

## **GRAAFI SEMIOOTILISTE INVARIANTIDE MÜSTEERIUM**

### **Lühiselgitus**

Teavikus esitatakse elementaarne ülevaade graafi semiootilistest invariantidest mis võimaldavad tuvastada graafi lühimad teed, vööd, klikid, regulaarsused, orbiidid, alused, sümmeetria, rekonstruktsioonid jt atribuudid. Nende invariantide täielik süsteem tuvastab graafi struktuuri orbiitide ja isomorfismi täpsusega ning on selle kanooniline esitus. Tegemist on graafide nõ igihaljaste probleemidega, millele püütakse anda kompleksne käsitus.

© John-Tagore Tevet  
© S.E.R.R.  
ISBN 978-9949-18-510-8

### **Sisukord**

<b>Sissejuhatus</b>	<b>2</b>
<b>1. STRUKTUURI ATRIBUUDID</b>	<b>4</b>
1.1. Struktuuri semiootilised invariantid	4
1.2. Sümmeetria probleem: orbiidid	7
1.3. Orbiitstruktuurid	10
<b>2. REGULAARSUSED GRAAFIS</b>	<b>14</b>
2.1. Regulaarsuste loetelu	14
2.2. Vöö- ja klikkregulaarsus	15
2.3. Bisümmeetria, klikk- ja tugev regulaarsus	19
<b>3. GRAAFIDE ISOMORFISMI JA KANOONILISE ESITUSE PROBLEEM</b>	<b>25</b>
3.1. Graafide isomorfismi probleem	25
3.2. Graafide kanooniline esitus	28
3.3. Ekstreemselt sümmeetrilistest graafidest	31
3.4. Kaks polünomiaalset isomorfismituvastuse algoritmi	33
<b>4. MIDA TEHA ULAMI HÜPOTEESIGA?</b>	<b>37</b>
4.1. Hüpoteesi kummutamine ja selle rehabiliteerimise katse	37
4.2. Seosed isomorfsete graafide ja nende $(G \setminus v_i)$ alamgraafide vahel	39
4.3. Graafi suurimad alam- ja väikseimad ülemstruktuurid	43
4.4. Taastatavus: graafi (de)komponeerimine ja rekomponeerimine	45
<b>Järelsõna</b>	<b>49</b>
<b>Kirjanduse loetelu</b>	<b>50</b>

## Sissejuhatus

*Kustpoolt vaatad  
nõnda näed.*

(Kihelkonna vanasõna)

**Struktuuri semiootika** [1] on uurimisvaldkond *graafiteooria* ja *semiootika* piirimal mille uurimisobjektiks on graafi struktuur kui niisugune. See on heuristiliste meetodite süsteem struktuuri ja selle atribuutide uurimiseks. **Semiootika** aspektist on tegemist ühega paljudest objekt-orienteeritud semiootikatest.

Semiootiline „nägemus“ graafidest erineb mõneti tavapärasest sest esile kerkivad uued „tõed“ graafide kohta. Pole mitte midagi erilist selles kui nähakse asja erinevatest vaatevinklitest. Tõde on veendumus nähtuse kohta, mis on tunnetatud teatud aspektist. Üldjuhul on aga iga nähtus (süsteem) paljuaspektiline. Aspektide paljusus ei muuda oma „tõe“ otsimise asjatuks. Ükski tõde ei tohiks aga dogmaks muutuda. Ka graafidest võib erinevaid tõdesid välja lugeda. Näiteks, kuulus *nelja värvi probleem* on tõestatud kolmel korral: K. Appel, W. Haken 1976 [2], Ashay Dhaewadker 2000 [3] ja N. Robertson jt 2003 [4], igaüks oma aspekti ehk nägemust pidi.

Struktuuri semiootiline nägemus ei ole müsteerium, tegemist on siiski reaalsuse ühe aspektiga. Raskusi on vaid harjumustest vabaneda. Näiteks, raskesti „läheb peale“ arusaam, et *struktuur* on see, mis jääb muutumatuks isomorfsete objektide, ja ainult nende, puhul. Kas see on müstiline? Ollakse harjunud verbaalsete arusaamadega, nagu asutuse struktuur, avaldise struktuur, kivimi struktuur jne.

**Struktuur** (ladina sõnast *structura* (sise)ehitus) on *filosoofiline kategooria*, mis on määratletud kui süsteemi elementide (muutumatu, püsiv) *seos* ja vahekord ehk *organiseerimisviis* [5]. Teisisõnu, struktuur on süsteemi abstraktsioon, „skelett“, kus selle elemendid ja nendevahelised seosed on minetanud oma empiirilised tähendused ja substraadiks on vaid nende organiseeritus. Organiseeritus on kompleksne nähtus sidususest, kompositsioonist, regulaarsustest, hargnevusest, sümmeetriast jne. Märgitakse, et tunnetatava objekti struktuuri avaldamise adekvaatseks ”keeleks” on *matemaatilised vahendid*, mõisted ja meetodid. Struktuuri mõistele on omane eriline, samal ajal universaalne suhete (seoste) tüüp – *kompositsioon* – mis on matemaatiliselt avaldatav valemite, võrrandite, maatriksite, graafide jt matemaatiliste vahendite abil. Struktuuri, kui terviku, elemendid sõltuvad struktuurist ja etendavad kvalitatiivselt erinevat osa olenevalt nende seostatuse viisist – *positsioonist* – struktuuris (graafiidi ja teemanti näide). Niisiis on struktuur moodustis omavahel seotud elementidest ning on kujutatav *graafi* näol. Märgitakse, et struktuuri täpne definitsioon antakse matemaatikas *isomorfismi* mõiste abil. Struktuuri mõistele aluse panijaks peetakse nii Immanuel Kanti kui ka Georg Wilhelm Friedrich Hegelit'

**Semiootika** on teadus *märkidest* ja *märgisüsteemidest*. Tegeleb *tähenduse, kommunikatsiooni- ja interpretatsiooni-protsesside ja -nähtuste* uurimisega. **Märk** semiootilises süsteemis on miski, mis reeglina tähistab midagi enam kui ta ise. Ch. Peirce järgi on märk seotud tunnetuse ja mõtlemisega. Märk on esitis objekti kohta, mis kajastab viimase *tähendust*. Struktuurseteks märkideks on *lokaalsed invariantid*.

Näiteks, graafid  $G_A, G_B, G_C, \dots$  on *isomorfsed* parajasti siis, kui nende tipupaare identifitseerivate *semiootiliste invariantide* ehk *märkide süsteemid* langevad kokku. Märkide süsteemi esitavate märgimaatriksite ekvivalentsus  $W_A \sim W_B \sim W_C \sim \dots$  tähendab *isomorfismi* ehk *struktuurset samasust*.

Märgimaatriks  $W$  on graafi struktuuri *kanooniline esitus*. Struktuuri tuvastamine on midagi rohkemat kui isomorfismi tuvastamine, sest see hõlmab kõikide struktuursete atribuutide tuvastamist. Samal ajal ei nõua struktuuri tuvastamine isomorfismi tuvastamist substituutsioonide tasemel.

Struktuuri olulisemaid atribuute on *sümmeetria*. Ka siin on erinevaid nägemusi. Sügavalt on sisse juurdunud arusaam sümmeetriast kui mingist peegeldusest.

*Sümmeetria (A)* on objekti omadus, kus selle mingist keskpunktist või teljest samal kaugusel olevad osad on ühetaolised [5].

See nõ „peegeldussümmeetria“ on matemaatikas defineeritud kui: a) kujundi omadust "teisendada iseendaks" (näiteks isomeetriliselt); b) binaarse relatsiooni omadust  $xRy \leftrightarrow yRx$ . c) Graafiteoorias räägitakse sümmeetriast ka suunatud graafide mõttes. Tegelikult on sümmeetria mõiste palju laiem.

*Sümmeetria (B)* on struktuurne omadus, mis avaldub objekti ühetaoliste osade kordumises nii ruumis kui ajas [6].

Võib öelda, et sümmeetria (B) on sümmeetriate (A) ekvivalentsusklass ehk „sümmeetriakliik“. Sümmeetria laiem mõiste (B) on *matemaatikas* defineeritud kui rühma *AutG* automorfismide transitiivsus-piirkonna ehk *orbiidi* olemasolu graafis. Orbiit on sisuliselt *klass*, mille elemendid omavad struktuuris *ühesugust positsiooni*. See positsioonide ühesugusus ongi see, milles avaldub struktuuri *sümmeetria*. Graafi struktuur jaguneb tipu- ja tipupaari orbiitideks ehk sümmeetriaklassideks (B) mõttes.

Tõesed on mõlemad arusaamad, kuid „peegeldussümmeetria“ ei ole siiski ainuke tõde.

Sümmeetria on *filosoofilise kategooria* staatuses Mandri-Euroopas (Saksamaa, Venemaa). Anglosaksi maades [7, 8] ja samuti Eestis [9] sellele seda au ei omistata.

Graafi orbiidi, st ühesugust positsiooni omavate tippude ja/või tipupaaride klassi semiootiline tuvastamine toimub neid positsioone identifitseerivate struktuurisemiootiliste invariantide alusel. Seda asjaolu peetakse müsteeriumiks, sest levinud „tõe“ järgi on see on teostatav ainult rühmateoreetiliselt.

Struktuurisemiootilisest aspektist on struktuuri *taastatavus* taastatavus selle sõna otseses tähenduses: struktuuri igal suurimal alamstruktuuril on teatav *taastav orbiit*, millele rakendatud operatsioon taastab lähtestruktuuri. Taastamine toimub nii suurimate alam- kui ka väikseimate ülemgraafe pidi.

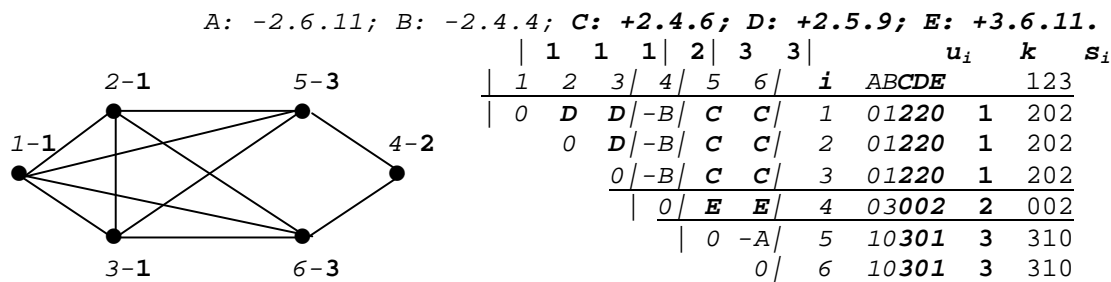
# 1. STRUKTUURI ATRIBUUDID

## 1.1. Struktuuri semiootilised invariandid

Lähtugem hüpoteesist, et struktuur on tuvastatav tema „elementaarosakeste“, st tipupaaride identifitseerimise teel. Tipupaari identifitseerib nende vaheline „seos“ nende ümbruste ühisosa kujutava alamgraafi, nn *binaargraafi* näol. Selle binaargraafi invariant  $\pm d.n.q_{ij}$  on *struktuuri semiootiline invariant*, kus  $\pm d$  tähendab vastavalt kolateraalsel- või tavakaugust tippude  $v_i$  ja  $v_j$  vahel;  $n$  – tippude arvu ja  $q$  – servade arvu selles binaargraafis. Tipupaari identifitseerivat invarianti nimetame *binaarmärgiks*. Märkide süsteem esitatakse nn *märgimaatriksi*  $W$  kujul. See kujutab endast graafi struktuuri *teksti*. Struktuur on uuritav just oma märgimaatriksi põhjal.

**Semiootiline märgistamisprintsip.** OPERAND: Graafi naabertippude nimekiri  $L$ . ALGORITM: 1) Võtta graafi tipp  $i$  ja fikseerida selle ümbrus  $N_i$ , milles tipuga  $i$  sidusad tipud jaotada kauguse  $d$  järgi kirjetesse  $C_d$ . 2) Võtta tipp  $j$  ja fikseerida selle ümbrus  $N_j$  tingimustel (1). 3) Ümbruste ühisosa  $N_i \cap N_j$  kujutavas osagraafis leida  $i$  ja  $j$  vaheline kaugus  $d$ , tippude hulk  $\{v\}_{ij}$ , nende arv  $n$ , naabruste (servade) arv  $q$ . 4) Saadud osagraaf on nn *binaargraaf*. Fikseerida selle *binaarmärk*  $\pm d.n.q_{ij}$ . 5) Teostada (1) kuni (4) iga paari  $i, j \in [1, |V|]$ , korral. 6) Oleme saanud märgimaatriksi  $W$ . 7) Fikseerida iga tipu  $i$  puhul selle binaarmärkide *sagedusvektor*  $u_i$ . 8) Dekomponeerida märgimaatriksi  $W$  read ja veerud leksikograafiliselt sagedusvektorite  $u_i$  järgi osamaatriksiteks  $W_k$ . 9) Iga osamaatriksi  $W_k$  raames järjestada read ja veerud leksikograafiliselt *klassivektorite*  $s_i$  järgi täiendavateks osamaatriksiteks. 10) Viimast korrata seni, kuni täiendavat klassijaotust ei teki. TULEMUS: a) Dekomponeeritud märgimaatriks  $W$ ; b) Binaargraafide tippude nimekirjad  $\{B_{ij}\}$ ; c) Sagedus-  $u_i$  ja klassivektorid  $s_i$ .

**Näide 1.1.1.** Märgistamisprintsipi tulemus. Graaf  $G$ , selle binaarmärgid, dekomponeeritud märgimaatriks  $W$  sagedus- ja klassivektoritega:



**Kommentaari:** Märgimaatriks on tuvastanud kolm tipu- ja viis tipupaari klassi, sh kolm serva ja kaks „mitteserva“ klassi ning graafi struktuuri tervikuna.

**Propositsioon 1.1.1.** Dekomponeeritud märgimaatriks  $W$  on graafi struktuuri *kanooniline kujutis*, mis üldjuhul esitab graafi *isomorfismi täpsusega*.

Praeguse seisuga on põhiline *märgistamisprintsip* realiseeritud arvutil kolmel korral. Esimese variandi teostaja oli Valdo Praust. See sai teostajale esitatud samasuguse lakoonilise kirjeldusena: Sellest piisas tookord senini töötava algoritmi realiseerimiseks. Teine kord sooviti saada samm-sammuline pikem üksikasjaline kirjeldus, mille detailide kallal palju vaeva nähti ning asjaolu, et tegemist on vaid *tipupaari ümbruste ühisosa* leidmisega, tähelepanuta jäi. Kolmas kord teostas seda väga korrektset Ashay Dharwadker [10].

Märgistamisprintsiiibil identifitseeritakse tipupaarid omistades neile binaarmärgid, mis iseloomustavad graafi lühimaid teid, vöösid (girths), klikke, sildu jne. Kuidas lugeda binaarmärke, missugused on nende *struktuursed tähendused*? Järgmiste propositsioonide toetus tuleneb vahetult märgialgoritmist.

**Propositsioon 1.1.2.** Binaarmärk  $-dnq=-0.2.0$  identifitseerib *mittesidusa tipupaari*.

**Propositsioon 1.1.3.** Binaarmärk kujul  $-d.(n=d+1).(q=d)$  identifitseerib *lihtahela* pikkusega  $d$ .

Kommentaari: Lihtahela binaarmärgiks on, näiteks  $-3.4.3$ , mis identifitseerib 3-ahela,  $-4.5.4 - 4$ -ahela;  $-7.8.7 - 7$ -ahela, jne.

**Propositsioon 1.1.4.** Suurima absoluutväärtusega  $\max|d|$  binaar(-)märk identifitseerib struktuuri *diameetri*.

**Propositsioon 1.1.5.** Binaarmärk  $+dnq=+1.2.1$  identifitseerib *oksa lüli*.

**Propositsioon 1.1.6.** Binaarmärk kujul  $(+d=2).n.q$  identifitseerib *tiangulaarsuse*, st 3-kliki olemasolu.

**Propositsioon 1.1.7.** Binaarmärk kujul  $(+d=2).n.(q=n(n-1):2)$  identifitseerib *kliki* ja seda nimetame *klikimärgiks*. Klikimärk on kliki *täielik invariant*, st klikimärki omab ainult klikk.

Kommentaari: Klikimärgideks on, näiteks,  $+1.2.1$ , mis identifitseerib 2-kliki;  $+2.3.3 - 3$ -kliki;  $+2.4.6 - 4$ -kliki;  $+2.5.10 - 5$ -kliki;  $+2.6.15 - 6$ -kliki; ...,  $+2.13.78 - 13$ -kliki jne.

**Propositsioon 1.1.8.** Binaarmärk  $+dnq$ , kus  $d \geq 2$ , identifitseerib *vöö (girth)* pikkusega  $d+1$  ning seda nimetame *vöömärgiks*. Binaarmärk kujul  $(+d=n-1).n.(q=n)$  identifitseerib *separaatse vöö*; kui  $n=|V|$ , siis kujutab struktuur *GS* tervikuna endast *vööd*.

Kommentaari: a) Vöömärgiks on, näiteks,  $+3.4.4 - 4$ -vöö;  $+4.5.5 - 5$ -vöö; ...  $7.8.8 - 8$ -vöö jne. b) Kui pikkus  $d$  ei ole kooskõlas vöömärgi tippude arvuga  $n$ , siis on tegemist lõikuvate konstantse pikkusega vöödega. Ka need on üksipulgi tuvastatavad.

**Propositsioon 1.1.9.** Binaarmärk kujul  $(+d=3).(n=a+b).(q=a \times b)$  identifitseerib *bi-kliki*, kus  $a$  ja  $b$  on tippude arvud kliki alustes.

Kommentaari: bi-kliki märgiks on näiteks  $+3.7.12$  tippude arvuga alustes  $a=3$  ja  $b=4$ .

Struktuuri semiootilised invariandid on ka järgmised vektorid:

**Definitsioon 1.1.1.** Vektorit  $u_i = u_{i1}, \dots, u_{ip}, \dots, u_{ip}$ , mille elemendid  $u_{ip}$  on binaartunnuste põhjal leksiko-graafiliselt järjestatud,  $d.n.q_1 < \dots < d.n.q_p < \dots < d.n.q_p$ , ning esitavad nende vastavat arvu tunnusmaatriksi reas  $W_i$  nimetame *sagedusvektoriks*.

**Definitsioon 1.1.2.** Vektorit  $s_i = s_{i1}, \dots, s_{ik}, \dots, s_{iK}$ , mille elemendid  $s_{ik}$  esitavad tipu  $v_i$  naabertippude (binaar(+))tunnuste) arvu klassist  $W_k$  nimetame *klassivektoriks*.

Binaarmärgid ei tarvitse olla tipupaari täielikud invariandid, kuid neid on võimalik täpsustada seosmaatriksi  $E$  korrutamise teel iseendaga kuni teatud astmeni  $E^n$ .

**Propositsioon 1.1.10.** Seosmaatriksi korrutise (astme)  $E \times E \times E \times \dots = E^n$  elemendid  $e^{n}_{ij}$  on põhimõtteliselt samuti binaarmärgid – nn *multiplikatiivsed binaarmärgid*.

**Propositsioon 1.1.11.** Seosmaatriksi  $E$  astendamisel teatud astmeni  $n$  suureneb maatriksi  $E^n$  elementide, st lokaalsete invariantide ehk multiplikatiivsete binaarmärkide erinevate väärtuste arv teatud arvuni  $p$ , mis edasisel astendamisel ei suurene.

Multiplikatiivsed binaarmärgid ei sisalda mingit struktuurset teavet, kuid nende erinevate väärtuste maksimaalarv  $p$  võib olla suurem kui erinevate semiootiliste binaarmärkide arv. Seega võivad multiplikatiivsed binaarmärgid teatud juhtudel täiendada semiootilisi.

**Multiplikatiivmärgistamise printsiip.** OPERAND: Graafi naabertippude nimekiri  $L$ . ALGORITM: 1) Moodustada naabusmaatriks  $E$ . 2) Korrutada see iseendaga  $E \times E \times E \times \dots = E^n$  ning fikseerida iga astme  $n$  korral maatriksi  $E^n$  erinevate väärtustega *multiplikatiivsete binaarmärkide*  $e^{n}_{ij}$  arv  $p$ , mis reeglina suureneb. 3) Peatada korrutamine, kui  $p$  enam ei suurene ning fikseerida suurimat  $p$  sisaldav  $E^n$  ja sellele järgnev  $E^{n+1}$  naabusmaatriksi aste. 4) Saame maatrikskorrutised (-astmed)  $E^n$  ja  $E^{n+1}$ , kui teatud tüüpi märgimaatriksid. 5) Vajaduse korral täpsustada märgimaatriksi  $W$  binaarmärke  $\pm d.n.q.ij$  vastavate multiplikatiivsest  $e^{n}_{ij}$  abil. TULEMUS: Täpsustatud märgimaatriks  $W^*$

**Näide 1.1.2.** Multiplikatiivmärgistamise tulemus. Regulaarse graafi  $G(8.20)$  seosmaatriksite korrutis  $E \times E \times E = E^3$ , sagedusvektor ning multiplikatiivsete ja semiootiliste binaarmärkide vastavus:

1	2	3	4	5	6	7	8	=i	12345	k=
12	18	16	13	19	13	16	18	1	12221	1
18	12	18	16	13	19	13	16	2	12221	1
16	18	12	18	16	13	19	13	3	12221	1
13	16	18	12	18	16	13	19	4	12221	1
19	13	16	18	12	18	16	13	5	12221	1
13	19	13	16	18	12	18	16	6	12221	1
16	13	19	13	16	18	12	18	7	12221	1
18	16	13	19	13	16	18	12	8	12221	1

Multiplikatiivsed $e_{ij}^3$	12	13	16	18	19
Semiootilised	0	-2.6.11	+2.5.8	+2.4.5	+2.4.6

**Kommentaariid:** a) Antud juhul osutus semiootiline märgistamine astmel  $E^3$  piisavaks nelja tipupaari-klassi tuvastamiseks. b) Multiplikatiivmärgistamise efektiivsus tõuseb esile teatud sümmeetriliste graafide tipupaari klasside tuvastamisel, vt Näide 3.2.2.

Väidetakse, et  $n$ -astme seosmaatriksi elemendid kajastavat tipupaari vahelist pikimat teed graafis. Struktuurset aspektist tekib siin rida küsitavusi. Mida kujutavad endast seosmaatriksi peadiagonaali nullide kohale tekkivad arvud (arvväärtused)? Miks suureneb korduval astendamisel eristavate arväärtuste arv? Miks muutuvad teatud astmel  $n$  osa maatriksi elemente nullideks? See „müstika” ei kahanda muidugi selle meetodi praktilise kasutamise mõttekust. Multiplikatiivmärgistamise programmi teostaja oli A. Kreitsman. Paraku ei tööta see moodus tugevalt regulaarsete graafide puhul.

## 1.2. Sümmeetria probleem: orbiidid

Sümmeetriat käsitleme siin selle **B**-tähennduses, mis avaldub „ühesuguste“ elementide esinemise näol. Sümmeetria on struktuuri olulisemaid atribuute.

Desorienteeruv termin *orbiit* on rühmateooria mõiste ja vajab siin selgitust. Struktuuri säilitavat tippude või tipupaaride substitutsiooni (permutatsiooni) nimetatakse **automorfismiks**  $\alpha$ . Seda tõlgendatakse kui *lokaalset isomorfismi (isomorfismi iseendasse)*. Automorfismid moodustavad graafi automorfismirühma  $AutG$ . Permutatsioonitehnika võtetega fikseeritakse selles rühmas *automorfismide transitiivsuspiirkonnad ehk orbiidid*  $\Omega$ , mille elemente peetakse „ühesugusteks“ ehk ekvivalentseteks.  $AutG$  puhul huvitatakse peamiselt tipuorbiitidest. Meie huvitume eelkõige tipupaari- ehk binaarorbiitidest.

**Propositsioon 1.2.1.** Automorfism  $\alpha$  on otseselt seotud lokaalse isomorfismiga  $g_{ij} \cong g_{ij}$  ning automorfismide transitiivsuspiirkond ehk binaarorbiit  $\Omega_{R_n}$  on otseselt seotud *binaargraafide isomorfismiklassiga*  $\{g_{ij} \cong g_{ij} \cong \dots \cong g_{ij}\} \subset GS$ .

Seega on binaarorbiiti  $\Omega_{R_n}$  võimalik kindlaks määrata kui *binaargraafide isomorfismiklassi*  $\{g_{ij} \cong g_{ij} \cong \dots \cong g_{ij}\}$ . Niisugust isomorfismiklassi võib tõlgendada kui „isomorfismiklikki“, mille kõik elemendipaarid on omavahel isomorfsed.

**Propositsioon 1.2.2.** Orbiiti kuuluvate elementide ekvivalentsus, st ekvivalentsusklassi olemasolu määrab sümmeetria **B** tähenduses.

Binaarorbiit  $\Omega_{R_n}$  on identifitseeritav sinna kuuluvaid tipupaare esitavate isomorfsede binaargraafide  $g_{ij}$  semiootiliste invariantide ehk binaarmärkide  $dnq_{ij}$  alusel. Selles pole mingit „müstikat“.

**Propositsioon 1.2.3.** Rühmateoreetilise ja struktuurisemiootilise käsitluse erinevustest ja kokkulangevusest orbiitide tuvastamisel:

- Rühmateoreetiline orbiidituvastus toimub graafi substitutsioonide ehk “figuuri-pööramis-väänamis-operatsioonide” transitiivsuse kindlaksmääramise teel, struktuurisemiootiline käsitlus rajaneb binaarmärkide ekvivalentsusklasside kindlaksmääramisel.
- Rühmateoreetilise orbiidituvastuse korral toimub tipu- ja servaorbiitide tuvastamine eraldi ning “mitteserva” orbiitide tuvastamist ei tunta. Struktuursel käsitlusel toimub orbiitide tuvastamine komplekselt ning dekomponeeritud märgimaatriks  $W$  esitab nendest tervikliku pildi.
- Rühmateoreetilise orbiidituvastuse korral võib sümmeetriliste graafide puhul üksikoperatsioonide arv ulatuda faktoriaalini, struktuursel käsitlusel seda ei juhtu.
- Erinevate struktuuridega graafid võivad omada üht ja sama rühma  $AutG$ , st ühesuguseid sümmeetriaomadusi, kuid omavad erinevaid märgimaatrikseid  $W$ .
- Nii rühmateoreetilisel kui ka struktuursel käsitlusel tuvastatud orbiidid **langevad kokku!**
- Suvalise graafi automorfismirühma kindlakstegemist peetakse keeruliseks ülesandeks, väidetakse koguni, et nende tuvastamise efektiivseid algoritme ei olevat olemas. Orbiitide käsitlemist peetakse siiaamaani ikka veel graafiteooria ääremail olevaks rühmateoreetiliseks nähtuseks. Struktuuri semiootiline orbiidituvastus on lihtne.

