, vastavalt 2-, 3-, 4- ja 6-klikkide täiendid;

kaks 14-tipulist ***r***-klikki – ***2-septa-*** *ja* ***7-bi-klikk*** kui komponentsete, vastavalt 2- ja 7-klikkide täiendid;

kaks 15-tipulist ***r***-klikki – ***3-kvinta-*** *ja* ***5-tri-klikk*** kui komponentsete, vastavalt 3- ja 5-klikkide täiendid;

kolm 16-tipulist ***r***-klikki – ***2-okta-, 4-kvadro-*** *ja* ***8-bi-klikk*** kui komponentsete, vastavalt 2-, 4- ja 8-klikkide täiendid;.

neli 18-tipulist ***r***-klikki – ***2-nona-, 3-seksta-, 6-tri-*** *ja* ***9-bi-klikk*** kui komponentsete, vastavalt 2-, 3-, 6- ja 9-klikkide täiendid;

neli 20-tipulist ***r***-klikki – ***2-deka-, 4-kvinta-, 5-kvadro-*** *ja* ***10-biklikk*** kui komponentsete, vastavalt 2-, 4-, 5- ja 10-klikkide täiendid.

Kokku 27 ***r***-klikki.

Järeldus 25. ***r***-klikid on ***lihtsalt konstrueeritavad***

Tugev regulaarsus kujutab endast olekut (*k,**a**,**b***), kus *k*-valentsregulaarse mitte-täisstruktuuri *iga naabertippude paar omab* ***a***≥0 *ühist naabertippu* ja *iga mitte-naabertippude paar* ***b***≥1 *ühist naabertippu*. Sidusa bisümmeetrilise struktuuri tugevregulaarsus on kahe erineva binaarmärgi ±***d.n.q*** olemasolu näol möödapääsmatu, sest ±***d***=2 puhul tähendab ***n–2*** just tipupaari *ühiste naabertippude arvu*.

Järeldus 26. Kõik sidusad bisümmeetrilised struktuurid, sh ***r***-klikid on ***tugevregulaarsed****,* kuid mitte vastupidi.

Tugevregulaarseid struktuure esineb ka mitte-bisümmeetriliste (mono-, polü- ja ositi sümmeetriliste) hulgas.

Järeldus 27. Tugevregulaarsed struktuurid on oma binaartunnuste baasil ***kergesti tuvastatavad.***

Järeldus 28. Tugevregulaarse struktuuri ***sidus täiend*** on tugevregulaarne.

Peale lihtsalt konstrueeritavate ***r***-klikkide on tuvastatud järgmised bisümmeetrilised-tugevregulaarsed struktuurid:
1) isetäienduv 5-ring; **2)** isetäienduv B9-18-4; **3)** Peterseni graaf B10-15-3; **4)** ja selle täiend B10-30-6; **5)** isetäienduv B13-39-6; **6)** Weisfeileri B15-45-6; **7)** ja selle täiend B15-60-8; **8)** Greenwoodi (Clebish'i) B16-40-5; **9)** ja selle täiend B16-80-10; **10)** Weisfeileri B16-48-6; **11)** ja selle täiend B16-72-9; **12)** isetäienduv B17-68-8.

Järeldus 29. Kuni 20-tipuliste graafide hulgas esineb 27+12= ***39*** sidusat ***bisümmeetrilist/tugevregulaarset struktuuri***.

Näide 9. 39 bisümmeetrilise/tugevregulaarse strukuuri koondtabel. There, **c** – *komponendid*, **p** – *alused*, **r** – *aluste või komponentide arv*, **n** – *aluste või komponentide võimsus;* **s** – *osaklikkide arv*:

Nr	Tähistus	*deg*	*SRV*	*SR*	kmp/alus		Regu-laars.	Arv *s*	Kommentaar	Binaarmärgid	
					r	n				(–)märk	(+)märk
1	**B4-4**	2	$2^1 4^1$	*0.6448*	2p	2	*4-girth*		***2-bi-clique***	*–2.4.4*	**+3.4.4**
2	**B5-5**	2	5^2	*0.6990*	1c	5	*5-girth*		***Selfcomplem.***	*–2.3.2*	**+4.5.5**
3	**B6-12**	4	$3^1 12^1$	*0.8152*	3p	2	*3-clique*	8	***2-tri-clique***	*–2.6.12*	**+2.4.5**
4	**B6-9**	3	$6^1 9^1$	*0.7515*	2p	3	*4-girth*		***3-bi-clique***	*–2.5.6*	**+3.6.9**
5	**B8-24**	6	$4^1 24^1$	*0.8769*	4p	2	*4-clique*	16	***2-quadro-clique***	*–2.8.24*	**+2.6.13**
6	**B8-16**	4	$12^1 16^1$	*0.7906*	2p	4	*4-girth*		***4-bi-clique***	*–2.6.8*	**+3.8.16**
7	**B9-27**	6	$9^1 27^1$	*0.8431*	3p		*3-clique*	27	***3-tri-clique***	*–2.8.21*	**+2.5.7**
8	**B9-18**	4	18^2	*0.8066*	3p	3	*3-girth*	6	***Selfcomplem.***	*–2.4.4*	**+2.3.3**
9	**B10-40**	8	$5^1 40^1$	*0.9084*	5p	2	*5-clique*	32	***2-quinta-clique***	*–2.10.40*	**+2.8.25**
10	**B10-15**	3	$15^1 30^1$	*0.8328*	1c	10	*5-girth*	?	***Petersen gr.***	*–2.3.2*	**+4.10.15**
11	**B10-30**	6			1c	10	*4-clique*	5	***Petersen comp.***	*–2.6.12*	**+2.5.8**
12	**B10-25**	5	$20^1 25^1$	*0.8196*	2p	5	*4-girth*		***5-bi-clique***	*–2.7.10*	**+3.10.25**
13	**B12-60**	10	$6^1 60^1$	*0.9273*	6p	2	*6-clique*	64	***2-sexta-clique***	*–2.12.60*	**+2.10.41**
14	**B12-54**	9	$12^1 54^1$	*0.8868*	4p	3	*4-clique*	81	***3-quadro-clique***	*–2.11.45*	**+2.8.22**
15	**B12-48**	8	$18^1 48^1$	*0.8601*	3p	4	*3-clique*	58	***4-tri-clique***	*–2.10.32*	**+2.6.9**
16	**B12-36**	6	$30^1 36^1$	*0.8355*	2p	6	*4-girth*		***6-bi-clique***	*–2.8.12*	**+3.12.36**
17	**B13-39**	6	39^2	*0.8409*	1c	1	*3-clique*	22	***Selfcomplem.***	*–2.5.7*	**+2.4.5**
18	**B14-84**	12	$7^1 84^1$	*0.9399*	7p	2	*7-clique*	128	***2-septa-clique***	*–2.14.84*	**+2.12.61**
19	**B14-49**	7	$42^1 49^1$	*0.8470*	2p	7	*4-girth*		***7-bi-clique***	*–2.9.14*	**+3.14.49**
20	**B15-90**	12	$15^1 90^1$	*0.9119*	5p	3	*5-clique*	243	***3-quinta-clique***	*–2.14.78*	**+2.11.46**
21	**B15-75**	10	$30^1 75^1$	*0.8711*	3p	5	*3-clique*	125	***5-tri-clique***	*–2.12.45*	**+2.7.11**
22	**B15-45**	6	$45^1 60^1$	*0.8533*	1c	15	*3-clique*		***Weisfeiler***	*–2.5.6*	**+2.3.3**
23	**B15-60**	8			1c	15	*5-clique*		***Weisfeil. comp.***	*–2.6.11*	**+2.6.12**
24	**B16-112**	14	$8^1 112^1$	*0.9488*	8p	2	*8-clique*	256	***2-octa-clique***	*–2.16.112*	**+2.14.85**
25	**B16-96**	12	$24^1 96^1$	*0.8955*	4p		*4-clique*	256	***4-quadro-clique***	*–2.14.78*	**+2.10.33**
26	**B16-40**	5	$40^1 80^1$	*0.8670*	4p	4	*4-girth*		***Greenwood***	*–2.4.4*	**+3.10.13**
27	**B16-80**	10			1c	16	*5-clique*	16	***Greenw. comp.***	*–2.8.24*	**+2.8.22**
28	**B16-48**	6	$48^1 72^1$	*0.8594*	1c	16	*4-clique*		***Weisfeiler***	*–2.4.4*	**+2.4.6**
29	**B16-72**	9			1c	16	*4-clique*		***Weisfeil. comp.***	*–2.8.18*	**+2.6.11**
30	**B16-64**	8	$56^1 64^1$	*0.8557*	2p	8	*4-girth*		***8-bi-clique***	*–2.10.10*	**+3.16.64**
31	**B17-68**	8	68^2	*0.8589*	1c	17	*3-clique*		***Selfcomplem.***	*–2.6.11*	**+2.5.7**
32	**B18-144**	16	$9^1 144^1$	*0.9555*	9p	2	*9-clique*	518	***2-nona-clique***	*–2.18.144*	**+2.16.113**
33	**B18-135**	15	$18^1 135^1$	*0.9280*	6p	3	*6-clique*	729	***3-sexta-clique***	*–2.17.120*	**+2.14.79**
34	**B18-108**	12	$45^1 108^1$	*0.8796*	3p	6	*3-clique*	216	***6-tri-clique***	*–2.14.60*	**+2.8.13**
35	**B18-81**	8	$72^1 81^1$	*0.8626*	2p	9	*4-girth*		***9-bi-clique***	*–2.11.18*	**+3.18.81**
36	**B20-180**	18	$10^1 180^1$	*0.9607*	10p	2	*10-clique*	1036	***2-deca-clique***	*–2.20.180*	**+2.18.45**
37	**B20-160**	16	$30^1 160^1$	*0.9169*	5p	4	*5-clique*	1924	***4-quinta-clique***	*–2.18.128*	**+2.14.73**
38	**B20-150**	15	$40^1 150^1$	*0.9019*	4p		*4-clique*	625	***5-quadro-clique***	*–2.17.105*	**+2.12.46**
39	**B20-100**	10	$90^1 100^1$	*0.8682*	2p	10	*4-girth*		***10-bi-clique***	*–2.12.20*	**+3.20.100**