Graafi *sümmeetria* sõltub otseselt selle *tipu- ja binaarorbiitidest*.

**Propositsioon 1.2.4.** Dekomponeeritud märgimaatriksi  $W$  osamaatriksisse  $W_k$  kuuluvad tipud moodustavad graafi tipuorbiit  $\Omega V_k$ .

Kommentaari: Ühe tipuorbiidi tipud omavad *ühesugust struktuurset positsiooni*, nad on omavahel ümbervahetatavad ja suvalise tipu elimineerimine annab alati ühesuguse jääkstruktuuri.

**Propositsioon 1.2.5.** Dekomponeeritud märgimaatriksi  $W$  osamaatriksisse  $W_{kk^*} \subseteq W_k \cap W_{k^*}$  kuuluvad ja ühesuguste binaarmärkidega tipupaarid moodustavad graafi binaarorbiidi  $\mathcal{OR}_n$ .

Kommentaari: Ühe binaarorbiidi tipupaarid omavad *ühesugust struktuurset positsiooni*, nad on omavahel ümbervahetatavad ja suvalise serva eemaldamine või lisamine annab alati ühesuguse jääkgraafi.

Struktuurisemiootilisest aspektist esinevad graafides järgmised *sümmeetria liigid*:

**Propositsioon 1.2.6.** Graaf, millel on ainult üks tipu-  $\mathcal{OV}_k$  ja üks binaar(+)- ehk servaorbiit  $\mathcal{OR}_n$  on *täissümmeetriline*, st *täisgraaf*.

Kommentaari: Täisgraaf koosneb ainult ühest binaar(+)-orbiidist omamata ühtki binaar(-)-orbiiti ning tühigraaf koosneb ainult ühest binaar(-)-orbiidist omamata ühtki binaar(+)-orbiiti – need mõlemad ongi täis- ehk 100% sümmeetrilised.

**Propositsioon 1.2.7.** Graaf, millel on ainult üks tipuorbiit  $\mathcal{OV}_k$  on *tippudest sümmeetriline* ehk *transitiivne*, nagu seda graafiteoorias tihti nimetatakse.

**Definitsioon 1.2.1.** Tippudest sümmeetrilist graafi, millel on ainult üks binaar(+)-orbiit  $\mathcal{OR}_n^+$  (st servaorbiit) ja ainult üks binaar(-)-orbiit  $\mathcal{OR}_n^-$  (st „mitteserva“ orbiit) nimetame *bisümmeetriliseks*.

Kommentaari: **a)** Bisümmeetrilist graafi on graafiteoorias nimetatud ka *tugevalt sümmeetriliseks* kuid seda hoopis teistel alustel ja sellele on tulnud teisi radu pidi. **b)** Näiteks, Peterseni graaf on bisümmeetriline (vt Näide 2.2.1).

**Propositsioon 1.2.8.** Tippudest sümmeetrilist graafi, millel on üks binaar(+)-orbiit  $\mathcal{OR}_n^+$  ja mitu binaar(-)-orbiiti  $\mathcal{OR}_n^-$  on *servadest sümmeetriline* ehk *(+)sümmeetriline*.

Kommentaari: **a)** Servadest sümmeetrilist graafi on nimetatud nii *sümmeetriliseks* kui ka *küllaltki sümmeetriliseks* [11] kuid seda teistel alustel ja sellele on jõutud teisi radu pidi, näiteks „*servalähedast sümmeetriat*“ ja muud seesugust tõestades. **b)** Servadest sümmeetriline graaf on kas tippudest sümmeetriline või kahealuseline **c)** (+)sümmeetrilised on näiteks, dodekaeder (Näide 2.2.2), Coxeter'i ja Heawood'i (Näide 2.2.4) graafid, nende erinevate binaarmärkide arv võrdub binaarorbiitide arvuga.

**Definitsioon 1.2.2.** Tippudest sümmeetrilist graafi, millel on üks binaar(-)-orbiit  $\mathcal{OR}_n^-$  ja mitu binaar(+)-orbiiti  $\mathcal{OR}_n^+$  nimetame *(-)sümmeetriliseks* ehk „*mitteservadest*“ *sümmeetriliseks*.

Kommentaari: **a)** (+)sümmeetrilise graafi täiend on (-)sümmeetriline. **b)** (-)sümmeetrilist ja (+)sümmeetrilist graafi koos nimetame *monosümmeetriliseks*.

**Definitsioon 1.2.3.** Tippudest sümmeetrilist graafi, millel on mitu binaar(+)-orbiiti  $\mathcal{OR}_n^+$  ja binaar(-)-orbiiti  $\mathcal{OR}_n^-$  nimetame *polü-sümmeetriliseks*.

Kommentaari: **a)** Polüsümmeetriline on näiteks graaf *KOH* (vt Näide 2.2.5). **b)** Tippudest sümmeetrilisi (st täis-, bi-, (+)-, (-) ja polü-sümmeetrilisi) graafe nimetatakse graafiteoorias koos



*transitiivseteks*, struktuurset aspektist aga lihtsalt *sümmeetrilisteks*. c) Sümmeetrilisi struktuure esineb harva. Näiteks 6-elementiliste 156 struktuuri hulgas on neid vaid 8. Ka regulaarsete ja rangelt regulaarsete hulgas on sümmeetriliste esinemine harv nähtus.

**Definitsioon 1.2.4.** Graafi, mis ei ole tippudest sümmeetriline, st millel on rohkem kui üks tipuorbiit, kusjuures nendest vähemalt ühte orbiiti  $\Omega V_k$  kuulub vähemalt kaks elementi (tippu) nimetame *ositi sümmeetriliseks*.

**Kommentaariid:** a) Ositi sümmeetrilised graafid on esitatud Näidetes 1.1.1., 1.2.1 ja peatükis 4. b) Ositi sümmeetria on lai üleminekuvorm sümmeetrilistele asümmeetrilistele, näiteks, kõigist 156 6-tipulistest graafist on 140 ositi sümmeetrilised. c) Teatud tingimustel võivad ositi sümmeetria raames esineda ka servadest sümmeetrilised *kahealuselised* struktuurid.

**Propositsioon 1.2.9.** Graafi, mille tipuorbiitide  $\Omega V_k$  arv  $K$  võrdub tippude arvuga  $|V|$  on *0-sümmeetriline* ehk *(täis)asümmeetriline*.

**Kommentaariid:** Graafi täielik asümmeetria ehk täiasümmeetria on väiksemate graafide puhul sama erandlik nagu täissümmeetria ja sümmeetria kokku. Näiteks, kõigi 156 6-tipuliste graafide hulgas on täiasümmeetrilisi vaid 8.

Näitasime, et struktuuri sümmeetria rajaneb orbiitidel ehk sümmeetriaklassidel. Kuidas kujutada struktuuri sümmeetriat?

**Propositsioon 1.2.10.** Struktuuri *sümmeetriavektorid*:

- a) Vektor elementidega  $|\Omega V|^m$ , kus  $|\Omega V|$  on tipuorbiidi võimsus ja  $m$  antud võimsusega orbiitide arv, kujutab endast *tipusümmeetria vektorit SVV*.
- b) Vektor elementidega  $|\Omega R|^m$ , kus  $|\Omega R|$  on binaarorbiidi võimsus ja  $m$  antud võimsusega orbiitide arv, kujutab endast *binaarsümmeetria vektorit SRV*.

**Näide 1.2.1.** Graaf, selle märgimaatriks  $W$  ja sümmeetriatunnused:

$A: -2.5.7; B: -2.5.6; C: +2.3.3; D: +2.5.7; E: +3.6.10.$

	1	2	3	4	5	6	i	u <sub>i</sub>	k	s <sub>i</sub>
1	1	2	3	4	5	6	1	01310	1	103
0	D	-B	C	C	C	C	2	01310	1	103
0	-B	C	C	C	C	C	3	02003	2	003
0	E	E	E	E	E	E	4	20201	3	210
0	-A	-A	-A	-A	-A	-A	5	20201	3	210
0	-A	-A	-A	-A	-A	-A	6	20201	3	210

$DEG = 3^4 4^2$

**Kommentaariid:** a) Antud juhul on tegemist tagasihoidliku sümmeetrialiigiga – *ositi sümmeetriaga*. b) Tipuorbiidid: üks üheelemendiline, üks kahe- ja üks kolmeelemendiline orbiit. Seega tipusümmeetria tunnus  $SVV = 1^1 2^1 3^1$ . c) Tipupaari ehk binaaride sümmeetriatunnus  $SRV = 1^1 2^1 3^2 6^1$ , sh servade sümmeetriatunnus  $SEV = 1^1 3^1 6^1$ .

Sümmeetriatunnused annavad suurepärase võimaluse sümmeetriat *mõõta*.

**Propositsioon 1.2.11.** Sümmeetria on *mõõdetav*.

*Sümmeetria mõõdu* aluseks on klassikaline Shannoni informatsioonimahu valem. Infomaht on sisuliselt *asümmeetria ehk sisemise mitmekesisuse* mõõt.

1) *Tipuinfo maht HV* arvutatakse tippude arvu  $|V|$  ja tipuorbiitide võimsuse  $card\Omega V_k$  alusel järgmise valemi abil:

$$HV = -\sum_{k=1}^K PV_k \log PV_k,$$

kus  $0 \leq PV_k = card\Omega V_k : |V| \leq 1$ .

Kommentaari:  $min HV = 0 \leq HV \leq \log|V| = max HV$ , kus, kui  $K=1$ , siis  $HV=0$  ja kui  $K=|V|$ , siis  $HV=\log|V|$ .

2) *Tipupaari- ehk binaarinfo maht HR* arvutatakse tipupaaride arvu  $|R|$  ja binaarorbiitide võimsuse  $card\Omega R_n$  alusel järgmise valemi abil:

$$HR = -\sum_{n=1}^N PF_n \log PF_n,$$

kus  $0 \leq PF_n = card\Omega R_n : |R| \leq 1$  ja  $|R| = [|V|(|V|-1)]:2$ .

Kommentaari: **a)**  $min HR = 0 \leq HR \leq \log|R| = max HR$ , kus, kui  $N=1$ , siis  $HR=0$  ja kui  $N=|R|$ , siis  $HR=\log|R|$ . **b)** *Binaar(+)-info maht  $HR^+$*  arvutatakse servade arvu  $|R^+|$  ja servaorbiitide võimsuse  $card\Omega R_n^+$  alusel. **c)** *Binaar(-)-info maht  $HR^-$*  arvutatakse “mitteservade” arvu  $|R^-|$  ja “mitteservaorbiitide” võimsuse  $card\Omega R_n^-$  alusel.

Informatsioon tekib teatud *mitmekesisuse, st eristatavuse* baasil. Informatsiooni maht sõltub *erinevuste hulgast*. Seal kus erinevusi ei ole, tekib teatud “ühetaoliste piirkond”, mis struktuurses plaanis *orbiiti ehk sümmeetriaklassi* tähendab. *Mida rohkem esineb erinevaid “ühetaoliste piirkondi” ehk sümmeetriaklasse, seda suurem on informatsiooni maht HR ja seda väiksem on “sümmeetrilisus”.*

**Propositsioon 1.2.12.** Infomahu  $HR$  või  $HV$  alusel arvutatakse struktuur *sümmeetria väärtus SR* või  $SV$  järgmise valemi järgi :

$$SR = 1 - HR : \log|R|, \text{ kus } 0 \leq SR \leq 1.$$

Kommentaari: **a)** Sümmeetria väärtus on maksimaalne, kui esineb üksainus orbiit, selle väärtus on 0, kui orbiitide arv võrdub elementide arvuga. See loob võimaluse *võrrelda, järjestada ja rühmitada SR* väärtuse järgi erineva suurusega graafe. **b)** Analoogiliselt paariinfo mahuga võib ka *paari(+)-sümmeetrilisust  $SR^+$*  ja *paari(-)-sümmeetrilisust  $SR^-$*  omaette arvutada, kuid meie piirdume üldise paarisümmeetrilisusega  $SR$ . **c)** Viimase mõõdu ( $SR$ ) ametlik nimi on *korrapära(sus)*.

Näites 1.2.1. esitatud struktuuri *sümmeetriatunnused* ja nende alusel arvutatud *sümmeetriaväärtused SV, SR* ja *SE*:

<i>Sümmeetria</i>	<i>K</i>	<i>N</i>	<i>SVV</i>	<i>SV</i>	<i>SRV</i>	<i>HR</i>	<i>SR</i>	<i>SEV</i>	<i>SE</i>	<i>aut</i>	<i>3003PS</i>
Ositi	3	5	$1^1 2^1 3^1$	0.478	$1^1 2^1 3^2 6^1$	2.106	0.461	$1^1 3^1 6^1$	0.610	12	60

Kuid kuidas saab orbiite struktuuris kujutada? Väga lihtsalt. Binaarorbiit  $\Omega R_n$  on struktuuri  $GS$ , kui tipupaaride kompleksi osa, st koosneb samuti tipupaaridest ning on samuti graafina kujutatav.

### 1.3. Orbiitstruktuurid

**Orbiitstruktuur** on struktuur mille servad vastavad üht orbiiti esitavale binaarmärgile ja ainult sellele. Serva ehk binaar(+)-orbiidile vastav struktuur on struktuuri osastruktuur ning „mitteserva“ ehk binaar(-)-orbiidile vastav on täiendi osastruktuur. Need avavad struktuuri „varjatud külgi“, mis

vahest ka „müstilisteks“ osutada võivad. Näiteks, Folkmani graafi üks orbiitstruktuur osutub Peterseni graafiks (vt Näide 1.3.1). Reeglina taastavad orbiitstruktuuride orbiitstruktuurid, st *kõrgemat järku orbiitstruktuurid*, teatud astmel oma lähtestruktuuri.

**Propositsioon 1.3.1.** Graaf, mille servad  $e_{ij}$  vastavad graafi binaarorbiidi  $\Omega R_n$  elementidele (st paaridele  $v_i v_j$ ) on graafi  $G$  *orbiitgraaf*  $G_n$ .

Kommentaariid: **a)** Igal orbiit  $\Omega R_n$  on kujutatav graafina  $G_n$ . **b)** Orbiitgraaf on graafi endastmõistetav atribuut – see on *orbiidi kujutis*. **c)** Binaar(+)orbiidile  $\Omega R_n^+$  vastab *kaas(+)*graaf  $G_n^+$  ja see kujutab endast graafi  $G$  osagraafi; **d)** Binaar(-)orbiidile  $\Omega R_n^-$  vastab *orbiit(-)*graaf  $G_n^-$  ja see kujutab endast graafi täiendi  $\overline{G}$  osagraafi. **e)** Graafi  $G$  iga orbiit(+)graaf langeb kokku selle täiendi  $\overline{G}$  vastava orbiit(-)graafiga.

Täisgraaf on orbiitgraaf, mis ei oma teisi orbiitgraafe. Bisümmeetriline graaf on orbiitgraaf, mis omab veel üht *potentsiaalset orbiitgraafi* oma *täiendi* näol. Monosümmeetriline graaf on orbiitgraaf ja omab veel mitut potentsiaalset oma binaar(-)orbiitide näol, mis kujutavad endast selle *täiendi* osagraafe. Polüsümmeetrilise graafi servad kuuluvad rohkem kui ühte binaarorbiiti. Nii polü- kui ka ositi sümmeetrilised graafid koosnevad mitmetest binaar(+)- ja (-)orbiitidest ning omavad nende näol mitu *potentsiaalset orbiitgraafi*.

Servadest sümmeetriliste graafide osakaal kõikide graafide hulgas on kaduvväike, kuid nad esinevad kõikjal nende hulgas orbiidsete osagraafidena.

Antud juhul on vaatluse all hoopis *graafide dekomponeerimine orbiitgraafideks*.

**Propositsioon 1.3.2.** Graafi igale binaarorbiidile  $\Omega R_n$  vastab üks orbiitgraaf  $G_n$ .

Bi-, mono- ja polüsümmeetriliste graafide orbiitgraafid hõlmavad graafi kõiki tippe. Ositi sümmeetriliste graafide omad aga vaid ühte tipuorbiiti kuuluvaid tippe. 0-sümmeetrilise graafi ja selle täiendi orbiitgraafid kujutavad endast 2-klikke. Huvi pakuvad eelkõige sümmeetriliste graafide orbiitgraafid.

**Propositsioon 1.3.3.** Orbiitgraaf on servadest sümmeetriline, st kas mono- või bisümmeetriline.

**Propositsioon 1.3.4.** Polüsümmeetriline graaf on orbiitgraafide ühend servadest,  $\cup G_n$ .

**Propositsioon 1.3.5.** Orbiitgraafid avavad lähtegraafi struktuuri erinevatest aspektidest ja esitavad selle varjatud omadusi. Kui graaf on aluseline või sisaldab komponente, klikke, ringe jt, siis kerkivad neid osiseid kujutavad tipukogumid orbiitgraafides mingil teisel kujul esile.

Kommentaariid: Võib väita, et orbiitgraafid on oma lähtegraafi „sugulased”, need on selle „geneetilised tuletised” (vt Näide 3.2.2 ja 3.3.3).

**Propositsioon 1.3.6.** Graafi erinevad orbiitgraafid võivad osutada isomorfseteks või langeda kokku.

Huvitavad orbiitgraafid on Folkmani graafil.

**Näide 1.3.1.** Folkmani tuntud kahealuselise kooskõlastamata graafi  $FOL$  märgimatriks  $W$  koos orbiitgraafide  $G_n$  loeteluga:

$A: -4.14.21; B: -3.8.10; C: -2.6.8; D: -2.4.4; E: -2.3.2; F: +3.6.8.$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1										2 2 2 2 2 2 2 2 2 2										$u_i$ Orb $s_i$			
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20										1 2 3 4 5 6 7 8 9 10										$i$	ABCDEF	12	
0 -E -E -E -E -E -E -E -E -E -C/										F -B -B F -B F -B -B -B -F/										11	061084	1	04
0 -E -E -E -E -E -E -C -E -E/										F -B -B F -B -B -B -B F F/										12	061084	1	04
0 -E -E -E -E -C -E -E/										F -B F -B -B -B -B F F B/										13	061084	1	04
0 -E -E -C -E -E -E/										F -B F -B -B F F -B -B/										14	061084	1	04
0 -C -E -E -E -E -E/										F -B F F F -B -B -B/										15	061084	1	04
0 -E -E -E -E -E/										F -B F F F -B -B -B/										16	061084	1	04
0 -E -E -E/										F -B F -B -B -B -B F F -B -B/										17	061084	1	04
0 -E -E/										F -B F -B -B -B -B F F -B/										18	061084	1	04
0 -E/										F -B -B F -B -B -B F F/										19	061084	1	04
0/										F -B -B F -B F -B -B -B F/										20	061084	1	04
0 -A -D -D -A -D -A -D -D -D/										1										360604	2	40	
0 -A -D -D -A -D -D -D -D/										2										360604	2	40	
0 -A -D -D -D -D -D -A/										3										360604	2	40	
0 -A -D -D -D -A -D/										4										360604	2	40	
0 -D -D -A -D -D/										5										360604	2	40	
0 -D -A -A -D/										6										360604	2	40	
0 -D -A -A/										7										360604	2	40	
0 -D -A/										8										360604	2	40	
0 -D/										9										360604	2	40	
0/										10										360604	2	40	

### Kommentaariid:

- Graaf **FOL** on Def. 1.2.4 alusel **ositi sümmeetriline** ja selle orbiitgraafid esinevad tipuorbiitide raames. **FOL** jaguneb vastavalt oma binaarorbiitidele **A, B, C, D, E ja F** kuueks **orbiitgraafiks**:
- Graafi **FOL** tunnusele  $-A$  vastav **orbiitgraaf**  $FOL_{n:-A}$  on **Peterseni graaf(!)**. Seda kujutab ka **FOL** märgi osamaatriksis  $W_{2,2}$ , kui sealne  $-A$  asendada peterseni tunnusega **+4.10.15** ja  $-D$  asendada tunnusega  $-2.3.2$ .
- Graafi **FOL** tunnusele  $-B$  vastav **orbiitgraaf**  $FOL_{n:-B}$  osutub A. Titovi [11] poolt konstrueeritud **kooskõlastamata kahealuseliseks** graafiks, mille üks orbiitgraaf on teada olevalt samuti **Peterseni graaf**.
- Graafi **FOL** tunnusele  $-C$  vastav **orbiitgraaf**  $FOL_{n:-C}$  on **bisümmeetriline 10-komponentne**, 2-klikkidest koosnev graaf. Antud juhul on 2-kliki üks tipp paaris- ja teine paaritu numbriline.
- Graafi **FOL** tunnusele  $-D$  vastav **orbiitgraaf**  $FOL_{n:-D}$  on **Peterseni graafi täiendiks(!)**, st Peterseni graafi teiseks orbiitgraafiks.
- Graafi **FOL** tunnusele  $-E$  vastav **orbiitgraaf**  $FOL_{n:-E}$  on orbiitgraafi  $FOL_{n:-C}$  täiend, st **2-kvinta klikk**.
- Graafi **FOL** tunnusele  $+F$  vastav **orbiitgraaf**  $FOL_{n:-F}$  on muidugi **Folkmani graaf** ise.

Ilmselt jaotuvad graafid „geneetilistesse rühmadesse”, nende uurimine on muidugi omaette projekt. Praeguste kogemuste alusel võib väita, et 20-tipulised monosümmeetrilised kahealuselised graafid moodustavad mingi „geneetilise rühma”, mille teatud orbiitgraafid osutuvad Peterseni graafideks.

**Propositsioon 1.3.7.** Erinevate graafide orbiitgraafid võivad osutada isomorfseteks või kokku langeda.

**Propositsioon 1.3.8.** Graafi igale orbiidile vastab selle täiendi orbiit, mille vastavad orbiitgraafid langevad kokku.

**Propositsioon 1.3.9.** Kui orbiitgraafi binaar(+)märk hõlmab graafi kõiki tippe ja servi, siis on see selle graafi **täielik invariant**, st on omane vaid sellele graafile.

Tegemist on muidugi raskelt tõestatava, kuid ilmselt ümberlukkamatu hüpoteesiga. Tuntud graafide hulgas omavad selliseid binaar(+)märke, näiteks Peterseni (Näide 2.2.1), Heawoodi (Näide 2.2.4),

Coxeteri, kuup-, oktaeeder- jt graafid. Niisugused graafid on põhimõtteliselt konstrueeritavad oma binaarmärgi järgi.

**Propositsioon 1.3.10.** Iga orbiitgraaf on *valents- ja ring- või klikkregulaarne*. Bisümmeetriline sidus graaf on ka veel *tugevregulaarne*.

Vaatluse all on ka graafi *teist ja kõrgemat järku orbiitgraafid*, st orbiitgraafide orbiitgraafid jne.

**Propositsioon 1.3.11.** Graafi teist või kõrgemat järku orbiitgraaf võib olla isomorfne või kokku langeda oma lähtegraafiga, kuid ainult juhul kui viimane on duaal- või monosümmeetriline.

Orbiit- ja lähtegraafi *kokkulangemine* on midagi rohkemat kui isomorfism, see tähendab tipupaaride täielikku kokkulangevust ehk *taastamist*.

**Propositsioon 1.3.12.** Kõrgemat järku orbiitgraafide puhul ei teki enam uusi kombinatsioone, need hakkavad korduma. Olenevalt graafi keerukusest võib see toimuda ka kolmandat või kõrgemati järku orbiitgraafide korral.

**Propositsioon 1.3.13.** Kõrgemat järku orbiitgraafide indutseerimine on *koonduv* protsess, see lõpeb alati mõne madalamat järku orbiitgraafi või lähtegraafiga isomorfse graafi esiletuleku või selle taastamisega.

Käsitlesime eelnenus vaid sümmeetrilisi graafe. Teame, et  $0$ -sümmeetriliste puhul kujutab iga tipupaar (serv, „mitteserv”) endast iseseisvat binaarorbiiti ning nende käsitlemine mõttetu. Ühe binaarmärgi alla võib graafis, eriti just ositi ja  $0$ -sümmeetrilises, kuuluda rohkem kui üks binaarorbiit.

**Propositsioon 1.3.14.** Graafi, mille kõik servad vastavad niisugusele etteantud binaarmärgile  $dnq$ , mille alla kuulub rohkem kui üks binaarorbiit, st on orbiitgraafide ühend, nimetame *märgigraafiks*  $G_p$ .

**Propositsioon 1.3.15.** Märgigraaf moodustatakse binaarmärgi *tähenduse* aspektist.

### Kokkuvõte

Orbiitgraafide peamine tähtsus ilmneb graafi struktuursete atribuutide tuvastamisel. Orbiitgraafid võimaldavad tuvastada erinevate graafide ühesuguseid osiseid jne. On selgunud, et ka kõikide  $n$ -tahukate graafid on osutunud orbiitgraafideks. Märgigraafid võimaldavad teisendada ja opereerida  $0$ -sümmeetrilisi graafe soovitud aspektist jne.

## 2. REGULAARSUSED GRAAFIS

### 2.1. Regulaarsuste loetelu

Struktuur võib omada mitmesuguseid tuntud ja vähetuntud *regulaarsusi*. Need on väljaloetavad märgimaatriksist  $W$ .

**Definitsioon 2.1.1.** Graaf, mille tipud on võrdse valentsusega on (*valents*)-*regulaarne* graaf.

Kommentaari: Graaf, mille märgimaatriksi  $W$  ridade binaar(+)märkide  $+dnq$  arv on konstantne on (*valents*)-*regulaarne*.

**Definitsioon 2.1.2.** Graaf, mille mitte-naabertippude vahelised kaugused on võrdsed on *distant*-*regulaarne* graaf.

Kommentaari: **a)** Graaf, mille märgimaatriksi  $W$  kõikide binaar(-)märkide  $-dnq$  osamärgid  $-d$  on konstantsed on *distant*-*regulaarne*. **b)** Näiteks, Peterseni graaf on oma binaarmärgi  $-2.3.3$  alusel *2-distant*-*regulaarne*.

**Definitsioon 2.1.3.** Graaf, mille kõik  $n$  tippu kuuluvad vöö(de)sse (*girth*) pikkusega  $n-a$  on *vöö*-ehk *ring*-*regulaarne* graaf.

Kommentaari: **a)** Graaf, mille märgimaatriksi  $W$  kõikide binaar(+)märkide  $+dnq$  osamärgid  $+d$  on konstantsed on *vöö*-*regulaarne* graaf. **b)** Näiteks, Peterseni graaf on oma binaarmärgi  $+4.10.15$  alusel *5-vöö*-*regulaarne*. Selle iga tipp kuulub kuude ringi ja iga serv nelja ringi.

**Definitsioon 2.1.4.** Graaf, mille kõik  $n$  tippu kuuluvad (suurimasse) klikki võimsusega  $n-b$  on *klikk*-*regulaarne* graaf.

Kommentaari: **a)** Graaf, mille märgimaatriksi  $W$  kõikide (maksimaalsete) klikimärkide  $(+d=2).n.(q=n(n-1):2)$  arv konstantne on *klikk*-*regulaarne*. **b)** Kui *tippudest sümmeetriline* graaf ise ei ole klikk, siis ei saa selles esineda üksikut klikki, see saab olla vaid *klikk*-*regulaarne*. **c)** Paraku on pea kõik suurima kliki tuvastamise algoritmid orienteeritud mingi *ühe kliki* tuvastamisele, kus näiteks Peterseni graafi täiendus fikseeritakse üksik *4-klikk*. **d)** Tegelikult on Peterseni graaf *4-klikk*-*regulaarne* (vt Näide 2.2.1). **e)** Selle iga tipp kuulub kahte tippu ja iga serv ühte klikki. **f)** Kui klikk on oluline atribuut, siis peaks nad kõik esitatud olema, sest need ei ole mitte juhuslikud kombinatsioonid.

**Definitsioon 2.1.5.** Valents-*regulaarne* graaf, mille iga naabertippude paar omab  $a \geq 0$  ühist naabertippu ja iga mitte-naabertippude paar  $b \geq 1$  ühist naabertippu on *tugevalt regulaarne* graaf.

Kommentaari: **a)** Graaf, mille kõikide binaarmärkide puhul  $d=2$  ning iga binaar(-)märgi  $-2nq$  korral leidub binaar(+)märk  $+2(n-a)(q-b)$ , kus iga  $n$  ja  $q$  puhul  $a$  ja  $b$  on konstantsed, on *tugevalt regulaarne* graaf. **b)** Näiteks, ühe Weisfeileri tugevalt regulaarse graafi paaritunnused on  $-2.8.20$ ,  $-2.8.19$ ,  $-2.8.18$  ja  $+2.7.13$ ,  $+2.7.14$ ,  $+2.7.15$  (vt Näide 3.2.1). **b)** Peterseni graaf on bisümmeetriline ja tugevalt regulaarne. **c)** Sidusa bisümmeetrilise struktuuri tugevregulaarsus on kahe erineva binaartunnuse  $\pm d.n.q$  olemasolu näol möödapääsmatu, sest  $\pm d=2$  puhul tähendab  $n-2$  just tipupaari *ühiste naabertippude arvu*.

Nii regulaarsus kui ka sümmeetria (**B**) kujutab endast „ühetaoliste“ elementide korduvust. Milles seisneb nende erinevus?

**Propositsioon 2.1.1.** Regulaarsuse „ühetaolisuus“ kajastab nõ lokaalseid, tippude ja tipupaaride omadusi. Sümmeetria „ühetaolisuus“ kajastab nõ globaalseid, struktuurist sõltuvaid omadusi.

**Kommentaariid:** **a)** Tippude ja tipupaaride *ühesugune positsioon*, st orbiit struktuuris on struktuurist sõltuv omadus. **b)** Loomulikult eeldab selline ühesugune positsioon ka mõningaid regulaarsusi, nagu valents-, distant-, vöö- või klikkregulaarsust, kuid mitte tugevregulaarsust.

## 2.2. Vöö- (ring-) ja klikk-regulaarsus

Kliki tuvastamine on olnud graafiteooria üks populaarsemaid ülesandeid. Ringi (girth) tuvastamine seda millegipärast ei ole.

Kõikide klikituvastajate algoritmide ideoloogia on lähtunud „suurimasse klikki kuuluvate tippude eristamisest teistest“. Meetodeid selleks on välja töötatud hulgi. Paraku ei ole mul õnnestunud leida klikifänni, kes oleks tahtnud kuulda midagi klikkregulaarsusest.

**Propositsioon 2.2.1.** Kõik tippudest sümmeetrilised („transitiivsed“) graafid on kas *vöö-* või *klikkregulaarsed* – ja vastupidi.

**Kommentaariid:** **a)** Nende regulaarsuste puhul peame silmas *suurima vöö* või *suurima kliki* regulaarsust. **b)** Klikk- ja vööregulaarsus on tippudest sümmeetriliste graafide enesestmõistetav ja täpselt määratletav olek, mis ei nõua tõestust. Tegemist on graafi struktuurist sõltuva kliki- ja vöökombinatsioonide süsteemiga.

**Näide 2.2.1.** Peterseni graafi *PET* ja selle täiendi *PETC* binaarmärgid ja märgmaatriksid *W* koos vööde ja osaklikkide loeteluga:

*A: -2.3.2; B: +4.10.15.*

*A: -2.6.12; B: +2.5.8.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>Orb</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<i>AB</i>
0	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	1	63	1	0	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	36
	0	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	2	63	1		0	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	36
		0	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	3	63	1			0	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	36
			0	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	4	63	1				0	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	36
				0	- <i>A</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	5	63	1					0	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	36
					0	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	- <i>A</i>	6	63	1						0	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	<i>B</i>	36
						0	- <i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	7	63	1							0	<i>B</i>	- <i>A</i>	- <i>A</i>	36
							0	- <i>A</i>	<i>B</i>	8	63	1								0	<i>B</i>	- <i>A</i>	36
								0	- <i>A</i>	9	63	1									0	<i>B</i>	36
									0	10	63	1										0	36

**Kommentaariid:**

- Peterseni graaf on Def. 1.2.1 alusel *bisümmeetriline*.
- Binaarmärk *+4.10.15* tähendab, et graaf koosneb 10 tipust ja 15 servast, mis moodustavad 5-vöösid – see on Prop. 1.3.14 alusel selle graafi *täielik invariant*. Märk *-2.3.2* fikseerib 5-vöödes olevate mittenaabertipu paaride vahelise ahela pikkusega 2, mis koosneb kolmest tipust ja kahest servast. kui püstitada ülesanne konstrueerida (valents-) regulaarne 10-tipuline graaf, mille 15 serva moodustavad 5-ringe, saame tulemuseks vaid Peterseni graafi.

- c) Märgimaatriksist on välja loetav, et Peterseni graafis **PET** on täpselt 12 5-vööd, antud juhul tippudega: 1-2-3-4-5-1 (nö välisvöö), 6-8-10-7-9-6 (nö sisevöö), 1-2-3-8-6-1 ja 1-2-7-10-5-1 ja 1-5-4-9-6-1 ja 2-3-4-9-7-2 ja 3-4-5-10-8-3 (3 välis- ja 2 sisevöö tippu), 1-2-7-9-6-1 ja 1-5-10-8-6-1 ja 2-3-8-10-7-2 ja 3-4-9-6-8-3 ja 4-5-10-7-9-4 (2 välis- ja 3 sisevöö tippu). Iga tipp esineb 6 vöös. Iga serv esineb 4 vöös. See on Def. 1.2.3 alusel **5-vöö-regulaarsus**.
- d) Peterseni graafi täiendus **PETC** on 5 4-klikki, antud juhul tippudega: 1,3,9,10 ja 2,4,6,10 ja 1,4,7,8 ja 2,5,8,9 ja 3,5,6,7. Iga tipp esineb kahes klikis. Iga serv esineb ühes klikis. See on Def. 1.2.4 alusel **4-kliik-regulaarsus**.

Kui klikil on mingi tähendus ja see on leitav, siis see tavaliselt ka esitatakse. Kliikregulaarsuse puhul sellist huvi märgata ei ole, kuigi on tegemist kindlate reeglite järgi omavahel seotud kliikidega.

**Propositsioon 2.2.2.** Mono- ja bisümmeetrilise vööregulaarse graafi täiend on *kliikregulaarne*.

**Kommentaariid:** a) Monosümmeetrilise kliikregulaarse graafi täiend võib olla kas vöö- või *kliikregulaarne*. b) Vöö- ja kliikregulaarse graafi ja selle täiendi puhul on üks nendest kindlasti *triangulaarne*. c) Kas *triangel* on klikk või vöö?

**Propositsioon 2.2.3.** Kliik- (või vöö-) regulaarse graafi iga tipp  $v_i$  kuulub parajasti  $a$  klikki (vöösse) ja iga serv  $e_{ij}$  parajasti  $b$  klikki (vöösse).

**Näide 2.2.2.** Dodekaedri **DOD** ja selle täiendi **DODC** binaarmärgid ja märgimaatriksid **W**:

$$-A=-5.20.30; -B=-4.8.9; -C=-3.4.3; -D=-2.3.2; +E=+4.8.9.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$i$	ABCDE	Orb
0	E	-D	-C	-B	-C	-D	E	-D	-C	-B	-A	-B	-C	-D	-D	-C	-C	-D	E	1	13663	1
0	E	-D	-C	-C	-D	-D	-C	-B	-A	-B	-C	-D	-E	-D	-C	-B	-C	-D		2	13663	1
0	E	-D	-D	E	-D	-C	-C	-B	-C	-C	-D	-D	-C	-B	-A	-B	-C		3	13663	1	
0	E	-D	-D	-C	-B	-C	-C	-D	-D	E	-D	-C	-C	-B	-A	-B			4	13663	1	
0	E	-D	-C	-C	-D	-D	E	-D	-D	-C	-B	-C	-C	-B	-A				5	13663	1	
0	E	-D	-D	E	-D	-D	-C	-C	-B	-A	-B	-C	-C	-B					6	13663	1	
0	E	-D	-D	-C	-C	-B	-C	-C	-B	-A	-B	-C	-C						7	13663	1	
0	E	-D	-C	-B	-A	-B	-C	-C	-B	-A	-B	-C	-D	-D					8	13663	1	
0	E	-D	-C	-B	-A	-B	-C	-C	-D	E	-D								9	13663	1	
0	E	-D	-C	-B	-A	-B	-C	-D	-D	-C									10	13663	1	
0	E	-D	-C	-B	-C	-D	E	-D	-C										11	13663	1	
0	E	-D	-C	-C	-D	-D	-C	-D	-C	-B									12	13663	1	
0	E	-D	-D	E	-D	-C	-C												13	13663	1	
0	E	-D	-D	-C	-B	-C													14	13663	1	
0	E	-D	-D	-C	-B	-C													15	13663	1	
0	E	-D	-D	-C	-B	-C													16	13663	1	
0	E	-D	-D	-C	-B	-C													17	13663	1	
0	E	-D	-C	-B	-C	-D	E	-D	-C										18	13663	1	
0	E	-D	-C	-C	-D	-D	-C	-B											19	13663	1	
0	E																		20	13663	1	

$$-A=-2.16.102; +B=+2.14.78; +C=+2.14.79; +D=+2.15.89.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$i$	ABCCD	Orb
0	-A	D	B	C1	B	D	-A	D	B	C1	C2	C1	B	D	D	B	B	D	-A	1	36316	1
0	-A	D	B	B	D	D	B	C1	C2	C1	B	D	-A	D	B	C1	B	D		2	36316	1
0	-A	D	D	-A	D	B	B	C1	B	B	D	D	B	C1	C2	C1	B		3	36316	1	
0	-A	D	D	B	C1	B	B	D	D	-A	D	B	B	C1	C2	C1			4	36316	1	
0	-A	D	B	B	D	D	-A	D	D	B	C1	B	B	C1	C2				5	36316	1	
0	-A	D	D	-A	D	D	B	B	C1	C2	C1	B	B	C1					6	36316	1	
0	-A	D	D	B	B	C1	B	B	C1	C2	C1	B	B						7	36316	1	
0	-A	D	B	C1	C2	C1	B	B	C1	B	D	D							8	36316	1	
0	-A	D	B	C1	C2	C1	B	B	D	-A	D								9	36316	1	
0	-A	D	B	C1	C2	C1	B	D	D	B									10	36316	1	
0	-A	D	B	C1	B	D	-A	D	B										11	36316	1	



$0$	$-A$	$D$	$B$	$B$	$D$	$D$	$B$	$C1$	$/$	$12$	$36316$	$1$
$0$	$-A$	$D$	$D$	$-A$	$D$	$B$	$B$	$/$	$13$	$36316$	$1$	
$0$	$-A$	$D$	$D$	$B$	$C1$	$B$	$/$	$14$	$36316$	$1$		
$0$	$-A$	$D$	$B$	$B$	$D$	$/$	$15$	$36316$	$1$			
$0$	$-A$	$D$	$D$	$-A$	$/$	$16$	$36316$	$1$				
$0$	$-A$	$D$	$D$	$/$	$17$	$36316$	$1$					
$0$	$-A$	$D$	$/$	$18$	$36316$	$1$						
$0$	$-A$	$/$	$19$	$36316$	$1$							
$0$	$/$	$20$	$36316$	$1$								

**Kommentaariid:** a) Mõlemad graafid on *monosümmeetrilised*, kusjuures **DOD** on Prop. 1.2.8 järgi (+)- ehk *servadest sümmeetriline* ja selle täiend **DODC** Def. 1.2.2 järgi (-)- ehk „*mitteservadest sümmeetriline*. b) **DOD** on 5-vöö-, 5-, 4-, 3-, 2-distants ja 3-valentsregulaarne ning selle täiend **DODC** on, 2-distants- ja 16-valentsregulaarne. c) Mitmene distantsregulaarsus tähendab, et kõikidel tippudel on võrdne arv tippe neil kaugustel.

Kas 5-vöö-regulaarse dodekaeedri täiend on *klikkregulaarne*?

Struktuurisemiootiline klikkide tuvastamine toimub *klikimärkide* alusel. Kui neid ei esine märgimaatriksis  $W$ , siis ilmuvad need esile vastavate binaar(+)-graafide *lokaalsete märgimaatriksites*  $W_{ij}$ .

**Näide 2.2.3.** Dodekaeedri täiendi klikid. Ilmutatud klikitunnust täiendis **DODC** ei esine, kuid binaartunnusega  $+B=+2.14.78$  binaargraafide töötlemisel saadud lokaalsed tunnusmaatriksid sisaldavad 8-klikk-tunnuseid  $+2.8.28$ . Seda tunnust omavate lokaalsete tunnusmaatriksite  $W_{1,4}$ ,  $W_{5,9}$ ,  $W_{3,16}$ ,  $W_{6,13}$  ja  $W_{5,8}$  alusel tuvastame **DODC**'i kõiki 20 tippu hõlmava **8-kliki osaklikid**:

$i=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
<b>I</b>	•			•			•			•		•			•		•		•	
<b>II</b>		•			•		•		•		•			•			•			•
<b>III</b>	•		•			•			•			•		•		•		•		
<b>IV</b>		•		•		•		•		•			•		•			•		•
<b>V</b>			•		•			•		•			•		•			•		•

**Kommentaariid:** Seega on täiend **DODC** *8-klikk-regulaarne*, kus selle kõik viis osaklikki on omavahel *lõikuvad*, kus kõik 10 lõikuvat serva kuuluvad paariorbiiti **C2** ning vastavad tipupaarid teevad iga osakliki lõikuvaks ülejäänud nelja osaklikiga:

$i-j=$	1-12	2-11	3-18	4-19	5-20	6-16	7-17	8-13	9-14	10-15
Osaklikk	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>I</b>	<b>IV</b>	<b>II</b>	<b>I</b>
Osaklikk	<b>III</b>	<b>IV</b>	<b>V</b>	<b>IV</b>	<b>V</b>	<b>IV</b>	<b>II</b>	<b>V</b>	<b>III</b>	<b>V</b>

Tuntud graafidest on klikkregulaarsed ka veel Heawood'i, Coxeter'i jt. graafide täiendid. Nende kahe graafi originaalid on kahealuselised, ning kõikide loodusseaduste kohaselt kujutavad aluste täiendid endast klikke.

**Propositsioon 2.2.4.**  $m$ -aluselise graafi täiend on võrdsete aluste  $n$  puhul  *$n$ -klikkregulaarne*, mittelõikuvate  $n$ -klikkide arvuga  $m$ .

Suur osa klikituvastusalgoritme on klikkregulaarsuse korral töövõimetud, teised toovad esile ainult *ühe klikki*. On täiesti vastuvõtmatu esitada, näiteks Peterseni graafi täiendi puhul üht ainsat klikki, kui on tegemist klikkidevahelise korrapäraga. Ka Folkmani graafi täiendi puhul esitatakse ainult üks 10-tipuline klikk, teist samaväärset aga ei leita. Jne.

**Näide 2.2.4.** Heawood'i graafi *HEA* ja selle täiendi *HEAC* binaarmärgid ja märgimaatriks *W*:

$$A: -3.8.9; B: -2.3.2; C: +5.14.21.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	<i>i</i>	<i>ABC</i>	<i>Orb</i>	<i>deg</i>
0	C	-B	-A	-B	C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	C	1	463	1	3
	0	C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	C	-B	-A	-B	2	463	1	3
		0	C	-B	-A	-B	C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	3	463	1	3
			0	C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	C	-B	4	463	1	3
				0	C	-B	-A	-B	C	-B	-A	-B	-A	5	463	1	3
					0	C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	6	463	1	3
						0	C	-B	-A	-B	C	-B	-A	7	463	1	3
							0	C	-B	-A	-B	-A	-B	8	463	1	3
								0	C	-B	-A	-B	C	9	463	1	3
									0	C	-B	-A	-B	10	463	1	3
										0	C	-B	-A	11	463	1	3
											0	C	-B	12	463	1	3
												0	C	13	463	1	3
													0	14	463	1	3

$$A: -2.10.36; B: +2.8.22; C: +2.9.30.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	<i>i</i>	<i>ABC</i>	<i>Orb</i>	<i>deg</i>
0	-A	C	B	C	-A	C	B	C	B	C	B	C	-A	1	346	1	10
	0	-A	C	B	C	B	C	B	C	-A	C	B	C	2	346	1	10
		0	-A	C	B	C	-A	C	B	C	B	C	B	3	346	1	10
			0	-A	C	B	C	B	C	B	C	-A	C	4	346	1	10
				0	-A	C	B	C	-A	C	B	C	B	5	346	1	10
					0	-A	C	B	C	B	C	B	C	6	346	1	10
						0	-A	C	B	C	-A	C	B	7	346	1	10
							0	-A	C	B	C	B	C	8	346	1	10
								0	-A	C	B	C	-A	9	346	1	10
									0	-A	C	B	C	10	346	1	10
										0	-A	C	B	11	346	1	10
											0	-A	C	12	346	1	10
												0	-A	13	346	1	10
													0	14	346	1	10

**Kommentaariid:**

- Graaf *HEA* on (+)sümmeetriline ja kahealuseline, alustega antud juhul paarisnumbrilistest tippudest ja paaritunumbrilistest tippudest.
- HEA* on struktuurselt unikaalne, mida iseloomustab selle täielik invariant, binaartäistunnus +5.14.21, mis hõlmab kõiki tippe ja servi ning seda omab ainult see struktuur.
- Kuna *HEA* on kahealuseline, kuid mitte bi-klikk, siis selle täiend *HEAC* koosneb kahest omavahel sidusast 7-klikist ning on 7-klikkregulaarne. Klikid vastavad *HEA* alustele.

**Propositsioon 2.2.5.** Klikkregulaarse graafi klikid võivad olla kas komponentsed, sidusad või lõikuvad.

**Kommentaariid:** Heawood'i graafi täiend on sidusate klikkidega. Lõikuvate klikkidega on näiteks Peterseni, dodekaedri ja paljude teiste graafide täiendid.

**Näide 2.2.5.** Graafi *KOH* binaarmärgid ja märgimaatriks *W*:

$$-A = -2.8.15; -B = -2.7.13; +C = +2.4.5; +D = +2.5.10; +E = +2.7.14.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	<i>i</i>	<i>ABCDE</i>	<i>orb</i>	<i>deg</i>
0	-B	C	D	-B	-A	E	C	C	E	-A	-B	D	C	-B	1	24422	1	8
	0	-B	C	D	-B	-A	E	C	C	E	-A	-B	D	C	2	24422	1	8
		0	-B	C	D	-B	-A	E	C	C	E	-A	-B	D	3	24422	1	8
			0	-B	C	D	-B	-A	E	C	C	E	-A	-B	4	24422	1	8
				0	-B	C	D	-B	-A	E	C	C	E	-A	5	24422	1	8
					0	-B	C	D	-B	-A	E	C	C	E	6	24422	1	8

$0$	$-B$	$C$	$D$	$-B$	$-A$	$E$	$C$	$C/$	$7$	$24422$	$1$	$8$
$0$	$-B$	$C$	$D$	$-B$	$-A$	$E$	$C/$	$8$	$24422$	$1$	$8$	$8$
$0$	$-B$	$C$	$D$	$-B$	$-A$	$E/$	$9$	$24422$	$1$	$8$	$8$	$8$
$0$	$-B$	$C$	$D$	$-B$	$-A/$	$10$	$24422$	$1$	$8$	$8$	$8$	$8$
$0$	$-B$	$C$	$D$	$-B/$	$11$	$24422$	$1$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$
$0$	$-B$	$C$	$D/$	$12$	$24422$	$1$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$
$0$	$-B$	$C/$	$13$	$24422$	$1$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$
$0$	$-B/$	$14$	$24422$	$1$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$
$0/$	$15$	$24422$	$1$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$	$8$

Kommentaariid: a) Graaf **KOHC** on Def. 1.2.3 järgi **polüsümmeetriline**. b) **KOHC** omab klikitunnust  $D=+2.5.10$ , mis tähendab **5-kliki** olemasolu. **KOHC** osutub **5-klikkregulaarseks**, mis koosneb kolmest sidusast (mittelõikuvast) **osa-5-klikist**:

Nr.	Klikitunnused $D$	Osa-5-klikid
<b>1</b>	$1-4, 1-13, 4-7, 7-10, 10-13$	<b>1,4,7,10,13</b>
<b>2</b>	$2-5, 2-14, 5-8, 8-11, 11-14$	<b>2,5,8,11,14</b>
<b>3</b>	$3-6, 3-15, 6-9, 9-12, 12-15$	<b>3,6,9,12,15</b>

**KOHC** tunnustele  $+C$  ja  $+E$  vastavad seosed teevadki 5-osaklikid *omavahel sidusaks*.

**Propositsioon 2.2.6.** Polüsümmeetriline graaf võib üheaegselt olla nii *vöö-* kui ka *klikkregulaarne*.

### 2.3. Bisümmeetria, klikk- ja tugev regulaarsus

Huvi graafi regulaarsuste ja sümmeetria vastu ei ole viimasel ajal märgata, kuna praktiliste üleannete puhul ei tule need atribuudid tavaliselt esile. Siiski on tegemist reaalse seaduspärasustega.

Huvitav seos on bisümmeetria ja tugeva regulaarsuse vahel, mis näib tugevregulaarkutele märkamatuks jäänud. Esitan siin kaks lihtsat lauset, mõned lihtsad näited ja tosinkond lihtsat järeldust, mis ka kõigile arusaadavad peaksid olema.

Definitsiooni 1.2.1 järgi nimetame tippudest sümmeetrilist („transitiivset“) graafi, millel on parajast üks *servaorbiit* (binaar(+)-orbiit) ja üks „*mitteserva-orbiit*“ (binaar(-)-orbiit) *bisümmeetriliseks* graafiks.

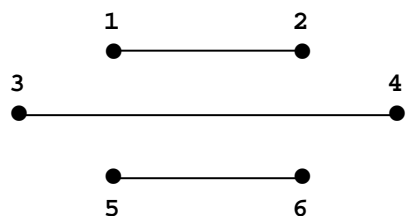
Kommentaariid: a) See tähendab, et struktuuri esitab vaid kaks erinevat paaritunnust. b) Ametlik graafiteooria ei erista bisümmeetrilist graafi mono- (ehk (+)), st vaid servadest sümmeetrilisest – neid mõlemaid nimetatakse „*sümmeetriliseks graafiks*“. c) *Bisümmeetriline* on näiteks Peterseni graaf ning *mono-* ehk vaid *servadest sümmeetrilised* on näiteks dodekaeeder ja Heawood’i graaf; graaf **KOHC** on *polüsümmeetriline*.

**Propositsioon 2.3.1.** Arv  $m$  *komponentsest klikist* koosneva struktuuri *täiend* on *m-aluseline täisgraaf*, st on *m-klikk* – ja vastupidi.

Suurus	Graaf	Selle täiend
$m$	Komponentsete klikkide arv	Aluste arv
$n$	Komponentsete klikkide võimsus	Aluste võimsus

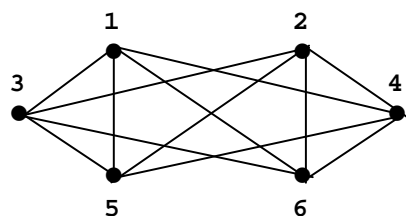
Kommentaari: See tähendab, et kahest komponentsest klikist koosneva struktuuri täiend on *bi-kliik*, kolmest komponentsed klikist koosneva täiend on *tri-kliik* jne.

Näide 2.3.1. Graaf **B6-3**, selle täiend **B6-12** ning nende töötlemise tulemused binaarmärkide, märgimaatriksite ja peamiste mõõtude näol:



$$A: -0.2.0; B: +1.2.1.$$

1	2	3	4	5	6	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	<b>B</b>	-A	-A	-A	-A	1	41	1
	0	<b>B</b>	-A	-A	-A	2	41	1
		0	<b>B</b>	-A	-A	3	41	1
			0	<b>B</b>	-A	4	41	1
				0	<b>B</b>	5	41	1
					0	6	41	1



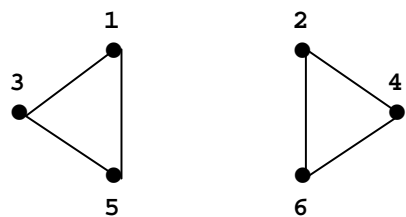
$$A: -2.6.12; B: +2.4.5.$$

1	2	3	4	5	6	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	-A	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	1	14	4
	0	-A	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	2	14	4
		0	-A	<b>B</b>	<b>B</b>	3	14	4
			0	-A	<b>B</b>	4	14	4
				0	-A	5	14	4
					0	6	14	4

SRV	HR	SR	aut
3 <sup>1</sup> 12 <sup>1</sup>	0.2173	0.8152	48

Kommentaarid a) Graaf **B6-3** ja selle täiend **B6-12** on *bisümmeetrilised*. b) Graaf **B6-3** koosneb kolmest komponentsest 2-klikist, see on *2-kliik-regulaarne*. c) Täiend **B6-12** on *kolme-aluseline*, kus selle alused vastavad graafi **B6-3** 2-kliikidele. Tegemist on nn *alus-kliikiga*, täpsemalt *n-m-kliikiga* ehk konkreetselt *2-tri-kliikiga*. Ei ole raske märgata, et kõik tipud kuuluvad *trianglisse*.