Allakriipsutatud binaarmärgid on vastava struktuuri *täielikud invariandid*, st need hõlmavad struktuuri kõiki tippe ja servi. Nendele vastab ainult see struktuur ja mitte ükski teine.

Järeldus 30. *Bi-kliki* binaar(+)märk ja *2-r-kliki* binaar(–)märk on struktuuri ***täielikud invariandid***.

Näide 10. Üks paljudest *tugevregulaarseteks* peetud graafide nimekirjadest http//poeple.csse.uwa.edu.au/gordon/ remote/srgs/):

Nr	Parameters	Meie nr.	Meie register
1	(5, 2, 0, 1)	**2**	**B5-5**
2	(9, 4, 1, 2)	**8**	**B9-18**
3	(10, 3, 0, 1)	**10**	**B10-15**
4	(13, 6, 2, 3)	**17**	**B13-39**
5	(15, 6, 1, 3)	**22**	**B15-45**
6	(16, 5, 0, 2)	**26**	**B16-40**
7	(16, 6, 2, 2)	**28**	**B16-48**
8	(17, 8, 3, 4)	**31**	**B17-68**

Selles puudub 31 bisümmeetrilist/tugevregulaarset 4 kuni 20-tipulist struktuuri.

Siiski, esineb ka palju täielikumaid tugevregulaarsete graafide nimekirju. Üks nendest on näiteks, http://mathworld.wolfram.com/StronglyRegularGraph , kus on esitatud 33 struktuuri, sh ka ***r***-klikke. Paraku puuduvad selles nr.nr **25** (B16-96), **29** (B16-72), **33** (B18-135), **34** (B18-108), **37** (B20-160) ja **38** (B20-150).