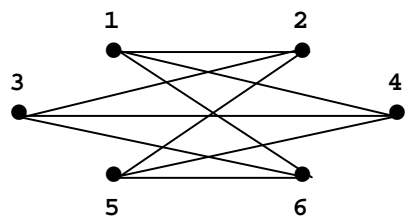
Näide 2.3.2. Graaf **B6-6**, selle täiend **B6-9** ning nende töötlemise tulemused binaarmärkide märgimaatriksite ja peamiste mõõtude näol:



$$A: -0.2.0; B: +2.3.3.$$

1	2	3	4	5	6	<i>i</i>	<i>ABC</i>	<i>deg</i>
0	-A	<b>B</b>	-A	<b>B</b>	-A	1	32	2
	0	-A	<b>B</b>	-A	<b>B</b>	2	32	2
		0	-A	<b>B</b>	-A	3	32	2
			0	-A	<b>B</b>	4	32	2
				0	-A	5	32	2
					0	6	32	2

$$A: -2.5.6; B: +3.6.9.$$



1	2	3	4	5	6	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	<b>B</b>	-A	<b>B</b>	-A	<b>B</b>	1	23	3
	0	<b>B</b>	-A	<b>B</b>	-A	2	23	3
		0	<b>B</b>	-A	<b>B</b>	3	23	3
			0	<b>B</b>	-A	4	23	3
				0	<b>B</b>	5	23	3
					0	6	23	3

SRV	HR	SR	aut
6 <sup>1</sup> 9 <sup>1</sup>	0.2923	0.7515	72

Kommentaariid a) Graaf **B6-6** ja selle täiend **B6-9** on *bisümmeetrilised*. b) Graaf **B6-6** koosneb kahest komponentsest 3-klikist, see on *3-kliik-regulaarne*. c) Täiendit **B6-9** iseloomustab binaargraaf 4-ring tunnusega +3.6.9 hõlmab graafi kõik  $n=6$  tippu ja kõik  $q=9$  serva, see on täistunnus ehk täielik invariant, st see binaartunnus iseloomustab ainult seda struktuuri. Täiend on kahealuseline, kus selle alused vastavad graafi **B6-6** 3-kliikidele ning see on *2-alus-* ehk *3-bi-kliik*. Ei ole raske märgata, et see on *4-vöö-regulaarne*, st kõik tipud kuuluvad 4-ringi.

Nagu nägime on struktuuri bisümmeetria on paaritunnuste baasil kergesti tuvastatav.

**Propositsioon 2.3.2.** Bisümmeetrilise struktuuri *täiend* on bisümmeetriline.

**Propositsioon 2.3.3.** *n-m-kliik* sisaldab (tava)klikki võimsusega  $m$ , see on *m-kliik-regulaarne*.

Kommentaariid: See tähendab, et bi-kliik on *2-kliik-regulaarne*, tri-kliik *3-kliik-regulaarne* jne.

**Propositsioon 2.3.4.** Kui kõik  $m$  komponentset klikki on *võrdse võimsusega*  $n$ , siis on struktuur ja selle täiend *bisümmeetrilised*.

Kommentaariid: Bisümmeetria seisukohalt pole oluline kas struktuur on *komponentne* või *sidus*.

**Propositsioon 2.3.5.** Bisümmeetriline *n-m-kliik* sisaldab  $s=n^m$  (tava)klikki võimsusega  $m$ .

**Propositsioon 2.3.6.** Bisümmeetrilise *n-m-kliiki* servade arv  $E$  võrdub aluste võimsuse ruudu  $n^2$  ja nende arvule  $m$  vastava tavakliiki servade arvu korrutisega,

$$E=n^2m(m-1):2$$

<i>n-m-kliik</i>			
Sümmeetria	Kliikide võimsus	Kliikide arv	Seoste aev
<i>Bisümmeetria</i>	$m$	$n^m$	$E=n^2m(m-1):2$

**Propositsioon 2.3.7.** Vastavalt aluste arvule nimetame *n-m-kliiki* kas *bi-, tri-, kvadro-, kvinta-, seksta-, septa-, okta-, nona-, deka-,* või *undeka-* jne *-klikiks*.

Kommentaariid: Võime julgelt väita, et 1 kuni 20 tipuliste bisümmeetriliste graafide hulgas esineb:

üks 4-tipuline *n-m-kliik* – *2-bikliik* kui komponentsete 2-kliikide täiend;

kaks 6-tipulist *n-m-kliiki* – *2-tri-kliik* ja *3-bi-kliik* kui komponentsete, vastavalt 2- ja 3-kliikide täiendid;

kaks 8-tipulist *n-m-kliiki* – *2-kvadro-kliik* ja *4-bi-kliik* kui komponentsete, vastavalt 2- ja 4-kliikide täiendid;

üks 9-tipuline *n-m-kliik* – *3-tri-kliik* kui komponentsete 3-kliikide täiend;

kaks 10-tipulist *n-m-kliiki* – *2-kvinta-* ja *5-bi-kliik* kui komponentsete, vastavalt 2- ja 5-kliikide täiendid;

neli 12-tipulist *n-m-kliiki* – *2-seksta-, 3-kvadro-, 4-tri- ja 6-bi-kliik* kui komponentsete, vastavalt 2-, 3-, 4- ja 6-kliikide täiendid;

kaks 14-tipulist *n-m-kliiki* – *2-septa-* ja *7-bi-kliik* kui komponentsete, vastavalt 2- ja 7-kliikide täiendid;

kaks 15-tipulist *n-m-kliiki* – *3-kvinta-* ja *5-tri-kliik* kui komponentsete, vastavalt 3- ja 5-kliikide täiendid;

kolm 16-tipulist *n-m-kliiki* – *2-okta-, 4-kvadro- ja 8-bi-kliik* kui komponentsete, vastavalt 2-, 4- ja 8-kliikide täiendid;

neli 18-tipulist *n-m-klikki* – *2-nona-*, *3-seksta-*, *6-tri-* ja *9-bi-klikk* kui komponentsete, vastavalt 2-, 3-, 6- ja 9-klikkide täiendid;

neli 20-tipulist *n-m-klikki* – *2-deka-*, *4-kvinta-*, *5-kvadro-* ja *10-biklikk* kui komponentsete, vastavalt 2-, 4-, 5- ja 10-klikkide täiendid.

Kokku 27 *n-m-klikki*.

Seega on *n-m-klikid* on lihtsalt konstrueeritavad.

**Tugev regulaarsus** kujutab endast olekut  $(k, a, b)$ , kus  $k$ -valentsregulaarse mitte-täisstruktuuri iga naabertippude paar omab  $a \geq 0$  ühist naabertippu ja iga mitte-naabertippude paar  $b \geq 1$  ühist naabertippu. Sidusa bisümmeetrilise struktuuri tugevregulaarsus on kahe erineva binaartunnuse  $\pm d.n.q$  olemasolu näol möödapääsmatu, sest  $\pm d=2$  puhul tähendab  $n-2$  just tipupaari ühiste naabertippude arvu.

**Propositsioon 2.3.8.** Kõik sidusad bisümmeetrilised struktuurid on *tugev-*, *vöö-*, või *klikk-regulaarsed*.

**Kommentaariid:** a) Tugevregulaarsed struktuurid on oma paaritunnuste baasil *kergesti tuvastatavad*. b) Tugevregulaarseid struktuure esineb ka mitte-bisümmeetriliste (mono-, polü- ja ositi sümmeetriliste) hulgas.

**Propositsioon 2.3.9.** Tugevregulaarse struktuuri *sidus täiend* on tugevregulaarne.

**Kommentaariid:** Peale lihtsalt konstrueeritavate *m-klikkide* on tuvastatud järgmised bisümmeetrilised-tugevregulaarsed struktuurid: **1)** isetäienduv 5-ring; **2)** isetäienduv B9-18; **3)** Peterseni graaf B10-15; **4)** ja selle täiend B10-30; **5)** isetäienduv B13-39; **6)** Weisfeileri B15-45-6; **7)** ja selle täiend B15-60; **8)** Greenwoodi (Clebsch'i) B16-40; **9)** ja selle täiend B16-80; **10)** Shrikhande B16-48; **11)** ja selle täiend B16-72; **12)** isetäienduv B17-68.

**Propositsioon 2.3.10.** Kuni 20-tipuliste graafide hulgas esineb  $27+12= 39$  sidusat *bisümmeetrilist/tugevregulaarset/klikkregulaarset* või *vööregulaarset* struktuuri.

**Näide 2.3.3.** 39 bisümmeetrilise/tugevregulaarse/klikk- või vööregulaarse struktuuri koondtabel.

Nr	Notation	deg	SRV	SR	Cmp/prt		Regularity	Numbers	Commentary	Pair signs	
					m	n				Pair(-) sign	Pair(+) sign
1	B4-4	2	2 <sup>1</sup> 4 <sup>1</sup>	0.6448	2p	2	4-girth	-	2-bi-clique	-2.4.4	+3.4.4
2	B5-5	2	5 <sup>2</sup>	0.6990	1c	5	5-girth	-	Selfcomplem.	-2.3.2	+4.5.5
3	B6-12	4	3 <sup>1</sup> 12 <sup>1</sup>	0.8152	3p	2	3-clique	8	2-tri-clique	-2.6.12	+2.4.5
4	B6-9	3	6 <sup>1</sup> 9 <sup>1</sup>	0.7515	2p	3	4-girth	-	3-bi-clique	-2.5.6	+3.6.9
5	B8-24	6	4 <sup>1</sup> 24 <sup>1</sup>	0.8769	4p	2	4-clique	16	2-quadro-clique	-2.8.24	+2.6.13
6	B8-16	4	12 <sup>1</sup> 16 <sup>1</sup>	0.7906	2p	4	4-girth	-	4-bi-clique	-2.6.8	+3.8.16
7	B9-27	6	9 <sup>1</sup> 27 <sup>1</sup>	0.8431	3p	3	3-clique	27	3-tri-clique	-2.8.21	+2.5.7
8	B9-18	4	18 <sup>2</sup>	0.8066	3p	3	3-girth	6	Selfcomplem.	-2.4.4	+2.3.3
9	B10-40	8	5 <sup>1</sup> 40 <sup>1</sup>	0.9084	5p	2	5-clique	32	2-quinta-clique	-2.10.40	+2.8.25
10	B10-15	3	15 <sup>1</sup> 30 <sup>1</sup>	0.8328	1c	10	5-girth	12	Petersen gr.	-2.3.2	+4.10.15
11	B10-30	6			1c	10	4-clique	5	Petersen comp.	-2.6.12	+2.5.8
12	B10-25	5	20 <sup>1</sup> 25 <sup>1</sup>	0.8196	2p	5	4-girth	-	5-bi-clique	-2.7.10	+3.10.25
13	B12-60	10	6 <sup>1</sup> 60 <sup>1</sup>	0.9273	6p	2	6-clique	64	2-sexta-clique	-2.12.60	+2.10.41
14	B12-54	9	12 <sup>1</sup> 54 <sup>1</sup>	0.8868	4p	3	4-clique	81	3-quadro-clique	-2.11.45	+2.8.22

15	<b>B12-48</b>	8	$18^1 48^1$	<i>0.8601</i>	<b>3p</b>	4	<i>3-clique</i>	64	<i>4-tri-clique</i>	-2.10.32	+2.6.9
16	<b>B12-36</b>	6	$30^1 36^1$	<i>0.8355</i>	<b>2p</b>	6	<i>4-girth</i>	-	<i>6-bi-clique</i>	-2.8.12	+3.12.36
17	<b>B13-39</b>	6	$39^2$	<i>0.8409</i>	<b>1c</b>	1	<i>3-clique</i>	22	<i>Selfcomplem.</i>	-2.5.7	+2.4.5
18	<b>B14-84</b>	12	$7^1 84^1$	<i>0.9399</i>	<b>7p</b>	2	<i>7-clique</i>	128	<i>2-septa-clique</i>	-2.14.84	+2.12.61
19	<b>B14-49</b>	7	$42^1 49^1$	<i>0.8470</i>	<b>2p</b>	7	<i>4-girth</i>	-	<i>7-bi-clique</i>	-2.9.14	+3.14.49
20	<b>B15-90</b>	12	$15^1 90^1$	<i>0.9119</i>	<b>5p</b>	3	<i>5-clique</i>	243	<i>3-quinta-clique</i>	-2.14.78	+2.11.46
21	<b>B15-75</b>	10	$30^1 75^1$	<i>0.8711</i>	<b>3p</b>	5	<i>3-clique</i>	125	<i>5-tri-clique</i>	-2.12.45	+2.7.11
22	<b>B15-45</b>	6	$45^1 60^1$	<i>0.8533</i>	<b>1c</b>	15	<i>3-clique</i>	-	<i>Weisfeiler</i>	-2.5.6	+2.3.3
23	<b>B15-60</b>	8			<b>1c</b>	15	<i>5-clique</i>	-	<i>Weisfeil. comp.</i>	-2.6.12	+2.6.12
24	<b>B16-112</b>	14			$8^1 112^1$	<i>0.9488</i>	<b>8p</b>	2	<i>8-clique</i>	256	<i>2-octa-clique</i>
25	<b>B16-96</b>	12	$24^1 96^1$	<i>0.8955</i>	<b>4p</b>	4	<i>4-clique</i>	256	<i>4-quadro-clique</i>	-2.14.72	+2.10.33
26	<b>B16-40</b>	5	$40^1 80^1$	<i>0.8670</i>	<b>4p</b>	4	<i>4-girth</i>	-	<i>Greenwood</i>	-2.4.4	+3.10.13
27	<b>B16-80</b>	10			<b>1c</b>	16	<i>5-clique</i>	16	<i>Greenw. comp.</i>	-2.8.24	+2.8.22
28	<b>B16-48</b>	6			$48^1 72^1$	<i>0.8594</i>	<b>1c</b>	16	<i>4-clique</i>	-	<i>Shrikhande</i>
29	<b>B16-72</b>	9			<b>1c</b>	16	<i>4-clique</i>	-	<i>Shrikhan comp.</i>	-2.8.18	+2.6.11
30	<b>B16-64</b>	8	$56^1 64^1$	<i>0.8557</i>	<b>2p</b>	8	<i>4-girth</i>	-	<i>8-bi-clique</i>	-2.10.10	+3.16.64
31	<b>B17-68</b>	8	$68^2$	<i>0.8589</i>	<b>1c</b>	17	<i>3-clique</i>	-	<i>Selfcomplem.</i>	-2.6.11	+2.5.7
32	<b>B18-144</b>	16	$9^1 144^1$	<i>0.9555</i>	<b>9p</b>	2	<i>9-clique</i>	512	<i>2-nona-clique</i>	-2.18.144	+2.16.113
33	<b>B18-135</b>	15	$18^1 135^1$	<i>0.9280</i>	<b>6p</b>	3	<i>6-clique</i>	729	<i>3-sexta-clique</i>	-2.17.120	+2.14.79
34	<b>B18-108</b>	12	$45^1 108^1$	<i>0.8796</i>	<b>3p</b>	6	<i>3-clique</i>	216	<i>6-tri-clique</i>	-2.14.60	+2.8.13
35	<b>B18-81</b>	9	$72^1 81^1$	<i>0.8626</i>	<b>2p</b>	9	<i>4-girth</i>	-	<i>9-bi-clique</i>	-2.11.18	+3.18.81
36	<b>B20-180</b>	18	$10^1 180^1$	<i>0.9607</i>	<b>10p</b>	2	<i>10-clique</i>	1036	<i>2-deca-clique</i>	-2.20.180	+2.18.45
37	<b>B20-160</b>	16	$30^1 160^1$	<i>0.9169</i>	<b>5p</b>	4	<i>5-clique</i>	1924	<i>4-quinta-clique</i>	-2.18.128	+2.14.73
38	<b>B20-150</b>	15	$40^1 150^1$	<i>0.9019</i>	<b>4p</b>		<i>4-clique</i>	625	<i>5-quadro-clique</i>	-2.17.105	+2.12.46
39	<b>B20-100</b>	10	$90^1 100^1$	<i>0.8682</i>	<b>2p</b>	10	<i>4-girth</i>	-	<i>10-bi-clique</i>	-2.12.20	+3.20.100

Kommentaariid: **a)** Struktuuri tähistus esitab tippude ja seoste arvu; **b)** *deg* – valentsus; **c)** *SRV* – sümmeetriavektor; **d)** *SR* – sümmeetriaväärtus; **e)** *c* – komponentide arv; **f)** *m* – aluste arv; **g)** *n* – aluste võimsus; **h)** *s* – klikkide arv.

**Propositsioon 2.3.11.** *Bi-kliki* binaar(+)märk ja *2-m-kliki* binaar(-)märk on struktuuri *täielikud invariandid* (tabelis alla joonitud).

Tavaliselt on *tugevregulaarseteks* peetud graafide nimekirjad puudulikud. Näiteks nimekirjas [12] puudub 31 bisümmeetrilist/tugevregulaarset 4 kuni 20-tipulist struktuuri.

„Kõige täielikumas“ nimekirjas [13] kus on esitatud 33 struktuuri, sh ka *n-m-klikke* puuduvad paraku **25** (B16-96), **29** (B16-72), **33** (B18-135), **34** (B18-108), **37** (B20-160) ja **38** (B20-150).

*Tugevregulaarikute* poolt koostatud nimekirjades esineb muidugi ka palju suuri graafe. Näiteks esimeses nimekirjas esineb üks 999-tipuline graaf:

16	(999, 448, 172, 224)	-	-
----	----------------------	---	---

**Näide 2.3.4.** Me võime lihtsal viisil genereerida mõned bisümmeetrilised, klikk- ja tugevregulaarsed 999-tipulised struktuurid, mida teadaolevates nimekirjades tabada pole õnnestunud:

Nr	Notation	deg	E	SR	Regularity	Commentary	(+)signs
1	<b>B999-2</b>	2	999	<b>0.9989</b>	<i>3-clique</i>	333 componentical 3-cliques	+2.3.3
2	<b>B999-996</b>	996	497502		<i>333-clique</i>	333 3-elementic parts <b>3-tricent-triginta-tri-clique</b>	?
3	<b>B999-8</b>	8	3996	<b>0.9979</b>	<i>9-clique</i>	111 componentical 9-cliques	+2.9.36
4	<b>B999-990</b>	990	494505		<i>111-clique</i>	111 9-elementic parts <b>9-cent-undeca-clique</b>	?
5	<b>B999-110</b>	110	54945	<b>0.9736</b>	<i>111-clique</i>	9 componentical 111-cliques	+2.111.6105
6	<b>B999-888</b>	888	443556		<i>9-clique</i>	9 111-elementic parts <b>111-nona-clique</b>	?
7	<b>B999-332</b>	332	165832	<b>0.9515</b>	<i>333-clique</i>	3 componentical 333-cliques	+2.333.55278
8	<b>B999-666</b>	666	332667		<i>3-clique</i>	3 333-elementic parts <b>333-tri-clique</b>	?

Kommentaariid: a) Tugevregulaarsed on siin vaid  $n$ - $m$ -klikid. b)  $n$ - $m$ -klikkide nimetused võivad küll nii mõnelegi mitte meeldida, kuid midagi paremat ma ei leidnud.

**Propositsioon 2.3.12.** Struktuurisemiootiline lähenemine „avastab“ tugevregulaarikutele ja klikifännidele seni tundmatuid tugev- ja klikkregulaarseid struktuure.

### Kokkuvõte

Tegemist on bisümmeetria ja tugevregulaarsuse osalise kokkulangevusega. Bisümmeetria hõlmab ka veel mittesidusaid struktuure ning tugevregulaarsus võib esineda ka mono-, polü- ja ositi sümmeetria korral, kuigi kuni 20-tipuliste hulgas viimaseid siiski ei ole täheldatud. Struktuurisemiootiline lähenemine on täitnud „valgeid laike“ tugevregulaarsete graafide loetelus, esile tõstnud seni ignoreeritud klikkregulaarsuse olemuse ja selle, et tugevregulaarse graafi täiend on samuti tugevregulaarne.

Teises, „kõige täielikumas“ tugevregulaarsete graafide loetelus on esitatud kõik kuni 20-tipulised **bi-klikid**, mida seal nimetatakse peamiselt *complete bipartite graphs*, kusjuures 4-tipulise bi-kliki nimi on *square* ja 6-tipuline on *unity*. Samuti on seal esitatud kõik **2-m-klikid**, mis kannavad küll tiitlit *r-cocktail party graphs*, kusjuures 6- tipuline on hoopis *octahedral graph* ja 8-tipuline *16-cell graph*. Ülejäänud **n-m-klikkidest**, seal nimetatud peamiselt *circular graphs*, puudub loetelus viis **n-m-klikki**. Samuti puudub selles ühe tuntud tugevregulaarse graafi tugevregulaarne täiend.



### 3. GRAAFIDE ISOMORFISMI JA KANOONILISE ESITUSE PROBLEEM

**Isomorfism** (kreeka sõnast *isos* – ühesugune; *morphe* – vorm) moodustavad koos homomorfismiga *filosoofilise kategooria*, mis tähendab *vastavust* objektide *struktuuride* vahel [14]. Selline üksühene vastavus võib esineda vaid abstraktsete, idealiseeritud objektide vahel.

*Matemaatikas* defineeritakse isomorfismi kui süsteemi niisugust üksühest kujutust sama tüüpi süsteemiks, mille korral säilib süsteemide struktuur, st seosed, järjestus, topoloogia jms. Isomorfism on *pööratav morfism*, millel on *vastandmorfism*, kus nende korrutis on *ühikmorfism*. Topoloogilist isomorfismi nimetatakse *homoöomorfismiks*. **Isomorfismiprobleemiks** peetakse kahe objekti isomorfismi tuvastamise algoritmi konstrueerimist. Objekti *kanooniliseks esituseks* nimetame seda objekti mingil kontsentreeritud kujul kirjeldavat moodustist.

#### 3.1. Graafide isomorfismi probleem

Graafide isomorfismi probleem võis kerkida ülesse aastal 1857, kui A. Cayley [15] tegeles orgaaniliste isomeeride alaste uuringutega.

Isomorfismi tuvastamise ülesanne kujutab endast graafiteooria keskset ülesannet. Klassifikaatori „2000 Mathematics Subject Classification” (MSC2000) järgi on graafide isomorfismi tuvastamine koos taastatavuse probleemiga kombinatoorne nähtus indeksiga 05C60, ning iseseisvat graafiteoorial ei eksisteerigi!

Kaht graafi nimetatakse isomorfseks, kui nad erinevad vaid oma tippude märgistatuse poolest. Graafi  $G_A$  isomorfne kujutus graafi  $G_B$  on isomorfne substituutsioon  $\varphi: V_A \rightarrow V_B$

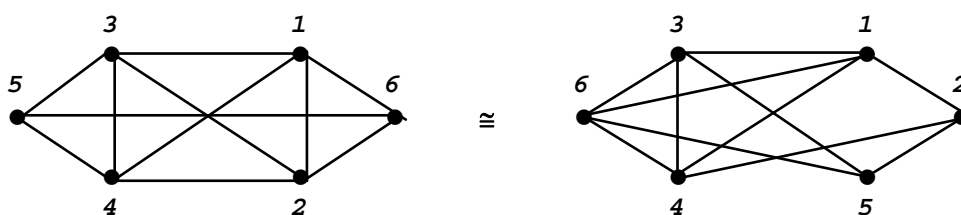
$$\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & \dots & v_i & \dots & v_n \\ \varphi(v_1) & \varphi(v_2) & \dots & \varphi(v_i) & \dots & \varphi(v_n) \end{array}$$

**Propositsioon 3.1.1.** Isomorfismi tuvastamine seisneb vaid vastuses küsimusele, kas  $G_A$  on isomorfne graafiga  $G_B$ . Kui see on nii, siis tuleb esitada isomorfne substituutsioon.

**Kommentaari** Struktuursest aspektist peame graafe  $G_A$  ja  $G_B$  isomorfseteks parajast siis kui need omavad ühte ja sama struktuuri.

Isomorfismi tuvastamise põhimõtteline teoreetiline algoritm täiesti olemas – see seisneb graafi  $G_B$  seosmaatriksi ridade ja nendele vastavate veergude ümberpaigutamises (permuteerimises, ümberjärjestamises, ümbervahetamises) niikaua, kui see ei lange kokku graafi  $G_A$  seosmaatriksiga. Sellel on üks oluline puudus – see on väga keeruline, selle sammude arv läheneb  $n!$  ( $n$ -faktoriaalini). Veel hiljuti arvati, et 16! permutatsiooni arvutamine võtaks kuni 40 aastat aega.

**Näide 3.1.1.** Kas graafid  $G_A$  ja  $G_B$  on isomorfsete?



1	0 1 1 1 0 1	4	0 1 1 1 0 1	1→4
2	1 0 1 1 0 1	1	1 0 1 1 0 1	2→1
3	1 1 0 1 1 0	3	1 1 0 1 1 0	3→3
4	1 1 1 0 1 0	6	1 1 1 0 1 0	4→6
5	0 0 1 1 0 1	5	0 0 1 1 0 1	5→5
6	1 1 0 0 1 0	2	1 1 0 0 1 0	6→2

Graafid  $G_A$  ja  $G_B$  osutuvad isomorfseks, kuid seosmaatriksiridade ja -veergude ümberpaigutamise moodus oleks nõudnud siin  $6!=720$  sammu.

Hakati otsima teisi teid graafide isomorfismi tuvastamiseks. Möödunud sajandi 70. aastail oli see väga populaarne. Näiteks, S. Toida [16] pakkus selleks tõsimeeli välja „kauguste maatriksi“. Tõepoolest on graafi kaugustemaatriksid omavahel kergemini eristatavad kui seosmaatriksid. Graafide mitteisomorfismi võib nende abil tuvastada „peaaegu alati“, ka isomorfismi tuvastamine võib vahel korda minna. Kuid, sellel lähenemisel on ka „iva“ sees – see on teatud mõttes struktuurisemiootika märgimaatriksi eelkäija.