Tugevregulaarikute poolt koostatud nimekirjades esineb muidugi ka palju suuri graafe. Näiteks esimeses nimekirjas esineb üks 999-tipuline graaf:

16	(999, 448, 172, 224)	-	-

Näide 11. Me võime lihtsal viisil genereerida mõned bisümmeetrilised ja tugevregulaarsed 999-tipulised struktuurid, mida teadaolevates nimekirjades tabada pole õnnestunud:

Nr	**Tähistus**	***deg***	**|*E*|**	***SR***	**Regulaarsus**	**Kommentaaar**	**(+)märk**
1	**B999-2**	2	999	***0.9989***	*3-clique*	333 componentical 3-cliques	***+2.3.3***
2	**B999-996**	996	497502		*333-clique*	333 3-elementic parts ***3-tricent-triginta-tri-clique***	**?**
3	**B999-8**	8	3996	***0.9979***	*9-clique*	111 componentical 9-cliques	***+2.9.36***
4	**B999-990**	990	494505		*111-clique*	111 9-elementic parts ***9-cent-undeca-clique***	**?**
5	**B999-110**	110	54945	***0.9736***	*111-clique*	9 componentical 111-cliques	***+2.111.6105***
6	**B999-888**	888	443556		*9-clique*	9 111-elementic parts ***111-nona-clique***	**?**
7	**B999-332**	332	165832	***0.9515***	*333-clique*	3 componentical 333-cliques	***+2.333.55278***
8	**B999-666**	666	332667		*3-clique*	3 333-elementic parts ***333-tri-clique***	**?**

Kommentaarid: **a)** Tugevregulaarsed on siin muidugi vaid ***r***-klikid. **b)** ***r***-klikkide nimetused võivad nii mõnelegi mitte meeldida, kuid midagi paremat ma ei leidnud.

Kokkuvõte

Tegemist on bisümmeetria ja tugevregulaarsuse osalise kokkulangevusega. Bisümmeetria hõlmab ka veel mittesidusaid struktuure ning tugevregulaarsus võib esineda ka mono-, polü- ja ositi sümmeetria korral, kuigi kuni 20-tipuliste hulgas viimaseid siiski ei ole täheldatud. Struktuurisemiootiline lähenemine on täitnud „valgeid laike" tugevregulaarsete graafide loetelus, esile tõstnud seni ignoreeritud klikkregulaarsuse olemuse ja selle, et tugevregulaarse graafi täiend on samuti tugevregulaarne.

Teises, „kõige täielikumas" tugevregulaarsete graafide loetelus on esitatud kõik kuni 20-tipulised ***bi-klikid***, mida seal nimetatakse peamiselt *complete bipartite graphs*, kusjuures 4-tipulise bi-kliki nimi on *square* ja 6-tipuline on *unity.* Samuti on seal esitatud kõik ***2-r-klikid***, mis kannavad küll tiitlit ***r****-cocktail party graphs*, kusjuures 6- tipuline on hoopis *octahedral graph* ja 8-tipuline *16-cell graph.* Ülejäänud ***n-r-klikkidest***, seal nimetatud peamiselt *circular graphs*, puudub loetelus viis ***r****-klikki.* Samuti puudub selles ühe tuntud tugevregulaarse graafi tugevregulaarne täiend.

Graafide käsitlemine erinevatest aspektidest on kasulik.

Kokkuvõte

Need olid mõned näited sellest kuidas struktuurisemiootiliste vahenditega, peamiselt just mürgimaatriksi abil saab tuvastada struktuurseid omadusi. Mis sellest, et mõned nendest „varjatud" omadustest, nagu näiteks ***r***-klikide jt omad, ei ole populaarsed. Ega seni tundmatud asjad ei saagi populaarsed olla. Reaalne struktuurne omadus on see ikkagi.

Võidakse ette heita, et siin pole esitatud tõestusi. Kui neid propositsioone ja järeldusi tähelepanelikult jälgida, siis võib näha, et nende sõnastus tõestab iseennast. Näiteks, „bisümmeetriline ***r***-klikk sisaldab $s=n^r$ klikki võimsusega ***n***" (järeldus 22)**.** Kas siin peaks tõestuseks mõne vahetu rehkenduse ära tegema?

Olulised on need struktuursed omadused, mis eristavad üht struktuuri teisest. Nagu nägime, üheks selliseks sümmeetria. Ka *0*-sümmeetria on sümmeetriaomadus. Võib tekkida küsimus, kas need struktuursed omadused on struktuuri, graafi või graafi struktuuri omadused. Graaf on struktuuri eksplikaat, seega on need paratamatult struktuuri, kui niisuguse, omadused.