Selle perioodi algoritme on kriitiliselt analüüsinud R. C. Read ja D. G. Corneil, [17] ning G. Gati, [18], kes tituleerisid isomorfismiharrastuse „isomorfismihaiguseks“. Isomorfismi-probleem muutus vahepeal koguni tabuks. Selle probleemi käsitlemist väldivad oma graafiõpikutes paljud. Näiteks B. Bollobas'i „Modern Graph Theory“ [19] on isomorfismi-probleemile pühendanud vaid kaks sõna, selles käsitletakse peamiselt „praktilisi“ probleeme nagu vooge võrkudes jne. Siiski tuuakse graafide isomorfismi visuaalne näide ära peaaegu kõikides graafiõpikutes – ja enamasti sellega piirduaksegi.

On ka täielikult isomorfismiprobleemile pühendatud monograafiaid. Seda on rühmateooria seisukohalt käsitlenud C. Hoffmann [20] väites, et rühmade „struktuur“ sarnanevat isomorfismi-probleemile. Paraku jääb see sarnasus kõrvaltvaatajale raskelt tabatavaks. Isomorfismiprobleemi on lahanud Netšepurenko jt [21] ning esitanud ka sellega seotud algoritme ja arvutiprogramme. Võib ära märkida G. Kobler'i, H. Schönig'i ja J. Toran'i monogaafiat [22], kus käsitletakse seda ajalise keerukuse aspektist.

Algoritmide isomorfismi probleemide puhul ei pääse. Tegijaid leidub. Näiteks, L. Babai [23] leiab selleks Monte-Carlo algoritmi sobiva olevat. G. Tinhofer, M. Lödke, S. Bauman ja L. Babel [24] väidavad, et isomorfismi probleem on lahendatav Weisfeiler-Lehmani algoritmi abil. C. V. Raj ja M. S. Shivakumar [25] loendavad mitmesuguseid spetsiifilisi atribuute selle probleemi lahendamiseks. Samal ajal ei sisalda mõned algoritmilist graafiteooriat esitavad oopused, nagu N. Chistofiedes [26], mitte midagi isomorfismiga seonduvat. S. Pemmaraju ja S. Skiena [27] piirduvad isomorfismi puhul vaid keerukuseprobleemi esile toomisega.

Kui isomorfismiprobleemi hakati keerukuse aspektist uurima, siis arvati et see on NP-keerukas [28]. V. Arvind ja P. P. Kurur on välja pakkunud vahepealse variandi, tähistusega **SPP** [29].

Isomorfismi tuvastamise meetodite süstematiseerimine on viinud lihtsa skeemini: a) sorteerimise ja mitte-sorteerimis meetodid; b) lokaalsete ja globaalsete invariantide kasutamise meetodid.

**Invariant** on objekti *omadus* nagu, näiteks suuruse väärtus, avaldise vorm jne, *mis jääb* teatud teisenduse(te) korral *muutumatuks*, st on invariant nende teisenduste suhtes. Graafi *lokaalseteks invariantideks* võivad olla tippude astmed (valentsused), tipupaari vahelised kaugused, binaartunnused jne. *Globaalseks invariantiks* aga graafi valentsusvektor, polünoomid, spektrid, kanooniline esitis jne. Kui vaadeldav teisendus ei muuda mitte ühtki objekti omadust, siis on

tegemist invariantide süsteemiga, ja see on F. Harary [30] järgi *täielik invariant*. Näiteks, isomorfsete graafide täielik invariant on nende ühine struktuur, mis ei muutu graafi tippude ruumilise ümberasetuse ja/või nende ümbermärgistamise, kui teisenduse, korral.

Invariantsuse mõiste oli matemaatikas kasutusel juba 19. sajandi keskel. Invariantide teooria omandas suure tähtsuse geomeetrias. Invariantide teooria on klassikalises mõttes algebraline teooria [31]. Hiljem laienes see spetsiifiline mõiste *filosoofiliseks kategooriaks*.

F. Harary [30] järgi on isomorfismiprobleem lahendatav globaal invariantide (polünoomid, spektrid jt) täieliku süsteemi baasil. S. Locke [32] leiab, et isomorfismi testimiseks sobivad hästi kahendsüsteemis esitatud ülipikad 3-kuup-koodid. A. Zökov [33] on arvamusel, et see on lahendatav graafi tihedust, tsükleid, klikke jne iseloomustavate lokaalsete invariantide baasil.

Isomorfismiprobleem on lahendatav ka struktuuri, kui isomorfsete graafide täieliku invariandi, tuvastamise abil, st märgimaatriksite  $W$  kokkulangevuse teel.

**Semiootiline isomorfismituvastuprintsiip.** OPERAND: *Dekomponeeritud märgimaatriksid  $W_A$  ja  $W_B$ .* ALGORITM: Kontrollida märgimaatriksite *semiootilist ekvivalentsust  $W_A \approx W_B$* , st: a) binaarmärkide  $\{\pm d.n.q.ij\}_A$  ja  $\{\pm d.n.q.ij\}_B$  kokkulangevust; b) sagedus-  $\{u_i\}_A = \{u_i\}_B$  ja klassivektorite  $\{s_i\}_A = \{s_i\}_B$  kokkulangevust iga tipulassi  $W_k \subset W$  raames. TULEMUS: *Struktuuride identsus  $GS_A \equiv GS_B$  või mitteidentsus ehk graafide isomorfism  $G_A \cong G_B$  või mitteisomorfism.*

**Näide 3.1.2.** Näites 3.1.1 esitatud graafide  $G_A$  ja  $G_B$  binaarmärgid ja dekomponeeritud märgimaatriksid  $W_A$  ja  $W_B$ :

$$A: -2.5.7; B: +2.3.3; C: +2.4.6; D: +2.5.8; E: +3.6.11.$$

A						B					
1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
1	2	3	4	5	6	1	3	4	6	2	5
0	D	C	C	-A	B	0	C	D	C	B	-A
0	C	C	-A	B		0	C	D	-A	B	
0	D	B	-A			0	C	B	-A		
0	B	-A				0	-A	B			
0	E					0	E				
0						0					
$u_i$						$u_i$					
$s_i$						$s_i$					
$k$						$k$					
$i$	ABCDE					$i$	ABCDE				
	12.						12.				
	31 1						31 1				
	31 1						31 1				
	31 1						31 1				
	21 2						21 2				
	21 2						21 2				

**Kommentaariid:** a) Graafide  $G_A$  ja  $G_B$  märgimaatriksid on *semiootiliselt ekvivalentsed  $W_A \approx W_B$* , millest järeldub, et struktuurid  $GS_A$  ja  $GS_B$  on identsed  $GS_A \equiv GS_B$  ehk *graafid on isomorfsed  $G_A \cong G_B$* . b) Märgimaatriksite semiootiline ekvivalentsus  $W_A \approx W_B$  on osamaatriksite  $(W_{kk'})_A \leftrightarrow (W_{kk'})_B$ , neis sisalduvate binaarorbiitide  $(\mathcal{QR}_n)_A \leftrightarrow (\mathcal{QR}_n)_B$  ja neid iseloomustavate binaarmärkide  $dnq_A \leftrightarrow dnq_B$  üksühene vastavus.

Tänu invariantsete tipuklasside  $\mathcal{NV}_{k=1}$  ja  $\mathcal{NV}_{k=2}$  väljatoomisele graafi struktuuris väheneb ka isomorfismi klassikaliseks tuvastamiseks vajalik sammude arv:  $4!+2!=24+2=26$  täieliku ehk otsesorteerimise  $n!=6!=720$  asemel.

**Propositsioon 3.1.2.** Kui graafide  $G_A$  ja  $G_B$  märgimaatriksid on *semiootiliselt ekvivalentsed  $W_A \approx W_B$* , siis on nende struktuurid  $GS_A$  ja  $GS_B$  identsed  $GS_A \equiv GS_B$  ehk *graafid on isomorfsed  $G_A \cong G_B$* .

**Kommentaariid:** Struktuurituvastus ei nõua isomorfismituvastust substituutsioonide tasemel.

### 3.2. Graafide kanooniline esitus

Graafide *kanooniline esitus* tähendab graafi esitamist mingil selle struktuuri esitaval kujul, soovitatavalt *isomorfismi täpsusega*. Kanoonilise esituse probleemi püstitas arvatavasti Lazlo Babai [34, 35] 1977. aastal. Kanoonilist esitust kujutavad endast näiteks *3-kuup-koodid* [32]. Paraku ei sisalda need peaaegu mingit teavet struktuuri kohta.

Hoopis sügavamale on võimalik tungida struktuuri semiootiliste invariantide abil.

**Propositsioon 3.2.1.** Märgimaatriks  $W$  on graafi kanooniline esitus *binaarmärkide, regulaarsuste, sümmeetriaomaduste (orbiitide) ja isomorfismi täpsusega*.

Seega on struktuuri tuvastamine midagi rohkemat kui isomorfismi tuvastamine.

**Näide 3.2.1.** Weissfeileri [36, lk 166(1)] *ositi sümmeetrilise ja tugevregulaarse graafi WEI* kanooniline esitus: binaartunnused ja dekomponeeritud märgimaatriks  $W$  koos  $s$ -vektorite poolt liigendatud  $u$ -vektoritega:

$$A: -2.8.20; B: -2.8.19; C: -2.8.18; \\ D: +2.7.13; E: +2.7.14; F: +2.7.15.$$

															$u_i$		$orb$													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$i$	ABCDEF	*													
0	F	C	C	C	B	F	C	C	B	F	C	E	F	C	E	F	E	C	B	F	F	F	F	C	F	F	20	039039	1	
	0	C	C	B	C	C	F	C	F	B	E	C	C	F	F	E	C	E	B	F	F	C	F	F	C	F	F	24	039039	1
		0	F	F	C	C	C	B	F	C	B	F	B	F	E	C	F	E	F	C	F	F	C	F	F	C	E	12	039039	2
			0	C	F	C	C	B	C	F	F	B	F	B	C	E	E	F	F	C	F	C	F	C	F	E	14	039039	2	
				0	F	F	C	E	F	C	F	B	F	E	F	C	F	C	C	F	B	C	C	E	1	039039	3			
					0	C	F	E	C	F	B	F	E	F	C	F	C	F	C	F	B	C	C	E	2	039039	3			
						0	F	E	F	C	F	E	F	C	B	F	F	C	F	B	E	C	B	C	9	039039	4			
							0	E	C	F	E	F	C	F	F	B	C	F	F	B	E	B	C	C	19	039039	4			
								0	C	C	B	B	B	B	E	E	F	F	F	F	C	F	F	C	6	066066	5			
									0	B	F	E	F	E	B	E	B	E	B	B	C	E	E	C	10	066066	6			
										0	E	F	E	F	E	B	E	B	B	C	E	E	C	16	066066	6				
											0	C	F	B	F	B	C	C	E	C	B	C	E	E	8	066066	7			
												0	B	F	B	F	C	C	E	C	B	E	C	E	18	066066	7			
													0	C	C	C	B	E	C	E	E	E	B	B	4	066066	8			
														0	C	C	E	B	C	E	E	B	E	B	7	066066	8			
															0	B	E	F	C	B	B	E	C	F	11	066066	9			
																0	F	E	C	B	B	C	E	F	17	066066	9			
																	0	B	B	C	E	B	F	B	13	066066	10			
																		0	B	C	E	F	B	B	15	066066	10			
																			0	E	D	F	F	E	23	066147	11			
																				0	E	F	F	D	3	066147	12			
																					0	B	B	B	22	093174	13			
																						0	E	A	21	147066	14			
																							0	A	25	147066	14			
																								0		5	255174	15		

Põhilised invariantid ja mõõdud:

Sümmeetria	/V/	/R/	K	N	SVV	SV	SRV	HR	SR
Ositi sümmeetria	25	300	15	154	$1^5 2^{10}$	0.1723	$1^{20} 2^{128} 4^6$	2.1576	0.1290

*WEI* ja selle täiendi *WEIC* täpsustavad invariantid ja mõõdud:

G	/E/	k	N <sup>+</sup>	N <sup>-</sup>	P	CL	MC	DM	SEV <sup>+</sup>	SE	TRA	BRA
<i>WEI</i>	150	1	80	74	6	4	3	2	$1^{12} 2^{67} 4^1$	0.1310	1.000	0
<i>WEIC</i>	150	1	74	80	6	4	3	2	$1^8 2^{61} 4^5$	0.1494	1.000	0

Kommentaariid:

- Vaid kuue binaarmärgi baasil on  $25 \times 25$  märgimaatriks  $u$ - ja  $s$ -vektorite abil dekomponeeritud 15 **tipuorbiidiks** ja 115 osamaatriksiks  $W_{ki,kj}$ .
- B. Weissfeiler [36] on üks väheseid, kes leiab et graafi struktuuri oluliseks atribuutideks on ka tipuorbiidid. Binaarorbiitideni ta siiski ei lasku.
- B. Weissfeiler on konstrueerinud terve rea tugevalt regulaarseid graafe, mis rajanevad nendele samadele kuuele binaartunnustele, sh isetäienduvaid, kuid ka teistsuguste binaartunnustega, samuti ka  $0$ -sümmeetrilisi.
- Graaf **WEI** ja selle täiend **WEIC** on **triangulaarne, 2-distants-** ja **12-valentsregulaarne**.
- Graafi **WEI** täiend **WEIC** on samuti **tugevalt regulaarne**.
- Graafi **WEI** 150 “mittenaaberpaari” moodustavad 74 **binaar(-)orbiiti**, kus  $-A$  moodustab ühe kaheelemendilise orbiidi,  $-B$  33 orbiiti, sh 4 üheelemendilist ja 29 kaheelemendilist orbiiti,  $-C$  moodustab 40 orbiiti, sh 4 üheelemendilist, 31 kaheelemendilist ja 5 neljaelemendilist orbiiti.
- Graafi **WEI** 150 naaberpaari moodustavad 80 **binaar(+)-orbiiti**, sh  $+D$  2 üheelemendilist,  $+E$  32 orbiiti, sh 4 üheelemendilist, 27 kaheelemendilist ja 1 neljaelemendilise orbiidi, ja  $+F$  moodustab 46 orbiiti, sh 6 ühe- ja 40 kaheelemendilist orbiiti.

Järgnevas vaatleme kahe „väga sarnase“, spetsiaalselt isomorfismi tuvastamiseks konstrueeritud polüsümmeetrilise graafi täpsustatud märgimaatrikseid ehk kanoonilisi esitisi. Nende märgimaatriksite täpsustamiseks on rakendatud *multiplikatiivseid binaarmärke* (vt Propositsioon. 1.1.11 ja Multiplikatiivmätgistuse printsiip).

**Näide 3.2.2.** Polüsümmeetriliste graafide  $PRA_A$  ja  $PRA_B$  ühised binaarmärgid, multiplikatiivsed binaarmärgid ja täpsustatud märgimaatriksid  $W^*$ :

$PRA_A$  ja  $PRA_B$  ühised lähte binaarmärgid:

$$A: -3.8.10; B: -3.6.7; C: -2.4.4; D: -2.3.2; \underline{E: +2.4.6}; F: +3.8.16.$$

$PRA_A$  seosmaatriksastme  $E^5$  baasil saadud täpsustatud binaarmärgid ja täpsustatud märgimaatriks  $W_A^*$  koos  $u$ -vektoritega:

Ühised binaarmärgid	0	-A	-B	-C		-D	E		F
Multiplikatiivsed binaarmärgid $e^5$	180	125	110	165	160	80	231	233	210
Täpsustav tähistus	0	-A	-B	-C1	-C2	-D	E1	E2	F

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$i$	ABCCDEEF	Orb
0	E2	E1	E1	F	C2	C1	C1	F	C2	C1	C1	D	A	B	B	D	A	B	B	1	24422212	1
0	E1	E1	C2	F	C1	C1	C2	F	C1	C1	A	D	B	B	A	D	B	B	2	24422212	1	
0	E2	C1	C1	F	C2	C1	C1	F	C2	B	B	D	A	B	B	D	A	3	24422212	1		
0	C1	C1	C2	F	C1	C1	C2	F	B	B	A	D	B	B	A	D	4	24422212	1			
0	E2	E1	E1	D	A	B	B	F	C2	C1	C1	A	D	B	B	5	24422212	1				
0	E1	E1	A	D	B	B	C2	F	C1	C1	D	A	B	B	6	24222212	1					
0	E2	B	B	D	A	C1	C1	F	C2	B	B	A	D	7	24222212	1						
0	B	B	A	D	C1	C1	C2	F	B	B	D	A	8	24222212	1							
0	E2	E1	E1	A	D	B	B	F	C2	C1	C1	9	24222212	1								
0	E1	E1	D	A	B	B	C2	F	C1	C1	10	24222212	1									
0	E2	B	B	A	D	C1	C1	F	C2	11	24222212	1										
0	B	B	D	A	C1	C1	C2	F	12	24222212	1											
0	E2	E1	E1	C2	F	C1	C1	13	24222212	1												
0	E1	E1	F	C2	C1	C1	14	24222212	1													
0	E2	C1	C1	C2	F	15	24222212	1														
0	C1	C1	F	C2	16	24222212	1															
0	E2	E1	E1	17	24222212	1																
0	E1	E1	18	24222212	1																	
0	E2	19	24222212	1																		
0	20	24222212	1																			

$PRA_B$  seosmaatriksastme  $E^7$  baasil saadud täpsustatud binaarmärgid ja täpsustatud märgimaatriks  $W_B^*$  koos  $u$ -vektoritega:

Ühised binaarmärgid	0	-A	-B		-C			-D	E		F
Mult. binaarmärgid $e^7$	4410	3437	3276	3277	4081	4088	4011	3010	4831	4803	4445
Täpsustav tähistus	0	-A	-B1	-B2	-C1	-C2	-C3	-D	E1	E2	F

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	i	ABBCCCEEF	Orb
0	E1	E2	E1	F	C1	C2	C3	F	C3	C2	C1	D	B2	B1	A	D	A	B1	B2	1	2222222212	1
0	E1	E2	C3	F	C1	C2	C1	F	C3	C2	A	D	B2	B1	B2	D	A	B1	2	2222222212	1	
0	E1	C2	C3	F	C1	C2	C1	F	C3	B1	A	D	B2	B1	B2	D	A	3	2222222212	1		
0	C1	C2	C3	F	C3	C2	C1	F	B2	B1	A	D	A	B1	B2	D	4	2222222212	1			
0	E1	E2	E1	D	A	B1	B2	F	C1	C2	C3	A	D	B2	B1	5	2222222212	1				
0	E1	E2	B2	D	A	B1	C3	F	C1	C2	B1	A	D	B2	6	2222222212	1					
0	E1	B1	B2	D	A	C2	C3	F	C1	B2	B1	A	D	7	2222222212	1						
0	A	B1	B2	D	C1	C2	C3	F	D	B2	B1	A	8	2222222212	1							
0	E1	E2	E1	A	B1	B2	D	F	C3	C2	C1	9	2222222212	1								
0	E1	E2	D	A	B1	B2	C1	F	C3	C2	10	2222222212	1									
0	E1	B2	D	A	B1	C2	C1	F	C3	11	2222222212	1										
0	B1	B2	D	A	C3	C2	C1	F	12	2222222212	1											
0	E1	E2	E1	C3	F	C1	C2	13	2222222212	1												
0	E1	E2	C2	C3	F	C1	14	2222222212	1													
0	E1	C1	C2	C3	F	15	2222222212	1														
0	F	C1	C2	C3	16	2222222212	1															
0	E1	E2	E1	17	2222222212	1																
0	E1	E2	18	2222222212	1																	
0	E1	19	2222222212	1																		
0	20	2222222212	1																			

Ühised invariandid ja mõõdud:

Sümmeetria	V	R	E	k	N <sup>+</sup>	K	CL	MC	DM	SVV	SV	SEV <sup>+</sup>	SE <sup>+</sup>	TRA	BRA
Multisümm.	20	190	50	1	3	1	4	4	3	20 <sup>1</sup>	1.000	10 <sup>1</sup> 20 <sup>2</sup>	0.7303	0.250	0

Eristavad invariandid ja mõõdud:

G	N	P	SRV	HR	SR
PRA	8	8	10 <sup>1</sup> 20 <sup>5</sup> 40 <sup>2</sup>	0.8668	0.6196
PRB	10	10	10 <sup>1</sup> 20 <sup>9</sup>	0.9936	0.5640

Kommentaariid:

- Graafid  $PRA_A$  ja  $PRA_B$  ei ole isomorfsed.
- Graaf  $PRA_A$  erineb graafist  $PRA_B$  binaar(-)orbiitide arvu poolest, kuid langeb kokku binaar(+)sümmeetriliste omadustega. Nende täiendi puhul on see vastupidi.
- Mõlemad graafid on 4-kliik-, 4-ring-, 3-, 2-distants- ja 5-valentsregulaarsed. 4-kliikregulaarsus avaldub viie 4-kliki olemasolus, mis märgimaatriksis silma torkavad.
- Mõlemad graafid omavad 3 binaar(+)orbiiti, võimsustega vastavalt E1 – 20, E2 – 20, F – 20.
- Graaf  $PRA_A$  omab 5 binaar(-)orbiiti võimsusega –A, –C2, ja –D puhul 20 ning –B ja –C1 puhul 40.
- Graafi  $PRA_A$  täiend  $PRAC_A$  binaartunnustega –A:-2.14.68, –B:-2.12.47, C:+2.10.35, D:+2.10.36, E:+2.11.44, F:+2.12.48 on triangulaarne, n>4-kliik- ja 14-valentsregulaarne.
- Graaf  $PRA_B$  omab 7 binaar(-)orbiiti võimsusega 20.

Graafide  $PRA_A$  ja  $PRA_B$  juures pakuvad huvi ka nende orbiitstruktuurid (vt Propositsioonid 1.3). Huvi võivad pakkuda just need orbiitstruktuurid, millele vastav binaarmärk on esitatud  $u$ -vektoris arvuga suurem kui 2. 2-valentsed orbiitgraafid kujutavad endast ringe ja ringikeste kogumeid, mis erinevad üksteisest vaid neid moodustavate tippude nummerduse poolest. Vaid graafi  $PRA_A$

märkidele  $-B$  ja  $-CI$  vastavad orbiitstruktuurid on 4-valentsed. Nende orbiitstruktuure  $PRA_A-B$  ja  $PRA_A-CI$  on mõtet avada.

**Näide 3.2.3.** Graafi  $PRA_A$  binaarmärgile  $-B$  vastava *orbiitstruktuuri*  $PRA_A-B$  binaarmärgid ja tunnusmaatriks  $W$  koos  $u$ -vektoritega:

$$A: -5.18.32; B: -4.8.12; C: -3.6.8; D: -2.6.8; E: -2.4.4; F: +3.8.12.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$i$	ABCDEF	Orb
0	-D	-A	-A	-E	-E	-C	-C	-E	-E	-C	-C	-B	-B	F	F	-B	-B	F	F		1	244144	1
	0	-A	-A	-E	-E	-C	-C	-E	-E	-C	-C	-B	-B	F	F	-B	-B	F	F		2	244144	1
		0	-D	-C	-C	-E	-E	-C	-C	-E	-E	F	F	-B	-B	F	F	-B	-B		3	244144	1
			0	-C	-C	-E	-E	-C	-C	-E	-E	F	F	-B	-B	F	F	-B	-B		4	244144	1
				0	-D	-A	-A	-B	-B	F	F	-E	-E	-C	-C	-B	-B	F	F		5	244144	1
					0	-A	-A	-B	-B	F	F	-E	-E	-C	-C	-B	-B	F	F		6	244144	1
						0	-D	F	F	-B	-B	-C	-C	-E	-E	F	F	-B	-B		7	244144	1
							0	F	F	-B	-B	-C	-C	-E	-E	F	F	-B	-B		8	244144	1
								0	-D	-A	-A	-B	-B	F	F	-E	-E	-C	-C		9	244144	1
									0	-A	-A	-B	-B	F	F	-E	-E	-C	-C		10	244144	1
										0	-D	F	F	-B	-B	-C	-C	-E	-E		11	244144	1
											0	F	F	-B	-B	-C	-C	-E	-E		12	244144	1
												0	-D	-A	-A	-E	-E	-C	-C		13	244144	1
													0	-A	-A	-E	-E	-C	-C		14	244144	1
														0	-D	-C	-C	-E	-E		15	244144	1
															0	-C	-C	-E	-E		16	244144	1
																0	-D	-A	-A		17	244144	1
																	0	-A	-A		18	244144	1
																		0	-D		19	244144	1
																			0		20	244144	1

Kommentaariid:

- Orbiitstruktuur  $PRA_A-B$  on (+)sümmeetriline, 5-aluseline, 4-ring-, 5-, 4-, 3- ja 2-distsantsregulaarne.
- $PRA_A-B$  alused vastavad  $PRA_A$  4-klikkidele ja need on: I – tippudega 1,2,3,4; II – 5,6,7,8; III – 9,10,11,12; IV – 13,14,15,16; V – 17,18,19,20. Alus I on seotud alustega IV ja V; II – alustega III ja V; III – alustega II ja IV; IV – alustega I ja III; V – alustega I ja II. Põhimõtteliselt on alused I ja II liidetavad aluseks A ning alused IV ja V aluseks B, kus alus III ei ole liidetav.
- Orbiitstruktuur  $PRA_A-B$  langeb kokku täiendi  $PRAC_A$  vastavale binaar(+)tunnusele vastava orbiitstruktuuriga ning osutub isomorfseks  $PRA_A$  tunnusele  $-CI$  vastava orbiitstruktuuriga.
- $PRA_A-B$  karakteristikuid:

$ V $	$ R $	$ E $	$K$	$N$	$N^+$	$SVV$	$SV$	$SRV$	$HR$	$SR$	$SEV^+$	$SE^+$	$TRA$	$BRA$
20	190	40	1	6	1	$20^1$	1.000	$10^1 20^2 40^4$	0.843	0.630	$40^1$	1.000	0	0

### 3.3. Ekstreemselt sümmeetrilistest graafidest

On võimalik konstrueerida bisümmeetrilisi ja tugevregulaarseid graafe, mille struktuurid on kanooniliselt eristamatud. Samas on selliste struktuuride esinemise tõenäosus 0-lähedane.

Netšepurenko jt [21] poolt konstrueeritud raskelt-eristatavad bisümmeetrilised tugevregulaarsed struktuurid 40-tipuliste graafid  $SIB_A$  ja  $SIB_B$  omavad ühiseid binaarmärke  $-A: -2.6.8$  (täiendil vastavalt  $+B: +2.20.142$ ) ja  $+B: +2.4.6$  (täiendil  $-A: -2.20.144$ ).

Märkidest on välja loetav, et  $SIB_A$  ja  $SIB_B$  on 4-kliik-, 2-distsants- ja 12-valents-regulaarsed.  $SIB_A$  ja  $SIB_B$  binaarmärkide kokkulangevusest järeldeb nende sümmeetriaomaduste kokkulangevus.

Klassikalise isomorfismituvastuse algoritm nõuaks siin 40! sammu teostamist. Kuna multiplikatiivmärgistuse printsiip tugevregulaarsete graafide puhul täpsustavaid binaarmärke ei anna, siis kontrollime siin kõrgemat järku binaarmärke (mis saadakse esialgse ehk esimest järku binaargraafi eemaldamisel struktuurist, säilitades seda moodustavad tipud). Graafide  $SIB_A$  ja  $SIB_B$  puhul saame mõlemale teist järku binaartunnused  $-A^{m=2} = -3.18.48$ ,  $+B^{m=2} = +3.20.64$ , kuid ka nende tunnuste baasil ei ole graafide struktuurid eristatavad. Kolmandat järku binaargraaf  $g_{ij}^{m=3}$  ei teki, see osutub tühjaks  $\emptyset$ .  $SIB_A$  ja  $SIB_B$  puhul on tegemist väga haruldaste struktuuridega.

Nüüd jääb üle tuvastada graafide  $SIB_A$  ja  $SIB_B$  teist järku binaargraafide  $g_{ij}^{m=2}$  struktuur, st moodustada nende lokaalsed märgimaatriksid  $W_{ij}^{m=2}$ . Selleks avame mõlemast graafist ühe suvalise märgile  $+B^{m=2}$  teist järku binaargraafi  $g^{m=2}$ .

**Näide 3.3.1.** Bisümmeetriliste ja tugevregulaarsete graafide  $SIB_A$  ja  $SIB_B$  teist järku binaargraafide  $g_{ij}^{m=2}$  struktuur nende lokaalsete märgimaatriksite  $W_{ij}^{m=2}$  binaarmärkide tasemel:

Teist järku binaargraafi  $g^{m=2} \subset SIB_A$  binaarmärgid lokaalses märgimaatriksis  $W_{ij}^{m=2}_A$ :

$-A = -2.6.8$ ;  $-B = -2.4.4$ ;  $-C = -2.3.2$ ;  $D = +2.4.6$ ;  $E = +3.12.28$ ;  $F = +3.20.46$ .

Teist järku binaargraafi  $g^{m=2} \subset SIB_B$  binaarmärgid lokaalses märgimaatriksis  $W_{ij}^{m=2}_B$ :

$-A = -2.6.8$ ;  $-B = -2.4.4$ ;  $C = +2.4.6$ ;  $D = +3.12.24$ ;  $E = +3.20.46$ .

**Kommentaari:** a) Binaarmärkide erinevusest järeldeb teist järku binaargraafide mitte-isomorfisus. b) Binaargraafide mitte-isomorfisusest järeldeb graafide  $SIB_A$  ja  $SIB_B$  mitte-isomorfisus.

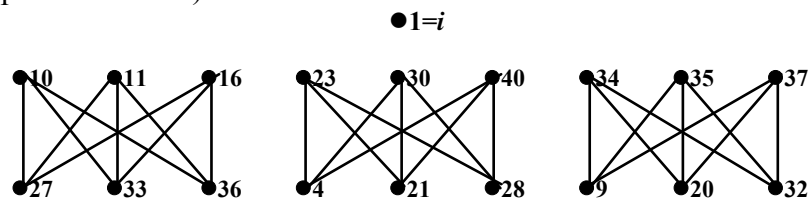
**Propositsioon 3.3.1.** Sümmeetriliste graafide  $G_A$  ja  $G_B$  ühesugustele binaarmärkidele vastavate binaargraafide  $g_{ij}^A$  ja  $g_{ij}^B$  mitte-isomorfisusest järeldeb graafide  $G_A$  ja  $G_B$  mitte-isomorfisus.

**Kommentaari:** Esineb juhtumeid, kus mitte-isomorfism on tuvastatav esimest järku lokaalsete märgimaatriksite  $W_{ij}^A$  ja  $W_{ij}^B$  alusel.

**Näide 3.3.2.** Illustreerimaks väga sarnaste struktuuride  $SIB_A$  ja  $SIB_B$  erinevust esitame nende teist järku binaargraafide tuumad (binaargraa

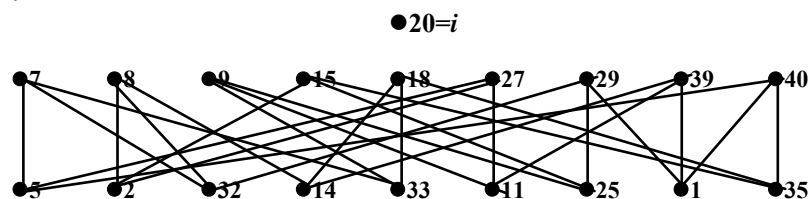
$g_{1-6}^{m=2} \subset SIB_A$  tuum:

f ilma seda moodustavate tippude servadeta):



● 6=j

$g_{20-22}^{m=2} \subset SIB_B$  tuum:



● 22=j



### 3.4. Kaks polünoomiaalset isomorfismituvastuse algoritmi

Isomorfismituvastuse polünoomiaalsega lahendusega on hakkama saanud serrellased Ashay Dharwadker jt [10] ja Blazej Podsiadlo [37]. Need mõlemad omavad *kanoonilisi väljundeid*. Kuna need algoritmid on üksikasjalikult kirjeldatud, siis esitame siin põgusalt vaid nende väljundeid.

Ashay Dharvadker jt [10] isomorfismituvastuse polünoomiaalne algoritm rajaneb märgimaatriksite  $W_A$  ja  $W_B$  formeerimisel, kus iga sagedusvektorite baasil eristatud tipuklassi  $V_{Ak}$  ja  $V_{Bk}$  raames toimub nende maatriksite ridade  $i$  ja veergude  $j$  ümberjärjestamine isomorfismi tuvastamise eesmärgil.

Märkimisväärsed on siin järgmised momendid:

- Algoritm rajaneb maatriksite  $W_A$  ja  $W_B$  ridade ja veergude klassikalisel ümberjärjestamisel, mis viib kindlalt isomorfismi tuvastamisele tippude üksühese vastavuse (substitutsioonide) fikseerimise täpsusega.
- Sümmeetriliste (transitiivsete, bi-, mono-, polüsümmeetriliste) graafide puhul peaks maatriksite ümberjärjestamine nõudma  $n!=NP$  sammu, kuid algoritm minimiseerib selle polünoomiaalseks  $P$ .
- Saadud märgimaatriksid, kanoonilised esitised, ise ei ole täielikud, need pole lõpuni dekomponeeritud.
- Algoritmi isomorfismituvastus kui ka polünoomiaalsus on üksikasjalikult tõestatud.
- Algoritmi käsitlemine ja tulemuste esitamine on eeskujulikult disainitud.

Algoritmi sisendiks on graafide seosmaatriksid.

**Näide 3.4.1.** Ashay Dharwadker jt algoritmi väljundid ühe 8-tipuliste graafide paari  $G_A$  ja  $G_B$  jaoks:

Graafi  $G_A$  märgimaatriks  $W_A$  (I väljund):

Matrix A	4	5	1	2	3	7	8	6
4	-0.1.0	-2.8.21	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7
5	-2.8.21	-0.1.0	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7
1	+2.5.7	+2.5.7	-0.1.0	-2.7.16	-2.7.16	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5
2	+2.5.7	+2.5.7	-2.7.16	-0.1.0	-2.7.16	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5
3	+2.5.7	+2.5.7	-2.7.16	-2.7.16	-0.1.0	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5
7	+2.5.7	+2.5.7	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5	-0.1.0	-2.7.16	-2.7.16
8	+2.5.7	+2.5.7	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5	-2.7.16	-0.1.0	-2.7.16
6	+2.5.7	+2.5.7	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5	-2.7.16	-2.7.16	-0.1.0

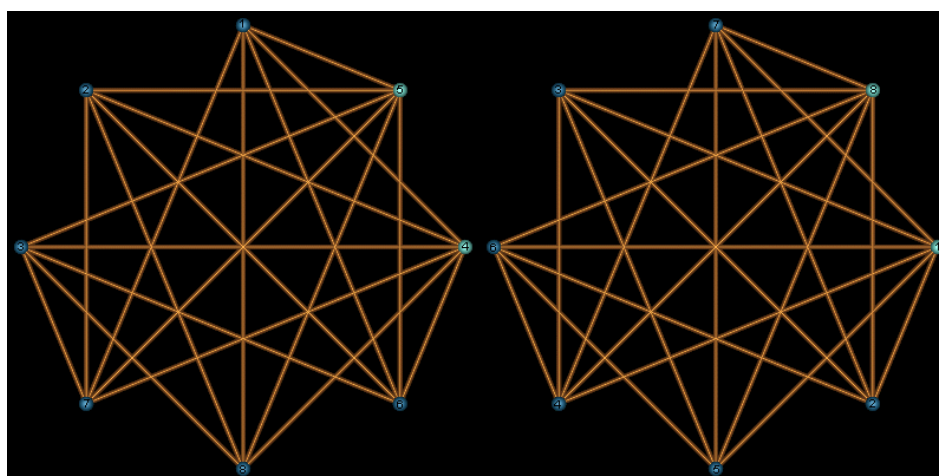
Graafi  $G_B$  märgimaatriks  $W_B$  (II väljund):

Matrix $B$	1	8	7	3	6	4	5	2
1	-0.1.0	-2.8.21	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7
8	-2.8.21	-0.1.0	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7	+2.5.7
7	+2.5.7	+2.5.7	-0.1.0	-2.7.16	-2.7.16	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5
3	+2.5.7	+2.5.7	-2.7.16	-0.1.0	-2.7.16	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5
6	+2.5.7	+2.5.7	-2.7.16	-2.7.16	-0.1.0	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5
4	+2.5.7	+2.5.7	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5	-0.1.0	-2.7.16	-2.7.16
5	+2.5.7	+2.5.7	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5	-2.7.16	-0.1.0	-2.7.16
2	+2.5.7	+2.5.7	+2.4.5	+2.4.5	+2.4.5	-2.7.16	-2.7.16	-0.1.0

Graafide  $G_A$  ja  $G_B$  substituioonitabel (III väljund):

Graph $G_A$	Graph $G_B$
4	1
5	8
1	7
2	3
3	6
7	4
8	5
6	2

Graafid  $G_A$  ja  $G_B$  on isomorfised (IV väljund):



See algoritm on põhjalik, selle alusel on substituioonide täpsusega tuvastatud ka kanooniliselt raskesti määratavate graafide mitte-isomorfismid (vt Näide 3.3.1).

\*

Blazej Podsiadlo isomorfismituvastuse algoritm on tema sõnul  $O(n^3)$ . Selle väljundiks on teatud suurimad väärtused <the biggest value>, mida ka graafi kanooniliseks esitiseks pidada võib. Nende välimus on vastuvõetavam, kui hästituntud 3-kuup-koodidell. Peale selle esitatakse ka hulk iseloomustavaid parameetreid nagu teede arv <paths>, automorfismide arv <automorphisms>, lahendamiseks kulutatud aeg <treal>.

**Näide 3.4.2.** Bazej Podsiadlo [37] algoritmi väljundeid, mis vastavad Ashay Dharwadker jt artiklis [10] esitatud näidetele <examp>:

<examp> <paths> <automorphisms> <treal> <the biggest value>

<7.1A> <120> <120> <0m0.014s> 555274755282898162809472913496

<7.1B> <120> <120> <0m0.019s> 555274755282898162809472913496

Result: **Isomorphic**

<7.2A> <120> <120> <0m0.021s> 10805731416208407477923644473991185184903230

<7.2B> <120> <120> <0m0.020s> 10805731416208407477923644473991185184903230

Result: **Isomorphic**

<7.3A> <138> <135> <0m0.080s>

49538603572805247777740094585549571942722126801483633069430609557497997929616569  
5336056

<7.3B> <137> <135> <0m0.086s>

49538603572805247777740094585549571942722126801483633069430609557497997929616569  
5336056

Result: **Isomorphic**

<7.8A> <1> <2> <0m0.191s>

69600325658926472221667080008746713668146791061252264141364537596668601347071669  
20510329885036595840342918872926941148691479059618393408947807324858975660236112  
0526675494159293310332512602

<7.8B> <2> <3> <0m0.217s>

69600325658926470059175649122591374718743888512570119534813873164925757077147813  
05228568388843713716865188561842593294496128281847460135789592203908404395481627  
6553574432763616146379938138

Result: **NOT Isomorphic**

<7.9A> <51864> <51840> <2m57.011s>

22225780697500964570965465780943174414148314289373329445279392422428964798469338  
21042719405754577875110179721773304399585144313227788979663142023016421504216767  
86803877725700271887954588059323245147959799837063854397147649717283678693799805  
73103179047818966387304387830423283405591144366704227236711352393085980534919893  
92714049494008725024901283676435179374075384660700164314246730083748936847275009

78533365931549076597669812253320077432965869201259728770624981891511746224042212  
00

<7.9B> <51848> <51840> <4m43.816s>

22225780697500964570965465780943174414148314289373329445279392422428964798469338  
21042719320881331690050361421236510444929896774705984357922978451371481916997803  
74219353382974233990523835794385357692050347712780681876020610457624122754550464  
11313074785929077002108862539314258558246216122361441977447436931023241071626921  
18737276609400559158153127807996209487334667099023709188011542186468673965530522  
21917772479448327901335088290550331691343285639201843291261639337656323940805736  
00

Result: **NOT Isomorphic**

Kommentaariid: **a)** Näide 7.8 vastab Weissfeileri ositi sümmeetrilisele ja tugevregulaarsele graafile **WEI** (meie Näide 3.2.1). **b)** Näide 7.9 vastab Netšepurenko jt tugevsümmeetrilistele ja tugevregulaarsetele graafidele **SIB** (meie Näide 3.3.2).

## 4. MIDA TEHA ULAMI HÜPOTEESIGA?

*Udami hüpotees* [38] on tuntud ka *rekonstrueerimisprobleemi* nime all. Ulami tõdemuse alusel kujutab rekonstrueerimine isomorfismi suhteid kahe graafi ja nende  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide vahel. Struktuurisemiootika aspektist on graafide taastatavuse probleem lahendatav tipuorbiitide ja nendele vastavate  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide isomorfismiklasside põhjal. Me näitame ka, et peale *tipu-rekonstruktsiooni* esineb nii *serva-* kui ka “*mitteserva*” rekonstruktsioonid. On võimalik moodustada ka “rekonstruktsioonide konstruktiivne süsteem”.

Rekonstrueerimisprobleem on olnud viimase poole sajandi graafiteooria üks uuritavamaid. Publikatsioonide arv on loendamatu, Google'is on seda loetletud rohkem kui isomorfismiprobleemi (1.360.000 korda). Kuid tunnustatud lahendusi on vaid mõne graafiklassi jaoks. Miks nii?

Me lähtume sellest, et graaf  $G$  on esitatud kanooniliselt *märgimaatriksi*  $W$  kujul, st  $G$  on esitatud orbiitide täpsusega ning kujutab endast isomorfsete graafide (ja ainult nende) täielikku invarianti. See tähendab, et kõik isomorfsed graafid  $\{G_1 \cong \dots \cong G_m \cong \dots \cong G_M\}_k$  moodustavad *isomorfismiklassi*  $G_k$  mis on esitatud *ekvivalentsete märgimaatriksite*  $W_1 \approx \dots \approx W_m \approx \dots \approx W_M$  näol.

Rekonstruktsiooniprobleemi klassikaline käsitlus, st *Udami hüpotees* on sõnastatud järgmiselt: „Olgu graafil  $G$   $p$  tippu  $v_i$  ja graafil  $H$   $p$  tippu  $u_i$ , kus  $p \geq 3$ . Kui iga  $i$  puhul on alamgraafid  $G_i = G \setminus v_i$  and  $H_i = H \setminus u_i$  isomorfsed, siis on graafid  $G$  ja  $H$  isomorfsed”.

Ilmselt oli Ulam huvitatud küsimusest: kas graafi  $G$  alamgraafide  $G \setminus v_i$  hulk sisaldab piisavat teavet graafi  $G$  enda kohta? Siin on sobiv korrata, et märgimaatriks  $W$  sisaldab seda teavet

Struktuurisemiootiline käsitlus:

- A. Isomorfsed graafid  $G$  ja  $H$  kujutavad endast vaid *ühete ja samasse isomorfismiklassi*, (ehk – *kliki*)  $G$  kuuluvat *graafipaari*  $G \& H \subset G$ , mis omavad *üht ja sama struktuuri*  $GS$  ning orbiite ja on esitatud ekvivalentsete märgimaatriksite  $W_G \approx W_H$  kujul.
- B. Kõik isomorfsed alamgraafid  $G \setminus v_i$  ja  $H \setminus u_i$  jaotuvad graafide  $G$  ja  $H$  *ühisteks alamstruktuurideks* ehk *isomorfismiklassedeks*  $(GS \setminus v_i)_{1, \dots}, (GS \setminus v_i)_{k, \dots}, (GS \setminus v_i)_K$ .

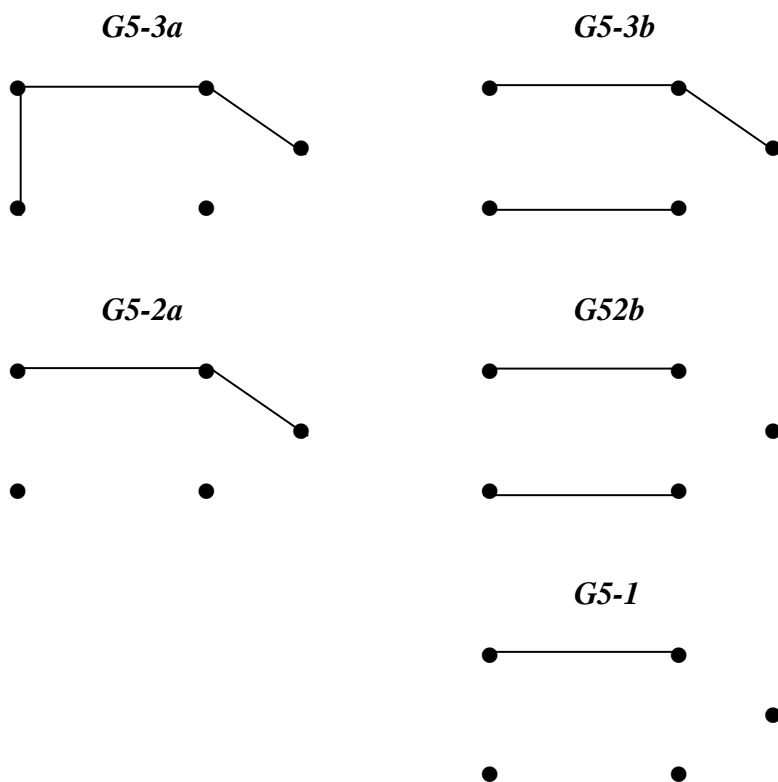
Vanameistri W. T. Tutte [39] järgi peaks rekonstruktsiooniprobleemi lahenduse otsingud algama just *isomorfismiklassidest*, mis struktuurisemiootilises käsitluses *isomorfismiklikke* tähendavad.

Alustagem aga Ulami hüpoteesi kummutamisest.

### 4.1. Ulami hüpoteesi kummutamine ja selle rehabiliteerimise katse

Ühel SERR'i järjekordsel seminaril 24. aprillil 2000. a. kummutas Ants Tauts selle hüpoteesi allpool esitatud kontranäite **G4-2a**, **G4-2b** ja **G4-1** põhjal. Hiljem õnnestus seda laiendada näidetega **G4-3a** ja **G4-3b**. Need kontranäited on avaldatud SERR'i teavikus „Põgusat teavet struktuurisemiootikast“ [40] 2004. aastal. Ilmselt ei ole Eestimaal peale Ants Tautsi ja John Teveti keegi teine rekonstruktsiooniprobleemi vastu huvi tundnud. Sellest hoolimata esitagem see kontranäide uuesti.

**Näide 4.1.1.** Ulami hüpoteesi serva-variandi kontranäide graafide  $G5-1$ ,  $G5-2a$ ,  $G5-2b$ ,  $G5-3a$  ja  $G5-3b$  alusel:



Kommentaariid:

- a) *Mitteisomorfsete* graafide  $G5-3a$  ja  $G5-3b$  mõlemad  $(G \setminus e_{ij})$ -alamgraafid  $G5-2a$  ja  $G5-2b$  on *ühised*.
- b) *Mitteisomorfsete* graafide  $G5-2a$  ja  $G5-2b$   $(G \setminus e_{ij})$ -alamgraaf  $G5-1$  on nendel *ühine*.

Kas nende kontranäidetega on Ulami hüpotees kummutatud? Esimesel juhul *ei ole*, sest: 1) graafi  $G5-3a$  muutmiseks graafiga  $G5-2a$  isomorfseks on *kaks* võimalust, kuid graafil  $G5-3b$  on selleks vaid *üks* võimalus; 2) graafi  $G5-3a$  muutmiseks graafiga  $G5-2b$  isomorfseks on vaid *üks* võimalus, kuid graafil  $G5-3b$  on selleks *kaks* võimalust. Teisel juhul *jah on*, sest graafid  $G5-2a$  ja  $G5-2b$  omavad kumbki parajasti *kaks* võimalust muuta neid isomorfseks graafiga  $G5-1$ .

**Hüpoteesi rehabiliteerimiskatse.** Olgu graafil  $G$   $p$  tippu  $v_i$  ja graafil  $H$   $p$  tippu  $u_i$ , kus  $p > 4$ . Kui iga serva  $e_{ij}$  puhul on alamgraafid  $G_{ij} = G \setminus e_{ij}$  and  $H_{ij} = H \setminus e_{ij}$  isomorfsed, siis on graafid  $G$  ja  $H$  isomorfsed.

Kommentaariid: a) Ulami hüpotees sai kummutatud teise kontranäite näol. Näib, et see kontranäide kehtib vaid siis, kui graafid omavad parajast 4 tippu. b) Asendame hüpoteesis tavapärase tingimuse  $p \geq 3$  uue tingimusega  $p > 4$ . c) Sellel pole mingit mõtet, sest, mittesidusaid tippe võib olla palju, ja esitatud teine juhtum siiski kummutab hüpoteesi.

**Järeldus.** Ignoreerida Ulami hüpoteesi sõnastust, kuid mitte selle mõtet, st: 1) Uurida suhteid isomorfsete graafide ja nende  $(G \setminus v_i)$ -ja  $(G \setminus e_{ij})$ -alamgraafide vahel; 2) „Paarisomorfismide“  $G \cong H$  asemel orienteeruda *isomorfismiklasside ehk -klikkidele*, st struktuurile.

## 4.2. Seosed isomorfsete graafide ja nende $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide vahel

Siin on sobiv alustada A. Titovi [11] poolt 1975 aastal tõestatud teoreemiga.

**Titovi teoreem** Kui graafi  $G$  kõik  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafid on isomorfsed, siis on automorfismi rühm  $AutG$  transitiiivne tippude hulgal  $V$ .

**Kommentaari:** See tähendab, et graaf  $G$  on *tippudest sümmeetriline* („transitiivne“), st *esineb ainult üks tipuorbiit*  $\Omega V_{k=1=K} = \Omega(v_{i=1}, \dots, v_{i=|V|})_{k=1=K}$  millele vastab parajasti üks  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide isomorfismiklass  $G_{k=1=K}$ .

Tipuorbiit  $\Omega V_k$  on rühma  $AutG$  automorfismide transitiiivsuspirkond graafi  $G$  tippude *ekvivalentsusklassi* näol, mis on esitatud dekomponeeritud märgimaatriksi  $W$  osamaatriksis  $W_k$ .

**Näide 4.2.1.** Graafi  $G_A$  märgimaatriks  $W_A$  (vt ka Näide 3.4.1):

$$A: -2.8.21; B: -2.7.16; \\ C: +2.4.5; D: +2.5.7$$

1	2	3	6	7	8	4	5	$i$	ABCD	$k$	12
0	-B	-B	C	C	C	D	D	1	0232	1	32
	0	-B	C	C	C	D	D	2	0232	1	32
		0	C	C	C	D	D	3	0232	1	32
			0	-B	-B	D	D	6	0232	1	32
				0	-B	D	D	7	0232	1	32
					0	D	D	8	0232	1	32
						0	-A	4	1006	2	60
							0	5	1006	2	60

**Kommentaari:** Orbiidid on tuvastatud: graafil  $G_A$  on kaks tipuorbiiti,  $(1,2,3,6,7,8)$  ja  $(4,5)$ .

Tipuorbiidi  $\Omega V$  ja  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide vahel kehtib järgmine seos:

**Propositsioon 4.2.1.** Igale tipuorbiidile  $\Omega V_k = \Omega(v_{i1}, \dots, v_{iq})_k$ ,  $k \in [1, K]$ , vastab isomorfismiklass  $G_k = \{(G \setminus v_i)_I \cong \dots \cong (G \setminus v_i)_q\}_k$ .

**Kommentaari:** Võime öelda, et tipuorbiidile  $\Omega V_k$  kui ekvivalentsusklassile vastab teatud  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide „isomorfismiklikk“, st kõik  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide paarid on omavahel isomorfsed.

Märgimaatrikseid  $W_A$  ja  $W_B$  nimetame *semiotiliselt ekvivalentseiks* kui nende binaarmärgid, sagedus- ja klassivektorid langevad kokku.

Kui märgimaatriksid  $W_A$  ja  $W_B$  on semiootiliselt ekvivalentsed,  $W_A \approx W_B$ , siis Prop. 3.1.2 järgi on vastavad graafid  $G_A$  ja  $G_B$  reeglina *isomorfsed*,  $G_A \cong G_B$ .