Siin ei ole üldse käsitletud elementaarseid struktuurimuutusi ja struktuurisüsteeme. Need on esitatud võrguteavikus „Systematic analysis of the graphs" (http://ester.nlib.ee/). Graafide süstematiseerimine on seni küllaltki stiihiline olnud. Näiteks Graafiatlases [Read, R. C., Wilson, R. J., 1998] on selle 454 leheküljel on esitatud üle 10000 „graafilist" graafi. Esitatud on kõik 1252 1 kuni 7-tipulist graafi koos neid puudutavate klassikaliste parameetritega, järjestatult tippude arvu, servade arvu ja valentsuste järgi. Kuid see ei ole veel mingi süstematiseeritus. Iidse tava kohaselt *domineerivad kuup-regulaarsed sidusad graafid.* Orbiitidest ei ole Graafiatlases ühtki sõna ning seal mainitud transitiivsed tähendavad struktuurses mõttes vaid üldist tippudest sümmeetrilisust ning sümmeetrilised vaid servasümmeetriat. Samuti ei tunta seal tugevalt regulaarseid graafe. Siiski on tehtud ära suur töö, olgugi et muistsete arusaamade järgi.

Kirjanduse loetelu

Aleksejev, V., Kozyrjev, V. et al. *Алексеев, В., Козырев, В. и др.* Графов теория. «Математическая Энциклопедия», *Том **1**, Москва, 1977.*

Appel, K., Haken, W. The Existence of Unavoidable Sets of Geographically Good Configurations. – *Illinois J. Math., 1976, **82**, 218-297.*

Berge, C. Theorie des Graphes et ses Applications. *Dunod, Paris, 1958.*

Berge, C. Graphs et hypergraphes. *Dunod, Paris, 1970.*

Biggs, N.L. Algebraic Graph Theory. *Cambridge University Press, 1974.*

Biggs, N.L., Lloyd, E.K., Wilson, R.J. Graph Theory 1736-1936. *Clarendon Press, 1986.*

Bollobás, B. Extremal Graph Theory. *Academic Press, N. Y., 1978.*

Bollobás, B. Graph Theory: An Introduction Course. *Springer, N.Y., 1979.*

Bollobás, B. Random graphs. *Academic Press, N.Y., 1985.*

Bollobás, B. Modern Graph Theory. *Springer, 1998.*

Busacker, R., Saaty, T. Finite Graphs and Networks. An Introduction ans Application. *Mc Graw Hill Book Company. 1965.*

Caley, A. On the theory of the analytical forms called trees. *Phil. Mag. (4) **13** (1857), 172-176.*

Chartrand, G., ***Lesniak, L.*** Graphs and digraphs. *Wadsworth International, Monterery, California, 1986.*

Christofides, N. Graph Theory: An algorithmic approach. *Academic Press, N.Y., London, San Francisco, 1975.*

Collatz, L., ***Sinagowitz, U.*** Spektren endlicher Graphen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **21** (1957), 63-77.*

Erdös, P. Graph theory and probability II. *Canad. J. Math. **13** (1961) 346-352.*

Erdös, P. Extremal problems in graph theory. – *In: A Seminar in Graph Theory. N. Y., (1967), 54-59.*

Euler, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. – *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae **8** (1736), 128-140.*

Filosoofia leksikon. *Tallinn, 1987.*

Folkman, J. Regular line-symmetric graphs. – *J. Comp. Teory, **3** (1967), N3, 215-232.*

Gati, G. Further annotated bibliography on the isomorphism disease. – *J. of Graph Theory, **3** (1979), 95-109.*

Gross, J., Yellen, J. Graph Theory and its Applications. *CRC Press, 1999.*

Harary, F. Graph Theory. *Addison-Wesley, 1969.*

Harary, F., Palmer, E. Graphical Enumeration. *Academic Press, 1973.*

Hermes, H. Semiotik: eine Theorie der Zeichengestalten als Grundlage für Untersuchungen von formalisierte Sprachen. *Leipzig: Hirzel, 1938.*

Hoffman, C. Group-Theoretic Algorithms and Graph Isomorphism. *Springer, 1982.*

Kirchhof, T.P. Über die Auflösung der Greichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearenVertheilung galvanisch Ströme geführt wird. *Ann. Phys. Chem. **72** (1847), 497-508.*

Krahn, E. Der Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit des Veirfarben-satzes. *Acta Comment. Univ. Tartu (A) **22** No 2 (1932), 1-7.*

König, D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. *Leipzig, Akad. Verlag M.B.H., 1936.*

Mathon, R. Sample graphs for isomorphism testing. – *Proc. 9th S-E. Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, 1980, 499-517.*

Mayer, J. Developments recents de la theorie des graphes. – *Historia Mathematica, **3** (1976), 55-62.*

Meos, I. Filosoofia põhiprobleemid. *Tallinn, 1998.*

Mereste, U. Süsteemkäsitlus: süsteemsest mõtlemisviisist majandusnähtuste käsitlemisel. *Tallinn 1987.*

Michalewicz, Z., Fogel, D. B. How I Solve It: Modern Heuristics. *Springer, 2000.*

Netshepurenko, M., et al. *Нечепуренко, М., и др.* Алгоритмы и программы решение задач для графов и сетей. *Новосибирск, 1990.*

Novaja filosofskaja entsiklopedija. *Moskva, 2001.*

Nöth, W. Handbook of Semiotics. *1995.*

Ore, O. Graphs and their Uses. *Random House, 1963.*

Pemmaraju, S., ***Sciena, S.*** Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica®. *Cambrige University Press, 2003.*

Petersen, J.J. Die Theorie der rägularen Graphen. *Acta Math. **15** (1891), 193-220.*

Pirzada, S., ***Dharwadker, A.*** Graph Theory. *Orient Longman and Universiteties Press, 2008.*

Popov, V. L. 1979. Invariant. – *In: Matematitseskaja entsüklopedija, tom 2, Moskva, 1979.*

Praust, V. Graafide rekonstruktsiooniprobleemist. *(käsikiri), Tallinn, 1995.*

Read, R. C., Corneil, D.G. The graph isomorphism disease. *J. of Graph Theory, **1** (1977), 339-363.*

Read, R. C., Wilson, R. J. An Atlas of Graphs. *Oxford, 1998.*

Roberts, F. Discrete Mathematical Models (with application to social, biological and environmental problems). *New Jersey, 1976.*

Schmidt, H. Philosophisches Wörterbuch. *Stuttgard, 1991.*

Silvester, J.J. Chimistry and algebra. *Nature **17** (1878), 284.*

Semionov, A. L. Izomorfizm. – *In: Matematitseskaja entsüklopedija, tom 2, Moskva, 1979.*