**Näide 4.2.2.** Graafi  $G_A$  esimesele tipuorbiidile vastava alamgraafi  $G_A \setminus v_{i=1}$  märgimaatriks  $W_{A(i=1)}$  ja alamgraafi  $G_A \setminus v_{i=2}$  märgimaatriks  $W_{A(i=2)}$ :

$$A: -2.7.16; B: -2.6.12; C: -0.2.0; \\ D: +2.4.5; E: +2.5.7.$$

1	6	7	8	2	3	4	5	$i$	ABCDE	$k$	123
0	C	C	C	C	C	C	C	1	00700	1	000
	0	-B	-B	D	D	D	D	6	02140	2	004
		0	-B	D	D	D	D	7	02140	2	004
			0	D	D	D	D	8	02140	2	004
			0	-A	E	E		2	10132	3	032
				0	E	E		3	10132	3	032
					0	-A		4	10132	3	032
							0	5	10132	3	032

2	6	7	8	1	3	4	5	$i$	ABCDE	$k$	123
0	C	C	C	C	C	C	C	2	00700	1	000
	0	-B	-B	D	D	D	D	6	02140	2	004
		0	-B	D	D	D	D	7	02140	2	004
			0	D	D	D	D	8	02140	2	004
			0	-A	E	E		1	10132	3	032
				0	E	E		3	10132	3	032
					0	-A		4	10132	3	032
							0	5	10132	3	032

**Kommentaari:** Märgimaatriksite semiootilisest ekvivalentsusest järeldub, et graafi  $G_A$  esimesele tipuorbiidile vastavad  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafid  $G_A \setminus v_{i=1}$  ja  $G_A \setminus v_{i=2}$  on *isomorfsed*, st nad kuuluvad esimesse *isomorfismiklassi*  $G_{k=1}$ . Sellesse klassi kuuluvad ka  $G_A \setminus v_{i=3}$ ,  $G_A \setminus v_{i=6}$ ,  $G_A \setminus v_{i=7}$  ja  $G_A \setminus v_{i=8}$ .

**Näide 4.2.3.** Graafi  $G_A$  teisele tipuorbiidile vastava alamgraafi  $G_A \setminus v_{i=4}$  märgimaatriks  $W_{A(i=4)}$  ja alamgraafi  $G_A \setminus v_{i=5}$  märgimaatriks  $W_{A(i=5)}$ :

$$A: -2.6.11; B: -0.2.0; \\ C: +2.3.3; D: +2.5.7.$$

5	4	1	2	3	6	7	8	$i$	ABCD	$k$	123
0	B	D	D	D	D	D	D	5	0106	1	006
	0	B	B	B	B	B	B	4	0700	2	000
		0	-A	-A	C	C	C	1	2131	3	103
			0	-A	C	C	C	2	2131	3	103
				0	C	C	C	3	2131	3	103
					0	-A	-A	6	2131	3	103
						0	-A	7	2131	3	103
							0	8	2131	3	103

4	5	1	2	3	6	7	8	$i$	ABCD	$k$	123
0	B	D	D	D	D	D	D	4	0106	1	006
	0	B	B	B	B	B	B	5	0700	2	000
		0	-A	-A	C	C	C	1	2131	3	103
			0	-A	C	C	C	2	2131	3	103
				0	C	C	C	3	2131	3	103
					0	-A	-A	6	2131	3	103
						0	-A	7	2131	3	103
							0	8	2131	3	103

**Kommentaari:** a) Märgimaatriksite semiootilisest ekvivalentsusest järeldub, et graafi  $G_A$  teisele tipuorbiidile vastavad  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafid  $G_A \setminus v_{i=4}$  ja  $G_A \setminus v_{i=5}$  on *isomorfsed*, st nad moodustavad teise *isomorfismiklassi*  $G_{k=2}$ . b) Märgimaatriksite mitte-ekvivalentsusest (näited 4.2.2 ja 4.2.3) järeldub esimese isomorfismiklassi  $G_{k=1}$   $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide ja teise isomorfismiklassi  $G_{k=2}$   $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide *mitte-isomorfism*.

**Korollaar 4.2.1.** Tõepoolest, igale tipuorbiidile  $\Omega V_k$ ,  $k \in [1, K]$ , vastab parajasti üks  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide *isomorfismiklass*  $G_k$ .

**Näide 4.2.4.** Graafi  $G_B$  märgimaatriks  $W_B$  (vt ka Näide 3.4.1):

$$A: -2.8.21; B: -2.7.16; \\ C: +2.4.5; D: +2.5.7$$

2	3	4	5	6	7	1	8	$i$	ABCD	$k$	12
0	C	-B	-B	C	C	D	D	2	0232	1	32
	0	C	C	-B	-B	D	D	3	0232	1	32
		0	-B	C	C	D	D	4	0232	1	32
			0	C	C	D	D	5	0232	1	32
				0	-B	D	D	6	0232	1	32
					0	D	D	7	0232	1	32
						0	-A	1	1006	2	60
							0	8	1006	2	60

**Kommentaari:** Märgimaatriksite  $W_A$  (näide 4.2.1) ja  $W_B$  semiootilisest ekvivalentsusest järeldub *isomorfism*  $G_A \cong G_B$ .



Isomorfismituvastus substitutsioonide tasemel ei tuvasta küll orbiite, kuid substitutsioonid jäävad paratamatult orbiitide raamesse.

**Propositsioon 4.2.2.** Graafide  $G_A$  ja  $G_B$  isomorfsusega kaasneb ka *tipuorbiitide isomorfism*,  $(\Omega V_k)_A \cong (\Omega V_k)_B$ ,  $k \in [1, K]$ .

Kommentaari: Orbiit  $\Omega V_k$  võib olla ka ühe-elementiline. Seda nimetame *triviaalseks orbiidiks*.

**Propositsioon 4.2.3.** Isomorfsete graafide  $G_A$  ja  $G_B$  tipuorbiitide isomorfismiga  $(\Omega V_k)_A \cong (\Omega V_k)_B$ ,  $k \in [1, K]$ , kaasneb nendele orbiitidele vastavate  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide *isomorfismiklasside isomorfism*,  $(G_k)_A \cong (G_k)_B$ ,  $k \in [1, K]$ , kus  $(G \setminus v_i)_A \subset (G_k)_A$  ja  $(G \setminus v_i)_B \subset (G_k)_B$ .

Kommentaari: Isomorfsete graafide tipuorbiitide isomorfismiga  $(\Omega V_k)_A \cong (\Omega V_k)_B$ , kaasneva  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide *isomorfismiklasside isomorfism*  $(G_k)_A \cong (G_k)_B$  kujutab endast sisuliselt isomorfismiklasside ühendit  $(G_k)_A \cup (G_k)_B$ , kus peale *klassisiseste isomorfismide* esinevad ka *klassidevahelised isomorfismid*  $(G \setminus v_i)_A \cong (G \setminus v_i)_B$ .

Vaatleme graafiga  $G_A$  isomorfse graafi  $G_B$   $(G \setminus v_i)$ -alamgraafe.

**Näide 4.2.5.** Graafi  $G_B$  esimesele tipuorbiidile vastava alamgraafi  $G_B \setminus v_{i=3}$  märgimaatriks  $W_{B(i=3)}$  ja alamgraafi  $G_B \setminus v_{i=6}$  märgimaatriks  $W_{B(i=6)}$ :

$$A: -2.7.16; B: -2.6.12; C: -0.2.0; \\ D: +2.4.5; E: +2.5.7.$$

3	2	4	5	1	6	7	8	i	ABCDE	k	123	6	2	4	5	1	3	7	8	i	ABCDE	k	123
0	C	C	C	C	C	C	C	3	00700	1	000	0	C	C	C	C	C	C	C	6	00700	1	000
	0	-B	-B	D	D	D	D	2	02140	2	004		0	-B	-B	D	D	D	D	2	02140	2	004
		0	-B	D	D	D	D	4	02140	2	004			0	-B	D	D	D	D	4	02140	2	004
			0	D	D	D	D	5	02140	2	004				0	D	D	D	D	5	02140	2	004
				0	E	E	-A	1	10132	3	032					0	E	E	-A	1	10132	3	032
					0	-A	E	6	10132	3	032						0	-A	E	3	10132	3	032
						0	E	7	10132	3	032							0	E	7	10132	3	032
							0	8	10132	3	032								0	8	10132	3	032

Kommentaari: **a)** Täpselt sama pilt mis graafi  $G_A$  esimesele tipuorbiidile vastavate  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide puhul, kuigi orbiitideks jaotumine erineb. **b)** Seega esimesse *isomorfismiklassi*  $G_{k=1}$  kuuluvad siin  $G_B \setminus v_{i=2}$ ,  $G_B \setminus v_{i=3}$ ,  $G_B \setminus v_{i=4}$ ,  $G_B \setminus v_{i=5}$ ,  $G_B \setminus v_{i=6}$  ja  $G_B \setminus v_{i=7}$ . **b)** Isomorfismist  $G_A \cong G_B$  järelduvad *klassidevahelised isomorfismid*:  $(G \setminus v_{i=1})_A \cong (G \setminus v_{i=2})_B$ ,  $(G \setminus v_{i=2})_A \cong (G \setminus v_{i=3})_B$ ,  $(G \setminus v_{i=3})_A \cong (G \setminus v_{i=4})_B$ ,  $(G \setminus v_{i=6})_A \cong (G \setminus v_{i=5})_B$ ,  $(G \setminus v_{i=7})_A \cong (G \setminus v_{i=6})_B$ ,  $(G \setminus v_{i=8})_A \cong (G \setminus v_{i=7})_B$ .

**Korollaar 4.2.2.** Tõepoolest, kui graafid  $G_A$  ja  $G_B$  on isomorfsed, siis esineb iga isomorfse isomorfismiklassi  $(G_k)_A \cong (G_k)_B$  puhul *klassidevahelised isomorfismid*  $(G \setminus v)_{kA} \cong (G \setminus v)_{kB}$ .

**Näide 4.2.6.** Tippudest sümmeetriliste graafide  $PRA_A$  ja  $PRA_B$  (vt Näide 3.2.2)  $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide märgimaatriksid: 1) Graafi  $PRA_A$   $(G \setminus v_i)$ -alamgraafi  $PRA_A \setminus v_{i=10}$  märgimaatriks; 2) Graafi  $PPA_B$   $(G \setminus v_i)$ -alamgraafi  $PRA_B \setminus v_{i=10}$  märgimaatriks. Nendel on ühised binaarmärgid:

$$A: -4.15.29; B: -3.8.10; C: -3.7.8; D: -3.6.7; E: -3.6.6; F: -3.5.5; G: -3.4.3; \\ H: -2.4.4; I: -2.3.2; J: -0.2.0; \\ K: +2.3.3; L: +2.4.6; M: +3.6.9; N: +3.8.16;$$

10	6	13	9	5	14	1	17	11	12	7	8	15	16	3	4	19	20	2	18	i	ABCDEFGHIJKLMN	Orb
0	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	10	000000000190000	1
0	H	C	L	N	H	I	F	F	L	L	H	H	H	H	D	D	N	D	6	001302061	10302	2
0	C	N	L	I	H	F	F	H	H	L	L	D	D	H	H	D	N	13	001302061	10302	2	
0	I	I	M	M	K	K	D	D	D	D	H	H	H	H	I	I	9	002400044	12020	3		
0	H	N	B	D	D	L	L	H	H	H	H	D	D	H	I	5	010400062	10302	4			
0	B	N	D	D	H	H	L	L	D	D	H	H	I	H	14	010400062	10302	4				
0	I	H	H	H	H	D	D	L	L	D	D	L	E	1	010410052	10311	5					
0	H	H	D	D	H	H	D	D	L	L	E	L	17	010410052	10311	5						
0	K	I	B	B	I	M	H	M	H	I	I	11	020202044	12020	6							
0	B	I	I	B	H	M	H	M	I	I	12	020202044	12020	6								
0	L	N	H	N	H	B	I	H	D	7	020300062	10302	7									
0	H	N	H	N	I	B	H	D	8	020300062	10302	7										
0	L	I	B	H	N	D	H	15	020300062	10302	7											
0	B	I	N	H	D	H	16	020300062	10302	7												
0	L	I	B	L	G	3	020300152	10311	8													
0	B	I	L	G	4	020300152	10311	8														
0	L	G	L	19	020300152	10311	8															
0	G	L	20	020300152	10311	8																
0	A	2	100310234	10301	9																	
0	18	100310234	10301	9																		

10	6	13	5	14	1	19	9	11	12	7	16	8	15	4	20	3	17	2	18	i	ABCDEFGHIJKLMN	Orb
0	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	10	000000000190000	1
0	H	L	N	H	I	F	C	F	L	H	L	H	H	D	H	D	N	D	6	001302061	10302	2
0	N	L	I	H	C	F	F	H	L	H	L	D	H	D	H	D	N	13	001302061	10302	2	
0	H	N	D	I	D	D	L	H	L	H	H	D	H	B	H	I	5	010400062	10302	3		
0	D	N	D	I	D	H	L	H	L	D	H	B	H	I	H	14	010400062	10302	3			
0	D	M	H	H	H	B	H	D	L	D	L	I	L	E	1	010410052	10311	4				
0	H	M	H	B	H	D	H	D	L	I	L	E	L	19	010410052	10311	4					
0	K	K	D	I	B	D	H	H	M	I	I	9	011301044	12020	5							
0	K	I	D	D	B	H	H	M	H	I	I	11	011301044	12020	5							
0	B	B	I	I	M	M	H	H	I	I	12	020202044	12020	6								
0	H	L	N	H	I	N	D	H	D	7	020300062	10302	7									
0	N	L	I	H	D	N	D	H	16	020300062	10302	7										
0	H	N	B	H	I	H	D	8	020300062	10302	8											
0	B	N	I	H	D	H	15	020300062	10302	8												
0	I	L	B	L	G	4	020300152	10311	9													
0	B	L	G	L	20	020300152	10311	9														
0	D	L	G	3	020300152	10311	10															
0	G	L	17	020300152	10311	10																
0	A	2	100310234	10301	11																	
0	18	100310234	10301	11																		

**Kommentaariid:** a) Polüsümmeetriliste graafide  $(Gv_i)$ -alamgraafid on reeglina *ositi sümmeetrilised*. b)  $PRA_A$  alamgraafil  $PPA_A \setminus v_{i=10}$  ja  $PRA_B$  alamgraafil  $PRA_B \setminus v_{i=10}$  on ühised binaarmärgid kuid nende märgimaatriksid ei ole semiootiliselt ekvivalentsed. Seega on  $PRA_A \setminus v_{i=10}$  ja  $PRA_B \setminus v_{i=10}$  *mitte-isomorfsed*. c)  $PRA_A$  ja  $PRA_B$  tipusümmeetriast järeldub, et, kõik  $(GP_A \setminus v_i)$ -alamgraafid moodustavad *isomorfismiklassi* ja kõik  $(GP_B \setminus v_i)$ -alamgraafid moodustavad samuti *isomorfismiklassi*.

**Korollaar 4.2.3.** Alamgraafide  $PRA_A \setminus v_{i=10}$  ja  $PRA_B \setminus v_{i=10}$  mitte-isomorfsusest järeldub graafide  $PRA_A$  ja  $PRA_B$  *mitte-isomorfsus*.

### 4.3. Graafi suurimad alam- ja väikseimad ülemstruktuurid

Vaadeldgem elementaarseid operatsioone servadega: 1) Graafi *serva eemaldamisel*  $G \setminus e_{ij}$  saame graafi  $G$  suurima alamgraafi  $G^{sub}$ ; 2) Graafile *serva lisamisel*  $G \cup e_{ij}$  saame graafi  $G$  väikseima ülemgraafi  $G^{sup}$ .

**Definitsioon 4.3.1.** Suurimaid alamgraafe  $G^{sub}$  ja väiksemaid ülemgraafe  $G^{sup}$  nimetame graafi  $G$  *naabergraafideks*  $G^{adj}$ .

**Propositsioon 4.3.1.** Kui graafi  $G$  binaarorbiidile  $\Omega R_n = \Omega(r_{ij1}, \dots, r_{ijq})_n$  rakendada serva-operatsioonid  $f$  on disjunktiivselt  $\{(f_{ij})_1 \vee \dots \vee (f_{ij})_q\}_n$ , siis moodustavad saadud disjunktiivsed naabergraafid isomorfismiklassi  $G_n = \{(G^{adj}_n)_1 \cong \dots \cong (G^{adj}_n)_q\}$ .

Isomorfismiklassi  $G_n$  kõik graafid  $G^{adj}$  omavad üht ja sama struktuuri  $GS$  ning kujutavad endast graafi  $G$  *naaberstruktuuri*  $GS^{adj}$ , mis on esitatav samuti *märgimaatriksite*  $W^{adj}$  kujul.

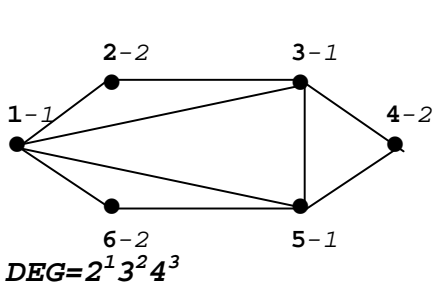
Binaar(-)orbiitide (st “mitte-serva” orbiitide) ja binaar(+)orbiitide (st servaorbiitide) eritamiseks tähistame esimesi  $n^- \in \{1, \dots, N\}$  ja servaorbiite  $n^+ \in \{1, \dots, N^+\}$ , kus  $N + N^+ = N$ .

**Definitsioon 4.3.2.** Serva-operatsioon, mis disjunktiivselt muudab struktuuri  $GS$  selle naaberstruktuuriks  $GS^{adj}$  nimetagem *morfismiks*  $F, F: GS \rightarrow GS^{adj}$ .

Seega, esineb morfism  $F_{n^-}: GS \rightarrow GS^{sup}_{n^-}$ , mis indutseerib  $GS$  binaar(-)orbiidi  $\Omega R_{n^-}$  baasil  $GS$  naaber-ülemstruktuuri  $GS^{sup}_{n^-}$  ja morfism  $F_{n^+}: GS \rightarrow GS^{sub}_{n^+}$  mis indutseerib  $GS$  binaar(+)orbiidi  $\Omega R_{n^+}$  baasil  $GS$  naaber-alamstruktuuri  $GS^{sub}_{n^+}$ .

**Näide 4.3.1:** Graaf-struktuur  $GS.37(6.9.4)$  [41] (Graafiatlase [42] G163) ja selle *naaber-ülem* ja *naaber-alam* struktuurid:

$A: -2.4.5; B: -2.3.2; C: +2.3.3; D: +2.4.5.$



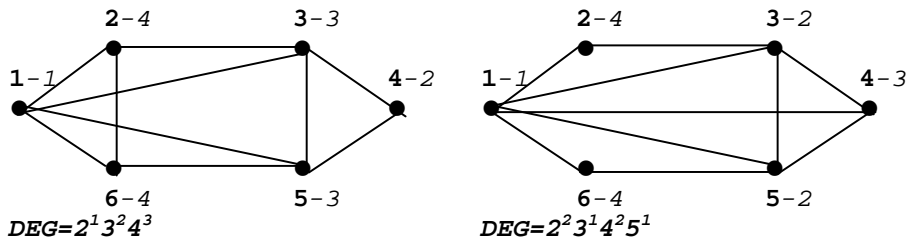
						$k$			
						$i$	ABCD		12
	1	1	1		2	2	2		
/	1	3	5		2	4	6		
	0	D	D		C	-A	C	1	1022
		0	D		C	C	-A	3	1022
			0		-A	C	C	5	1022
					0	-B	-B	2	1220
						0	-B	4	1220
							0	6	1220

Naaberstruktuuride ja morfismide  $F_n$  (üleminekute) karakteristikud:

$0$	$1$	$1$	$2$
$GS$	$S^{adj}_n$		
	$GS^{sup}_{n^-}$	2	29
$GS.37$	$k.k'(p)$	2.2 (-B)	1.2 (-A)
	$PF^{sup}_{n^-}$	3/6	3/6
	$GS^{sub}_{n^+}$	4	72
$GS.37$	$k.k'(p)$	1.1 (+D)	1.2 (+C)
	$PF^{sub}_{n^+}$	3/9	6/9

$GS_n^{sup}$  ja  $GS_{n+}^{sub}$  on naaberstruktuuride järjekorranumbrid 6-tipuliste graafide süsteemis (Näide 4.4.2);  $k, k'$  – binaarorbiiti sisaldava osamaatriksi  $W_{k,k'}$  indeks, kus ( $p$ ) täpsustab binaarorbiidi selles;  $PF_n$  – binaarorbiidi osakaal ehk *esinemise tõenäosus*.

Graafi  $GS.37(6.9.4)$  naaber ülemstruktuurid binaarorbiidi  $-B$  järgi,  $GS_n^{sup}{}_{n=-B}$ , ( $GS.29(6.10.11)$ , Graafiatlase G184) ja binaarorbiidi  $-A$  järgi,  $GS_n^{sup}{}_{n=-A}$ , ( $GS.30(6.10.12)$ , Graafiatlase G180) ja nende maatriksid  $W^*$ :



A: -2.5.8; B: -2.4.5; C: -2.3.2;  
D: +2.3.3; E: +2.4.5.

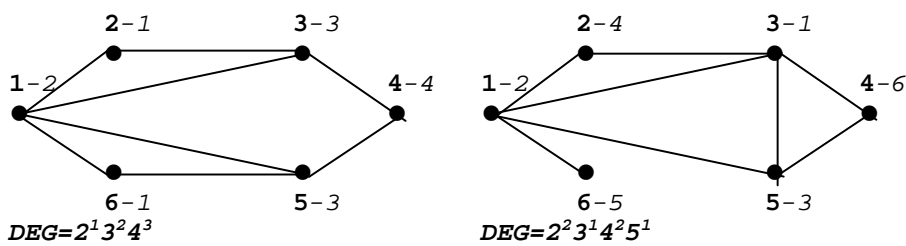
A: -2.4.5; B: -2.3.2;  
C: +2.3.3; D: +2.4.6; E: +2.5.8.

1	2	3	3	4	4	k						
1	4	3	5	2	6	i	ABCDE	1234				
0	-B	E	E	E	E	1	01004	1	0022			
0	D	D	-C	-C	4	01220	2	0020				
0	E	D	-A	3	10022	3	1111					
0	-A	D	5	10022	3	1111						
0	D	2	10121	4	1011							
0	6	10121	4	1011								

1	2	2	3	4	4	k						
1	3	5	4	2	6	i	ABCDE	1234				
0	E	E	D	C	C	1	00212	1	0212			
0	D	D	C	-A	3	10121	2	1111				
0	D	-A	C	5	10121	2	1111					
0	-A	-A	4	20030	3	1200						
0	-B	2	21200	4	1100							
0	6	21200	4	1100								

Kommentaariid: Kõik lähtegraafi binaarorbiidile  $-B$  vastavad naaber-ülem-graafid,  $G_n^{sup}{}_{n=-B}$ , on *isomorfsed* ja kõik lähtegraafi binaarorbiidile  $-A$  vastavad naaber-ülem-graafid,  $G_n^{sup}{}_{n=-A}$ , on samuti *isomorfsed*.

Graafi  $GS.37(6.9.4)$  naaber alamstruktuurid binaarorbiidi  $+D$  järgi,  $GS_n^{sup}{}_{n=+D}$ , ( $GS.72(6.8.18)$ , Graafiatlase G148) ja binaarorbiidi  $+C$  järgi,  $GS_n^{sup}{}_{n=+C}$ , ( $GS.76(6.8.22)$ , Graafiatlase G137) ja nende maatriksid  $W^*$ :



A: -2.4.4; B: -2.3.2;  
C: +2.3.3; D: +3.4.4.

A: -3.5.6; B: -2.4.5; C: -2.3.2;  
D: +1.2.1; E: +2.3.3; F: +2.4.5.

1	1	2	3	3	4	k						
2	6	1	3	5	4	i	ABCD	1234				
0	-B	C	C	-B	-B	2	0320	1	0110			
0	C	-B	C	-B	6	0320	1	0110				
0	C	C	-A	1	1040	2	2020					
0	-A	D	3	1121	3	1101						
0	D	5	1121	3	1101							
0	4	1202	4	0020								

1	2	3	4	5	6	k						
3	1	5	2	6	4	i	ABCDEF	123456				
0	F	F	E	-C	E	3	001022	1	011101			
0	E	E	D	-B	1	010121	2	101110				
0	-B	-C	E	5	011021	3	110001					
0	-C	-C	2	012020	4	110000						
0	-A	6	103100	5	010000							
0	4	111020	6	101000								

Kommentaariid: Kõik lähtegraafi binaarorbiidile  $+D$  vastavad naaber-alam-graafid,  $G^{sup}_{n+=D}$ , on *isomorfsed* ja kõik lähtegraafi binaarorbiidile  $+C$  vastavad naaber-alam-graafid,  $G^{sup}_{n+=C}$ , on samuti *isomorfsed*.

**Korollaar 4.3.1.** Eksisteerigu graafiga  $GS.37A$  isomorfne graaf  $GS.37B$ . Siis vastavalt Prop. 4.2.3 esineb iga binaarorbiitide paari  $(\mathcal{OR}_n)_A$  ja  $(\mathcal{OR}_n)_B$  raames,  $n \in [1, N]$ , vastavate naabergraafide isomorfismiklasside isomorfism  $(G_n)_A \cong (G_n)_B$ , st isomorfismide  $(G^{adj}_n)_A \cong (G^{adj}_n)_B$  klass.

Kommentaariid: Meie juba t e a m e, et isomorfsetel graafidel  $G_A \cong G_B \cong G_C \cong \dots$  on isomorfsed naabergraafid  $(G^{adj}_n)_A \cong (G^{adj}_n)_B \cong (G^{adj}_n)_C \cong \dots$ .

Graafi  $G$  ja sellega isomorfsete graafide erinevad naaberstruktuurid  $GS^{adj}_n$ ,  $n \in [1, N]$ , ei ole reeglina omavahel isomorfsed.

**Propositsioon 4.3.2.** Kui morfismid  $F_n: GS \rightarrow GS^{adj}_n$  on disjunktiivselt  $F_1 \vee \dots \vee F_n \vee \dots \vee F_N$  rakendatud  $GS$  binaarorbiitidele  $\mathcal{OR}_1, \dots, \mathcal{OR}_n, \dots, \mathcal{OR}_N$ , siis me ütleme et struktuur  $GS$  on *dekomponeeritud* selle naaberstruktuurideks  $GS^{adj}_1, \dots, GS^{adj}_n, \dots, GS^{adj}_N$ .

Kommentaariid: a) Mitte-dekomponeeritavad struktuure ei esine. b) Meie juba t e a m e, et naaberstruktuur  $GS^{adj}_n$  tähendab *isomorfismiklassi*  $G^{adj}_n$ , mis võib sisaldada isomorfsed naabergraafe  $(G^{adj}_n)_1 \cong (G^{adj}_n)_2 \cong (G^{adj}_n)_3 \cong \dots \subseteq GS^{adj}_n \cong G^{adj}_n$ ,

#### 4.4. Taastatavus: graafi (de)komponeerimise ja rekonponeerimise probleem

Graaf struktuuri  $GS$  *rekonstruktsiooniks* peame siin struktuuri taastatavust selle naaberstruktuuride  $GS^{adj}$  baasil.