***Tevet, J.*.**
(1999a) Struktuurisemiootika: struktuursuse kujutamine graafidel. *S.E.R.R., Tallinn, 1999, 127 lk.*
(1999b) Appendix to Structure's Semiotics: A System of Graphs, their Characteristics and Changes. *S.E.R.R., Tallinn, 1999, 95 pp.*
(2000) Aabits graafide struktuurist, süsteemist ja märgilisusest. *S.E.R.R., Tallinn, 2000, 95 lk.*
(2001a) Graafid ja semiootika. *S.E.R.R., Tallinn, 2001, 97 lk.*
(2001b) Графы стуктуры и структура графов. *S.E.R.R., Tallinn, 2001, 17 pp.*
(2001c) Semiotic Testing of the Graphs: Principles, Using, Developments. *S.E.R.R., Tallinn, 2001, 76 pp.*
(2002) Isomorphism and Reconstructions of the Graphs. A Constructive Approach and Development. *S.E.R.R., Tallinn, 78 pp.*
(2003a) Ühe pürgimise ja ponnistuste kroonika. *S.E.R.R., Tallinn, 2003, 117 lk.*
(2003b) Structure of the Graphs and Graphs of the Structure. *S.E.R.R., Tallinn, 2003, pp. 76.*
(2004a) Graafide struktuuritöötluse heuristilised algoritmid. *S.E.R.R., Tallinn, 2004, 18 lk.*
(2004b) Heuristic Algorithms for Structure Processing of the Graphs. *S.E.R.R., Tallinn, 2004, pp. 18.*
(2004c) Põgusat teavet struktuurisemiootikast. *S.E.R.R., Tallinn, 2004, 18 lk.*
(2004d) Struktuurisemiootika '04: Aksioomist Otsustuseni. *S.E.R.R., Tallinn, 2004, 40 lk.*
(2004e) Sümmeetria graafides. *S.E.R.R., Tallinn, 2004, 20 lk..*
(2005a) Klikid, kaas- ja naabergraafid: tunnusmaatriksit lugedes. *S.E.R.R., Tallinn, 2005, 26 lk.*
(2005b) Graafide süsteemanalüüs: algoritm ja rakendus. *S.E.R.R., Tallinn, 2005, 94.*
(2005c) 270 aastat graafe: struktuurisemiootika vaatevinklist. *S.E.R.R., Tallinn, 2005, 35 lk.*
(2006a) Struktuurisemiootika '06: alused, arendus ja rakendus. *S.E.R.R., Tallinn, 2006, 42 lk.*
(2006b) Structure Semiotic Approach to the Graphs. *S.E.R.R., Tallinn, 2006, pp. 47.*
(2006c) Graafide struktuurisemiootiline käsitlus. *S.E.R.R., Tallinn, 2006, 47 lk.*
(2007a) Years Graphs and 70 Years Graph Theory. *– In: Baltic Horizons No 8 (107), (Special issue Dedicated to 270 years of Graph Theory), pp 9-16.*
(2007b) Recognition the Structure, Symmetry and Systems of Graphs. *– In*: *Baltic Horizons No 8 (107), (Special issue Dedicated to 270 years of Graph Theory), pp 33-75.*
(2007c) Valik graafide struktuure. *S.E.R.R., Tallinn, 2007, 48 lk.*
(2007d) Bisümmeetrilise struktuuri semiootika. *S.E.R.R., Tallinn, 2007, 18 lk.*
(2007e) Systematic Analysis of the Graphs. *S.E.R.R., Tallinn, 2007, 168 pp, võrguteavik http://nlib.ester.ee:80/record=b2297694~S1*est*
(2008a) Constructive Representation of the Graphs: A Selection of Examples. *S.E.R.R., Tallinn, 2008, 32 pp.*

Tevet, J., Krasnoshtshokova, R. (1983) Struktuursusprintsiip – hüpotees või modelleerimise moodus? – *Cell Theory. Schola Biotheoretica IX, Tartu, 1983, 106-117.*

Tevet, J., Martin, J. (1988) On discrete analysis of coexistence of biosystems. – *Theory of Coexistence Biosystems. Schola Biotheoretica XII, Tartu, 1988, 45-54.*

Tevet, J., Lambing, M. (2000b) Visions about skeletons of artworks. – In: *Frontiers of Interstanding, Stockholm, 2000, 69-73.*

The Cambridge Dictionary of Philosophy. *Cambridge, 1995.*

The Oxford Companion of Philosophy. *Oxford, 1995.*

The Penguin Dictionary of Philosophy. *London, 1997.*

Thulasiraman, K., Swamy, M.N.S. Graphs: Theory and Algorithms. *John Wiley & Sons, 1992.*

Tjuhtin, V., *Тюхтин,В., С.* Отражение, системы, кибернетика. *Наука, Москва, 1972.*

Tutte, W. T. Graph Theory. *Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.*

Tutte, W. T. Graph Theory As I Have Known It. *Clarendon Press, Oxford, 1998.*

Ulam, S. M. A Collection of Mathematical Problems. *Wiley, New York, 1960.*

Ursul, A. L. 1967, Teoretioko-poznavatelnoe znatšenie printsipa invariantnosti. *– In: Simmetrija, invariantnost, struktura. Moskva, 1967.*

Võhandu, L. Graafide korrastamisest *J*-keele abil *– A&A,* ***5****, 51-56,* ***6****, 38-44 (2001).*

Weisfeiler, B. On Construction and Identification of Graphs. *– Springer Lect. Notes Math., 558, 1976.*

Wetzenböck, R. Invarianten-Theorie. Gröningen, 1923.

Zykov, A. *Зыков, А.* Основы теории графов. *«Наука», Москва, 1987.*