**Propositsioon 4.4.1.** Kui struktuur  $GS$  on *dekomponeeritud* oma naaber-alamstruktuurideks  $GS^{sub}_1, \dots, GS^{sub}_n, \dots, GS^{sub}_N$ , st suurimateks alamstruktuurideks  $(GS \setminus e_{ij})_n$ , siis nende *ühend*  $\cup (GS \setminus e_{ij})_n$ ,  $n^+ \in [1, N^+]$ , *rekomponeerib* ehk *rekonstrueerib* ehk *taastab* struktuuri  $GS$ .

Kommentaariid:

1. Olgu graaf  $G$  kujutatav seosmaatriksi  $E$  näol. Dekomponeerimine naaber-alamstruktuurideks tähendab Prop. 4.3.2 alusel iga seos- ehk binaar(+)-orbiidi  $\mathcal{OR}_n$  raames ühe seose rangelt disjunktiivset eemaldamist,  $(E \setminus e_{ij})_1 \vee \dots \vee (E \setminus e_{ij})_n \vee \dots \vee (E \setminus e_{ij})_N$ . See tähendab, et igas seosmaatriksis  $E_n$  on üks seos puudu. Järelikult, nende ühend  $(E \setminus e_{ij})_1 \cup \dots \cup (E \setminus e_{ij})_n \cup \dots \cup (E \setminus e_{ij})_N = E$ ,  $E \cong G$ .
2. Põhimõtteliselt kehtib (1) ka siis, kui graaf on esitatud naabertippude nimekirja  $L$  alusel,  $(L \setminus e_{ij})_1 \cup \dots \cup (L \setminus e_{ij})_n \cup \dots \cup (L \setminus e_{ij})_N = L$ ,  $L \cong G$ .
3. Kui me tahame võrrelda omavahel graafe  $G_A$  ja  $G_B$ , siis esimene sammuks on nende kujutamine kanooniliselt, st märgimaatriksite  $W_A$  ja  $W_B$  kujul. Kui need on semantiliselt ekvivalentset,  $W_A \approx W_B$  siis Prop. X põhjal teame, et graafid on isomorfsed,  $G_A \cong G_B$ . See tähendab, et neil on *võrdne arv*  $N$  *võrdsete suurustega*  $card|\mathcal{OR}_n|$  binaarorbiite  $\mathcal{OR}_n$ , mis kummaski maatriksis  $W_A$  ja  $W_B$  asuvad *võrdsetel positsioonidel*. Nende võimalik erinev numbrdamine ei mängi siin mingit rolli, sest meie opereerime üheselt määratud orbiitide  $(\mathcal{OR}_n)_A$  ja  $(\mathcal{OR}_n)_B$  elementidega  $(e_n)_A$  ja  $(e_n)_B$ . Seega, neil on *ühesugune arv*  $N$  *ühesuguseid naaberstruktuure*  $GS^{adj}_n$ ,  $n \in [1, N]$ , st isomorfsed alamgraafe  $(G_A \setminus e_n) \cong (G_B \setminus e_n)$  ja isomorfsed ülemgraafe  $(G_A \setminus e_n) \cong (G_B \setminus e_n)$ .

4. Kui isomorfismiklassi  $\Gamma$  kuuluv graaf  $G_A$  on *rekomponeeritav* ehk *rekonstrueeritav* ehk *taastatav* oma naaberstruktuuride  $GS^{adj}_n$  baasil, siis on seda ka kõik ülejäänud samasse isomorfismiklassi  $\Gamma$  kuuluvad graafid  $G_B, G_C, G_D, \dots$ .
5. Seega, Ulami hüpotees on õige, kuid selle püstitus on *destruktiivne* ning kanooniliselt, st märgimaatriksite kujul esitatud graafide baasil on selle hüpoteesi sõna-sõnaline mahamängimine *mõttetu tegevus*.

**Propositsioon 4.4.2.** Kui struktuur  $GS$  on *komponeeritud* oma naaber-ülemstruktuurideks  $GS^{sup}_1, \dots, GS^{sup}_m, \dots, GS^{sup}_N$ , st väikseimaiks ülemstruktuurideks  $(GS \cup e_{ij})_n$ , siis nende *ühisosa*  $\cap (GS \cup e_{ij})_n, n^- \in [1, N^-]$ , *rekomponeerib* ehk *rekonstrueerib* ehk *taastab* struktuuri  $GS$ .

Kommentaari: Ühisosa kehtib siin ka vastavate seosmaatriksite plaanis,  $\cap (E \cup e_{ij})_n = E, E \equiv G$ .

**Korollaar 4.4.1.** Kui struktuur  $GS$  on oma binaarorbiitide  $\Omega R_n, n \in [1, N]$ , baasil *dekomponeeritav* ja *komponeeritav* oma naaberstruktuurideks,  $F_n: GS \rightarrow GS^{adj}_n$ , siis on see *taastatav* nii *naaber-alamstruktuuride* ühendi  $\cup GS^{sub}_n, n^+ \in [1, N^+]$ , kui ka *naaber-ülemstruktuuride* ühisosa  $\cap (GS \cup e_{ij})_n, n^- \in [1, N^-]$ , näol.

Kommentaari: a) *Servadest sümmeetriline* graafil  $G$  on vaid üks naaberalamstruktuur  $GS^{sub}_{n=1=N}$ . Kui see graaf on ka veel *bisümmeetriline*, siis on sellel ka vaid üks naaberülemstruktuuri  $GS^{sup}_{n=1=N}$ . b) Ulami hüpoteesi sõnastuse järgi oleksime pidanud rääkima siin kahest isomorfsest,  $p$  serva omavast graafist  $G_A$  ja  $G_B$  ning nende  $p$  isomorfsest alamgraafi paarist  $G_A^{sub}_p \cong G_B^{sub}_p, p \in [1, P]$ .

On võimalik formuleerida ka testsugune võimalus.

**Propositsioon 4.4.3.** Morfism  $F$  on *pöörduv* – igal  $GS$  naaberstruktuuril  $GS^{adj}$  on teatud “*vastandorbii*”  $\Omega R$ , millele rakendatud vastand-morfism  $F$  taastab lähtestruktuuri  $GS, F: GS^{adj} \rightarrow GS$ .

Kommentaari: a) Morfismi pöörduvus kehtib nii alam-  $GS^{sub}_{n^+}$  kui ka ülemstruktuuride  $GS^{sup}_{n^-}$  korral. b) Struktuur  $GS$  on taastatav ka iga oma naaberstruktuuri  $GS^{adj}$  puhul eraldi. Struktuuri  $GS$  kõikide naabrite hulgal  $\{GS^{adj}_n\}$  esineb teatud *vastandmorfismide hulk*  $\{F'_n\}, n \in [1, N]$ , niisugune et iga disjunktiivne element  $(F'_1: GS^{adj}_1 \rightarrow GS) \vee \dots \vee (F'_N: GS^{adj}_N \rightarrow GS)$  taastab struktuuri  $GS$  *separaatselt*.

**Korollaar 4.4.2.** Iga struktuuri  $GS$  iga orbiidi  $\Omega R_n$  puhul esinev morfism  $F$  määrab ka vastavale naaberstruktuurile  $GS^{adj}, F: GS \rightarrow GS^{adj}$  ülemineku ehk *morfismi tõenäosuse*  $PF = \text{card}|\Omega R_n| : \text{card}|\mathbb{R}|$ , kui orbiidi võimsuse ja vastavate tipupaaride arvu suhe.

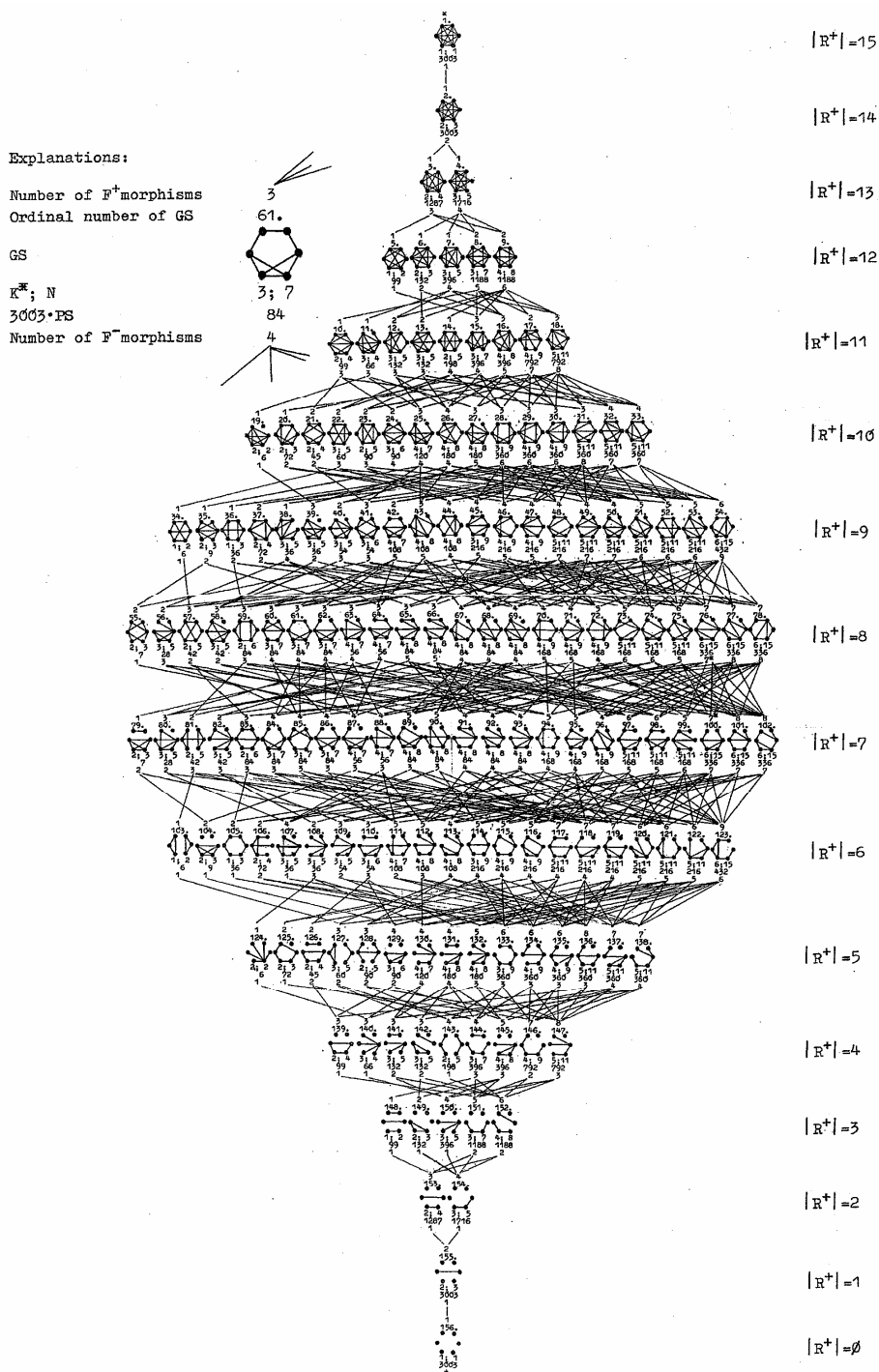
Kommentaari: Põhimõtteliselt on kõik struktuurid  $GS$  ühtlasi ka teatud struktuuri naaber-struktuurid  $GS^{adj}$ .

Ulami hüpoteesi serva-variandi õigust demonstreerib järgnev struktuuride süsteem.

**Definitsioon 4.4.1.** Süsteem, mis on moodustatud kõikidest  $|V|$ -*elemendilistest struktuuridest* (st  $|V|$ -*tipulistest graaf-struktuuridest*)  $\{GS\}^{|V|}$  ja nendevahelistest *morfismidest*  $\{F\}$  kusjuures:

- i hulk  $\{GS\}^{|V|}$  on jaotatud ja järjestatud servade arvu  $|E|$  järgi *struktuuritasemeteks*  $GSL$ ,
  - ii kus struktuurid  $GS$  on järjestatud struktuursete mõõtude järgi,
- nimetame *konstruktiivseks rekonstruktsioonide süsteemiks*, tähisatud  $CSR^{|V|}$  kus  $|V|$  on süsteemi aste.

**Näide 4.4.1.** Konstruktiivne rekonstruktsioonide süsteemi [41] võre, tähistatud  $CSR^{/V/}$  kus  $/V/$  on süsteemi aste ehk tippude arv graafides.

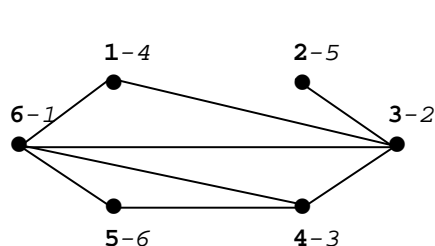


Nagu teada, ja esitatud võres näha on, võivad mitteisomorfsed graafid omada mõnda ühist naaberstruktuuri. Dekomponeerimise ja rekonponeerimise aspektist on iga struktuur  $GS$ , st isomorfismiklass taastatav omaette. Ulami hüpoteesi sõnastus ei kajasta mitte midagi muud, kui seda sama asjaolu. Isomorfismiklasse iseloomustab selles hüpoteesis graafide paarid, samahästi võiks olla selleks graafide kolmikud jne. Struktuurisemiootilisest aspektist ei ole Ulami hüpoteesi sõnastus vastu võetav.

Üks väike kõrvalepõige. 0-sümmeetriliste struktuuride (st kõik orbiidid on üheleleemendilised) võib esineda erijuhtumeid kus erinevad binaarorbiidid  $\mathcal{OR}_{n=a}$  ja  $\mathcal{OR}_{n=b}$  võivad anda ühe ja sama naaberstruktuuri  $GS_n^{adj}$ .

**Näide 4.4.2.** Naaberstruktuuride vaheliste seoste erijuhtum. Graaf-struktuurid  $GS_A$  ( $GS.76(6.8.22)$ ) ja  $GS_B$  ( $GS.100(6.7.22)$ ) (Graaafiatlases G137 ja G113).

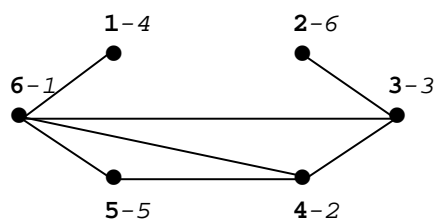
A:-3.5.6; B:-2.4.5; C:-2.3.2; D:+1.2.1; E:+2.3.3; F:+2.4.5.



	1	2	3	4	5	6			k
	6	3	4	1	2	5	i	ABCDEF	*
0	F	F	E	-C	E	6		001022	1
0	E	E	D	-B	3			010121	2
0	-B	-C	E	4				011021	3
0	-C	-C	1					012020	4
0	-A	2						103100	5
0	5							111020	6

$$DEG=1^1 2^2 3^1 4^2$$

A:-3.5.6; B:-3.4.3; C:-2.4.5; D:-2.3.2; E:+1.2.0; F:+2.3.3; G:+2.4.5.



	1	2	3	4	5	6			k
	6	4	3	1	5	2	i	ABCDEFG	*
0	G	F	E	F	-D	6		0001121	1
0	F	-D	F	-D	4			0002021	2
0	-D	-C	E	3				0011120	3
0	-D	-B	1					0103100	4
0	-A	5						1011020	5
0	2							1102100	6

$$DEG=1^2 2^1 3^2 4^1$$

Kommentaariid: Graafide  $G_A$  ja  $G_B$  vahel esinevad järgmised naabrussuhted:

- Olgu  $GS_A$  lähtestruktuur. Siis on  $GS_B$  struktuuri  $GS_A$  naaber alamstruktuur,  $GS_n^{sub}$ ,  $F: GS_A \rightarrow GS_B$ . Tõepoolest,  $G_A|e_{1,3} \cong G_B|e_{5,6} \cong G_B$ . Antud juhul ei ole see suurimate alamgraafide isomorfism seotud  $e_{1,3}$  ja  $e_{5,6}$  kuulumisega ühte ja samasse orbiiti, need on erinevad,  $e_{1,3} \subseteq \mathcal{OR}_{(A)n=9}$  ja  $e_{5,6} \subseteq \mathcal{OR}_{(A)n=11}$  kuid kujutavad endast isomorfseid suurimaid alamgraafe  $G_n^{sub} = G_B$  ehk ühte ja sama naaberstruktuuri  $GS_n^{adj}$ .
- Olgu  $GS_B$  lähtestruktuur. Siis on  $GS_A$  struktuuri  $GS_B$  naaber ülemstruktuur  $GS_n^{sup}$ ,  $F: GS_B \rightarrow GS_A$ . Tõepoolest,  $G_B \cup e_{1,3} \cong G_B \cup e_{2,4} \cong G_A$ . Antud juhul ei ole see väikseimate ülemgraafide isomorfism seotud  $e_{1,3}$  ja  $e_{2,4}$  kuulumisega ühte ja samasse orbiiti, need on erinevad,  $e_{1,3} \subseteq \mathcal{OR}_{(B)n=4}$  ja  $e_{2,4} \subseteq \mathcal{OR}_{(B)n=7}$  kuid kujutavad endast isomorfseid väikseimaid ülemgraafe  $G_n^{sup} = G_A$  ehk ühte ja sama naaberstruktuuri  $GS_n^{adj}$ .

Sellised erijuhtumid ei mõjuta struktuurisemiootilisi põhiseisukohti.

Serrlane Ashay Dharwadker töötab praegu Ulami hüpoteesi korrektse sõna-sõnalise tõestamise kallal ning Blazej Podsiadlo [43] on tõestanud selle hüpoteesi originaalvariandi õigsuse juba varem.



## Järeisõna

Kas lugu struktuuri semiootilistest invariantidest on ikkagi müsteerium? Kuidas kellelegi. Müsteeriumina võib see näida neile, keda võõrastab see, et *struktuur* ei ole mitte midagi muud kui isomorfsete objektide, ja ainult nende, ühine fenomen või omadus. Ka neile, kes on veendunud, et *sümmeetriast* saab rääkida vaid kui peegelduse nähtusest. Müsteerium on see neile, kes teavad väga hästi, et *orbiit* on rühmateooria atribuut ning arvavad, et *semiootiliste invariantidega* sada tuvastada ei saa (või ei tohi!). Neile, kes peavad õigeks käsitleda isomorfismi jt suhteid ainuüksi paariviisiliselt, mitte *klasside ehk „klikkidenä“*. Neile, kes leiavad, et *klikk- ja võõregulaarsust* ei saa tõsiselt võtta. Ka neile, kes peavad *Ulami hüpoteesi* „pühaks lehmaks“, mida peab sõna-sõnalt võtma. Ja nii edasi.

Müstikat on selles loos siiski, kuid mitte semiootiliste invariantidega seotut. Siin esineb hoopis üks *aritmeetika müsteerium*. See puudutab seosmaatriksite korrutamist (vt Multiplikatiivne märgistamine). Ma ei oska maatriksite korrutamist küll mujale paigutada kui aritmeetikasse, sest see taandub ju vaid korrutus- ja liitmistehetele. Räägitakse, et seosmaatriksite korrutise elemendid pidavat iseloomustama pikimaid teid tippude vahel. Kui seda uskuda, siis jääb arusaamatuks, miks korrutuste käigus nende teede pikkused muutuvad, vahest koguni nullideks. Siiani pole keegi seda müsteeriumi lahti harutanud, võib-olla jääbki see tegemata.

Enesekriitiliselt tuleb tõdeda, et see lugu ei vasta ühelegi *standardile*. Sellel pole ka *sihtgruppi*. Paljude matemaatikute ja IT-meeste jaoks on see liiga semantiline. Semiootikud peavad seda aga matemaatikaks, ega leia selles kübetki neile aru saadavat. Teema ise ei ole trendikas, ei aktuaalne ega praktiline.

Siiski, ebapraktiline on see lugu vaid turunduse seisukohalt. Struktuuri ja sümmeetria mõistete lahti harutamine, nende kanooniline esitamine graafi semiootiliste invariantide ja ekvivalentsusklasside baasil avasid tee realselt toimiva süsteemi konstrueerimiseks. Orbiitgraafe iseloomustavate tõdede lugemine võib olla igav, kuid nende avamine märgimaatriksi baasil seda ei ole. Ükskõik kuidas me seda süsteemi nimetame, kuulub see paratamatult graafiteooriasse.

## Kirjanduse loetelu

- [1] **John-Tagore Tevet.** Graafide struktuurisemiootiline käsitus. *S.E.R.R., Tallinn, 2006.*  
[http://ester.nlib.ee:80/record=b2266686~S1\\*est](http://ester.nlib.ee:80/record=b2266686~S1*est) , [www.graphs.ee](http://www.graphs.ee)
- [2] **K. Appel, W. Haken.** The Existence of Unavoidable Sets of Geographically Good Configurations. – *Illinois J. Math.*, 1976, 82, 218-297.
- [3] **Ashay Dharwadker.** The Four Color Problem. <http://dharwadker.org> , 2000.
- [4] **Neil Robertson et al.** Four color problem. <http://www.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html>, 2003.
- [5] **H. Schmidt.** Philosophisches Wörterbuch. *Stuttgart, 1991.*
- [6] Новая философская энциклопедия, *Москва, 2001.*
- [7] The Penguin Dictionary of Philosophy. *London, 1997.*
- [8] The Oxford Companion of Philosophy. *Oxford, 1995.*
- [9] **I. Meos.** Filosoofia põhiprobleemid. *Tallinn, 1998.*
- [10] **Ashay Dharwadker, John-Tagore Tevet.** The Graph Isomorphism Problem. *S.E.R.R., Tallinn, 2009.*  
[http://ester.nlib.ee:80/record=b2465234~S1\\*est](http://ester.nlib.ee:80/record=b2465234~S1*est) ,
- [11] **V. Titov, Титов, В.** О симметрии в графах. *Вопросы кибернетики*, 15, N2, 1975, 76-109.
- [12] List of strongly regular graphs. <http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/remote/srgs>
- [13] Strongly Regular Graphs. <http://mathworld.wolfram.com/StronglyRegularGraph>
- [14] Filosoofia leksikon. *Tallinn, 1987.*
- [15] **A. Cayley.** On the theory of the analytical forms called trees. *Phil. Mag. (4)* 13 (1857), 172-176.
- [16] **S. Toida.** Isomorphism of graphs. – *Proc. 16<sup>th</sup> Midwest Symp. Circuit Theory, Waterloo, 1973, XVI. 5.1-5-7.*
- [17] **R. C. Read, D. G. Corneil.** The graph isomorphism disease. *J. of Graph Theory*, 1 (1977), 339-363.
- [18] **G. Gati.** Further annotated bibliography on the isomorphism disease. – *J. of Graph Theory*, 3 (1979), 95-109.
- [19] **B. Bollobás.** Modern Graph Theory. *Springer, 1998.*
- [20] **C. Hoffman.** Group-Theoretic Algorithms and Graph Isomorphism. *Springer, 1982.*
- [21] **M. Netshepureno jt. М. Нечепуренко и др.** Алгоритмы и программы решение задач для графов и сетей. *Новосибирск, 1990.*
- [22] **G. Kobler, H. Schönig, J. Toran.** The Graph Isomorphism Problem: Its Structural Complexity, 1993.
- [23] **L. Babai.** <http://cs.mu.oz.au/481/Author/BABAI-L>
- [24] **G. Tinhofer, M. Lödecke, S. Baumann, L. Babel.** STABCOL, Graph Isomorphism Testing on the Weisfeiler-Leman Algorithm., 1997 <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary/dol=10.1.1.56.6704>
- [25] **C. V. Raj, M. S. Shivakumar.** [http://www.informatik.uni-trier.de/~ley/indices/a-trees/S/Shivakumar.M=\\_S.html](http://www.informatik.uni-trier.de/~ley/indices/a-trees/S/Shivakumar.M=_S.html) , 2008.
- [26] **N. Christofides.** Graph Theory: An algorithmic approach. *Academic Press, N.Y., London, San Francisco, 1975.*
- [27] **S. Pemmaraju, S. Sciena.** Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica®. *Cambridge University Press, 2003.*
- [28] **E. Reingold, J. Nievergelt, N. Deo.** Combinatorial Algorithms: Theory and Practice, 1977.
- [29] **V. Arvind, P. P. Kurur.** Graph isomorphism is in SPP, 2006,  
<http://www.portal.acm.org/citation.cfm?id=1149036>
- [30] **F. Harary.** Graph Theory. *Addison-Wesley, 1969.*
- [31] **R. Wetzenböck.** Invarianten-Theorie. *Gröningen, 1923.*
- [32] **S. Locke.** [www.math.fau.edu/locke/isotest](http://www.math.fau.edu/locke/isotest).
- [33] **A. Zykov, А. Зыков.** Основы теории графов. «Наука», Москва, 1987.
- [34] **L. Babai.** Canonical labelling of graphs. – *Proc. 15th ACM Symposium on Theory Computing, 1983, 171-183.*
- [35] **L. Babai.** On the isomorphism problem. *Unpublished manuscript, 1977.*
- [36] **B. Weisfeiler.** On Construction and Identification of Graphs. – *Springer Lect. Notes Math.*, 558, 1976.
- [37] **Blazej Podsiadlo.** [http://web.me.com/blazej.podsiadlo/poudis/Graph\\_Isomorphism.html](http://web.me.com/blazej.podsiadlo/poudis/Graph_Isomorphism.html)
- [38] **S. M. Ulam.** A Collection of Mathematical Problems. *Wiley, New York, 1960.*
- [39] **W. T. Tutte.** Graph Theory As I Have Known It. *Clarendon Press, Oxford, 1998.*
- [40] **John-Tagore Tevet.** Põgusat teavet struktuurisemiootikast. *S.E.R.R., Tallinn, 2004.*  
[http://ester.nlib.ee:80/record=b1919807~S1\\*est](http://ester.nlib.ee:80/record=b1919807~S1*est)
- [41] **John-Tagore Tevet.** Systematic Analysis of Graphs. *S.E.R.R., Tallinn, 2007.*  
[http://ester.nlib.ee:80/record=b2297694~S1\\*est](http://ester.nlib.ee:80/record=b2297694~S1*est)
- [42] **R. C. Read, R.J. Wilson.** An Atlas of Graphs. *Oxford, 1998.*
- [43] **Blazej Podsiadlo.** A Proof of Ulam's Conjecture. 2005. <http://www.archivum.info/sci.math/2006-06/msg01818.html>